الاحتمال باستعمال التباديل و التوافيق

المفهوم و الوصف و الرمز			القانون الرياضي المستخدم	أمثلـــــــــة	إيجاد الاحتمـــــــــــــــال باستعمال .....
التباديل (تنظيم مجموعة من العناصر يكون الترتيب فيها مهمّاً) .	عدد تباديل n من العناصر المتمايزة مأخوذة n (كلها) .	$_nP_n$	$_nP_n = n!$	∞ تخطّط وكالة سياحة و سفر لرحلة سياحية يزور المسافرين خلالها 5 مدن في المملكة . بكم طريقة يمكن أن ترتب الوكالة المدن الخمس في خطة الرحلة ؟ الحل : بما أن الترتيب مطلوب ، فإن عدد النواتج الممكنة هو عدد التباديل الممكنة للمدن الخمسة ويساوي : $5! = 120$. إذن هناك 120 طريقة لترتيب المدن الخمس . ∞ دخلت سارة و خمسة من صديقاتها قاعة محاضرات . فبكم طريقة يمكنهن أن يجلسن جميعاً على 6 مقاعد خالية في صف واحد ؟ الحل : بما أن الترتيب مطلوب ، فإن عدد النواتج الممكنة هو عدد التباديل الممكنة لطريقة جلوس سارة و صديقاتها ويساوي : $6! = 720$. إذن هناك 720 طريقة يمكن أن يجلسن بها جميعاً على 6 مقاعد خالية في صف واحد .	إيجاد الاحتمال باستعمال التباديل $_nP_n$: ∞ وزعت بطاقات مرقمة من 1 إلى 50 شخصاً في حفلة ، وكان حسين و زياد من بين الحاضرين . ما احتمال أن يكون حسين قد أخذ البطاقة رقم 14 و زياد البطاقة رقم 23 ؟ الحل : الخطوة 1 : نوجد عدد نواتج فضاء العيِّنة . وهو عدد التباديل الممكنة لأرقام الحاضرين ويساوي $50!$ الخطوة 2 : نوجد عدد النواتج التي يتكون منها الحدث وهو عدد التباديل الممكنة لأرقام الحاضرين المتبقية إذا كان حسين قد أخذ البطاقة رقم 14 و زياد البطاقة رقم 23 ويساوي $(50 - 2)! = 48!$ الخطوة 3 : نحسب الاحتمال P (حسين 14 و زياد 23) = $\frac{\text{عدد النواتج المكونة للحدث}}{\text{عدد النواتج}} = \frac{48!}{50!} = \frac{1}{2450}$

التباديل (تنظيم مجموعة من العناصر يكون الترتيب فيها مهمّاً) .

عدد تباديل **n** من العناصر المتمايزة مأخوذة **r** في كل مرة .

$_nP_r$

$$_nP_r = \frac{n!}{(n-r)!}$$

﴾ تريد أمينة المكتبة أن تعرض على رف **6** مجلات من بين **10** مجلات مختلفة . فبكم طريقة يمكنها ذلك ؟

الحل :

بما أن الترتيب مطلوب ، فإن عدد النواتج الممكنة هو عدد تباديل **10** مجلات أخذ منها **6** في كل مرة ، أي :

$$_{10}P_6 = \frac{10!}{(10-6)!} = \frac{10!}{4!} = 10(9)(8)(7)(6)(5) = 151200$$

إذن هناك **151200** طريقة لعرض **6** مجلات من بين **10** مجلات مختلفة على رف .

﴾ يعمل قاسم في محل لبيع المجوهرات . وقد طلب منه مديره أن يضع ثلاثاً من القلائد الاثنتي عشرة فير خزانة العرض الأمامية . فبكم طريقة يمكن أن يرتب قاسم القلائد في خزانة العرض ؟

الحل :

بما أن الترتيب مطلوب ، فإن عدد النواتج الممكنة هو عدد تباديل **12** قلادة أخذ منها **3** قلائد في كل مرة ، أي :

$$_{12}P_3 = \frac{12!}{(12-3)!} = \frac{12!}{9!} = 12(11)(10) = 1320$$

إذن هناك **1320** يمكن أن يرتب بها قاسم القلائد في خزانة العرض .

إيجاد الاحتمال باستعمال التباديل $_nP_r$:

﴾ تمّ اختيار شخصين عشوائيّاً من مجموعة عشرة أشخاص . ما احتمال اختيار طارق أولاً ثم سليم ثانياً ؟

الحل :

الخطوة **1** : نوجد عدد نواتج فضاء العيِّنة . وهو عدد تباديل **10** أشخاص أخذ منهم اثنان في كل مرة أي $_{10}P_2$

$$_{10}P_2 = \frac{10!}{(10-2)!} = \frac{10!}{8!} = 10(9) = 90$$

الخطوة **2** : عدد نواتج الحدث يساوي **1** ؛ لأن هناك ترتيباً واحداً فقط لاختيار طارق أولاً ثم سليم ثانياً .

الخطوة **3** : نحسب الاحتمال

$$P(\text{طارق أولاً وسليم ثانياً}) = \frac{\text{عدد نواتج الحدث}}{\text{عدد النواتج}} = \frac{1}{90}$$

التباديل (تنظيم مجموعة من العناصر يكون الترتيب فيها مهمًّا) .

عدد التباديل المتمايزة لعناصر عددها n عندما يتكرر منها r_1 من المرات وآخر r_2 من المرات وهكذا .....

التباديل مع التكرار .

$$\frac{n!}{r_1! \cdot r_2! \cdot \ldots \cdot r_k!}$$

إيجاد الاحتمال باستعمال التباديل مع التكرار :

إذا استعملت الأرقام 2 , 6 , 5 , 5 , 4 , 2 , 2 لتكوين رقم هاتف ، فما احتمال أن يكون رقم الهاتف 6545222 ؟

الحل :

الخطوة 1 : هناك 7 أرقام يتكرر منها الرقم 2 ثلاث مرات ، والرقم 5 مرتين . ولذا ؛ فإن عدد التباديل المتمايزة لهذه الأرقام هو :

$$\frac{7!}{3!\,.\,2!} = \frac{7(6)(5)(4)}{2(1)} = 7(6)(5)(2) = 420$$

الخطوة 2 : عدد نواتج الحدث يساوي 1 ؛ لأن هناك ترتيباً واحداً فقط صحيح يعطي رقم الهاتف 6545222

الخطوة 3 : نحسب الاحتمال

$$P(\text{أن يكون رقم الهاتف } 6545222) = \frac{\text{عدد نواتج الحدث}}{\text{عدد النواتج}} = \frac{1}{420}$$

اشترى عدنان أحرفاً ممغنطةً يمكن ترتيبها على باب ثلاجته بحيث تشكل كلمات معينة إذا اختار عشوائيّاً تبديلاً من الأحرف المبينة في الشكل المجاور ، فما احتمال أن تشكل هذه الأحرف كلمة " مكالمات " ؟

الحل :

الخطوة 1 : هناك 7 أحرف يتكرر منها الحرف ا مرتين ، والحرف م مرتين . ولذا ؛ فإن عدد التباديل المتمايزة لهذه الأحرف هو :

$$\frac{7!}{2!\,.\,2!} = \frac{7(6)(5)(4)(3)}{2(1)} = 7(6)(5)(2)(3) = 1260$$

الخطوة 2 : عدد نواتج الحدث يساوي 1 ؛ لأن هناك ترتيباً واحداً فقط صحيح يعطي كلمة " مكالمات "

الخطوة 3 : نحسب الاحتمال

$$P(\text{أن تشكل هذه الأحرف كلمة " مكالمات "}) = \frac{\text{عدد نواتج الحدث}}{\text{عدد النواتج}} = \frac{1}{1260}$$

<table>
<tr>
<td rowspan="2">التباديل (تنظيم مجموعة من العناصر يكون الترتيب فيها مهماً) .</td>
<td rowspan="2">عدد التباديل المختلفة لـ n من العناصر مرتبة على دائرة</td>
<td>التباديل الدائرية (دون نقطة مرجع ثابتة)</td>
<td>$\frac{n!}{n} = (n-1)!$</td>
<td>

إيجاد الاحتمال باستعمال التباديل الدائرية :

عُلقت على حلقة دائرية 5 بطاقات كُتب على كل منها إحدى الكلمات : الوفاء ، الصدق ، الأمانة ، الإيمان ، العلم . فما احتمال أن تكون البطاقات بالترتيب الآتي : الإيمان ، الوفاء ، العلم ، الصدق ، الأمانة ؟

الحل :

الخطوة 1 : بما أنه لا توجد نقطة مرجع ثابتة ، فإن هذا تبديل دائري . لذا يوجد$(5 - 1)!$ أو $4!$ من التباديل المختلفة لهذه الكلمات .

$$(5 - 1)! = 4! = 4(3)(2)(1) = 24$$

الخطوة 2 : عدد نواتج الحدث يساوي 1 ؛ لأن هناك ترتيباً واحداً فقط صحيح يعطي البطاقات بالترتيب : الإيمان ، الوفاء ، العلم ، الصدق ، الأمانة

الخطوة 3 : نحسب الاحتمال

$$P(\text{أن تكون البطاقات بالترتيب المذكور}) = \frac{\text{عدد النواتج الممكنة للحدث}}{\text{عدد النواتج}} = \frac{1}{4!} = \frac{1}{24}$$

</td>
</tr>
<tr>
<td>التباديل الخطية (وجود نقطة مرجع ثابتة)</td>
<td>$_nP_n = n!$</td>
<td>

إيجاد الاحتمال باستعمال التباديل الخطية :

يلتقي 6 أصدقاء من أعمار مختلفة في استراحة سياحية و يجلسون في شكل دائري على 6 مقاعد . فما احتمال أن يجلس أصغرهم سنّاً على المقعد الوحيد الأقرب إلى الباب ؟

الحل :

الخطوة 1 : بما أن الأصدقاء يجلسون بشكل دائري حسب نقطة مرجع ثابتة فإن هذا تبديل خطي . لذا يوجد$6!$ أو 720 طريقة يجلس بها الأصدقاء .

الخطوة 2 : عدد نواتج الحدث يساوي عدد تباديل الأصدقاء الخمسة الآخرين حيث يجلس أصغرهم سنّاً على المقعد الوحيد الأقرب إلى الباب وهذا يساوي $5!$ أو 120 .

الخطوة 3 : نحسب الاحتمال

$$P(\text{أن يجلس أصغرهم سنّاً على المقعد الوحيد الأقرب إلى الباب}) = \frac{\text{عدد النواتج الممكنة للحدث}}{\text{عدد النواتج}} = \frac{5!}{6!} = \frac{120}{720} = \frac{1}{6}$$

</td>
</tr>
</table>

التوافيق (تنظيم مجموعة من العناصر حيث يكون الترتيب فيها غير مهم) .	عدد توافيق **n** من العناصر المتمايزة مأخوذة **r** في كل مرة .	$_nC_r$	$_nC_r = \frac{n!}{(n-r)!\ r!}$ $_nC_n = 1$ $_nC_0 = 1$	تطلب أم إلى أبنائها الخمسة القيام ببعض الأعمال المنزلية كل أسبوع . بكم طريقة يمكن اختيار اثنين منهم لتنظيف ساحة المنزل ؟ الحل : بما أن الترتيب في عملية الاختيار ليس مهمّاً ، فإن عدد النواتج الممكنة هو عدد توافيق **5** أبناء اختير اثنان منهم في كل مرة ، أي : $_5C_2 = \frac{5!}{(5-2)!\ 2!} = \frac{5!}{3!\ .\ 2!} = \frac{120}{6(2)} = \frac{120}{12} = 10$ إذن هناك **10** طرائق ممكنة لاختيار اثنين من الأبناء . تقدّم سعيد لاختبار في التاريخ طلب فيه الإجابة عن **10** أسئلة من بين **12** سؤالاً . بكم طريقة يمكن أن يختار الأسئلة ؟ الحل : بما أن الترتيب في عملية الاختيار ليس مهمّاً ، فإن عدد النواتج الممكنة هو عدد توافيق **12** سؤال اختير **10** أسئلة منها في كل مرة ، أي : $_{12}C_{10} = \frac{12!}{(12-10)!\ 10!} = \frac{12!}{2!\ .\ 10!} = \frac{12(11)}{2} = \frac{132}{2} = 66$ إذن هناك **66** طريقة ممكنة لاختيار **10** أسئلة من بين **12** سؤالاً.	إيجاد الاحتمال باستعمال التوافيق $_nC_r$: وزّع سمير إعلانات تتعلق بخدمة الإنترنت على **20** شخصاً في الحي ، فإذا اتصل به **6** أشخاص يريدون الاشتراك . فما احتمال أن يكونوا : نواف ، أيمن ، حمد ، عبدالملك ، منصور ، عبدالله ، القاطنين في الحي ؟ الحل : الخطوة **1** : نوجد عدد نواتج فضاء العيّنة . وهو عدد توافيق **20** شخص أخذ منهم **6** أشخاص في كل مرة أي $_{20}C_2$ $_{20}C_6 = \frac{20!}{(20-6)!6!} = \frac{20!}{14!\ .\ 6!}$ $= \frac{20(19)(18)(17)(16)(15)\ 14!}{14!\ .\ 6!}$ $= \frac{27907200}{720} = 38760$ الخطوة **2** : عدد نواتج الحدث يساوي **1** ؛ وفي هذه الحالة يساوي $_6C_6 = 1$ ، وهو أن يكون الأشخاص الستة المذكورين ، وترتيب اختيارهم ليس مهمّاً . الخطوة **3** : نحسب الاحتمال P (أن يكون الأشخاص الستة المذكورين) = $\frac{\text{عدد النواتج الممكنة للحدث}}{\text{عدد النواتج}} = \frac{1}{38760}$

الاحتمال باستعمال التباديل و التوافيق

تمارين

📖 يريد أحد المراكز التجارية أن يعرض صورة جوائزه الست التي يوزِّعها على الزبائن على لوحة . بكم طريقة يمكن تنظيم الجوائز في صف واحد ؟

الحل :

بما أن الترتيب مطلوب ، فإن عدد النواتج الممكنة هو عدد التباديل الممكنة للجوائز الست ويساوي : $6! = 720$.

إذن هناك **720** طريقة لتنظيم الجوائز في صف واحد .

📖 أعلنت شركة عن خمس وظائف شاغرة لديها ، فتقدم للإعلان ثمانية أشخاص . بكم طريقة يمكن شغل الوظائف الخمس ؟

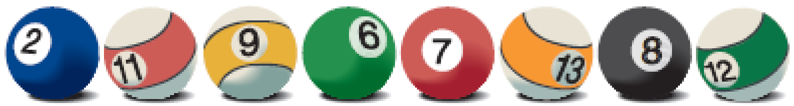
الحل :

بما أن الترتيب في عملية الاختيار ليس مهمّاً ، فإن عدد النواتج الممكنة هو عدد توافيق **8** وظائف اختير **5** وظائف منها في كل مرة ، أي :

$$ {}_8C_5 = \frac{8!}{(8-5)!\ 5!} = \frac{8!}{3!\ .\ 5!} = \frac{8(7)(6)}{3!} = \frac{336}{6} = 56 $$

إذن هناك **56** طريقة ممكنة لشغل الوظائف الخمس .

📖 استعملي الشكل الآتي ، مفترضة أن الكرات رُتبت عشوائيّاً :



ما احتمال أن تكون الكرة **2** و الكرة **11** هما الأولى و الثانية من اليسار ؟

الحل :

الخطوة **1** : نوجد عدد نواتج فضاء العيِّنة . وهو عدد التباديل الممكنة لأرقام الكرات ويساوي **!8**

الخطوة **2** : نوجد عدد النواتج التي يتكون منها الحدث وهو عدد التباديل الممكنة لأرقام الكرات المتبقية إذا كانت الكرة **2** و الكرة **11** هما الأولى و الثانية من اليسار ويساوي $6! = (8-2)!$

الخطوة **3** : نحسب الاحتمال

$$P(\text{الكرة 2 و الكرة 11 هما الأولى و الثانية من اليسار}) = \frac{\text{عدد النواتج الممكنة للحدث}}{\text{عدد النواتج}} = \frac{6!}{8!} = \frac{6!}{8\,(7)\,.\,6!} = \frac{1}{56}$$

🙠 إذا خلطت الكرات الثماني عشوائيّاً . فما احتمال أن يكون الترتيب كما هو مبيّن في الشكل أعلاه ؟

الحل :

الخطوة 1 : نوجد عدد نواتج فضاء العيِّنة . وهو عدد التباديل الممكنة لأرقام الكرات ويساوي !8

الخطوة 2 : عدد نواتج الحدث يساوي 1 ؛ لأن هناك ترتيباً واحداً فقط يعطي الشكل أعلاه .

الخطوة 3 : نحسب الاحتمال :

$$P(\text{أن يكون الترتيب كما هو مبيّن في الشكل أعلاه}) = \frac{\text{عدد النواتج الممكنة للحدث}}{\text{عدد النواتج}} = \frac{1}{8!} = \frac{1}{40320}$$

📖 تستعمل الأرقام 9 , ... , 3 , 2 دون تكرار الرقم الواحد أكثر من مرة ؛ لتكوين أعداد مختلفة مكونة من 5 أرقام ، إذا اختير عدد بشكل عشوائيّاً . ما احتمال أن يكون العدد هو 75829 ؟

الحل :

الخطوة 1 : نوجد عدد نواتج فضاء العيِّنة . وهو عدد تباديل 8 أرقام أخذ منهم 5 في كل مرة أي $_8P_5$: $\quad 6720 = 8(7)(6)(5)(4) = \frac{8!}{3!} = \frac{8!}{(8-5)!} = {}_8P_5$

الخطوة 2 : عدد نواتج الحدث يساوي 1 ؛ لأن هناك ترتيباً واحداً فقط يعطي العدد 75829

الخطوة 3 : نحسب الاحتمال :

$$P(\text{أن يكون العدد هو } 75829) = \frac{\text{عدد النواتج الممكنة للحدث}}{\text{عدد النواتج}} = \frac{1}{6720}$$

📖 ما احتمال أن يكون الرمز البريدي 39372375 إذا تم تكوينه عشوائيّاً من الأرقام 3 , 2 , 7 , 5 , 9 , 3 , 7 , 3 ؟

الحل :

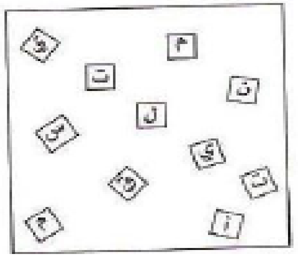
الخطوة 1 : هناك 8 أرقام يتكرر منها الرقم 3 ثلاث مرات ، والرقم 7 مرتين . ولذا ؛ فإن عدد التباديل المتمايزة لهذه الأرقام هو :

$$\frac{8!}{3!\ .\ 2!} = \frac{8(7)(6)(5)(4)}{2(1)} = 8(7)(6)(5)(2) = 3360$$

الخطوة **2** : عدد نواتج الحدث يساوي **1** ؛ لأن هناك ترتيباً واحداً فقط صحيح يعطي الرمز البريدي **39372375**

الخطوة **3** : نحسب الاحتمال $\frac{1}{3360}$ = $\frac{\text{عددالمولكنجة الحدث}}{\text{عدد النواتج}}$ = **P (39372375 أن يكون الرمز البريدي)**

📖 اشترت ميساء بعض أحرف الزينة لتزيين كتابها (م ، ن ، ت ، ا ، ي ، ل ، ق ، ت ، ي ، س ، م) بحيث تضع هذه الحروف بجوار بعضها لتشكيل كلمات . فإذا اختارت تبديلاً من الأحرف المبينة في الشكل المجاور ، فما احتمال أن تشكّل هذه الأحرف كلمة " المستقيمتين " ؟



الحل :

الخطوة **1** : هناك **11** حرف يتكرر منها الحرف ت مرتين ، والحرف ي مرتين ، والحرف م مرتين . ولذا ؛ فإن عدد التباديل المتمايزة لهذه الأحرف هو :

$$\frac{11!}{2!\ .\ 2!\ .\ 2!} = \frac{39916800}{8} = 4989600$$

الخطوة **2** : عدد نواتج الحدث يساوي **1** ؛ لأن هناك ترتيباً واحداً فقط صحيح يعطي كلمة " المستقيمتين "

الخطوة **3** : نحسب الاحتمال

$\frac{1}{4989600}$ = $\frac{\text{عددالمولكنجة الحدث}}{\text{عدد النواتج}}$ = **P (" المستقيمتين " أن تشكل هذه الأحرف كلمة)**

📖 يحتوي كيس على بطاقات كُتب على كل واحدة منها حرف واحد من الحروف : ر ، ف ، س ، ة ، و ، ي . إذا اختير تبديل واحد من هذهِ الحروف عشوائيّاً لتكوين كلمة ، فما احتمال أن تكون الكلمة " فروسية " ؟

الحل :

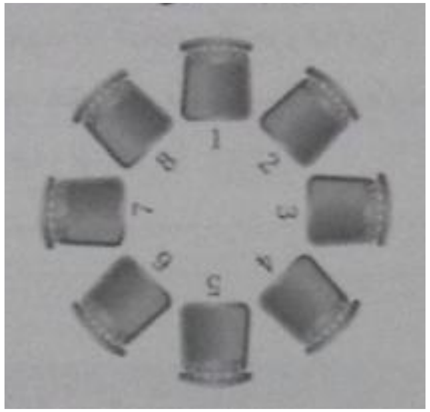
الخطوة **1** : هناك **6** أحرف بدون تكرار . ولذا ؛ فإن عدد التباديل المتمايزة لهذه الأحرف هو : **6! = 720**

الخطوة **2** : عدد نواتج الحدث يساوي **1** ؛ لأن هناك ترتيباً واحداً فقط صحيح يعطي كلمة " فروسية "

الخطوة **3** : نحسب الاحتمال

P (" أن تشكل هذه الأحرف كلمة " فروسية) = $\frac{\text{عدد نواتج الحدث}}{\text{عدد النواتج}} = \frac{1}{720}$

📖 إذا جلس **8** طلاب عشوائيّاً على مقاعد موضوعة بشكل دائري كما في الشكل أدناه . فما احتمال أن يجلس الطلاب حسب الترتيب المبين ؟



الحل :

الخطوة **1** : بما أنه لا توجد نقطة مرجع ثابتة ، فإن هذا تبديل دائري . لذا يوجد **(8 – 1)!** أو **7!** من التباديل المختلفة التي يمكن أن يجلس بها الطلاب الثمانية .

$$(8 - 1)! = 7! = 7(6)(5)(4)(3)(2)(1) = 5040$$

الخطوة **2** : عدد نواتج الحدث يساوي **1** ؛ لأن هناك ترتيباً واحداً فقط صحيح يعطي الترتيب المبين

الخطوة **3** : نحسب الاحتمال

P (أن يجلس الطلاب حسب الترتيب المبين) = $\frac{\text{عدد نواتج الحدث}}{\text{عدد النواتج}} = \frac{1}{7!} = \frac{1}{5040}$

📖 يرتب سامي المقاعد على صورة دوائر للعمل في مجموعات متعاونة . إذا كان في دائرة سامي **7** مقاعد ، فما احتمال أن يكون مقعد سامي الأقرب إلى الباب ؟

الحل :

الخطوة **1** : بما أن المقاعد تُرتب بشكل دائري حسب نقطة مرجع ثابتة فإن هذا تبديل خطي . لذا يوجد **7!** أو **5040** طريقة يمكن أن يرتب بها سامي المقاعد .

الخطوة **2** : عدد نواتج الحدث يساوي عدد تباديل مقاعد الأشخاص الستة الآخرين حيث يكون مقعد سامي الأقرب إلى الباب وهذا يساوي **6!** أو **720** .

الخطوة **3** : نحسب الاحتمال

P (أن يكون مقعد سامي الأقرب إلى الباب) = $\frac{\text{عدد نواتج الحدث}}{\text{عدد النواتج}} = \frac{6!}{7!} = \frac{720}{5040} = \frac{1}{7}$

📖 للترويج لشركته ، يفكر مندوب مبيعات في زيارة **10** مجمعات تجارية تقع خمسة منها في الرياض ، وثلاثة في الخرج ، واثنان في المجمعة .فإذا اختار المندوب **3** مجمعات فما احتمال أن تكون في الرياض ؟

الحل :

الخطوة **1** : نوجد عدد نواتج فضاء العيِّنة . وهو عدد توافيق **10** مجمعات أخذ منهم **3** مجمعات في كل مرة أي $_{10}C_3$

$${}_{10}C_3 = \frac{10!}{(10-3)!3!} = \frac{10!}{7!\ .\ 3!} = \frac{10(9)(8)\ .\ 7!}{7!\ .\ 3!} = \frac{720}{6} = 120$$

الخطوة 2 : عدد نواتج الحدث في هذه الحالة يساوي $10 = \frac{20}{2} = \frac{5(4)\ 3!}{2!\ .\ 3!} = \frac{5!}{2!\ .\ 3!} = \frac{5!}{(5-3)!3!} = {}_5C_3$ ، وهو أن تكون المجمعات الثلاثة في الرياض ، وترتيب اختيارها ليس مهمّاً .

الخطوة 3 : نحسب الاحتمال

P (أن تكون المجمعات الثلاثة في الرياض) $= \frac{\text{عدد نواتج الحدث}}{\text{عدد النواتج}} = \frac{10}{120} = \frac{1}{12}$