طبقا للمنهج المطور

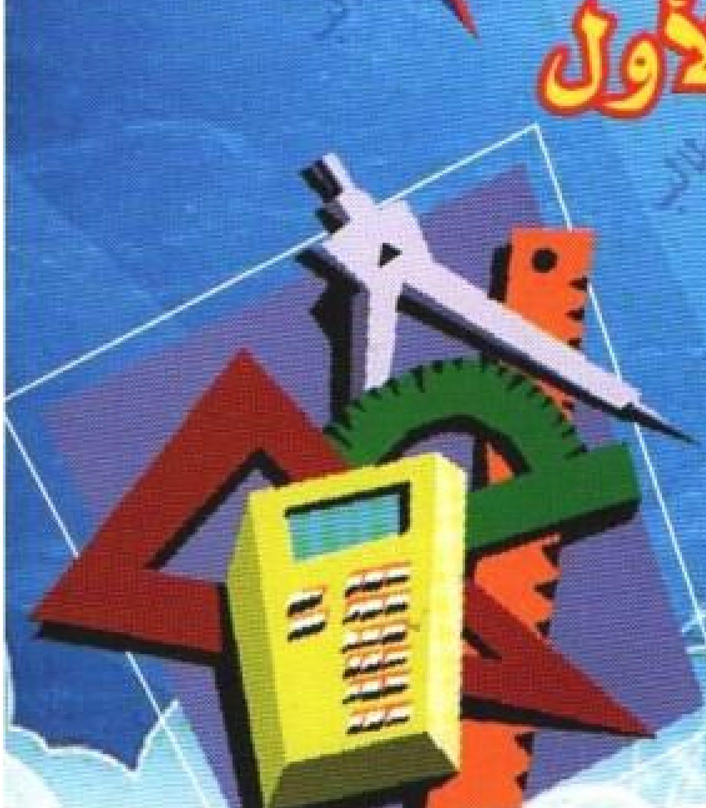
٢

الشامل في تبسيط الرياضيات

للصف الثاني الثانوي

الفصل الدراسي الأول

بنين و بنات



تأليف

أمجد نعيم

الفهرس

الفصل الأول

الدوال والمتباينات

- خصائص الأعداد الحقيقية
- العلاقات والدوال
- دوال خاصة
- تمثيل المتباينات الخطية ومتباينات القيمة المطلقة بيانيا
- حل أنظمة المتباينات الخطية بيانيا
- البرمجة الخطية والحل الأمثل

حلول اختبار سريع

جد الناتج فيما يأتي:

١-	$15.7+(-3.45)$ $= \mathbf{12.25}$	٢-	$-18.54-(-32.05)$ $= \mathbf{13.51}$
٣-	$-9.8-6.75$ $= \mathbf{-16.55}$	٤-	$4\div(-0.5)$ $= \mathbf{-8}$
٥-	$3\frac{2}{3}+\left(-1\frac{4}{5}\right)$ $= 1\left(\frac{13}{15}\right)$	٦-	$\frac{54}{7}-\frac{26}{6}$ $= 3\frac{8}{21}$
٧-	$\left(\frac{6}{5}\right)\left(-\frac{10}{9}\right)$ $= -1\left(\frac{1}{3}\right)$	٨-	$-3\div\left(\frac{7}{8}\right)$ $= -3\left(\frac{3}{7}\right)$

٩ -تحتاج فاطمة إلى $\frac{7}{8}\,m$ من القماش لصنع ربطة شعر ، فكم مترا من القماش يلزمها لصنع ١٢ ربطة؟

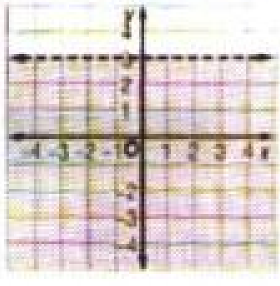
تحتاج فاطمة إلى : $12 \times \frac{7}{8}$ = ١٠,٥ مترا

أوجد قيمة كل عبارة فيما يأتي إذا كانت $a=-3, b=4, c=-2$:

١٠	$4a-3=\mathbf{-15}$	١١	$2b-5c=\mathbf{18}$
١٢	$b^2-3b+6=\mathbf{10}$	١٣	$\frac{2a+4b}{c}=-5$

١٤ -تستعمل شركة اتصالات العبارة ٢٠+ $0.25\,m$ لإيجاد التكلفة بالريال لـ m من دقائق الاتصال.أوجد تكلفة ٨٠ دقيقة اتصال؟

تكلفة ٨٠ دقيقة اتصال هي : $20+0.25(80) = 40$ ريال



مثل كل متباينة مما يأتي بيانيا :

١٥ - $y<3$

الحد هو المستقيم $y=3$ وبما أن رمز المتباينة هو > فإن الحد سيكون متقطع.

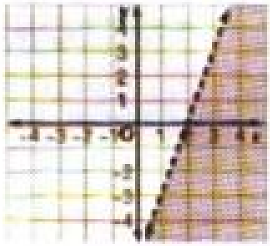
نختار النقطة(٠،٠) : ٠>٣ (صحيح) ⇐ نظلل المنطقة التي تحتوي النقطة (٠،٠)

17) $3x-y>6$

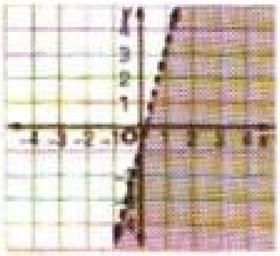
الحد هو المستقيم $3x-y=6$ وبما أن رمز المتباينة هو < فإن الحد سيكون متقطع.

نختار النقطة(٠،٠) :

$0>6$ (خطأ) ⇐ نظلل المنطقة التي لا تحتوي النقطة (٠،٠)



19) $y>4x-1$



الحد هو المستقيم $y=4x-1$ وبما أن رمز المتباينة هو > فإن الحد سيكون متقطع.

نختار النقطة (٠،٠) :

$0>-1$ (صحيح) ⇐ نظلل المنطقة التي تحتوي النقطة (٠،٠)

1-1 خصائص الأعداد الحقيقية

عزيزي الطالب

لنتذكر سويا مجموعات الأعداد المختلفة التي درسناها سابقا.

مجموعة الأعداد النسبية (Q): هي التي تكتب على الصورة $\frac{a}{b}$، حيث b لا تساوي الصفر.

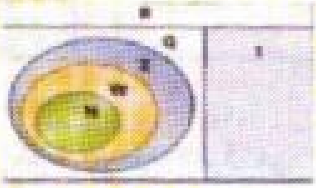
مجموعة الأعداد الغير نسبية (I): هي التي الصورة العشرية لها ليست منتهية وليست دورية.

مجموعة الأعداد الصحيحة (Z):

هي $\{\dots ,-3,-2,-1,0,1,2,3 \dots\}$

مجموعة الأعداد الكلية (W): هي $\{0,1,2,3 \dots\}$

مجموعةالأعداد الطبيعية (N): هي $\{1,2,3 \dots\}$



انتبه جميع المجموعات هي مجموعة جزئية من مجموعة الأعداد الحقيقية (R)

مثال

حدد مجموعات الأعداد التي ينتمي إليها كل عدد مما يأتي :

١. $\{Z,Q,R\} \ni -185$

٢. $\{Z,Q,R\} \ni -\sqrt{49}$

٣. $\{I,R\} \ni \sqrt{95}$

٤. $\{Q,R\} \ni \frac{-7}{8}$

للمعرفة يمكن أن ينتمي العدد إلى أكثر من مجموعة أعداد فمثلا العدد ٢ هو عدد طبيعي،كلي،صحيح،نسبي وحقيقي.

خصائص الأعداد الحقيقية:

خصائص عملية الجمع على الأعداد الحقيقية:-

أولاً الخاصية التبديلية لعملية الجمع على ح:-

إذا كان س ، ص تنتمي إلى ح فإن س + ص = ص + س

مثال :- ١٥+٣ = ٣+١٥ ، -٥+٢ = ٢+ -٥

ثانياً خاصية العنصر المحايد لعملية الجمع على ح :-

لكل س تنتمي إلى ح فإن س + ٠ = ٠+ س = س

- أي أن الصفر هو العنصر المحايد لعملية الجمع على ح.

مثال :-

٥+٠ = ٠+٥ = ٥

١٥+٠=٠+١٥ = ١٥

ثالثاً الخاصية التجميعية لعملية الجمع على ح :-

إذا كانت س ، ص ، ع تنتمي إلى ح فإن (س + ص) + ع = س + (ص + ع)

مثال :-

(١٥ + ٤) + ١٠ = ١٥ + (٤ + ١٠) = ٢٩

(-١ + ٥) + ٢ = -١ + (٥ + ٢) = ٦

رابعاً خاصية النظير الجمعي للعدد الحقيقي :-

لكل عدد حقيقي س نظير (معكوس) جمعي (و) هو العدد الحقيقي –س ، حيث أن :-

س + (–س) = –س + س = ٠

مثال :-

٥ + ٥ = ٠

– ٣٠ + ٣٠ = ٠

خصائص عملية الضرب على الأعداد الحقيقية:-

أولاً الخاصية التبديلية لعملية الضرب على ح :-

اذا كان س ، ص تنتمي إلى ح فإن س * ص = ص * س

مثال :-

٥ * ١٠ = ١٠ * ٥ = ٥٠

٣ * ٤ = ٤ * ٣ = ١٢

ثانياً الخاصية التجميعية لعملية الضرب على ح :-

إذا كان س ، ص ، ع تنتمي إلى ح فإن (س • ص) • ع = س • (ص • ع)

مثال :-

(٥ • ١) • ٢ = ٥ • (١ • ٢) = ١٠

(٦ • ٣) • ٤ = ٦ • (٣ • ٤) = ٧٢

ثالثاً خاصية العنصر المحايد لعملية الضرب على ح :-

لكل س تنتمي إلى ح فإن س • ١ = ١• س = س

أي أن الواحد هو العنصر المحايد لعملية الضرب على ح .

مثال :-

١ • ٧ = ٧ • ١ = ٧

١ • ٨ = ٨ • ١ = ٨

رابعاً خاصية النظير الضربي للعدد الحقيقي (مقلوب العدد الحقيقي) :-

لكل س تنتمي إلى ح ، س لا تساوي ٠ ، يوجد عدد حقيقي يرمز له بالرمز ١/س يسمى النظير الضربي (المقلوب) للعدد س و يحقق العلاقة س • ١/س = ١/س • س = ١

مثال :-

١ • ١/٥ = ١/٥ • ١ = ١

٢• ١/١٠ = ١/١٠ • ٢ = ٢

خامساً خاصية توزيع الضرب على الجمع :-

لكل س ، ص ، ع تنتمي إلى ح ، فإن س (ص + ع) = س • ص + س • ع

و كذلك (ص + ع) س = ص • س + ع • س

مثال :-

أوجد ٥ • (٢ + ٣) ؟

الحل :- ٥ • (٢ + ٣) = ٥ • ٢ + ٥ • ٣

= ١٠ + ١٥

= ٢٥

مثـــال

ما الخاصية الموضحة في العبارة: $2(X+3)=2X+6$

الحل : خاصية توزيع الضرب على الجمع.

انتبه إشارة النظير الجمعي لعدد هي عكس إشارة ذلك العدد أما إشارة النظير الضربي لعدد فهي نفسها إشارة العدد.

مثال

أوجد النظير الضربي والجمعي للأعداد التالية :

- ١,٢٥ ⟸ النظير الجمعي١,٢٥ – بينما النظير الضربي ٠,٨
- ٢,٥ ⟸ النظير الجمعي ٢,٥- بينما النظير الضربي ٠,٤

مثال

بسط العبارة التالية :$3(4X-2Y)-2(3X+Y)$

الحل : $=12X-6Y-6X-2Y$

$=6X-8Y$

تدريبات وحلول

حدد مجموعات الأعداد التي ينتمي إليها كل عدد مما يأتي:

١) ٦٢ $\ni \{Z,Q,R,N,W\}$ ٣) $\{I,R\} \ni \sqrt{11}$

اذكر الخاصية الموضحة في كل مما يلي:

٥) الخاصية التجميعية لعملية الضرب

٦) خاصية توزيع الضرب على الجمع

٧) الخاصية التبديلية لعملية الجمع

أوجد النظير الجمعي والضربي لكل عدد مما يلي :

١٠) $\frac{4}{9}$ النظير الجمعي $\frac{-4}{9}$ بينما النظير الضربي $\frac{9}{4}$

١١) $\sqrt{5}$ النظير الجمعي $\sqrt{5}$ – بينما النظير الضربي $\frac{1}{\sqrt{5}}$

١٣) *a*) 44(2+4+3+1+5+6)

b) 44(2)+44(4)+44(3)+44(1)+44(5)+44(6)

=88+176+132+44+220+264 =924ريال

C) إذا استمر في خياطة العدد نفسه من الأثواب فإنه سيحصل على المبلغ الذي يريده في نهاية يوم الاثنين من الأسبوع التالي.

بسط كل عبارة مما يأتي:

14) $5(3x+6y)+4(2x-9y)$

$=15x+30y+8x-36y$

$=23x-6y$

16) $-4(6c-3d)-5(-2c-4d)$

$=-24c+12d+10c+20d$

$=-14c+32d$

حدد مجموعات الأعداد التي ينتمي إليها كل عدد مما يأتي:

١٩) - ٨,١٣ $\ni \{Q,R\}$ 21) $\{Q,R\} \ni 0.61$

٢٣) $-\sqrt{144} \ni \{Z,Q,R\}$ ٢٥) $\{I,R\} \ni \sqrt{17}$

اذكر الخاصية الموضحة في كل مما يلي:

٢٦) خاصية النظير الجمعي.

٢٨) خاصية العملية التجميعية في عملية الجمع.

أوجد النظير الجمعي والضربي لكل عدد مما يلي :

٣٠) -8 النظير الجمعي 8 بينما النظير الضربي $-\frac{1}{8}$

٣٢) 0.25 – النظير الجمعي 0.25 بينما النظير الضربي -4

٣٤) $\frac{3}{8}$ - النظير الجمعي $\frac{3}{8}$ بينما النظير الضربي $\frac{8}{3}$

٣٦) قيمة الانخفاض هي :

$= 0.15(50+60+40) = 22.5$

بسط كل عبارة مما يأتي:

38) $-2a - 9d - 5a - 6d$

$= -7a + 3d$

40) $6(9a-3b)-8(2a+4b)$

$= 54a-18b-16a-32b$

$= 38a-50b$

42) $-5(10x+8z)-6(4x-7z)$

$= -50x-40z-24x+42z$

$= -74x+2z$

43) يمكن كتابة العبارتين كالتالي :

* $53(60+60)$ ....(1)
* $53(60)+53(60)$ ....(2)

مساحة الملعب = $6360\ yd^2$.

44a) سعر الأجهزة الإجمالي قبل الخصم $170+350+110=630$

- $630-(170+350+110)(0.30)$
- $630-[170(0.30)+350(0.30)+110(0.30)]$

44b) المبلغ الذي سيدفعه أحمد بحل أيا من المعادلتين السابقتين هو ٤٤١ ريالا

بسط كل عبارة مما يأتي:

45) $\frac{1}{2}(5x+8y)+\frac{1}{4}(6x-2y)$

$= \frac{19}{6}x+\frac{13}{6}y$

47) $-6(3a+5b)-3(6a-8c)$

$= -36a-30b+24c$

٤٩a) يحتاج محمد إلى : $2(3\frac{3}{4}) + 3(2\frac{1}{3}) = 14\frac{1}{2}$

٥٥) خاصية الانغلاق للضرب لاتنطبق على الأعداد الغير نسبية مثل :

$\sqrt{6} \times \sqrt{6} = \sqrt{36} = ٦$

والعدد ٦ عدد نسبي.

٥٧) الحد العاشر في المتتابعة هو (b)

٦٠) $(x+2)(x-3)$

$= x^2 - 3x + 2x - 6$

$= x^2 - x - 6$

٦٢) $\frac{1}{6}b + 1$

$= \frac{1}{6} \times \frac{2}{3} + 1$

1-2 العلاقات والدوال

عزيزي الطالب

لنتذكر سويا أن الدالة هي علاقة يرتبط فيها كل عنصر في المجال بعنصر واحد فقط في المدى .

مفهوم/ الدالة المتباينة : كل عنصر في المجال يرتبط بعنصر واحد فقط في المدى أي أنه لا يرتبط أكثر من عنصر في المجال بالعنصر نفسه في المدى.

مثـــال

تحقق من فهمك صـ١٧ـــ

(A) المجال = $\{-3,-2,-1,0,1,3,4\}$

المدى = $\{-3,-2,1,2,4\}$ وهي ليست دالة.

(B) المجال = $\{-3,-2,-1,0,1\}$

المدى = $\{0,2,4,6\}$ وهذه العلاقة دالة وليست متباينة.

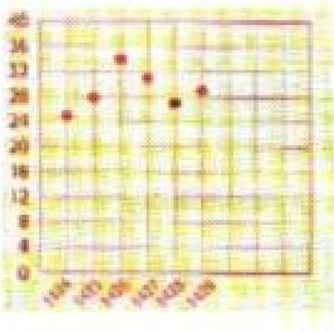
أنواع العلاقات:

١) **علاقة منفصلة :** وهي التي يكون فيها المجال مجموعة من النقاط المنفردة وتمثل بيانيا بنقاط غير متصلة.

٢) **علاقة متصلة :** وهي التي يكون فيها المجال مجموعة من العناصر الغير منتهية وتمثل بيانيا بمستقيم أو منحنى متصل.

مثـــال

تحقق من فهمك صـ ١٨ ـــ (٢) :



ماهو المتغير:

المتغير إما تابع أو مستقل أما المستقل فهو في الغالب ما يكون (X) وأما التابع في الغالب ما يكون (Y) وقيمته تعتمد على قيمة (X) .

مثـــال

لتكن $g(x)\ 0.5x^2\ -5x+$ ٣,٥ :

١ - $g(2.8)$

$.g(2.8)=0.5(2.8^2)-5(2.8)+3.5$

$=-6.58$

٢ - $g(4a)$

$.G(4a)=0.5(4a^2)-5(4a)+3.5$

$8a^2\ -20a+3.5$

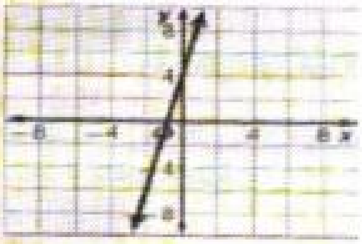
تدريبات وحلول

حدد كلاً من مجال ومدى كل علاقة فيما يأتي ثم حدد إذا كانت دالة أم لا وإذا كانت كذلك فهل هي متباينة أم لا ؟

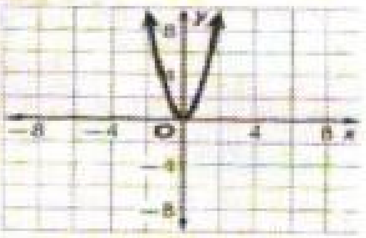
١) المجال = $\{5,6,-2\}$
المدى = $\{3,1,-8\}$
وهذه العلاقة دالة وهي دالة متباينة .

١) المجال = $\{-2,1,4,8\}$
المدى = $\{-4,-2,6\}$
وهذه العلاقة دالة وهي ليست متباينة

4a) المجال = $\{22,23,24,25\}$
المدى = $\{16.2,24.1,27.2,23.5\}$
4b) $\{(22,16.2)(23,24.1)(24,27.2)(25,23.5)\}$
4c) علاقة منفصلة.
4d) نعم العلاقة دالة.



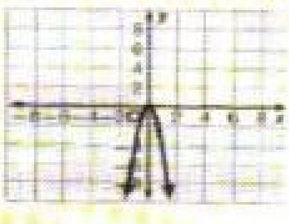
٥) المجال : جميع الأعداد الحقيقة
المدى : جميع الأعداد الحقيقة.
الدالة متباينة ومتصلة



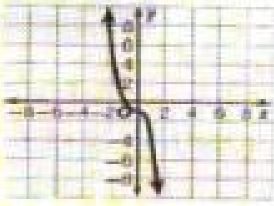
٧) المجال : جميع الأعداد الحقيقة
المدى : $\{y: y \geq 0\}$.
الدالة ليست متباينة ومتصلة

١١) المجال = $\{-0.3,0.4,1.2\}$
المدى = $\{-6,-3,-1\}$
وهذه العلاقة دالة وهي دالة متباينة .

١٥)



المجال : جميع الأعداد الحقيقة
المدى : $\{y: y \leq 0\}$.جميع الأعداد الحقيقة.
الدالة ليست متباينة ومتصلة.



١٧)

المجال : جميع الأعداد الحقيقة
المدى : جميع الأعداد الحقيقة.
الدالة متباينة ومتصلة.

١٩) أوجد قيمة $f(2.5)$ إذا كانت $f(x) = 16x^2$
$=-4(-3)-8$
$=$ ١٠٠

إذا كانت $f(x)=3x+2$,$g(x)=-2x^2$ $g(x)=-4x^2-2x+5$ فأوجد كل مما يلي :

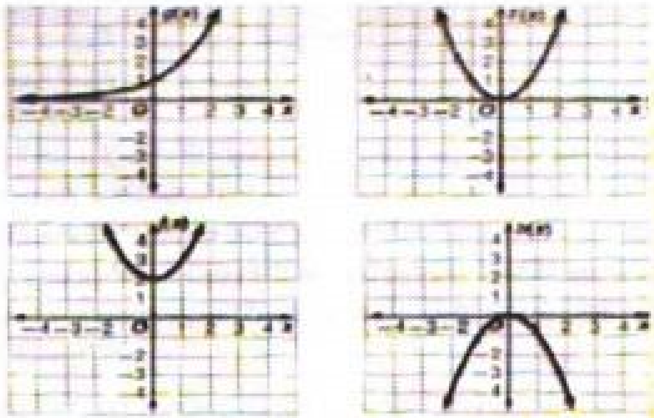
٢١) $g(-6)$

$$g(-6)=-2(-6^2)$$
$$=-2(36)$$
$$=-72$$

25) $g(\frac{3}{2})$

$$g(\frac{3}{2})=-2(\frac{3}{2}^2)$$
$$=\frac{9}{2}$$

(27a



(27b-d)

نوع الدالة	عدد المرات الممكنة	الدالة
ليست متباينة	0,1,2	$F(x)=x^2$
متباينة	0,1	$G(x)=2^x$
ليست متباينة	0,1,2	$H(x)=-x^2$
ليست متباينة	0,1,2	$J(x)=x^2+2$

٢٩) أحمد إجابته صحيحة لأن خالد لم يقم بتربيع العدد ٣ قبل الضرب في -٤

٣١) ممكن أن تكون $f(x)=4x-1$

$g(x)=6x+3$

٣٢) لا يمكن أن تكون صحيحة.

٣٤) الخيار الصحيح هو $(A)g=19500-6m$

٤٠) $8d-4+3d=2d-100-7d$

$$=8d+3d-2d+7d=+4-100$$
$$16d=-96$$
$$d=-6$$

1-3 دوال خاصة

الدالة المتعدد التعريف:

هي الدالة التي تكتب باستعمال عبارتين أو أكثر.

كيف نمثلها بيانيا؟

نضع دائرة صغيرة مظللة عند الطرف لتشير إلى أن النقطة تنتمي إلى التمثيل البياني ونضع دائرة غير مظللة لتشير إلى أن النقطة لا تنتمي إلى التمثيل البياني.

مثال مثل بيانيا الدالة $f(x)=\begin{cases} x+2, x<0 \\ x, x\geq 0 \end{cases}$ ثم حدد كلا من مجالها ومداها؟

خطوات الحل:

١) نمثل $f(x)=x+2$ بيانيا عندما $x<0$

٢) نحسب قيمة المقدار $x+2$ عندما $x=0$

$f(0)=0+2=2$

وبما أن العدد ٠ لايحقق المتباينة فإننا نبدأ بدائرة غير مظللة عند النقطة $(0,2)$

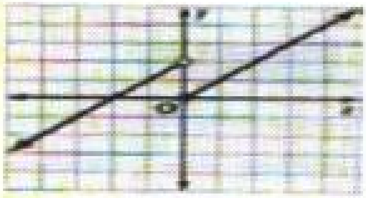
٣) نمثل $f(x)=x$ بيانيا عندما $x\geq 0$

٤) نحسب قيمة المقدار x عندما $x=0$

$f(0)=0$ وبما أن العدد٠ يحقق المتباينة فإننا نبدأ بدائرة مظللة عند النقطة $(0,0)$

٥) الدالة معرفة عند جميع قيم x فالمجال هو مجموعة الأعداد الحقيقية والمدى مجموعة الأعداد الحقيقية.

٦) الرسم :



الدالة الدرجية

هي نوع من أنواع الدالة المتعددة التعريف الخطية وهي تتكون من قطع مستقيمة أفقية ومن أمثلتها دالة أكبر عدد صحيح.

لاحظ

تكتب دالة أكبر عدد صحيح على الصورة:

$f(x)=[x]$ وتعني أكبر عدد صحيح أقل من أو يساوي x.

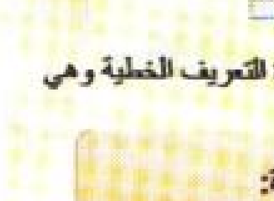
•مجال هذه الدالة هو مجموعة الأعداد الحقيقية ومداها كذلك.

دالة القيمة المطلقة

هي الدالة التي تحتوي على عبارة جبرية يستعمل فيها رمز القيمة المطلقة

دالة القيمة المطلقة الأساسية **الدالة الرئيسة (الأم)** $f(x) = |x|$ **وتعرف على النحو الآتي:**

$$f(x) = \begin{cases} x, x>0 \\ 0, x=0 \\ -x, x<0 \end{cases}$$



شكل التمثيل البياني على شكل حرف v

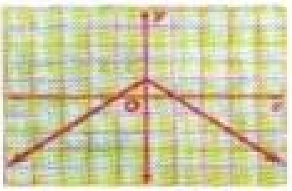
المجال	مجموعة الأعداد الحقيقية
المدى	مجموعة العداد الحقيقية غير السالبة
المقطعان	$x=0, f(x)=0$
ولا يمكن أن تكون	$f(x)<0$

مثال مثل الدالة $f(x) = -|x| + 1$ ثم حدد كل من مجالها ومداها؟

x	$-\|x\|+1$
-2	-1
0	1
1	0
2	-1

* تكون جدولا للقيم

الرسم :



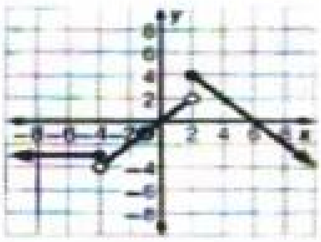
- المجال هو مجموعة الأعداد الحقيقية.
- المدى $f(x);f(x) \le 1$

تدريبات وحلول

مثل كل دالة مما يأتي بيانيا ثم حدد كلا من مجالها ومداها:

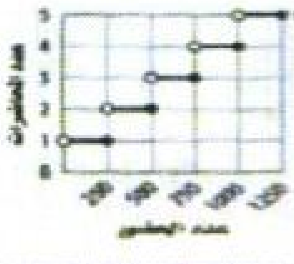
١ - $F(x) = \begin{cases} -3, x \le -4 \\ x, -4 < x < 2 \\ -x + 6, x \ge 2 \end{cases}$

الرسم:



- المجال هو مجموعة الأعداد الحقيقية
- المدى $y(x)\ ,\ y \le 4$

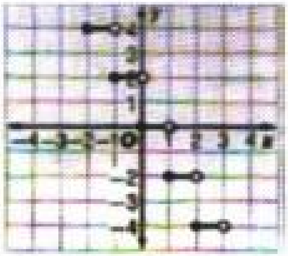
٢) $F(x) = \begin{cases} x + 4, x < -2 \\ -3\ , -2 \le x \le 3 \\ -2x + 12, x > 3 \end{cases}$



٥- يريد احد الأطباء إلقاء محاضرة حول العدوى في قاعة تتسع لـ ٢٥٠ شخصا فقط وكان عدد راغبين حضور المحاضرة أكثر من ذلك بكثير.مثل بيانيا دالة متعددة التعريف تبين العلاقة بين العدد الأدنى من المحاضرات y التي يجب أن يلقيها الطبيب وعدد حضور تلك المحاضرات x .

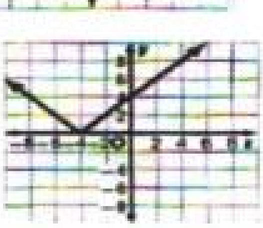
مثل كل دالة فما يأتي بيانيا ثم حدد كلا من مجالها ومداها؟

٦) $g(x) = -2[\![x]\!]$



- المجال : مجموعة الأعداد الحقيقية
- المدى : مجموعة الأعداد الزوجية.

١٠) $h(x) = |x + 4|$



المجال : مجموعة الأعداد الحقيقية

المدى : $h(x), h(x) \ge 0$.

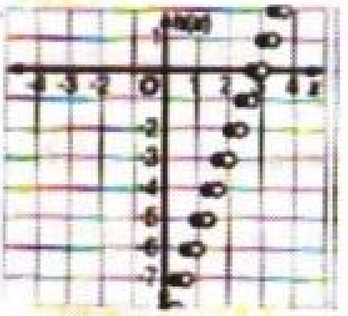
مثل كل دالة مما يأتي بيانيا ثم حدد كلا من مجالها ومداها:

١٢) $F(x)=\begin{cases}-3, x\le -4\\ x, 0<x\le 3\\ 8, x>3\end{cases}$

المجال $x<0$ المدى $f(x), 0<f(x)\le 3$

١٤) $g(x)=\begin{cases}8, x\le -6\\ 0.25x+2, -4\le x\le 4\\ 4, x>6\end{cases}$

١٦) $g(x)=\begin{cases}-9, x<-5\\ x+4, 0\le x\le 3\\ x-3, x>7\end{cases}$



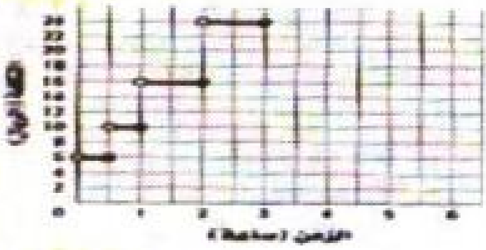
مثل كل دالة فيما يأتي بيانيا ثم حدد كلا من مجالها ومداها؟

١٨) $h(x)=[[3x]]$ -٨

- المجال : مجموعة الأعداد الحقيقية
- المدى : مجموعة الأعداد الصحيحة.

٢٨a) الدالة الدرجية

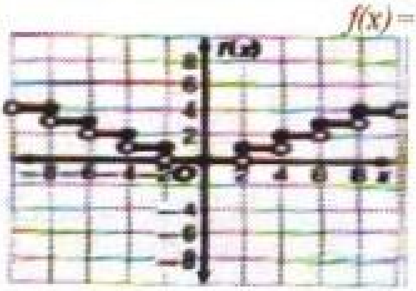
(28h $f(t)=\begin{cases}6 & 0<t\le 0.5\\ 10 & 0.5<t\le 1\end{cases}$



٣٠) $f(x)=|x+5|$

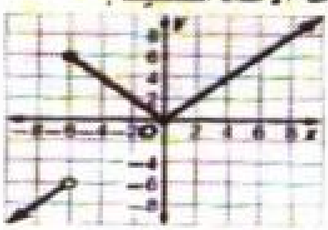
مثل كل دالة فيما يأتي بيانيا ثم حدد كلا من مجالها ومداها؟

٣١) $f(x)=[[|0.5x|]]$



- المجال : مجموعة الأعداد الحقيقية المدى : مجموعة الأعداد الصحيحة.

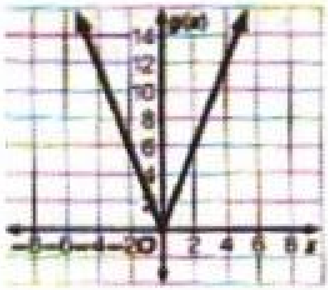
٣٤) $f(x)=\begin{cases}-|x| & , x<-6\\ |x| & , -6\le x\le 2\\ |-x| & , x>2\end{cases}$

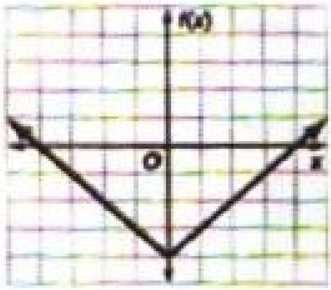


- المجال : مجموعة الأعداد الحقيقية

• المدى : $-6 \leq h(x)$, $h(x)$ أو $h(x) \geq 0$, $h(x)$

(b٣٥





(c٣٥

x	F(x)	الميل	G(x)	الميل
-4	0	-	12	-
-3	-1	-1	9	-3
-2	-2	-1	6	-3
-1	-3	-1	3	-3
0	-4	-1	0	-3
1	-3	1	3	3
2	-2	1	6	3
3	-1	1	9	3
4	0	1	12	3

(٤١ الحد النوني للنمط المعطى ($3n + 1$)

(٤٣ $f(2c) = -4(2c) + 6$

$= -8c + 6$

(٤٥ $h(6) =$

$= -2(36) - 6(6) + 9$

$= -72 - 36 + 9$

$= -99$

(٤٧ $\{Z, Q, R\} \ni -3$

(٤٩ $\{I, R\} \ni \sqrt{11}$

اختبار منتصف الفصل

حدد مجموعات الأعداد التي ينتمي إليها كل عدد مما يأتي:

١) $\{Q,R\} \ni \frac{25}{11}$

٢) $\{I,R\} \ni \sqrt{11}$

٣) $\{Q,R\} \ni -32.4$

اذكر الخاصية الموضحة في كل مما يلي:

$(4+15)7 = 4\times7 + 15\times7$

٤) خاصية توزيع الضرب على الجمع

بسط العبارة: ٦) $-3(7a-4b)+2(-3a+b)$

$=-21a+12b-6a+2b$

$=-27a+14b$

٧) يريد سعد شراء ٣ قمصان و٣ بناطيل فإذا كان سعر القميص الواحد ٣٥ ريالا وسعر البنطال الواحد ٥٥ ريالا فأوجد المبلغ الذي يدفعه سعد بطريقتين مستعملا خاصية التوزيع:

- $3(35+55)$
  $=3(90)$
  $=270$
- $3(55)+3(35)$
  $=165+105$
  $=270$

٨) أي العبارات التالية تكافئ :

$\frac{2}{3}(4m-5n) + \frac{1}{5}(2m+n)$

الحل (A)

أوجد النظير الجمعي والضربي للعدد:

٩) $\frac{7}{6}$ النظير الجمعي $\frac{-7}{6}$ بينما النظير الضربي $\frac{6}{7}$

١٠) حدد كلا من مجال ومدى العلاقة الآتية ثم بين هل تمثل دالة أم لا :

المجال = $\{3,4,0,5\}$

المدى = $\{2,1,3,-2,7\}$ وهذه العلاقة لا تمثل دالة.

١٢) $f(-2)=3(-8)-2(-2)+7$

$=-24+4+7$

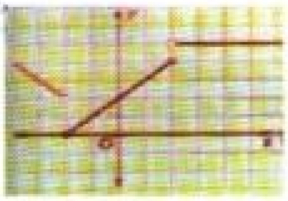
$=-13$

١٣) $f(2y)=3(8y)-2(2y)+7$

$=24y-4y+7$

$=12.432$

١٦) مثل بيانيا الدالة:



$$F(x) = \begin{cases} -x, & x < -2 \\ x+2, & -2 \le x \le 2 \\ 5, & x > 2 \end{cases}$$

١٧) $$F(x) = \begin{cases} -2x, & x < -1 \\ -1, & -1 \le x \le 3 \\ x-1, & x > 3 \end{cases}$$

حدد كلا من المجال والمدى للدالة:

١٨) y $[\![x]\!] + ٢$

- المجال : مجموعة الأعداد الحقيقية
- المدى : مجموعة الأعداد الصحيحة.

١٩) المجال : مجموعة الأعداد الحقيقية المدى : $f(x)$, x ≥ ٠

1-4 تمثيل المتباينات الخطية ومتباينات القيمة المطلقة بيانيا

انتبه الفرق بين المتباينة الخطية والمعادلة الخطية هو وضع رمز المتباينة بدلا من رمز المساواة.

مثال

مثل المتباينة التالية بيانيا : $-x+2y>4$

خطوات الحل :

١) حد المتباينة هو الخط المستقيم $-x+2y=4$ (نمثله بيانيا)

٢) بما أن رمز المتباينة هو> فإن الحد سيكون متقطع.

٣) نختار النقطة (٠،٠) والتي لا تقع على حد المتباينة ونعوض في المتباينة:

$-x+2y>4$

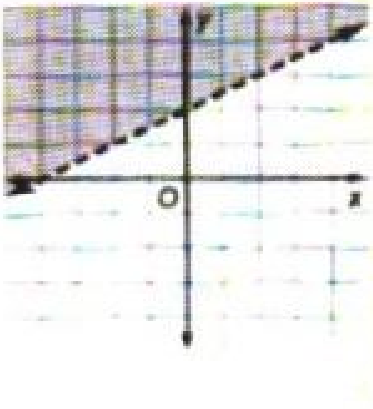
$-0+2(0)>4$

$0>4$ (خطأ)

٤) نظلل المنطقة التي لا تحتوي على (٠،٠)

٥) نظلل المنطقة التي لا تحتوي على (٠،٠)

٦) نمثل الدالة:



مثال

مع صالح ٦٠ ريالا يستطيع إنفاقها في مدينة الألعاب.فإذا كان ثمن تذكرة الألعاب الإلكترونية ٥ ريالات وثمن تذكرة كل لعبة عادية ٦ ريالات فاكتب متباينة تصف هذا الموقف ثم مثلها بيانيا.

خطوات الحل :

١)نفرض x هو ثمن تذكرة الألعاب الالكترونية.

٢)نفرض y هو ثمن تذكرة الألعاب العادية.

٣)المتباينة هي $5x+6y\leq60$

٤) حد المتباينة هو الخط المستقيم $5x+6y=60$ (نمثله بيانيا)

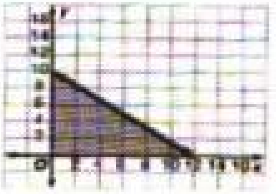
٥) بما أن رمز المتباينة هو≥ فإن الحد سيكون متصل.

٦)نختار النقطة (٠،٠) والتي لا تقع على حد المتباينة ونعوض في المتباينة:

$0\leq60$ (صحيح)

٧) نظلل المنطقة التي تحتوي على (٠،٠)

٨) نمثل الدالة:



خطوات تمثيل متباينة القيمة المطلقة بيانيا:

١) نمثل معادلة القيمة المطلقة المرتبطة بالمتباينة.

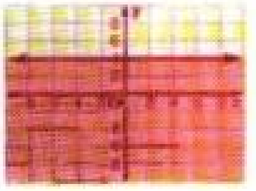
٢) نحدد إذا كان المستقيم الذي يمثل حد المتباينة متقطع أو متصل.

٣) نحدد المنطقة التي يجب تظليلها باختبار نقطة ما.

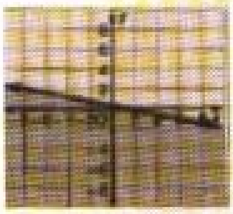
تدريبات وحلول

مثل كل متباينة فيما يأتي بيانيا:

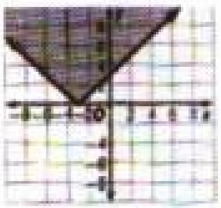
١) $y \le 4$



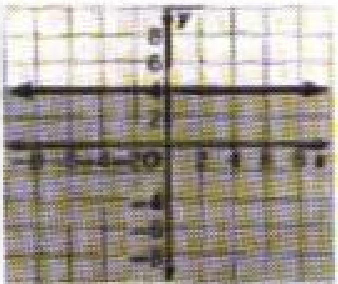
٢) $x + 4y \le 2$



٣) $y \ge |x + 3|$



$2y + 3 \le 11$ (

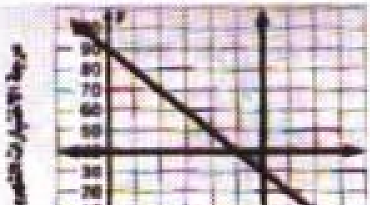


١٤) تحتسب درجات الطلاب في مادة الرياضيات على أساس ٦٠ درجة للاختبار النهائي، ٤٠ درجة للاختبارات الشهرية ويتعين على هند الحصول على الدرجة ٩٠ على الأقل لتنال تقدير ممتاز في المادة:

a) **المتباينة $x + y \ge 90$ تمثل هذا الموقف حيث x هي درجة هند في الاختبار النهائي و y هي درجة هند في الاختبارات الشهرية ،مثل هذه المتباينة بيانيا.**

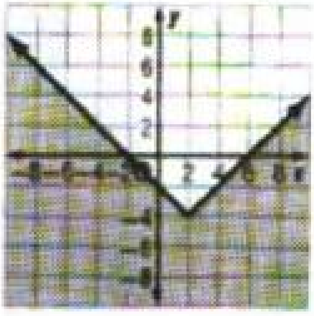
b) اعتمادا على التمثيل البياني إذا كانت درجتها في الاختبار النهائي ٥٠ درجة وفي الاختبارات الشهرية ٣٥ فهل ستحصل على التقدير ممتاز؟

الحل : لا.

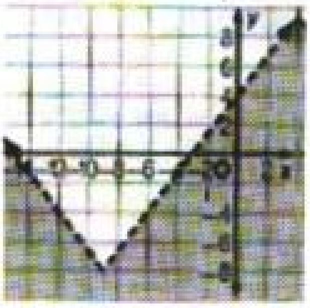


مثّل كل متباينة فيما يأتي بيانيا:

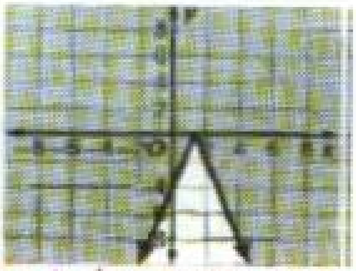
١٦) $y + 4 \le |x - 2|$



١٨) $y + 8 < 2\left|\frac{2}{3}x + 6\right|$



٢٠) $-y \le |3x - 4|$

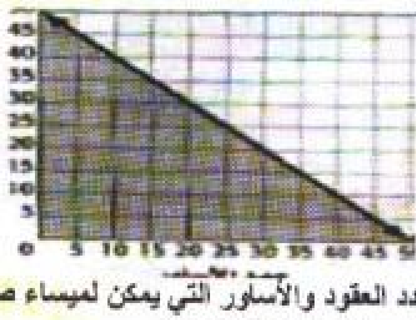


٢٨) تصنع ميساء عقودا وأساور من الخرز لتشارك بها في المعرض الفني للمدرسة ولديها من الخرز ما يكفي لصنع ٥٠ قطعة. لتكن x عدد الأساور ، y عدد العقود:

a) اكتب متباينة تبين عدد العقود والأساور التي يمكن أن تصنعها ميساء.

الحل: $x + y \le 50$

b) مثّل المتباينة بيانيا.



c) أعط ثلاثة حلول لعدد العقود والأساور التي يمكن لميساء صنعها.

الحل: عدد الأساور ٢٠ وعدد العقود ٣٠.

عدد الأساور ٠ وعدد العقود ٥٠.

عدد الأساور ٥٠ وعدد العقود ٠.

٣٥) مصعب تمثيله صحيح.

٣٦) عندما تكون كلا من x,y داخل القيمة المطلقة.

٣٧) المتباينة $|x| \le -2$ ليس لها حل لان ناتج القيمة المطلقة دائما اكبر من أو يساوي الصفر.

٣٨) (c) مجموعة الأعداد الصحيحة.

1-5 حل أنظمة المتباينات الخطية بيانيا

التنبيه

كيف تحل نظام المتباينات الخطية

* بإيجاد أزواج مرتبة تحقق جميع المتباينات في النظام وذلك بإجراء التالي:
- نمثل كل متباينة في النظام بيانيا ونظلل منطقة الحل.
- نحدد المنطقة المظللة المشتركة بين مناطق حل متباينات النظام والتي تمثل منطقة حل النظام..

يمكن أن لا تتقاطع منطقتا حل متباينتين في أي نقطة وبالتالي لا يوجد حل للنظام في هذه الحالة وتكون مجموعة الحل هي المجموعة الخالية التي يرمز لها بالرمز { } أو Ø

مثال

خرج مشاري وبدر في رحلة لزيارة بعض محافظات المملكة برا فتناوبا قيادة السيارة فإذا كانت فترات قيادة مشاري للسيارة على نحو متواصل في اليوم لا تقل عن ٤ ساعات ولا تزيد عن ٨ ساعات وكانت فترات قيادة بدر للسيارة على نحو متواصل في اليوم لا تقل عن ساعتين ولا تزيد على خمس ساعات وكان إجمالي زمن قيادة كليهما يوميا لا يزيد على ١٠ ساعات فاكتب نظام متباينات خطية يمثل هذا الموقف،ثم مثله بيانيا.

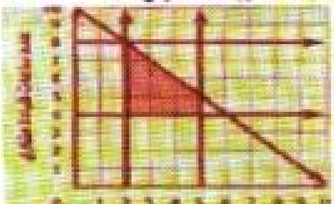
الحل : نفرض أن j هو عدد ساعات قيادة مشاري السيارة

نفرض أن d هو عدد ساعات قيادة بدر السيارة.

المتباينة التي تمثل عدد ساعات قيادة مشاري للسيارة : $4 \le j \le 8$

المتباينة التي تمثل عدد ساعات قيادة بدر للسيارة : $2 \le d \le 5$

المتباينة التي تمثل عدد ساعات قيادة كليهما للسيارة : $J + d \le 10$



المعرفة: إذا احتوت المتباينة على رمز <، > فإن الحد لا يدخل ضمن منطقة الحل ويمثل الحد بمستقيم متقطع، أما إذا احتوت على رمز ≥ ، ≤ فإن الحد يدخل ضمن إطار الحل ويمثل الحد بمستقيم متصل .

ملاحظة

ينتج في كثير من الاحيان من تمثيل نظام متباينات خطية منطقة مغلقة على شكل مضلع يمكننا ايجاد احداثيات رؤوسه بإيجاد احداثيات نقاط تقاطع المستقيمات المحددة للشكل المضلع.

مثال

جد احداثيات رؤوس المثلث الناتج عن التمثيل البياني لكل نظام مما يأتي :

$$y \ge -3x - 6$$
$$2y \ge x - 16$$
$$11y + 7x \le 12$$

١) نوجد نقطة تقاطع المستقيم $y=-3x-6$ مع المستقيم $2y=x-16$

$$-3x-6 = (x-16)\times 0.5$$
$$-3x - 6 = 0.5x - 8$$
$$2 = 3.5x$$
$$x = 0.57$$

بالتعويض عن قيمة x لايجاد قيمة y :

$$y = -3(0.57) - 6$$
$$y = -7.71$$

النقطة الأولى هي $(0.57, -7.71)$

٢) نوجد نقطة تقاطع المستقيم $y=-3x-6$ مع المستقيم $11y + 7x = 12$

$$12 - 7x = -33x - 66$$
$$26x = -78$$
$$X = -3$$

بالتعويض عن قيمة x لايجاد قيمة y :

$$y = -3(-3) - 6$$
$$y = 3$$

النقطة الثانية هي $(-3,3)$

٣) نوجد نقطة تقاطع المستقيم $2y=x-16$ مع المستقيم $11y + 7x = 12$

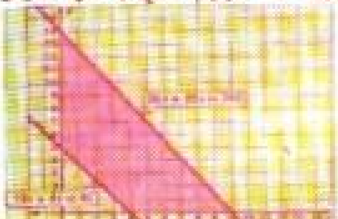
$$12 - 7x = 11(x-16)\times 0.5$$
$$12 - 7x = 5.5x - 88$$
$$12.5x = 100$$
$$X = 8$$

بالتعويض عن قيمة x لايجاد قيمة y : $y = 8-16$ ٢ $y=4$

تدريبات وحلول

٤) خصصت ليلى مبلغا لا يتجاوز ٣٥٠ ريالا لشراء نوعين من الأقلام،يباع الأول في رزم تضم الواحدة منها ١٠ أقلام وثمنها ٢٥ ريالا فإذا أرادت ليلى شراء ٤٠ قلما على الأقل من كلا النوعين.

a) مثل بيانيا نظام المتباينات الذي يبين عدد الرزم الذي يمكنها شراؤه من كلا النوعين.



b) أعط ثلاث خيارات ممكنة لعدد الرزم الذي يمكنها شراؤه من كلا النوعين.

ممكن أن تشتري ٤ رزم من النوع الأول و٥ من الثاني أو ٥ من النوع الأول و ٦ من لنوع الثاني.

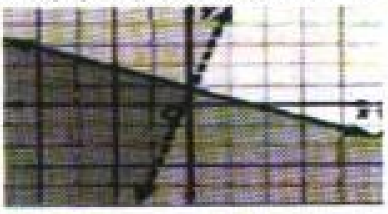
5) جد إحداثيات رؤوس المثلث الناتج عن التمثيل البياني لكل نظام مما يأتي :

$y \geq 2x + 1$

$y \leq 8$

$4x + 3y \geq 8$

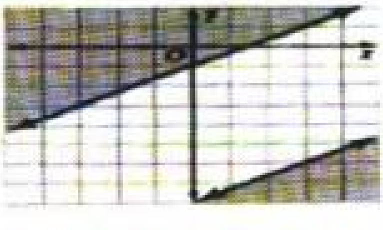
بحل المعادلات ومساواتها بعضها البعض نجد أن نقاط التقاطع هي $(0.5,2),(-4,8),(3.5,8)$



حل كل نظام فيما يأتي بيانيا:

12) $-8x > -2y - 1$

$-4y \geq 2x - 5$



14) $3y - 2x \leq -24$

$y \geq \frac{2}{3} - 1$

٢٤) تصنف الأشجار في المناطق الحرجية تبعا للارتفاع ومحيط الساق إلى أربع مجموعات ويبين الجدول التالي ارتفاع ومحيط ساق أشجار كل مجموعة من هذه المجموعات في إحدى المناطق الحرجية:

المجموعة	الأشجار المسيطرة	الأشجار شبه المسيطرة	الأشجار المتوسطة السيطرة	الأشجار غير المسيطرة
الارتفاع(ft)	أكثر من ٧٠	٧٢ -٥٦	٥٥- ٤٠	أقل من ٣٩
محيط الساق(in)	أكثر من ٦٠	٦٠- ٤٨	٤٨- ٣٤	أقل من ٣٣

a) اكتب نظام متباينات خطية يمثل مدى كل من : الارتفاع h ومحيط الساق c للأشجار شبه المسيطرة.

$56 \leq h \leq 72$ (الارتفاع)

$48 \leq c \leq 60$ (محيط الساق)

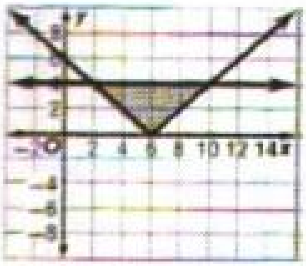
c) ما المجموعة التي تنتمي إليها شجرة زيزفون ارتفاعها ٤٨ft ثم أوجد محيط ساقها المتوقع؟

تنتمي شجرة الزيزفون إلى فصيلة الأشجار المتوسطة السيطرة ويتوقع أن يكون محيطها ٤٨ – ٣٤ .

حل كل نظام فيما يأتي بيانيا:

26) $y \geq |6x - 3|$

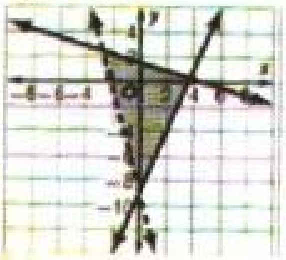
$|y| \leq 4$



29) $6y + 2x \leq 9$

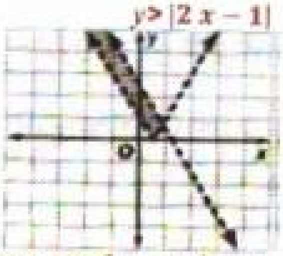
$2y + 18 \geq 5x$

$y > -4x - 9$



32) $8x + 4y < 10$

$y > |2x - 1|$



٣٤) يستثمر رامي وقت فراغه في ممارسة الرياضة وتلاوة القرآن فإذا كان مجمل وقت فراغه لا يتجاوز ٢٠ ساعة أسبوعيا.ويقضي من ٤ إلى ١٠ ساعات منها في ممارسة الرياضة ولا يقل زمن تلاوته للقرآن عن ١٠ ساعات ولا يزيد على ١٤ ساعة. فاكتب نظام متباينات خطية يمثل ذلك الموقف ومثله بيانيا؟

نفرض أن w هي عدد ساعات تلاوة القرآن : $10 \leq w \leq 14$

نفرض أن e هي عدد ساعات ممارسة الرياضة : $4 \leq e \leq 10$

متباينة وقت الفراغ : $e + w \leq 20$

جد إحداثيات رؤوس المثلث الناتج عن التمثيل البياني لكل نظام مما يأتي :

36)

$y \geq -x - 8$

$2y \geq 3x - 20$

$x + 4y \leq 24$

$y \leq 4x + 22$

بحل المعادلات ومساواتها بعضها البعض نجد أن نقاط التقاطع هي:

$(-6,-2),(-3.76,7),(9.1,3.7,(0.8,-8.8)$

40) اكتب نظاما من متباينتين على أن يكون الحل:

a) في الربع الثالث فقط

$x < -2\ ,\ y < -3$

b) غير موجود $Y > 3\ ,\ y \leq -3$

C) واقعا على خط مستقيم

$y \geq x\ ,\ y \leq x$

d) نقطة واحدة فقط

$y \geq |x|\ \ ,\ y < -|x|$

41) النظام هو:

$$y \geq 2x\ 6$$
$$y \leq -8.5x + 4$$
$$y \geq -3x - 6$$

42) الجملة (النظام المكون من متباينتين خطيتين إما أن يكون ليس له حل أو أن يكون له عدد لانهائي من الحلول هي **جملة صحيحة**.

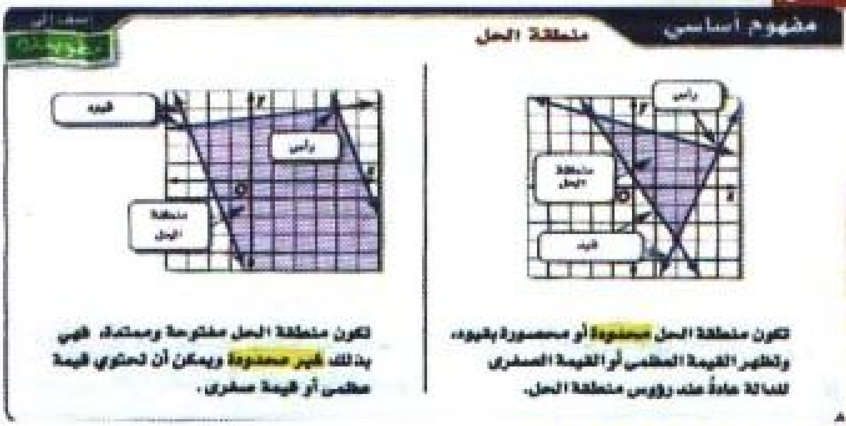
44) البديل الصحيح هو: $y = 3x + 2$ (b)

1-6 البرمجة الخطية والحل الأمثل

البرمجة الخطية:

هي طريقة لإيجاد القيمة العظمى أو الصغرى لدالة ما تحت قيود معينة كل منها عبارة عن متباينة خطية وذلك بتمثيل نظام المتباينات بيانيا وتوجد القيمة العظمى أو الصغرى للدالة ذات الصلة دائما عند أحد رؤوس منطقة الحل.

منطقة الحل:



مفهوم أساسي

منطقة الحل

تكون منطقة الحل محدودة أو محصورة بقيود، وتظهر القيمة العظمى أو القيمة الصغرى للدالة عادةً عند رؤوس منطقة الحل.

تكون منطقة الحل مفتوحة وممتدة، فهي بذلك غير محدودة ويمكن أن تحتوي قيمة عظمى أو قيمة صغرى.

مثـــال

مثّل نظام المتباينات الآتي بيانيا ثم حدد إحداثيات رؤوس منطقة الحل وأوجد القيمة العظمى والقيمة الصغرى للدالة المعطاة في هذه المنطقة:

$$-2 \leq x \leq 6$$
$$1 \leq y \leq 5$$
$$y \leq x + 3$$
$$f(x,y) = -5x + 2y$$

الحل:

1) نمثّل المتباينات كما تعلمنا في الدرس السابق ونوجد إحداثيات رؤوس المنطقة عن طريق مساواة المعادلات الثلاث بعضها البعض كما تعلمنا

٢) نوجد قيمة الدالة عند كل رأس :

(x,y)	$F(x,y)$
$(-2\,,1)$	8
$(6\,,1)$	-28
$(6\,,5)$	-20
$(2\,,5)$	0

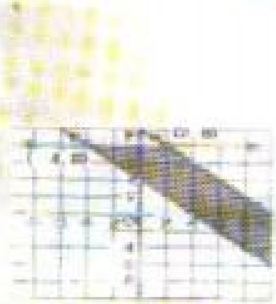
٣) من الجدول السابق ومن الرسم نلاحظ أن القيمة العظمى للدالة هي ٨ عند النقطة $(-2,1)$ بينما القيمة الصغرى للدالة هي -٢٨ عند النقطة $(6,1)$

انتبه **إذا نتج عن التمثيل البياني لنظام متباينات منطقة غير مغلقة فإن النظام غير محدود وهنا نختبر قيمة الدالة عند كل رأس لنحدد إذا كان هناك قيم عظمى أو صغرى.**

مثال

مثل نظام المتباينات الآتي بيانيا ثم حدد إحداثيات رؤوس منطقة الحل وأوجد القيمة العظمى والقيمة الصغرى للدالة المعطاة في هذه المنطقة:

$$y \le 8$$
$$y \ge -x+4$$
$$y \le -x+10$$
$$f(x,y) = -6x + 8y$$



الحل : ١- نمثل المتباينات كما تعلمنا في الدرس السابق ونوجد إحداثيات رؤوس المنطقة عن طريق مساواة المعادلات الثلاث بعضها البعض كما تعلمنا سابقا.

نوجد قيمة الدالة عند كل رأس :

(x,y)	$F(x,y)$
$(2\,,8)$	52
$(-4\,,8)$	88

من الجدول السابق ومن الرسم نلاحظ أن القيمة العظمى للدالة هي ٨٨ عند النقطة $(-4,8)$ بينما لا يوجد قيمة صغرى لها .

إيجاد الحل الأمثل: هو عملية البحث عن السعر أو الكمية الأفضل لتقليل التكلفة أو زيادة الربح ويمكن الحصول عليه باستعمال البرمجة الخطية.

خطوات إيجاد الحل الأمثل باستعمال البرمجة الخطية:

١) نحدد المتغيرات
٢) نكتب نظام المتباينات الخطية الذي يمثل المسألة.
٣) نمثل نظام المتباينات بيانيا.
٤) نوجد إحداثيات رؤوس منطقة الحل.
٥) نكتب الدالة الخطية التي نريد إيجاد القيمة العظمة أو الصغرى لها.
٦) نعوض عن إحداثيات الرؤوس في الدالة.
٧) نختار القيمة العظمى أو الصغرى حسب ماهو مطلوب في الدالة.

تدريبات وحلول

مثل كل نظام مما يأتي بيانيا ثم حدد إحداثيات رؤوس منطقة الحل،وأوجد القيمة العظمى والقيمة الصغرى للدالة المعطاة في هذه المنطقة:

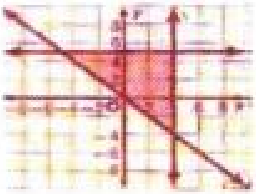
١) $y \le 5$

$x \le 4$

$y \ge -x$

$f(x,y) = 5x - 2y$

الحل: ١- نمثل المتباينات ونوجد إحداثيات رؤوس المنطقة عن طريق مساواة المعادلات الثلاث بعضها البعض كما تعلمنا سابقا.



نوجد قيمة الدالة عند كل رأس :

(x,y)	F(x,y)
(4 , 5)	١٠
(4 , -4)	٢٨
(-5 , 5)	-35

من الجدول السابق ومن الرسم نلاحظ أن القيمة العظمى للدالة هي ٢٨ عند النقطة (4,-4) بينما القيمة الصغرى للدالة هي -٣٥ عند النقطة (-5,5)

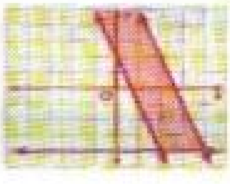
3) $y \ge -3x + 2$

$9x + 3y \le 24$

$y \ge -4$

$f(x,y) = 2x + 14y$

الحل : ١- نمثل المتباينات ونوجد إحداثيات رؤوس المنطقة عن طريق مساواة المعادلات الثلاث بعضها البعض كما تعلمنا سابقا.



نوجد قيمة الدالة عند كل رأس :

(x,y)	F(x,y)
(2 , -4)	-52
(4 , -4)	-48

من الجدول السابق ومن الرسم نلاحظ أنه لا يوجد قيمة عظمى للدالة بينما القيمة الصغرى للدالة هي -52 عند النقطة (2,-4)

5) $-3 \le y \le 7$

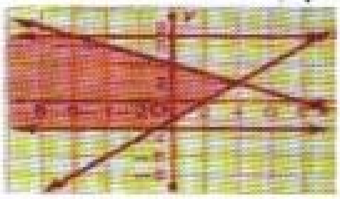
$4y \ge 4x - 8$

$6y + 3x \le 24$

$F(x,y) = -12x + 9y$

الحل :

١) نمثل المتباينات ونوجد إحداثيات رؤوس المنطقة عن طريق مساواة المعادلات الثلاث بعضها البعض كما تعلمنا سابقا.



٢) نوجد قيمة الدالة عند كل رأس :

(x,y)	F(x,y)
(4 , 2)	-30
(-1 , -3)	-15
(-6 , -7)	9

٣) من الجدول السابق ومن الرسم نلاحظ أنه لا يوجد قيمة عظمى للدالة بينما القيمة الصغرى للدالة هي -٣٠ عند النقطة $(4,2)$

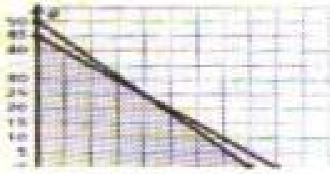
٧) يبلغ مجموع ساعات العمل اليومي لعمال قسم الإنتاج في مصنع للغسالات ٢٠٠ ساعة على الأكثر، ولعمال قسم ضبط الجودة ٩٠ ساعة على الأكثر ويبين الجدول الآتي عدد الساعات التي يتطلبها إنتاج وضبط جودة نوعين من الغسالات.

النوع	قسم الإنتاج	قسم ضبط الجودة
الأول	٥ ساعات	ساعتان
الثاني	٤ ساعات	ساعتان

a) النظام الذي يمثل عدد ساعات عمل عمال قسم الإنتاج وقسم ضبط الجودة:

$$x \geq 0 \ , \ y \geq 0$$
$$5x + 4y \leq 200$$
$$2x + 2y \leq 90$$

b) التمثيل البياني :



e) نوجد قيمة الدالة عند كل رأس

(x,y)	F(x,y)
(0 , 0)	0
(40 , 0)	3200
(20 ,25)	2850
(0 ,45)	2250

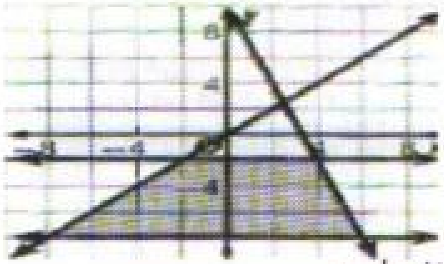
من الجدول السابق نجد أن أكبر ربح ممكن تحصل عليه هو ٣٢٠٠ ريالا عند تصنيع ٨٠ غسالة من النوع الأول وعدم إنتاج أي غسالة من النوع الثاني.

مثّل كل نظام مما يأتي بيانيا ثم حدد إحداثيات رؤوس منطقة الحل،وأوجد القيمة العظمى والقيمة الصغرى للدالة المعطاة في هذه المنطقة:

8)
$$-8 \leq y \leq -2$$
$$y \leq x$$
$$y \leq -3x + 10$$
$$f(x,y) = 5x + 14y$$

الحل :

١) نمثل المتباينات ونوجد إحداثيات رؤوس المنطقة عن طريق مساواة المعادلات الثلاث بعضها البعض كما تعلمنا سابقا.



٢) نوجد قيمة الدالة عند كل رأس :

(x,y)	F(x,y)
(4 , -2)	-8
(6 , -8)	-82
(-8 , -8)	-152
(-2 , -2)	-38

من الجدول السابق ومن الرسم نلاحظ أن القيمة العظمى للدالة هي 8- عند النقطة (4,-2) بينما القيمة الصغرى للدالة هي 152- عند النقطة (8,-8-)

12) $x \geq -8$

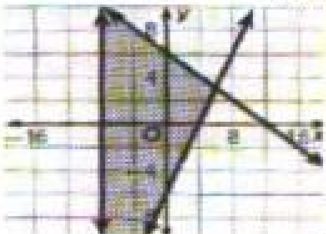
$3x + 6y \leq 36$

$Y+12 \geq 3x$

$f(x,y) = 10x - 6y$

الحل :

١) نمثل المتباينات ونوجد إحداثيات رؤوس المنطقة عن طريق مساواة المعادلات الثلاث بعضها البعض كما تعلمنا سابقا.



٢) نوجد قيمة الدالة عند كل رأس :

(x,y)	F(x,y)
(6 , 3)	42
(-8 , 10)	-140
(-8 , -18)	28

٣) من الجدول السابق ومن الرسم نلاحظ أن القيمة العظمى للدالة هي42 عند النقطة (6,3) بينما القيمة الصغرى للدالة هي 140- عند النقطة (-8,10)

١٧) ينتج مصنع نوعين من وحدات الإنارة يباع النوع الأول بسعر ٢٥ ريالا أما النوع الثاني فيباع بسعر ٣٥ ريالا فإذا كانت الطاقة الإنتاجية للمصنع لا تزيد على ٤٥٠ وحدة إنارة يوميا وكان على المصنع أن ينتج مالا يقل عن ١٠٠ وحدة إنارة من النوع الأول ومالا يزيد على ٢٠٠ وحدة إنارة من النوع الثاني فما عدد وحدات الإنارة التي تطلب إنتاجها من كل نوع ليكون دخل المصنع اليومي أكبر ما يمكن؟

الحل : * نفرض ان النوع الأول من وحدات الإنارة هو x

- نفرض النوع الثاني من وحدات الإنارة هو y

- نظام المتباينات الذي يمثل المسالة هو :

$x \geq 100$

$y \leq 200$

$x + y \leq 450$

المعادلة التي تمثل مقدار الربح هي : $F(x , y) = 25x + 35y$

بمساواة نظام المتباينات وإيجاد نقاط التقاطع نجد أنها: $(200 , 250)$, $(200 , 100)$

(x,y)	F(x,y)
(100 , 200)	9500
(250 , 200)	13250

- من الجدول نجد أن أكبر ربح ممكن هو ١٣٢٥٠ ريالا يحققها المصنع إذا أنتج ٢٥٠ وحدة إنارة من النوع الأول و ٢٠٠ وحدة من النوع الثاني.

١٩- إذا كان الوقت المتاح لمعاذ لطلاء ما يمكنه من ٤٥ جدارا وسقفا متساوية المساحة لكلا النوعين في احد المباني هو ٢٠ يوما ويستطيع معاذ طلاء ٢,٥ جدارا أو سقفين في اليوم الواحد :

a) النظام الذي يمثل هذا الموقف:

$x \geq 0 , y \geq 0$

$x + y \leq 45$

$4x + 5y \leq 200$

b) من الرسم ومن مساواة المعادلات بعضها البعض نجد أن إحداثيات رؤوس المنطقة هي $(0,0)$,$(45,0)$,$(0,40)$,$(25,20)$

c) الدالة التي تمثل الربح الكلي لكلا النوعين :

$F(x , y) = 26x + 30y$

٢١- يقوم احد المصانع بإعادة تدوير مالا يزيد على ١٢٠٠طن من البلاستيك شهريا لصنع حلويات بمقاسين صغير وكبير وعلى المصنع أن يستعمل مالا يقل عن ٣٠٠ طن في صنع الحلويات الصغيرة ومالا يقل عن ٤٥٠ طنا في صنع الحلويات الكبيرة إذا كان المصنع يحقق ربحا قدره ١٧٥ ريالا لكل طن بلاستيك تم استعماله لصنع الحلويات الصغيرة و ٢٠٠ ريال لكل طن تم استعماله لصنع الحلويات الكبيرة فما اكبر ربح ممكن تحقيقه وما عدد الأطنان المستعملة لكل نوع من الحلويات لتحقيق ذلك الربح؟

الحل : * نفرض أن المقاس الصغير x

- نفرض أن المقاس الكبير y
- نظام المتباينات الذي يمثل المسالة هو :

$x \geq 350$

$y \leq 450$

$x + y \leq 1200$

المعادلة التي تمثل مقدار الربح هي : $F(x , y) = 175x + 200y$ بمساواة نظام المتباينات وإيجاد نقاط التقاطع نجد أنها :

$(300 , 450)$, $(300 , 900)$,$(750,450)$

(x,y)	F(x,y)
(300 , 450)	142500
(300 , 900)	232500
(750 , 450)	221250

- من الجدول نجد أن أكبر ربح ممكن هو ٢٣٢٥٠٠ ريالا يحققها المصنع إذا أنتج ٣٠٠ طن من الحلويات الصغيرة و ٩٠٠ طن من الحلويات الكبيرة.

٢٢) $-4 \geq y \geq -12$

$8 \leq x \leq 18$

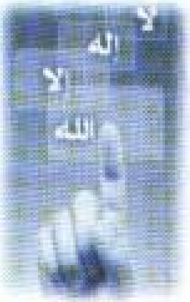
٢٤) النظام المختلف هو الشكل (b) لان منطقة الحل فيه غير مغلقة.

٢٦) الخيار الصحيح هو (b)

٢٧) الخيار الصحيح هو (d)

٣٣) $\sqrt[3]{27} \in \{N, W, Z, Q, R\}$

اختبار الفصل الأول



١ - الحل: $x+y^2(2+x)$

$=x+2y^2+xy^2$

$=3+2+3=8$

٢ - الحل: $-4(3a+b)-2(a-5b)$

$-12a-4b-2a+10b$

$-14a+6b$

٣ - الحل: البديل الصحيح هو $\left(\frac{47}{3}\right)$ (c)

٤ - الحل: محيط سياج الحوض الواحد = $12+5+7+7$ = ٣١

طول السياج الذي يحتاج إليه = ٣ × ٣١ = ٩٣ ft

٥ - الحل: $\frac{3(x+y)}{4xy^2} = -\frac{3}{8}$

٦ - المجال = $\{-2,4,3,6\}$

المدى = $\{3,-1,2\}$

الدالة ليست متباينة.

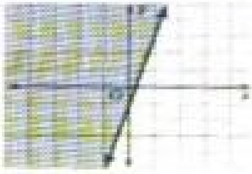
٧ - الحل: $f(-4)=-2(-4)+3=11$

٨ - الحل: $f(3y)=-2(3y)+3=-6y+3$

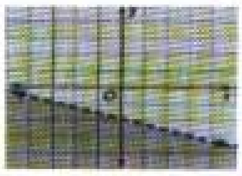
٩ - الحل: البديل الصحيح هو (c) ٢١,٠ ريالا.

١٠ -

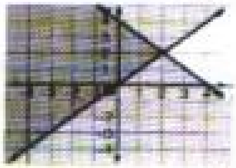
-١١



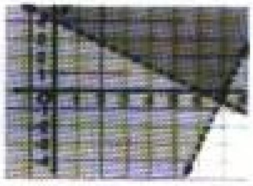
-١٢



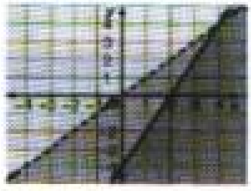
-١٣



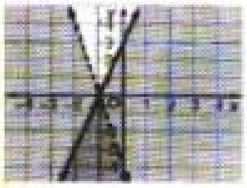
-١٤



-١٥



-١٦



١٧ – البديل الصحيح هو (b) ٥٠

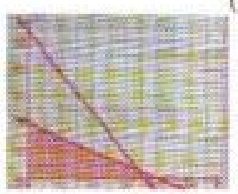
١٨-a)

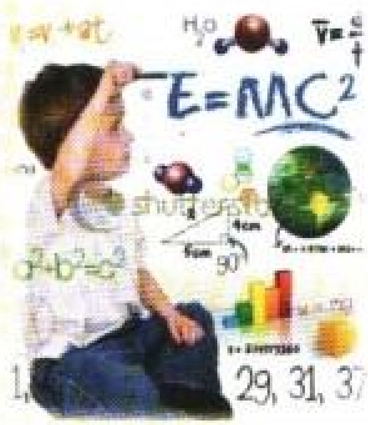
$c \geq 0 , t \geq 0$

$C + 2t \leq 108$

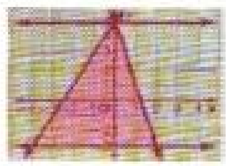
$0.5c + t \leq 20$

b)





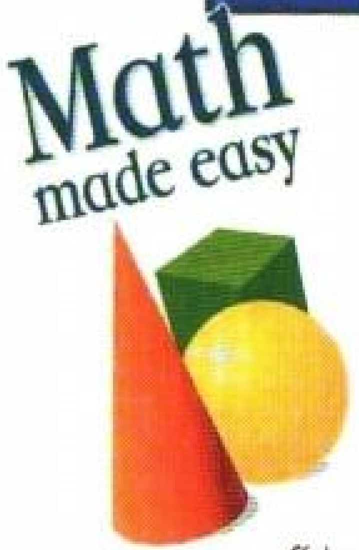
-١٩



(x,y)	$F(x,y)$
$(-4 , -4)$	-4
$(0 , 5)$	-15
$(2 , -3)$	17

- من الرسم والجدول نجد أن القيمة العظمى للدالة هي ١٧ عند النقطة $(2,-3)$ والقيمة الصغرى هي -١٥ عند النقطة $(0,5)$.

اختبار معياري تراكمي



أجب عن كل من الأسئلة الآتية:

١ - الحل: (B) -1

٢ - الحل: (A) $V=\frac{1}{3}\pi r^2 h$

٣ - الحل: (D) الأعداد الكلية

٤ - الحل: (C) $\{-3,1,2,6\}$

٥ - الحل: (A) -2

٦ - الحل: (B) المنطقة II

٧ - الحل: (A) (0,0).

٨ - الحل: $-4(3A-B)+3(-2A+5B)$

$-12A+4B-6A+15B$

$-18A+19B$

٩ - الحل: $f(x)= \begin{cases} 5 & , x<-4 \\ -x-2 & , -4\le x\le 4 \\ 2x-12 & , x>1 \end{cases}$

١٠ -الحل: عند $x=-3$ فإن الدالة تساوي $-(-3)-2=1$

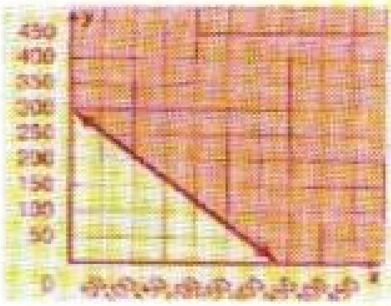
١١ -الحل: (a) أخطأ خالد عندما ضرب العدد -٣ في -٤ وكان نتاجه-١٢ فالجواب الصحيح ١٢

(b) الجواب الصحيح $1\frac{3}{4}$

١٢ -الحل:

a) $0.45x+0.5y\ge 150$

B)



C) إذا باع المخبز ١٨٠ قطعة كعك و ١٦٠ فطيرة فإن الربح سيكون :

$0.45(180)+0.5(160)=81+80=161$

١٣ - الحل:

a) $x\ge 0 , y\ge 0$

$5x+5y\le 40$

$2x+y\le 15$

b) إحداثيات نقاط رؤوس منطقة الحل هي :

$(0,0) , (0,8) , (7.5,0) , (7,1)$

c) d $f(x,y)=12x+8y$

الفصل الثاني

المصفوفات

- مقدمة في المصفوفات
- العمليات على المصفوفات
- ضرب المصفوفات
- المحددات وقاعدة كرامر
- النظير الضربي للمصفوفة وأنظمة المعادلات الخطية

التهيئة للفصل الثاني

حلول اختبار سريع

أوجد كلا من المعكوس الجمعي والضربي لكل عدد مما يأتي:

٣) ٠,٢

٥ المعكوس الضربي لها بينما -٠,٢ المعكوس الجمعي

٥) $\frac{-3}{4}$

المعكوس الضربي لها $\frac{-4}{3}$ أما المعكوس الجمعي $\frac{3}{4}$

بسط كل عبارة مما يلي:

٧) $6(x + 2y)$

$= 6x + 12y$

11) $6(2x - 1) - 3(y - x) + 0.5(4x - 6)$

$12x - 6 - 3y + 3x + 2x - 3$

$= 17x - 3y - 9$

حل نظام المعادلتين في كل مما يلي باستعمال طريقة التعويض أو الحذف:

١٢) $2x - y = -1$

$Y = x + 3$

بترتيب المعادلة الأولى : $2x + 1 = y$

بمساواة المعادلتين : $2x + 1 = x + 3$

$2x - x = 3 - 1$

$X = 2$

بالتعويض عن قيمة x في إحدى المعادلتين الأصليتين:

$Y = 2 + 3 = 5$

$(x,y) = (2,5)$

١٤) $4y + 6x = -6$

$5y - x = 35 \quad .....\times 6$

$= 30y - 6x = 210$

بجمع المعادلتين الأولى والثالثة:

$34y = 204$

$Y = 6$

بالتعويض عن قيمة y في إحدى المعادلتين الأصليتين:

$4(6) + 6x = -6$

$24 + 6x = -6$

$6x = -30$

$X = -5$

$(x,y) = (-5,6)$

2-1 مقدمة في المصفوفات

ماهي المصفوفة؟

هي ترتيب على هيئة مستطيل لمتغيرات أو أعداد في صفوف أفقية وأعمدة رأسية محصورة بين قوسين وتسمى كل قيمة في المصفوفة عنصرا ورمز للمصفوفة باستعمال الحروف الكبيرة.

$$A=\begin{bmatrix}2 & 8 & -2\\ -6 & -1 & 5\end{bmatrix}$$

المصفوفة السابقة تتكون من صفين وثلاثة أعمدة والعنصر ٥ موجود في الصف الثاني والعمود الثالث ويرمز له بالرمز a_{23}

كيف تحدد نوع المصفوفة: نحدد نوع المصفوفة برتبتها فالمصفوفة المكونة من m صفا و n عمودا يقال عنها مصفوفة من الرتبة $m\times n$

مثال

استعمل المصفوفة :

$$B=\begin{bmatrix}10 & -8\\ -2 & 19\\ 6 & -1\end{bmatrix}$$

للإجابة عن كل مما يلي :

A) رتبة المصفوفة هي 2×3

B) قيمة b_{32} العنصر في الصف الثالث والعمود الثاني 1-

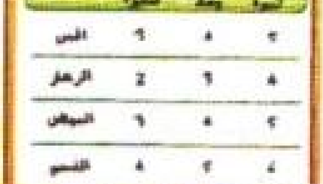
ملاحظة نقول عن مصفوفتين أنهما متساويتين إذا كانتا من الرتبة نفسها وتساوت عناصرهما المتناظرة.

عزيزي الطالب/ هناك مصفوفات لها تسميات خاصة تعرف عليها فيما يلي :

الاسم	الوصف	مثال
مصفوفة صف	تحتوي صف واحد	
مصفوفة عمود	تحتوي عمود واحد	
مصفوفة مربعة	عدد الأعمدة يساوي عدد الصفوف	
مصفوفة صفرية	جميع عناصرها أصفار	

مثال

يبين الجدول المجاور الأسعار بالريال لأربعة أنواع من الفطائر بثلاثة أحجام في احد المطاعم.



	كبيرة	وسط	صغيرة
الجبن	[illegible]	[illegible]	[illegible]
الزعتر	[illegible]	[illegible]	[illegible]
السبانخ	[illegible]	[illegible]	[illegible]
اللحم	[illegible]	[illegible]	[illegible]

A) حدد رتبة المصفوفة.

4×3

B) ما قيمة العنصر a_{21}

٣ ريالات

انتبه يمكننا تحليل البيانات وتفسيرها عند تنظيم بيانات المصفوفة وأحيانا تعطي مجاميع عناصر الصفوف أو الأعمدة معلومات ذات معنى وأحيانا لا.

مثال

يبين الجدول المجاور عدد المصانع الوطنية العاملة في قطاعي صناعة المنسوجات وصناعة الورق ومنتجاته في ٤ مناطق إدارية مختلفة في المملكة.

المنطقة	صناعة المنسوجات	صناعة الورق ومنتجاته
مكة المكرمة	٢٨	٤٥
الرياض	٢٩	٤٩
الشرقية	١٤	٣٧
الباحة	١	١

A) نظم البيانات في مصفوفة

$$=\begin{bmatrix}28 & 45\\29 & 49\\14 & 37\end{bmatrix}$$

B) اجمع عناصر كل عمود وفسر النتائج

مجموع عناصر العمود الاول٧٢ ومجموع عناصر العمود الثاني ١٣٢ ويمثل العمود الأول عدد مصانع المنسوجات والعمود الثاني عدد مصانع الورق ومنتجاته.

C) اجمع عناصر كل صف وفسر النتائج.

مجموع عناصر الصف الاول٧٣ وتمثل عدد مصانع المنسوجات والورق في مكة المكرمة و مجموع عناصر الصف الثاني٧٨ وتمثل عدد مصانع المنسوجات والورق في الرياض و مجموع عناصر الصف الثالث ٥١ وتمثل عدد مصانع المنسوجات والورق في الشرقية ومجموع عناصر الصف الرابع٢ وتمثل عدد مصانع المنسوجات والورق في الباحة

D) هل ايجاد معدل عناصر كل صف أو عناصر كل عمود يعطي بيانات ذات معنى.

معدل عناصر كل صف أو كل عمود ليس له معنى.

تدريبات وحلول

حدد رتبة كل مصفوفة فيما يأتي:

١) 2×4

٢) 4×1

٣) 3×2

إذا كانت $A=\begin{bmatrix} 1 & -6 & X & -4 \\ -2 & 3 & -1 & 9 \\ 5 & -8 & 2 & 12 \end{bmatrix}$ فحدد كل عنصر فيما يأتي :

٤) $-8 = a_{32}$

٥) $1 = a_{11}$

٦) $2 = a_{33}$

٧) $9 = a_{24}$

٨) a. المصفوفة التي تمثل البيانات المعطاة هي :

b . النوع الأقل إنتاجا هو الباذنجان

c. مجموع الصف الأول ٢٠٩٨ ويمثل عدد صناديق الخضروات التي تنتجها المزرعة الأولى بينما الصف الثاني فمجموعه ٣٤٨٥ ويمثل عدد صناديق الخضروات التي تنتجها المزرعة الثانية.

d. مجموع العمود الأول ١٣٩٠ وهو ما تنتجه المزرعتين معا من الخيار مجموع العمود الثاني ١٥٨٥ وهو ما تنتجه المزرعتين معا من الكوسة

مجموع العمود الثالث ١٢٨٨ وهو ما تنتجه المزرعتين معا من الباذنجان

مجموع العمود الرابع ١٣٢٠ وهو ما تنتجه المزرعتين معا من الطماطم.

حدد رتبة كل مصفوفة فيما يأتي:

٩) 1×2

11) 2×4

13) 3×1

إذا كانت $B=\begin{bmatrix} 10 & -8 & 2x \\ -2 & 19 & 4 \end{bmatrix}$ ، $A=\begin{bmatrix} 6 & y \\ -9 & 31 \\ 11 & 5 \end{bmatrix}$ فحدد كل عنصر فيما يأتي :

١٥) $-9 = a_{21}$

١٦) $19 = b_{22}$

١٧) $2x = b_{13}$

١٨) $y = a_{12}$

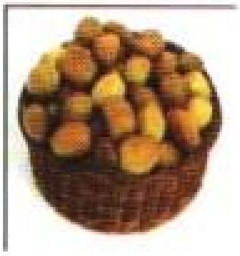
٢٠) a. المصفوفة التي تمثل البيانات المعطاة هي :

$$\begin{array}{ccc} \text{المخزن٣} & \text{المخزن٢} & \text{المخزن١} \end{array}$$
$$\begin{bmatrix} 2000 & 3000 & 2750 \\ 1200 & 1175 & 1500 \\ 500 & 2250 & 1700 \end{bmatrix}$$

b. مجموع العمود الأول ٣٧٠٠ وهو ما يحتويه المخزن الأول من التمر مجموع العمود الثاني ٦٤٢٥ وهو ما يحتويه المخزن الثاني من التمر

مجموع العمود الثالث ٥٩٥٠ وهو ما يحتويه المخزن الثالث من التمر

c. مجموع الصف الأول ٧٧٥٠ ويمثل عدد الكيلوجرامات من التمر الخلاص في المخازن الثلاثة بينما الصف الثاني فمجموعه ٣٨٧٥ ويمثل عدد الكيلوجرامات من التمر البرحي في المخازن الثلاثة بينما الصف الثالث فمجموعه ٤٤٥٠ ويمثل عدد الكيلوجرامات من التمر السكري في المخازن الثلاثة.



٢١) $15 = a_{32}$

٢٢) $4x = b_{21}$

٢٣) $-3 = b_{12}$

٢٤) $x = a_{21}$

٢٥) b) المصفوفة السابقة من الرتبة 2×3

٢٦) $x^2 + 4 = a_{11}$

٢٧) $2 - y = a_{22}$

٢٨) $-y = b_{31}$

٢٩) $-4x = b_{23}$

٣١) a. أهداف تمريرات

$$\begin{bmatrix} 8 & 3 \\ 6 & 5 \\ 1 & 8 \\ 4 & 2 \end{bmatrix} \begin{array}{l} \text{محمود} \\ \text{معاذ} \\ \text{صالح} \\ \text{عبدالله} \end{array}$$

b)مجموع عناصر العمود الأول ١٩ وهي التمريرات بينما مجموع عناصر العمود الثاني ١٨ وهو عدد الأهداف.

$$\begin{bmatrix} 8 & 6 & 1 & 4 \\ 3 & 5 & 8 & 2 \end{bmatrix} \; (c$$

d) مجموع عناصر الصف الأول ١٩ وهي التمريرات ومجموع عناصر الصف الثاني ١٨ وهي الأهداف.

e)لا ليس هناك تأثير عند تبديل عناصر الصفوف والأعمدة.

٣٢) بما أن المصفوفة c مربعة فان عدد صفوفها أربعة وعدد أعمدتها أربعة وبالتالي لا يوجد عنصر في الصف الخامس.

٣٣) لم تصف أي منهما الجواب الصحيح لأن العنصر b_{32} هو ٢

٣٧) البديل الصحيح (D) عدد الأصوات المؤيدة للمرشح الأول أكبر من عدد الأصوات المؤيدة للمرشح الثالث.

2-2 العمليات على المصفوفات

لاحظ جيدا يمكننا جمع مصفوفتين أو طرحهما إذا وإذا فقط كان لهما الرتبة نفسها.

جمع المصفوفات وطرحها

التعبير اللفظي: إذا كانت A, B مصفوفتين من الرتبة $m \times n$ فإن $A + B$ هي مصفوفة أيضا من الرتبة $m \times n$ ويكون كل عنصر فيها هو مجموع العنصرين المتناظرين في A و B وكذلك $A - B$ هي مصفوفة من الرتبة $m \times n$ أيضا، وتحصل عليها بطرح العناصر المتناظرة.

الرموز:

$$A + B = A+B$$

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} e & f \\ g & h \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a+e & b+f \\ c+g & d+h \end{bmatrix}$$

$$A - B = A-B$$

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} e & f \\ g & h \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a-e & b-f \\ c-g & d-h \end{bmatrix}$$

مثال:

$$\begin{bmatrix} 3 & -5 \\ 1 & 7 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ -9 & 10 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3+2 & -5+0 \\ 1+(-9) & 7+10 \end{bmatrix}$$

مثال

أوجد قيمة مايلي :

التعبير اللفظي: حاصل ضرب مصفوفة A من الرتبة $m \times n$ في عدد ثابت k هي مصفوفة kA من الرتبة $m \times n$ وكل عنصر فيها يساوي العنصر المناظر له في المصفوفة A مضروب في العدد الثابت k

الرموز:

$$k \cdot A = kA$$

$$k \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ka & kb \\ kc & kd \end{bmatrix}$$

مثال:

$$-3 \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 7 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3(4) & -3(1) \\ -3(7) & -3(-2) \end{bmatrix}$$

* <u>خصائص جمع المصفوفات :</u>

لأي ثلاث مصفوفات A,B,C لها الرتبة نفسها ولأي عدد ثابت K فإن الخصائص التالية صحيحة:

١) الخاصية الابدالية لجمع المصفوفات $(A+B=B+A)$

٢) الخاصية التجميعية لجمع المصفوفات $((A+B)+C=A+(B+C))$

٣) خاصية التوزيع للضرب في عدد $(K(A+B)=KA+KB)$

مثـــال

إذا كانت $B=\begin{bmatrix}12 & 5\\ 5 & -4\\ 4 & -7\end{bmatrix}$ ، $A=\begin{bmatrix}-5 & 3\\ 6 & -8\\ 2 & 9\end{bmatrix}$ فأوجد $-6B+7A$

$$-6B=\begin{bmatrix}-72 & -30\\ -30 & 24\\ -24 & 42\end{bmatrix}$$

$$7A=\begin{bmatrix}-35 & 21\\ 42 & -56\\ 14 & 63\end{bmatrix}$$

$$-6B+7A=\begin{bmatrix}-107 & -9\\ 12 & -32\\ -10 & 105\end{bmatrix}$$

تدريبات وحلول

أوجد الناتج في كل مما يأتي إذا كان ذلك ممكنا:

١) لا يمكن إيجاد الناتج لأن المصفوفتين لهما رتبتين مختلفتين.

٤) $\begin{bmatrix}7 & 31 & -14\\ 1 & -6 & 2\end{bmatrix}$

٥) $\begin{bmatrix}18 & 12 & 0\\ -6 & 42 & -24\\ -12 & -18 & 21\end{bmatrix}=3\begin{bmatrix}6 & 4 & 0\\ -2 & 14 & -8\\ -4 & -6 & 7\end{bmatrix}$

استعمل المصفوفات A,B لإيجاد ناتج كل مما يأتي إذا كان ذلك ممكنا:

$$A=\begin{bmatrix}6 & -4\\ 3 & -5\end{bmatrix},B=\begin{bmatrix}8 & -1\\ -2 & 7\end{bmatrix}$$

7) $4B-2A=\begin{bmatrix}32 & -4\\ -8 & 28\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}12 & -8\\ 6 & -10\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}20 & 4\\ -14 & 38\end{bmatrix}$

أوجد الناتج في كل مما يأتي إذا كان ذلك ممكنا:

٩) $\begin{bmatrix}6 & 6\\ -15 & -1\end{bmatrix}$ ١٠) غير ممكن لان الرتب تختلف

١١ a) المصفوفة التي تمثل الأسعار هي :

$$C=\begin{bmatrix}3 & 4 & 5\\ 2 & 3 & 4\\ 2 & 3 & 4\\ 4 & 5 & 6\end{bmatrix}$$

١١ b) العدد الذي يمكن أن نضرب المصفوفة C فيه لإيجاد المصفوفة N التي تمثل الأسعار الجديدة هو ١,١

١١ c) المصفوفة N هي :

$$=\begin{bmatrix}3.3 & 4.4 & 5.5\\ 2.2 & 3.3 & 4.4\\ 2.2 & 3.3 & 4.4\\ 4.4 & 5.5 & 6.6\end{bmatrix}$$

١٣) $= \begin{bmatrix} 7 & 5 & -9 \\ 3 & 17 & -2 \\ 1 & -23 & 14 \end{bmatrix}$

$\begin{bmatrix} 13 & -40 & -5 \end{bmatrix}$

١٥) $\begin{bmatrix} -6 & 13 & 14 \\ -11 & -2 & -3 \end{bmatrix}$

١٧) غير ممكن لأن الرتب مختلفة.

١٩) $\begin{bmatrix} -54 & 18 & 24 \\ 15 & 9 & -36 \\ 0 & -9X & 3Y \end{bmatrix}$

٢٣) $\begin{bmatrix} 18.4 & 16.8 \\ -11.2 & 8.6 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 16.4 & -11.6 \\ 28.8 & -32.8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 28.4 \\ -40 & 41.4 \end{bmatrix}$

٢٥ a) $\begin{bmatrix} 435 \\ 299 \end{bmatrix}$

$\begin{bmatrix} 172 \\ 354 \end{bmatrix}$

٢٥ b) الصف الأول يمثل عدد المليجرامات من البوتاسيوم والفسفور والكالسيوم في الكيلوجرام الواحد من البر وكلي.

الصف الثاني يمثل عدد المليجرامات من البوتاسيوم والفسفور والكالسيوم في الكيلوجرام الواحد من الكرنب.

الصف الثالث يمثل عدد المليجرامات من البوتاسيوم والفسفور والكالسيوم في الكيلوجرام الواحد من القرنبيط.

الصف الرابع يمثل عدد المليجرامات من البوتاسيوم والفسفور والكالسيوم في الكيلوجرام الواحد من البامية.

٢٦) نفرض أن $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} e & f \\ g & h \end{bmatrix}$

يجب إثبات أن $A+B = B+A$

$A + B = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} e & f \\ g & h \end{bmatrix}$ بالتعويض

$= \begin{bmatrix} a+e & b+f \\ c+g & d+h \end{bmatrix}$ تعريف الجمع على المصفوفات

$= \begin{bmatrix} e+a & f+b \\ g+c & h+d \end{bmatrix}$ خاصية الإبدال على جمع الأعداد الحقيقية

$= \begin{bmatrix} e & f \\ g & h \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ تعريف جمع المصفوفات

$= B + A$ بالتعويض

٢٩)

a)	صحيحة دائما.	b)	صحيحة دائما
c)	صحيحة دائما.	d)	صحيحة أحيانا.
e)	صحيحة أحيانا.		

٣٢) البديل الصحيح (C)

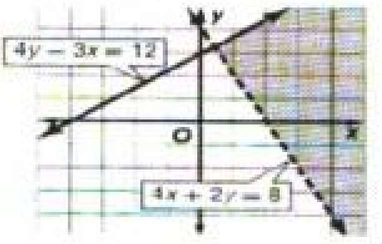
٣٣) البديل الصحيح (B)

٣٤) $a_{32} = 4y$

٣٥) $c_{13} = 3$

٣٦) $b_{32} =$ غير موجودة

٣٩)



٤٠) عدد سكان مدينة الخبر :

$488259 - x = 115393$

$X = 488259 - 115393$

$X = 372866$

عدد سكان مدينة الخبر = ٣٧٢٨٦٦ نسمة.

٤٢) $-3(2a-5b) - 4(4b + a)$

$= -6a + 15b - 16b - 4a$

$= -10a - b$

2-3 ضرب المصفوفات

ملاحظة

يمكننا ضرب مصفوفتين إذا وإذا فقط كان عدد أعمدة المصفوفة الأولى يساوي عدد صفوف المصفوفة الثانية..

انتبه عند ضرب مصفوفة A من الرتبة $m \times r$ بالمصفوفة B ذات الرتبة $r \times t$ فإن الناتج هو المصفوفة AB ذات الرتبة $m \times t$

مثال

هل يمكن إيجاد $A.B$ في كل مما يأتي وإن كان كذلك فأوجد رتبة المصفوفة الناتجة:

١) $A_{4\times6}, B_{6\times2}$

بما أن عدد أعمدة المصفوفة A يساوي عدد صفوف المصفوفة B فإن مصفوفة حاصل الضرب $A.B$ معرفة ورتبتها $2 \times$ ٤

٢) $A_{3\times2}, B_{3\times2}$

بما أن عدد أعمدة المصفوفة A لا يساوي عدد صفوف المصفوفة B فإن مصفوفة حاصل الضرب $A.B$ غير معرفة .

ضرب المصفوفات:

التعبير اللفظي: العنصر في الصف m والعمود r من المصفوفة AB هو مجموع نواتج ضرب العناصر في الصف m من المصفوفة A، بعناصر العمود r من المصفوفة B بالترتيب

الرموز:

$$AB = B \cdot A$$

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} e & f \\ g & h \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ae+bg & af+bh \\ ce+dg & cf+dh \end{bmatrix}$$

انتبه خصائص ضرب الأعداد الحقيقية لا تكون صحيحة دائما عند ضرب المصفوفات.

مثـــال

إذا كانت $A=\begin{bmatrix}4 & -1\\ 5 & -2\end{bmatrix}, B=\begin{bmatrix}-3 & 6\\ -4 & 5\end{bmatrix}$ فهل $AB=BA$؟

• نوجد AB :

$$=\begin{bmatrix}4(-3)+(-1)(-4) & 4(6)+(-1)(5)\\ 5(-3)+(-2)(-4) & 5(6)+(-2)(5)\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}-8 & 19\\ -7 & 20\end{bmatrix}$$

• نوجد BA :

$$=\begin{bmatrix}-3(4)+(6)(5) & -3(-1)+(6)(-2)\\ -4(4)+(5)(5) & -4(-1)+(5)(-2)\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}18 & -9\\ 9 & -6\end{bmatrix}$$

من السابق نجد أن $AB\neq BA$

* خصائص ضرب المصفوفات :

لأي ثلاث مصفوفات A,B,C ولأي عدد ثابت K فإن الخصائص التالية صحيحة على أن يكون ناتج ضرب أو جمع أ منها معرفا:

١) خاصية التجميع لضرب المصفوفات $(AB)C=A(BC)$

٢) خاصية التجميع لضرب المصفوفات في عدد

$K(AB)=(KA)B=A(KB)$

٣) خاصية التوزيع من اليسار للمصفوفات $C(A+B)=CA+CB$

٤) خاصية التوزيع من اليمين للمصفوفات $(A+B)C=AC+BC$

تدريبات وحلول

حدد إذا كانت عملية الضرب معرفة في كل مما يلي أم لا وان كانت معرفة فاوجد رتبة المصفوفة الناتجة:

١) $A_{2\times4}, B_{4\times3}$

بما أن عدد أعمدة المصفوفة A يساوي عدد صفوف المصفوفة B فإن مصفوفة حاصل الضرب $A.B$ معرفة ورتبتها 2×3

٢) $C_{5\times4}, D_{5\times4}$

بما أن عدد أعمدة المصفوفة C لا يساوي عدد صفوف المصفوفة D فإن مصفوفة حاصل الضرب $C.D$ غير معرفة .

اوجد الناتج في كل مما يلي إذا كان ذلك ممكنا :

٤- $\begin{bmatrix}2 & 1\\ 7 & -5\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}-6 & 3\\ -2 & -4\end{bmatrix}$

$$=\begin{bmatrix}-14 & 2\\ -32 & 41\end{bmatrix}$$

٦- $\begin{bmatrix}9 & -2\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}-2 & 4\\ 6 & -7\end{bmatrix}$

$$=\begin{bmatrix}-30 & 50\end{bmatrix}$$

٨- $\begin{bmatrix}-8 & 7 & 4\\ -5 & -3 & 8\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}10 & 6\\ 8 & 4\end{bmatrix}$

المصفوفة الناتجة غير معرفة لان عدد أعمدة الأولى لا يساوي عدد صفوف الثانية.

$$\begin{bmatrix}-4 & 3 & 2\\ -1 & -5 & 4\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}2 & 1 & 6\\ 8 & 4 & -1\\ 5 & 3 & -2\end{bmatrix}$$ -١٠

$$=\begin{bmatrix}26 & 14 & -31\\ -22 & -9 & -9\end{bmatrix}$$

١٢ a) مصفوفة عدد الأشخاص المسجلين في المستويات كلها :

$$\begin{bmatrix}35 & 28\\ 32 & 17\\ 18 & 12\end{bmatrix}$$

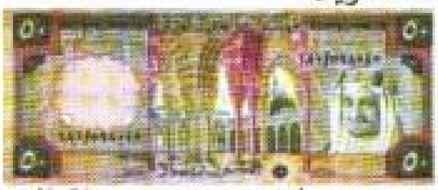
مصفوفة رسوم الاشتراك :

$$\begin{bmatrix}110 & 165 & 439\end{bmatrix}$$

١٢ b) لإيجاد المبلغ الكلي الذي يحصل عليه المركز من اشتراكات المستويين الأول والثاني نضرب مصفوفتي عدد الأشخاص في مصفوفة رسوم الاشتراك

$$\begin{bmatrix}35 & 28\\ 32 & 17\\ 18 & 12\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}110 & 165 & 439\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}17032 & 11153\end{bmatrix}$$

المبلغ المطلوب هو ١١١٥٣ + ١٧٠٣٢ = ٢٨١٨٥ ريالا



14) $$X(YZ)=\begin{bmatrix}431 & 295\\ 490 & 242\end{bmatrix}$$

$$(XY)Z=\begin{bmatrix}431 & 295\\ 490 & 242\end{bmatrix}$$

$$X(YZ)=(XY)Z$$

حدد إذا كانت عملية الضرب معرفة في كل مما يلي أم لا وان كانت معرفة فأوجد رتبة المصفوفة الناتجة:

١٧)

$$M_{3\times1}, N_{2\times3}$$

بما أن عدد أعمدة المصفوفة M لا يساوي عدد صفوف المصفوفة N فإن مصفوفة حاصل الضرب $M.N$ غير معرفة .

١٩)

$$J_{2\times1}, K_{2\times1}$$

بما أن عدد أعمدة المصفوفة J لا يساوي عدد صفوف المصفوفة K فإن مصفوفة حاصل الضرب $J.K$ غير معرفة .

اوجد الناتج في كل مما يلي إذا كان ذلك ممكنا :

$$\begin{bmatrix}1 & 6\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}-10\\ 6\end{bmatrix}$$ -٢١

$$=\begin{bmatrix}26\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}-3 & -7\\ -2 & -1\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}4 & 4\\ 9 & -3\end{bmatrix}$$ -23

$$=\begin{bmatrix}-75 & 9\\ -17 & -5\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}-1 & 0 & 6\\ -4 & -10 & 4\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}5 & -7\\ -2 & -9\end{bmatrix}$$ -25

المصفوفة الناتجة غير معرفة لان عدد أعمدة الأولى لا يساوي عدد صفوف الثانية.

$$\begin{bmatrix}2 & 9 & -3\\ 4 & -1 & 0\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}4 & 2\\ -6 & 7\\ -2 & 1\end{bmatrix}$$ -٢٧

$$=\begin{bmatrix}-40 & 64\\ 22 & 1\end{bmatrix}$$

٢٩b) المصفوفة المطلوبة هي ناتج ضرب مصفوفة تقسيمات الابنة في مصفوفة أسعار الغرف :

$$\begin{bmatrix}3 & 2 & 2\\ 2 & 3 & 1\\ 4 & 3 & 0\end{bmatrix}.\begin{bmatrix}220\\ 250\\ 360\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1880\\ 1550\\ 1630\end{bmatrix}$$

٢٩c) المبلغ المطلوب هو ١٨٨٠+١٥٥٠+١٦٣٠ = ٥٠٦٠ ريالا.

٣١) $PQR=\begin{bmatrix}-22 & 240\\ 44 & -12\end{bmatrix}$

$RQP=\begin{bmatrix}34 & -40\\ -220 & -44\end{bmatrix}$

$PQR \neq RQP$

٣٣) $R(P+Q)=\begin{bmatrix}34 & -6\\ -64 & -30\end{bmatrix}$

$PR+QR=\begin{bmatrix}22 & 72\\ 14 & -18\end{bmatrix}$

$R(P+Q) \neq PR+QR$

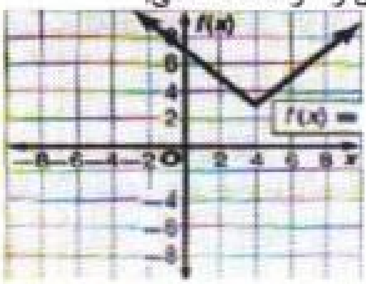
٤٣) رتبة المصفوفة B هي 6×8

٤٥) $A=\begin{bmatrix}1 & 1\\ 1 & 1\end{bmatrix}, B\begin{bmatrix}5 & 5\\ 5 & 5\end{bmatrix}$

٤٨) البديل الصحيح هو (A)

٤٩) البديل الصحيح هو (C)

٥٣) انسحاب ٤ وحدات لليمين و٣ وحدات للأعلى.



اختبار منتصف الفصل الثاني

حدد رتبة كل مصفوفة فيما يأتي :

١ - $\begin{bmatrix}7 & 6 & 5 & 4 & 3\end{bmatrix}$ الرتبة 1×5

٢ - $\begin{bmatrix}10 & -6 & 18 & 0\\ -7 & 5 & 2 & 4\\ 3 & 11 & 9 & 7\end{bmatrix}$ الرتبة 3×4

إذا كانت $A=\begin{bmatrix}4 & 3\\ -5 & 1\\ -3 & 7\end{bmatrix}$ ، $B=\begin{bmatrix}1 & -9 & 2\\ 0 & 10 & 4\end{bmatrix}$ فاوجد :

٣ - $a_{21} = -5$

٤ - $b_{22} = 10$

٥ - A) مبيعات الأسبوع الأول $\begin{bmatrix}25 & 14 & 18 & 5\\ 44 & 10 & 13 & 8\end{bmatrix}$

مصفوفة مبيعات الأسبوع الثاني $\begin{bmatrix}32 & 26 & 15 & 4\\ 18 & 38 & 17 & 2\end{bmatrix}$

B) مجموع مبيعات الأسبوعين هو :

$$\begin{bmatrix}25 & 14 & 18 & 5\\ 44 & 10 & 13 & 8\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}32 & 26 & 15 & 4\\ 18 & 38 & 17 & 2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}57 & 40 & 33 & 9\\ 62 & 48 & 30 & 10\end{bmatrix}$$

٦ - $$-3\begin{bmatrix}3 & 5 & 12\\ 0 & -1 & 3\\ 9 & 6 & -5\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-9 & -15 & -36\\ 0 & 3 & -9\\ -27 & -18 & 15\end{bmatrix}$$

٧ - $$2\begin{bmatrix}-1\\ 5\\ -6\end{bmatrix}+4\begin{bmatrix}-3x\\ 2\\ x\end{bmatrix}-3\begin{bmatrix}x-2\\ 3\\ 1\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}-2\\ 10\\ -12\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}-12x\\ 8\\ 4x\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}3x-6\\ 9\\ 3\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}-15x+4\\ 9\\ 4x-15\end{bmatrix}$$

٨ - البديل الصحيح هو $\begin{bmatrix}42 & 6\\ -4 & 12\end{bmatrix}$ (A)

٩ - $$\begin{bmatrix}-2 & 3\\ 1 & 6\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}3 & -1 & 4\\ 0 & 5 & 6\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-6 & 17 & -26\\ 3 & 29 & -32\end{bmatrix}$$

١٠ - $\begin{bmatrix}-4 & 0 & -1\\ 0 & 1 & 8\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}-1 & 0\\ 0 & 4\end{bmatrix}$ الناتج غير معرف

١١ - $$\begin{bmatrix}4 & -2 & -7\\ 6 & 3 & 5\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}-2\\ 5\\ 3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-39\\ 18\end{bmatrix}$$

١٣ - البديل الصحيح هو 4×2 (D)

١٤ - A) المصفوفة A التي تمثل عدد القمصان في المحل قبل مضاعفة العدد :

$$=\begin{bmatrix}10 & 10 & 15\\ 25 & 35 & 45\end{bmatrix}$$

B)العدد هو ٢ وتصبح المصفوفة التي تمثل الأسعار الجديدة :

$$M = \begin{bmatrix} 20 & 20 & 30 \\ 50 & 70 & 90 \end{bmatrix}$$

(C $\text{M-A} = \begin{bmatrix} 10 & 10 & 15 \\ 25 & 35 & 45 \end{bmatrix}$

وتمثل هذه المصفوفة عدد الزيادة في القمصان التي يجب تخزينها.

١٥ - البديل الصحيح هو $(A) [-12 \quad 8]$

2-4 المحددات وقاعدة كرامر

تذكر عزيزي الطالب/ تعلمت سابقا أن المصفوفة المربعة هي التي عدد صفوفها يساوي عدد أعمدتها.

مفهوم قيمة محددة الدرجة الثانية يساوي حاصل ضرب عنصري القطر الرئيسي مطروحا منه حاصل ضرب عنصري القطر الاخر.

بالرموز: $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - cb$

انتبه كل مصفوفة مربعة لها محددة.

مثال

جد قيمة المحددة فيما يأتي :

$$\begin{vmatrix} -6 & -7 \\ 10 & 8 \end{vmatrix} = -48 + 70 = 22$$

انتبه نعني بمحددات الدرجة الثالثة محددات المصفوفات التي من النوع 3×3 ويمكننا حساب محددات هذا النوع من المصفوفات عن طريق قاعدة الأقطار.

قاعدة الأقطار

١) نعيد كتابة العمود الاول والثاني الى يمين المحددة

٢) نوجد حاصل ضرب عناصر القطر الرئيسي وثلاثيات العناصر على الموازيات ثم نجمع.

٣) نوجد حاصل ضرب عناصر القطر الاخر وثلاثيات العناصر على الموازيات ثم نجمع.

٤) قيمة المحددة = ناتج الخطوة ٣ - ناتج الخطوة ٢.

مثال

جد قيمة $\begin{vmatrix} -5 & 9 & 4 \\ -2 & -1 & 5 \\ -4 & 6 & 2 \end{vmatrix}$ باستعمال قاعدة الأقطار

بإتباع خطوات قاعدة الأقطار:

١) $$\left|\begin{array}{ccc|cc} -5 & 9 & 4 & -5 & 9 \\ -2 & -1 & 5 & -2 & -1 \\ -4 & 6 & 2 & -4 & 6 \end{array}\right.$$

٢) $$\left|\begin{array}{ccc|cc} -5 & 9 & 4 & -5 & 9 \\ -2 & -1 & 5 & -2 & -1 \\ -4 & 6 & 2 & -4 & 6 \end{array}\right.$$

$10 - 180 - 48 = -218$

٣) $$\left|\begin{array}{ccc|cc} -5 & 9 & 4 & -5 & 9 \\ -2 & -1 & 5 & -2 & -1 \\ -4 & 6 & 2 & -4 & 6 \end{array}\right.$$

$16 - 150 - 36 = -170$

٤) $-218-(-170) = -48$

مفهوم

مساحة المثلث الذي إحداثيات رؤوسه (a,b) , (c,d) , (e,f) هي $|A|$ حيث :

$$A = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} a & b & 1 \\ c & d & 1 \\ e & f & 1 \end{vmatrix}$$

مثـــال

يقف خالد وسعد ورضوان عند ثلاث نقاط مختلفة على خريطة المدينة التي يسكنوها، فإذا كانت إحداثيات هذه النقاط هي $(3,15),(6,4),(11,9)$ بحيث تمثل كل وحدة على الخريطة $0.5km$ فما مساحة المنطقة المثلثة التي يقفون عند رؤوسها؟

$$A == \frac{1}{2}\begin{vmatrix} 1.5 & 7.5 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \\ 5.5 & 4.5 & 1 \end{vmatrix}$$

بتطبيق قاعدة الأقطار :

١) $$\left|\begin{array}{ccc|cc} 1.5 & 7.5 & 1 & 1.5 & 7.5 \\ 3 & 2 & 1 & 3 & 2 \\ 5.5 & 4.5 & 1 & 5.5 & 4.5 \end{array}\right.$$

$3+41.25+13.5 = 57.75$

$11 + 6.75 + 22.5 = 40.25$

$57.75 - 40.25 = 17.5$

$A = 0.5(17.5) = 8.75\ km^2$

مصفوفة المعاملات/ هي المصفوفة التي عناصرها معاملات المتغيرات في نظام معادلات بعدة متغيرات بعد ترتيب النظام.

لاحظ جيدا

اذا كانت قيمة المحددة لمصفوفة المعاملات لاتساوي صفرا فان للنظام حلا وحيدا واذا كانت قيمة المحددة صفرا فاما ان يكون للنظام عدد لانهائي من الحلول او لاحل له .

مفهوم قاعدة كرامر

هي طريقة لحل أنظمة المعادلات الخطية بحيث :

إذا كانت C مصفوفة المعاملات للنظام
$$\begin{aligned} ax + by &= m \\ fx + gy &= n \end{aligned}$$
حيث:

$$C = \begin{vmatrix} a & b \\ f & g \end{vmatrix}$$

فان حل النظام هو :

$$Y = \frac{\begin{vmatrix} a & m \\ f & n \end{vmatrix}}{|c|} \ , \ x = \frac{\begin{vmatrix} m & b \\ n & g \end{vmatrix}}{|c|}$$

بحيث تكون $C \neq ٠$

مثال

حل النظام الآتي باستعمال قاعدة كرامر :

$$7x + 3y = 37$$
$$-5x - 7y = -41$$

$$X = \frac{\begin{vmatrix} 37 & 3 \\ -41 & -7 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 7 & 3 \\ -5 & -7 \end{vmatrix}} = \frac{-259-(-123)}{-49-(15)} = \frac{-136}{-34} = 4$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 7 & 37 \\ -5 & -41 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 7 & 3 \\ -5 & -7 \end{vmatrix}} = \frac{-287-(-185)}{-49-(15)} = \frac{-102}{-34} = 3$$

حل النظام هو $(4 , 3)$.

استعمال قاعدة كرامر لحل نظام من ثلاث معادلات

هي طريقة لحل أنظمة المعادلات الخطية بحيث :

إذا كانت C مصفوفة المعاملات للنظام
$$\begin{aligned} ax + by + cz &= m \\ fx + gy + hz &= n \\ jx + ky + lz &= p \end{aligned}$$
حيث:

$$C = \begin{vmatrix} a & b & c \\ f & g & h \\ j & k & l \end{vmatrix}$$

فان حل النظام هو :

$$x = \frac{\begin{vmatrix} m & b & c \\ n & g & h \\ p & k & l \end{vmatrix}}{|c|} \ , \ y = \frac{\begin{vmatrix} a & m & c \\ f & n & h \\ j & p & l \end{vmatrix}}{|c|} \ , z = \frac{\begin{vmatrix} a & b & m \\ f & g & n \\ j & k & p \end{vmatrix}}{|c|}$$

بحيث تكون $|c| \neq ٠$

مثال

حل النظام الآتي باستعمال قاعدة كرامر :

$$6x + 5y + 2z = -1$$
$$-x + 3y + 7z = 12$$
$$5x - 7y - 3z = -52$$

$$X=\frac{\begin{vmatrix}-1 & 5 & 2\\ 12 & 3 & 7\\ -52 & -7 & -3\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}6 & 5 & 2\\ -1 & 3 & 7\\ 5 & -7 & -3\end{vmatrix}}=\frac{-1536}{384}=-4$$

$$y=\frac{\begin{vmatrix}6 & -1 & 2\\ -1 & 12 & 7\\ 5 & -52 & -3\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}6 & 5 & 2\\ -1 & 3 & 7\\ 5 & -7 & -3\end{vmatrix}}=\frac{1920}{384}=5$$

$$z=\frac{\begin{vmatrix}6 & 5 & -1\\ -1 & 3 & 12\\ 5 & -7 & -52\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}6 & 5 & 2\\ -1 & 3 & 7\\ 5 & -7 & -3\end{vmatrix}}=\frac{-384}{384}=-1$$

حل النظام هو $(-4,5,-1)$

تدريبات وحلول

جد قيمة كل محدد مما يأتي:

١- $\begin{vmatrix}8 & 6\\ 5 & 7\end{vmatrix}=56-30=26$

٢- $\begin{vmatrix}-4 & 12\\ 9 & 5\end{vmatrix}=-20-108=-128$

جد قيمة كل محددة مما يأتي باستعمال قاعدة الأقطار:

٥) $\begin{vmatrix}3 & -2 & 2\\ -4 & 2 & -5\\ -3 & 1 & 4\end{vmatrix}=$

$$\begin{vmatrix}3 & -2 & 2\\ -4 & 2 & -5\\ -3 & 1 & 4\end{vmatrix}\begin{matrix}3 & -2\\ -4 & 2\\ -3 & 1\end{matrix}=24-30-8=-14$$

$$\begin{vmatrix}3 & -2 & 2\\ -4 & 2 & -5\\ -3 & 1 & 4\end{vmatrix}\begin{matrix}3 & -2\\ -4 & 2\\ -3 & 1\end{matrix}=-12-15+32=5$$

$$-14-5=-19$$

7) $\begin{vmatrix}8 & 4 & 0\\ -2 & -6 & -1\\ 5 & -3 & 6\end{vmatrix}=$

$$\begin{vmatrix}8 & 4 & 0\\ -2 & -6 & -1\\ 5 & -3 & 6\end{vmatrix}\begin{matrix}8 & 4\\ -2 & -6\\ 5 & -3\end{matrix}=-288-20+6=-302$$

$$\begin{vmatrix}8 & 4 & 0\\ -2 & -6 & -1\\ 5 & -3 & 6\end{vmatrix}\begin{matrix}8 & 4\\ -2 & -6\\ 5 & -3\end{matrix}=-30+24-48=-54$$

$$-302+54=-248$$

استعمل قاعدة كرامر لحل كل نظام معادلات مما يأتي:

١١) $4x - 5y = 39$

$3x - 8y = -6$

$$X = \frac{\begin{vmatrix} 39 & -5 \\ -6 & 8 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 4 & -5 \\ 3 & 8 \end{vmatrix}} = \frac{312-(30)}{32-(-15)} = \frac{282}{47} = 6$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 4 & 39 \\ 3 & -6 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 4 & -5 \\ 3 & 8 \end{vmatrix}} = \frac{-24-(117)}{32-(-15)} = \frac{-141}{47} = -3$$

حل النظام هو $(6, -3)$.

١٤) $4x-2y+7z= 26$

$5x+3y-5z= -50$

$-7x -8y -3z = 49$

$$X = \frac{\begin{vmatrix} 26 & -2 & 7 \\ -50 & 3 & -5 \\ 49 & -8 & -3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 4 & -2 & 7 \\ 5 & 3 & -5 \\ -7 & -8 & -3 \end{vmatrix}} = \frac{1287}{-429} = -3$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 4 & 26 & 7 \\ 5 & -50 & -5 \\ -7 & 49 & -3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 4 & -2 & 7 \\ 5 & 3 & -5 \\ -7 & -8 & -3 \end{vmatrix}} = \frac{2145}{-429} = -5$$

$$z = \frac{\begin{vmatrix} 4 & -2 & 26 \\ 5 & 3 & -50 \\ -7 & -8 & 49 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 4 & -2 & 7 \\ 5 & 3 & -5 \\ -7 & -8 & -3 \end{vmatrix}} = \frac{-3872}{-429} = 4$$

حل النظام هو $(-3,-5,4)$

١٦) $6x-5y+2z= -49$

$-5x-3y-8z= -22$

$-3x +8y -5z = 55$

$$X = \frac{\begin{vmatrix} -49 & -5 & 2 \\ -22 & -3 & -8 \\ 55 & 8 & -5 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 6 & -5 & 2 \\ -5 & -3 & -8 \\ -3 & 8 & -5 \end{vmatrix}} = \frac{-1143}{381} = -3$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 6 & -49 & 2 \\ -5 & -22 & -8 \\ -3 & 55 & -5 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 6 & -5 & 2 \\ -5 & -3 & -8 \\ -3 & 8 & -5 \end{vmatrix}} = \frac{2667}{381} = 7$$

$$z = \frac{\begin{vmatrix} 6 & -5 & -49 \\ -5 & -3 & -22 \\ -3 & 8 & 55 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 6 & -5 & 2 \\ -5 & -3 & -8 \\ -3 & 8 & -5 \end{vmatrix}} = \frac{762}{381} = 2$$

حل النظام هو $(-3,7,2)$

جد قيمة كل محدد مما يأتي:

١٨)

$$\begin{vmatrix} -7 & 12 \\ 5 & 6 \end{vmatrix} = -42 - 60 = -102$$

٢٠)

$$\begin{vmatrix} -5 & 8 \\ -6 & -7 \end{vmatrix} = 35 + 48 = 83$$

٢٢)

$$\left|\begin{matrix} 2 & 0 & -6 \\ -3 & -4 & -5 \\ -2 & 5 & 8 \end{matrix}\right| \begin{matrix} \mathbf{2} & \mathbf{0} \\ \mathbf{-3} & \mathbf{-4} \\ \mathbf{-2} & \mathbf{5} \end{matrix}$$

باستعمال طريقة الأقطار :

١) $-64+0+90 = 26$

٢) $-48-50-0 = -98$

٣) $26 - 98 = 124$

٢٤)

$$\left|\begin{matrix} 6 & -3 & -5 \\ 0 & -7 & 0 \\ 3 & -6 & -4 \end{matrix}\right| \begin{matrix} 6 & -3 \\ 0 & -7 \\ 3 & -6 \end{matrix}$$

باستعمال طريقة الأقطار :

١) $168-0+0 = 168$

٢) $105 -0+0 = 105$

٣) $168-105 = 63$

٢٥)

$$\left|\begin{matrix} -8 & -3 & -9 \\ 0 & 0 & 0 \\ 8 & -2 & -4 \end{matrix}\right| \begin{matrix} -8 & -3 \\ 0 & 0 \\ 8 & -2 \end{matrix}$$

باستعمال طريقة الأقطار :

١) $0+0+0= 0$

٢) $0+0+0=0$

٣) $0-0 = 0$

استعمل قاعدة كرامر لحل كل نظام معادلات مما يأتي:

٢٨) $6x - 5y = 73$

$-7x + 3y = -71$

$$X = \frac{\begin{vmatrix} 73 & -5 \\ -71 & 3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 6 & -5 \\ -7 & 3 \end{vmatrix}} = \frac{219-355}{18-35} = \frac{-136}{-17} = 8$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 6 & 73 \\ -7 & -71 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 6 & -5 \\ -7 & 3 \end{vmatrix}} = \frac{-426+511}{18-35} = \frac{85}{-17} = -5$$

حل النظام هو $(8,-5)$.

٣٠) $-4c -5d = -39$

$5c - 8d = 54$

$$c = \frac{\begin{vmatrix} -39 & -5 \\ 54 & 8 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} -4 & -5 \\ 5 & 8 \end{vmatrix}} = \frac{-312+270}{-32+25} = \frac{-42}{-7} = 6$$

$$d = \frac{\begin{vmatrix} -4 & -39 \\ 5 & 54 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} -4 & -5 \\ 5 & 8 \end{vmatrix}} = \frac{-216+195}{-32+25} = \frac{-21}{-7} = 3$$

حل النظام هو $(6,3)$.

32) $5x-4y+6z = 58$
$-4x+6y+3z = -13$
$6x+3y+7z = 53$

$$X=\frac{\begin{vmatrix}58 & -4 & 6\\ -13 & 6 & 3\\ 53 & 3 & 7\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}5 & -4 & 6\\ -4 & 6 & 3\\ 6 & 3 & 7\end{vmatrix}} = \frac{-1228}{-307} = 4$$

$$z=\frac{\begin{vmatrix}5 & -4 & 58\\ -4 & 6 & -13\\ 6 & 3 & 53\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}5 & -4 & 6\\ -4 & 6 & 3\\ 6 & 3 & 7\end{vmatrix}} = \frac{-1535}{-307} = 5$$

حل النظام هو $(4,-2,5)$

٣٤) $A=\frac{1}{2}\begin{vmatrix}0 & 3 & 1\\ 4 & 7 & 1\\ 5 & 9 & 1\end{vmatrix}$

باستخدام قاعدة الأقطار نجد أن محددة المصفوفة = ٤

$A=\frac{1}{2}(4) = 2\ m^2$

٣٥) $6a-7b = -55$
$2a+4b-3c = 35$
$-5a-3b+7c = -37$

$$b=\frac{\begin{vmatrix}6 & -55 & 0\\ 2 & 35 & -3\\ -5 & -37 & 7\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}6 & -7 & 0\\ 2 & 4 & -3\\ -5 & -3 & 7\end{vmatrix}} = \frac{749}{107} = 7$$

حل النظام هو $(-1,7,-3)$

37) $4x-5y = -2$
$7x+3z = -47$
$8y-5z = -63$

$$X=\frac{\begin{vmatrix}-2 & -5 & 0\\ -47 & 0 & 3\\ -63 & 8 & -5\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}4 & -5 & 0\\ 7 & 0 & 3\\ 0 & 8 & -5\end{vmatrix}} = \frac{2168}{-271} = -8$$

$$y=\frac{\begin{vmatrix}4 & -2 & 0\\ 7 & -47 & 3\\ 0 & -63 & -5\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}4 & -5 & 0\\ 7 & 0 & 3\\ 0 & 8 & -5\end{vmatrix}} = \frac{1626}{-271} = -6$$

حل النظام هو $(-8,-6,3)$

٣٩) a) نفرض أن عدد العلب الصغيرة x

نفرض أن عدد العلب المتوسطة y

نفرض أن عدد العلب الكبيرة z

نظام المعادلات الذي يمثل الموقف :

$$1.15x + 1.75y + 2.25z = 2238.75$$
$$X - y + z = 1385$$
$$3y - z = 1385$$

باستعمال قاعدة كرامر لإيجاد عدد العلب التي أنتجها المصنع من كل حجم في ذلك اليوم :

$$X = \frac{\begin{vmatrix} 2238.75 & 1.75 & 2.25 \\ 1385 & 1 & 1 \\ 1385 & 3 & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1.15 & 1.75 & 2.25 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 1 \end{vmatrix}} = \frac{1755}{2.7} = 650$$

عدد العلب الصغيرة ٦٥٠ علبة.

$$z = \frac{\begin{vmatrix} 1.15 & 1.75 & 2238.75 \\ 1 & 1 & 1385 \\ 0 & 3 & 1385 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1.15 & 1.75 & 2.25 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 1 \end{vmatrix}} = \frac{1107}{2.7} = 410$$

عدد العلب الكبيرة ٤١٠ علبة.

b) في اليوم التالي :

$$X = 650 - 140 = 510$$
$$Y = 325 + 125 = 450$$
$$Z = 410 + 35 = 455$$

تكلفة الإنتاج :

$$1.25(510) + 1.75(450) + 2.25(455)$$

= ٢٤٢٦,٢٥ ريالا .

٤١) هناك عدد لانهائي من الحلول أو لا يوجد حل.

٤٣) a) $\begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 2 & 5 \end{bmatrix}$ b) $\begin{bmatrix} 4 & 3 \\ -3 & 4 \end{bmatrix}$ c) $\begin{bmatrix} -4 & -6 \\ -8 & -4 \end{bmatrix}$

٤٥) المساحة الجانبية للمخروط : πrl

$$L = \sqrt{52}$$

المساحة الجانبية : $= \pi \times 4 \times \sqrt{52}$

$$= 28.84\,\pi\, in^2$$

٤٦) البديل الصحيح (B) ١٤ وحدة مربعة.

٤٧) معرفة من الرتبة 4×6

٤٨) غير معرفة لان أعمدة المصفوفة الأولى لا يساوي صفوف الثانية.

٥٠)

$$X = \frac{\begin{vmatrix} -26 & -5 \\ -34 & 3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & -5 \\ 5 & 3 \end{vmatrix}} = \frac{-248}{31} = -8$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 2 & -26 \\ 5 & -34 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & -5 \\ 5 & 3 \end{vmatrix}} = \frac{62}{31} = 2$$

حل النظام $(-8, 2)$

2-5 النظير الضربي للمصفوفة وانظمة المعادلات الخطية

تذكر ان عددين من الاعداد الحقيقية يكون كلا منهما نظيرا ضربا للاخر اذا كان حاصل ضربهما هو العنصر المحايد لعملة الضرب

مصفوفة الوحدة هي مصفوفة مربعة بحيث اذا ضربت في اي مصفوفة اخرى من الرتبة نفسها كان الناتج هو المصفوفة الاخرى.

المصفوفة المحايدة لعملية الضرب

التعبير اللفظي: المصفوفة المحايدة لعملية الضرب I هي مصفوفة الوحدة وهي مصفوفة مربعة جميع عناصر قطرها الرئيسي 1. (من أعلى اليسار إلى أسفل اليمين) وباقي العناصر أصفار

لأي مصفوفة مربعة A لها رتبة مصفوفة الوحدة I نفسها،

فإن $A \cdot I = I \cdot A = A$.

الرموز: إذا كانت $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$، فإن $I = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ بحيث إن

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$

إذا كانت المصفوفتان A , B مربعتين ولهما الرتبة نفسها وكان $AB = BA = I$ فان المصفوفة B تسمى نظيرا ضربيا للمصفوفة A وكذلك تسمى المصفوفة A نظيرا ضربيا للمصفوفة B وإذا كان للمصفوفة A نظير ضربي فانه يرمز إليه بالرمز A^{-1} حيث :

$$A \cdot A = A^{-1}, A = I$$

النظير الضربي لمصفوفة :

هناك مصفوفات ليس لها نظير ضربي ونستطيع تحديد إذا كان لمصفوفة ما نظير ضربي أم لا باستعمال المحددات وذلك عن طريق الآتي :

النظير الضربي للمصفوفة $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ هو :

$$A^{-1} = \frac{1}{ad-bc}\begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix} \quad \text{حيث} \quad da\text{-}bc \neq 0$$

لاحظ أن ad - bc هي قمة محددة A لذا فلذا كانت قيمة محددة مصفوفة ما تساوي صفراً فليس للمصفوفة نظير ضربي.

لاحظ يمكن استعمال المصفوفات لتمثيل نظام من معادلات وحله اذا كان لمصفوفة المعاملات نظير ضربي.

انتبه إذا لم يكن لمصفوفة المعاملات نظير ضربي فان النظام ليس له حل أو له عدد لانهائي من الحلول.

مثال

أنفقت عائشة في معرض للكتب ١١٢,٥ ريالا لشراء ثلاث كتب علمية و ٤ كتب ثقافية على حين أنفقت فاطمة ١٥٧,٥ ريالا لشراء ٣ كتب علمية و ١٠كتب ثقافية فإذا كانت الكتب العلمية تباع بالسعر نفسه x والكتب الثقافية تباع بالسعر نفسه y فما سعر الكتاب العلمي ؟

نظام المعادلات هو :

$$3x + 4y = 112.5$$

$$3x + 10y = 157.5$$

المعادلة المصفوفية هي :

$$\begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 3 & 10 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 112.5 \\ 157.5 \end{bmatrix}$$

نوجد النظير الضربي لمصفوفة المعاملات :

$$= \frac{1}{18} \begin{bmatrix} 10 & -4 \\ -3 & 3 \end{bmatrix}$$

نضرب طرفي المعادلة المصفوفية في النظير الضربي لمصفوفة المعاملات :

$$\frac{1}{18} \begin{bmatrix} 10 & -4 \\ -3 & 3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 3 & 10 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \frac{1}{18} \begin{bmatrix} 10 & -4 \\ -3 & 3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 112.5 \\ 157.5 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.55 & -0.22 \\ -0.16 & 0.16 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 112.5 \\ 157.5 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 27.3 \\ 7.2 \end{bmatrix}$$

سعر الكتاب العلمي x = ٢٧,٣ ريالا

تدريبات وحلول

حدد إذا كانت كل من المصفوفتين تمثل نظيرا ضربيا للأخرى فيما يلي :

١) $A=\begin{bmatrix}2 & 1\\ -1 & 0\end{bmatrix}, B=\begin{bmatrix}1 & 2\\ 2 & 1\end{bmatrix}$

$$\begin{bmatrix}2 & 1\\ -1 & 0\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}1 & 2\\ 2 & 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}4 & 5\\ -1 & -2\end{bmatrix}\neq I$$

لا تمثل أي من المصفوفتين نظير ضربي للأخرى.

جد النظير الضربي للمصفوفة التالية إن وجد :

٣) $A=\begin{bmatrix}6 & -3\\ -1 & 0\end{bmatrix}$

$$A^{-1}=\frac{1}{-3}\begin{bmatrix}0 & 3\\ 1 & 6\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}0 & -1\\ \frac{-1}{3} & -2\end{bmatrix}$$

استعمل معادلة مصفوفية لحل كل نظام فيما يأتي:

٥) $-2X+Y=9$

$X+Y=3$

المعادلة المصفوفية هي :

$$\begin{bmatrix}-2 & 1\\ 1 & 1\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}x\\ y\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}9\\ 3\end{bmatrix}$$

نوجد النظير الضربي لمصفوفة المعاملات :

$$=\frac{1}{-3}\begin{bmatrix}1 & -1\\ -1 & -2\end{bmatrix}$$

نضرب طرفي المعادلة المصفوفية في النظير الضربي لمصفوفة المعاملات :

$$\frac{1}{-3}\begin{bmatrix}1 & -1\\ -1 & -2\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}-2 & 1\\ 1 & 1\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}x\\ y\end{bmatrix}=\frac{1}{-3}\begin{bmatrix}1 & -1\\ -1 & -2\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}9\\ 3\end{bmatrix}$$

حدد إذا كانت كل من المصفوفتين تمثل نظيرا ضربيا للأخرى فيما يلي :

10) $M=\begin{bmatrix}0 & 2\\ 4 & 5\end{bmatrix}, N=\begin{bmatrix}1 & 1\\ 0 & 0\end{bmatrix}$

$$\begin{bmatrix}0 & 2\\ 4 & 5\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}1 & 1\\ 0 & 0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & 4\\ 0 & 4\end{bmatrix}\neq I$$

لا تمثل أي من المصفوفتين نظير ضربي للأخرى.

١٤) $A=\begin{bmatrix}1 & -1\\ -6 & -1\end{bmatrix}$

$$A^{-1}=\frac{1}{-7}\begin{bmatrix}-1 & 1\\ 6 & 1\end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{1}{7} & \frac{1}{-7} \\ \frac{6}{-7} & \frac{1}{-7} \end{bmatrix}$$

٢١) $4X + 2Y = 6$

٦$X - 3Y = 9$

المعادلة المصفوفية هي :

$$\begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 6 & -3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 \\ 9 \end{bmatrix}$$

نوجد النظير الضربي لمصفوفة المعاملات :

$$= \frac{1}{-24} \begin{bmatrix} -3 & -2 \\ -6 & 4 \end{bmatrix}$$

نضرب طرفي المعادلة المصفوفية في النظير الضربي لمصفوفة المعاملات :

$$= \frac{1}{-24} \begin{bmatrix} -3 & -2 \\ -6 & 4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 6 & -3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} == \frac{1}{-24} \begin{bmatrix} -3 & -2 \\ -6 & 4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 6 \\ 9 \end{bmatrix} =$$

٢٣) $-X + 4Y = -2$

$-X + 3Y = 6$

المعادلة المصفوفية هي :

$$\begin{bmatrix} -1 & 4 \\ -1 & 3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 \\ 6 \end{bmatrix}$$

نوجد النظير الضربي لمصفوفة المعاملات :

نضرب طرفي المعادلة المصفوفية في النظير الضربي لمصفوفة المعاملات :

$$\begin{bmatrix} 3 & -4 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -1 & 4 \\ -1 & 3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & -4 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -2 \\ 6 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -30 \\ -8 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -30 \\ -8 \end{bmatrix}$$

٢٥) نسبة المهاجرين   نسبة الباقين

$$\begin{bmatrix} 0.95 & 0.05 \\ 0.97 & 0.03 \end{bmatrix}$$

٢٦) هاجر جوابها صحيح .

٣١) البديل الصحيح (C) ٢٤

33) $\begin{vmatrix} 9 & -7 \\ -5 & -3 \end{vmatrix} = -27 - 35 = -62$

٣٤) $\begin{vmatrix} 8 & 6 & -1 \\ -4 & 5 & 1 \\ -3 & -2 & 9 \end{vmatrix} \begin{matrix} 8 & 6 \\ -4 & 5 \\ -3 & -2 \end{matrix}$

باستخدام طريقة الأقطار:

١. $360 - 18 - 8 = 334$

٢. $15 - 16 - 216 = -217$

٣. $344 + 217 = 551$

٣٦) دالة تربيعية.

٣٧) دالة قيمة مطلقة.

٣٨) دالة ثابتة.

اختبار الفصل الثاني

حدد العناصر التالية للمصفوفة :

$$\begin{bmatrix} 2 & 2 & 7 \\ 9 & 1 & 1 \\ 8 & 0 & 8 \end{bmatrix}$$

١) $a_{22} = 1$ ٢) $a_{31} = 8$

جد الناتج في كل مما يأتي إذا كان ذلك ممكنا :

٣)
$$-3\begin{bmatrix} 4a \\ 0 \\ -3 \end{bmatrix} + 4\begin{bmatrix} -2 \\ 3 \\ -1 \end{bmatrix}$$
$$= \begin{bmatrix} -12a \\ 0 \\ 9 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -8 \\ 12 \\ -4 \end{bmatrix}$$
$$= \begin{bmatrix} -12a - 8 \\ 12 \\ 5 \end{bmatrix}$$

٥)
$$\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ -3 & 5 \\ 1 & 4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 3 \\ -2 \end{bmatrix}$$
$$= \begin{bmatrix} 6 \\ -19 \\ -5 \end{bmatrix}$$

٦)
$$\begin{bmatrix} -5 & 7 \\ 6 & 8 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 4 & 0 & -2 \\ 9 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

لا يمكن إجراء عملية الطرح لان رتب المصفوفتين مختلفة.

٧) a) مصفوفة عدد الكتب المبيعة : $\begin{bmatrix} 20 & 32 & 14 \end{bmatrix}$

مصفوفة التكلفة لكل كتاب : $\begin{bmatrix} 100 \\ 90 \\ 130 \end{bmatrix}$

مصفوفة تكلفة الكتب الكلية :

$$\begin{bmatrix} 20 & 32 & 14 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 100 \\ 90 \\ 130 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6700 \end{bmatrix}$$

تكلفة الكتب الكلية = ٦٧٠٠ ريالا.

b) مصفوفة المبلغ الكلي الذي تحصل عليه المكتبة من بيع ذلك العدد من الكتب :

$$\begin{bmatrix} 20 & 32 & 14 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 120 \\ 110 \\ 150 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8020 \end{bmatrix}$$

المبلغ الذي تحصل عليه المكتبة = 8020 ريالا.

c) $\begin{bmatrix} 8020 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 6700 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1320 \end{bmatrix}$ ربح المكتبة = ١٣٢٠ ريالا.

٩)استعمل المحددات لإيجاد مساحة المثلث XYZ الذي رؤوسه x(1,2),y(3,6),z(-1,4)

$$A = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 6 & 1 \\ -1 & 4 & 1 \end{vmatrix}\begin{matrix} 1 & 2 \\ 3 & 6 \\ -1 & 4 \end{matrix}$$

باستعمال قاعدة الأقطار :

- $6 - 2 + 12 = 16$
- $-6 + 4 + 6 = 4$
- $16 - 4 = 12$
- $A = \frac{1}{2}\,(12) = 6$
- مساحة المثلث = ٦ وحدات مربعة.

١٠)البديل الصحيح هو (A) -٤٤

جد النظير الضربي لكل مصفوفة فيما يأتي إن وجد :

١١) $\begin{bmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

$$A^{-1} = \frac{1}{5}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 5 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{1}{5} & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

١٢) $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$

$$A^{-1} = \frac{1}{-3}\begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{-1}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} & \frac{-1}{3} \end{bmatrix}$$

١٣) $\begin{bmatrix} 6 & 3 \\ 8 & 4 \end{bmatrix}$

محدد المصفوفة $0 = 24 - 24$

لا يوجد للمصفوفة نظير ضربي.

استعمل قاعدة كرامر لحل كل نظام مما يلي :

١٥) $2X - Y = -9$

$X + 2Y = 8$

$$X = \frac{\begin{vmatrix} -9 & -1 \\ 8 & 2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}} = \frac{-18+8}{4+1} = \frac{-10}{5} = -2$$

$$Y = \frac{\begin{vmatrix} 2 & -9 \\ 1 & 8 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}} = \frac{25}{5} = 5$$

حل النظام هو (2,5-).

١٦) $x-y+2z = 0$

$3x+z = 11$

$-x+2y = 0$

$$X = \frac{\begin{vmatrix} 0 & -1 & 2 \\ 11 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 3 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & 0 \end{vmatrix}} = \frac{44}{11} = 4$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 3 & 11 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 3 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & 0 \end{vmatrix}} = \frac{22}{11} = 2$$

$$z = \frac{\begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 3 & 0 & 11 \\ -1 & 2 & 0 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 3 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & 0 \end{vmatrix}} = \frac{-11}{11} = 1$$

حل النظام هو $(4,2,-1)$

اختبار تراكمي

اختر الإجابة الصحيحة فيما يأتي :

١ - الحل: (B) $H - L$

٢ - الحل: (B) $[-1]$

٣ - الحل: (C) $f(x) = |3x| + 1$

٤ - الحل: (D) 61.5 وحدة مربعة.

٥ - الحل: (A) $4x+2y \geq 8$, $3x+4y \leq 12$, $2x-6y <$ ١٢

٦ - الحل: (A) 4×2

٧ - الحل: (B) $f(x) = |-x + 1|$

٨ - الحل: محدد المصفوفة $0 = 18 + 18-$ لا يوجد للمصفوفة نظير ضربي.

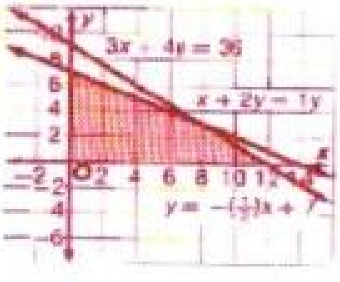
١١ A) الحل: $d + q = 14$

$D + 0.5q = 10.5$

b) الحل :

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0.1 & 0.25 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} d \\ q \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 14 \\ 2.75 \end{bmatrix}$$

١٢ الحل:



١) نوجد قيمة الدالة عند كل رأس :

(x,y)	$F(x,y)$
$(0\ ,\ 0)$	0
$(0\ ,\ 7)$	84
$(12\ ,\ 0)$	96
$(8\ ,\ 3)$	100

٢) من الجدول السابق ومن الرسم نلاحظ أن القيمة العظمى للدالة هي 100 عند النقطة $(8,3)$.

١٣ -**الحل:**

يمكن ضرب مصفوفتين إذا كان عدد أعمدة المصفوفة الأولى يساوي عدد صفوف المصفوفة الثانية فمثلا لو كانت المصفوفة A من الرتبة 4×2 والمصفوفة B من الرتبة $3\times$٤ فان المصفوفة ABهي مصفوفة معرفة من الرتبة 3×2

الفصل الثالث

كثيرات الحدود ودوالها

- الأعداد المركبة
- القانون العام والمميز
- العمليات على كثيرات الحدود
- قسمة كثيرات الحدود
- دوال كثيرات الحدود
- حل معادلات كثيرات الحدود
- نظريتا الباقي والعوامل
- الجذور و الأصفار
- نظرية الصفر النسبي

التهيئة للفصل الثالث

حلول اختبار سريع

أعد كتابة الطرح على صورة جمع:

١- $-5 - 13$
$= -5 + (-13)$

٣- $5mr - 7\,mp$
$5m + (-7)mp$

٥- حضر ٢٠ شخصا محاضرة ثم غادروا القاعة في مجموعة ثنائية فغادرت منهم x مجموعة . اكتب عدد الأشخاص الباقين على صورة جمع

الحل: $20 + (-2x)$

استعمل خاصية التوزيع لإعادة كل عبارة فيما يأتي دون أقواس :

٦) $-4(a+5)$
$= -4a - 20$

7) $-1(3b^2 + 2b - 1)$
$= -3b^2 - 2b + 1$

١٠) $15(8+18)$
$= 15(8) + 15(18)$
$= 390$ دفع المعلم ٣٩٠ ريالا.

حل كل معادلة فيما يأتي :

١١) $x^2 + 2x - 8 = 0$
بحل المعادلة بطريقة إكمال المربع :
$X = -4,\ x = 2$

١٣) $x^2 - x - 20 = 0$
بحل المعادلة بطريقة إكمال المربع :
$X = -4,\ x = 5$

3-1 الأعداد المركبة

الوحدة التخيلية:

الجذر التربيعي الأساسي للعدد -١ أي $\sqrt{-1}=i$

الأعداد التخيلية البحتة

هي جذور تربيعية لأعداد حقيقية سالبة لأي عدد حقيقي موجب مثل b فإن :

$$\sqrt{-b^2} = \sqrt{b^2} \,.\, \sqrt{-1}$$

مثال

بسط ما يلي : $\sqrt{-18}$

$$\sqrt{-18} = \sqrt{-1\ .9.2}$$
$$= \sqrt{9}\ .\ \sqrt{-1}\,.\sqrt{2}$$
$$= 3i\,\sqrt{2}$$

انتبه: الأعداد التخيلية البحتة تحقق خاصيتي التجميع والإبدال على عملية الضرب.

جدول يوضح بعض قوى (i)

$i^1= i$	$i^2= -1$	$i^3= -i$	$i^4= 1$
$i^5= i$	$i^6= -1$	$i^7= -i$	$i^8= 1$

مثال

بسط ما يلي : $3i\ .\ 4i$

$$3i.4i=12i^2$$
$$= 12\ (-1)$$
$$= -12$$

$$i^{31}$$

$$i^{6^5}\,.i = (-1)^5.\,i = -i$$

العدد المركب

هو عدد مكون من جزأين أحدهما حقيقي والاخر تخيلي ويمكن كتابته على الصورة : a + bi

حيث a,b عددان حقيقيان ، i عدد تخيلي.

ملاحظات هامة

- $b=0$ ← العدد المركب عدد حقيقي.
- $b\neq 0$ ← العدد المركب عدد تخيلي.
- $a=0$ ← العدد المركب عدد تخيلي بحت.

متى يتساوى عددان مركبان؟

إذا وفقط إذا تساوى الجزأين الحقيقيين والجزأين التخيليين.أي :

$a=c\ ,\ b=d$ عندما $a+bi = c+di$

مثال

أوجد قيمتي x,y اللتين تجعلان المعادلة :

$5x+1+(3+2y)i = 2x-2+(y-6)i$ صحيحة

الجزء الحقيقي :

$$5x+1 = 2x-2$$
$$5x-2x = -2-1$$
$$3x = -3$$
$$X = -1$$

الجزء التخيلي:

$$(3+2y)i = (y-6)i$$
$$3+2y = y-6$$
$$2y-y = -6-3$$
$$Y = -9$$

انتبه عند جمع الأعداد المركبة وطرحها فإننا نجمع الأجزاء الحقيقية معا والأجزاء التخيلية معا.

مثال

بسط ما يلي : $(-2+5i)+(1-7i)$

$$(-2+1)+(5i-7i)$$
$$= -1-2i$$

ملاحظة هامة:

تستعمل في مسائل الكهرباء الرمز j للدلالة على الوحدة التخيلية بدلا من الرمز i الذي يمثل شدة التيار.

مثال

أوجد فرق الجهد لتيار متردد شدته $2-4j$ أمبير و معاوقته $3-2j$ أوم ؟

$$V = C . I$$
$$V = (2-4j) . (3-2j)$$
$$6-4j-12j+8j^2$$
$$= 6-16j-8$$
$$= -2-16j$$ فولت

العددين المترافقين

يسمى العددان $a + bi$ ، $a - bi$ عددان مترافقان مركبان ناتج ضربهما عدد حقيقي دائما

مثال

بسط ما يلي: $\frac{-2i}{3+5i}$

$$\frac{-2i}{3+5i} \cdot \frac{3-5i}{3-5i}$$
$$= \frac{-6i+10i^2}{9+25}$$
$$= \frac{-6i-10}{34}$$
$$= \frac{-10}{34} - \frac{6}{34}I$$
$$= \frac{-5}{17} - \frac{3}{17}I$$

تدريبات وحلول

بسط ما يلي :

١) $\sqrt{-81}$

$= \sqrt{-1 \times 81}$

$= \sqrt{-1} . 9$

$= 9i$

٥) (i^{40})

$= i^{75} + i^{5}$

$= (-i^{5}) . i^{5}$

$= -i . i$

$= 1$

٧) حل كل معادلة مما يأتي:

$4x^2 + 32 = 0$

$4x^2 = -32$

$x = \pm \sqrt{-8}$

$x = \pm 2i\sqrt{2}$

بسط ما يلي :

١١) $(-1+5i)+(-2-3i)$

$= -3 + 2i$

١٣) $(6-8i)(9+2i)$

$= 54 + 12i - 72i - 16i^2$

$= 70 - 60i$

١٥) $\frac{3-i}{4+2i}$

$= \frac{3-i}{4+2i} \times \frac{4-2i}{4-2i}$

$= \frac{12 - 6i - 4i - 2}{16 + 4}$

$= \frac{10 - 10i}{20}$

$= \frac{1}{2} - \frac{1}{2} i$

١٧) $5-3j + (7 + 9j)$

$= 12 + 6j$

١٨) $\sqrt{-121}$

$= \sqrt{-1 \times 121}$

$= \sqrt{-1} . 11$

$= 11i$

٢٠) $\sqrt{-100}$

$= \sqrt{-1 \times 100}$

$= \sqrt{-1}\,.\,10$

$= 10i$

٢٢) $(-3i)(-7i)(2i)$

$= 42i^2$

$= -42i$

٢٤) (i^{11})

$= i^{2^5} + i$

$= (-1^5).i$

$= -i$

٢٦) $(-3+i) + (-4-i)$

$= -7 + 0 = -7$

٢٨) $(1+2i)(1-2i)$

$= 1 - 2i + 2i - 4i^2$

30) $(4-i)(6-6i)$

$= 24 - 24i - 6i + 6i^2$

$= 24 - 30i - 6$

$= 18 - 30i$

٣٢) $\frac{5}{2+4i}$

$= \frac{5}{2+4i} \times \frac{2-4i}{2-4i} = \frac{10-20i}{4-16i^2} = \frac{10-20i}{20} = \frac{1}{2} - i$

٣٦) $2x^2 + 10 = 0$

$2x^2 = -10$

$x^2 = -5$

$X = \pm\sqrt{-5}$

$X = \pm i\sqrt{-5}x$

٣٨) $x + 1 + 2yi = 3 - 6i$

$X + 1 = 3$

$X = 3 - 1 = 2$

$2y = -6$

$Y = -3$

٤٠) $5 + y + (3x-7)I = 9 - 3i$

$5 + y = 9$

$Y = 5$

$3x - 7 = -3$

$X = \frac{4}{3}$

٤٢) $\sqrt{-10} \times \sqrt{-24}$

$= \sqrt{-240}$

$= \sqrt{-16 \times 15}$

$= -4\sqrt{15}$

٤٤) $i^{41} = i^{5^8} \times i$

$= 1^5 \times i = i$

٤٨) $(1+i)(2+3i)(4-3i)$

$2+3i+2i+3i^2(4-3i)$

$= 2+5i-3(4-3i)$

$= (-1+5i)(4-3i)$

$= -4+23i+15$

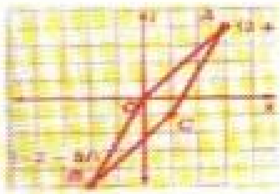
$= 11+23i$

٥٤) $3x^2+(2+6i)x-8i+ix^2-(4+5i)x+7$

$= (3+i)x^2+(-2+i)-8i+7$

٥٦) A

C



٥٧) صفاء جوابها صحيح لأن :

$(2i)(3i)(4i) = -24i$

٥٩) الإجابة صحيحة دائما لأن أي عدد مثل ٧ يمكن تمثيله بالعدد المركب $7+0i$

٦٢) البديل الصحيح (A) $X=6, Y=7$

٦٣) البديل الصحيح (B) 9^2

٦٤) بطريقة إكمال المربع نجد أن $X = -5, \frac{3}{2}$

٦٧) $X+Y=-3$

$XY=-40$

$Y=-3-X$

بالتعويض:

$X(-3-X)=-40$

$-3X+X^2 = -40$

بطريق إكمال المربع :

$X=-8, 5$

٦٩) نعم

٧١) لا

3-2 القانون العام والمميز

القانون العام لحل المعادلات التربيعية :

يمكن حل المعادلة التربيعية المكتوبة على الصورة :

باستعمال القانون :

$$X=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

مثال

حل المعادلة $x^2+6x-16=0$ باستعمال القانون العام

$a=1, b=6, c=-16$

$$x=\frac{-6\pm\sqrt{36-(4\times1\times-16)}}{2}$$

$$=\frac{-6\pm\sqrt{100}}{2}$$

$$=\frac{-6\pm10}{2}$$

$x=2$ or $x=-8$

ملاحظة:

يكون للمعادلة جذر نسبي واحد عندما يكون ما تحت الجذر في القانون العام يساوي صفر.

مثال

حل المعادلة $x^2-16x+64=0$ باستعمال القانون العام

$a=1, b=-16, c=64$

$$x=\frac{+16\pm\sqrt{256-(4\times1\times64)}}{2}$$

$$=\frac{16\pm\sqrt{0}}{2}$$

$$=\frac{16\pm0}{2}$$

$x=8$

لاحظ: **يمكنك عزيزي الطالب التعبير عن الجذور التربيعية الغير نسبية بكتابتها على الصورة الجذرية.**

انتبه **إذا كان ما تحت الجذر في القانون العام عدد سالب فان الحلين يكونان عددين مركبين مترافقين.**

تذكر جيدا: الصورة القياسية للعدد المركب هي $a+bi$

مثال

حل المعادلة $x^2 - 4x = -13$، باستعمال القانون العام

$a=1 , b=-4 , c=13$

$$x=\frac{4\pm\sqrt{16-(4\times1\times13)}}{2}$$

$$=\frac{4\pm\sqrt{-36}}{2}$$

$$=\frac{4\pm6i}{2}$$

$$x=2\pm 3i$$

مفهوم المميز

تسمى العبارة تحت الجذر b^2-4ac بالمميز وتستعمل لتحديد عدد جذور المعادلة التربيعية ونوعها وللتأكد من عدد الحلول وأنواعها بعد حل المعادلة التربيعية باستخدام القانون العام.

مثال

أوجد قيمة المميز للمعادلة التالية وحدد عدد الجذور ونوعها

$-5x^2 + 8x - 1 = 0$.

$a=-5 , b=8 , c=-1$

$$b^2 - 4ac = 64 - (4 \times -5 \times -1)$$

$$= 64 - 22$$

$$= 44 > 0$$

← المميز موجب والعبارة ليست مربع كامل

← يوجد جذران حقيقيان غير نسبيين.

طرق حل المعادلات التربيعية

الطريقة	إمكانية استعمالها	حالات استعمالها
التمثيل البياني	أحياناً	عندما لا يتطلب إيجاد الحل الدقيق، وتحصر استعمال لها عند التحقق من معقولية الحلول التي يتم إيجادها بالطرائق الجبرية
التحليل إلى العوامل	أحياناً	عندما يساوي الحد الثالث صفراً، أو عندما يكون من السهل إيجاد العوامل مثال: $x^2 - 7x = 0$
خاصية الجذر التربيعي	أحياناً	مع المعادلات المكتوبة على صورة مربع كامل يساوي ثابتاً مثال: $(x - 5)^2 = 18$
إكمال المربع	دائماً	مع المعادلات المكتوبة على الصورة $x^2 + bx + c = 0$، حيث b عدد زوجي. مثال: $x^2 + 6x - 14 = 0$
القانون العام	دائماً	عندما لا يمكن استعمال بقية الطرائق أو عندما يكون من الصعب استعمالها مثال: $2.3x^2 - 1.8x + 9.7 = 0$

تدريبات وحلول

حل كل معادلة مما يأتي باستعمال القانون العام :

١- $x^2 + 12x - 9 = 0$.

$a=1 , b=12 , c=-9$

$$x = \frac{-12 \pm \sqrt{144-(4\times1\times-9)}}{2}$$

$$= \frac{-12 \pm \sqrt{108}}{2}$$

$$x = -6 \pm 3\sqrt{5}$$

٥- $10x^2 - 13x - 3 = 0$.

$a=10 , b=-13 , c=-3$

$$x = \frac{13 \pm \sqrt{169-(4\times10\times-3)}}{20}$$

$$= \frac{13 \pm \sqrt{49}}{20}$$

$$= \frac{13 \pm 7}{20}$$

$x = 1$ or $x = 0.3$

9- بحل المعادلة التربيعية لإيجاد الزمن عند $h=0$

$-16t^2 - 64t + 60 = 0$.

$$t = \frac{64 \pm \sqrt{4096-(4\times-16\times60)}}{-32}$$

$$= \frac{64 \pm 89}{-32}$$

$t = -4.78$ or $t = 0.78$

نأخذ الإجابة الموجبة لان الزمن لا يكون سالب $t = 0.78$

أجب عن الفرعين a, b لكل معادلة تربيعية فيما يأتي :

a) أوجد قيمة المميز   b) أوجد عدد الجذور وحدد أنواعها

11) $2x^2 - 6x + 9 = 0$.

$a=2 , b=-6 , c=9$

$$b^2 - 4ac = 36 - (4 \times 2 \times 9)$$

$= -36$

← المميز سالب

← يوجد جذران مركبان.

13) $5x^2 + 2x + 4 = 0$.

$a=5 , b=2 , c=4$

$$b^2 - 4ac = 4 - (4 \times 5 \times 4)$$

$= -76$

← المميز سالب   ← يوجد جذران مركبان.

حل كل معادلة مما يأتي باستعمال القانون العام :

-١٤ $x^2 + 45x + 200 = 0$.

$a=1 , b=45 , c=200$

$x=\dfrac{-45\pm\sqrt{2025-(4\times1\times200)}}{2}$

$=\dfrac{-45\pm\sqrt{1225}}{2}$

$=\dfrac{-45\pm35}{2}$

$x=-5 \quad or \quad x=-40$

-١٨ $5x^2 - 11x - 9 = 0$.

$a=5 , b=-11 , c=-9$

$x=\dfrac{11\pm\sqrt{121-(4\times5\times-9)}}{10}$

$=\dfrac{11\pm\sqrt{301}}{10}$

=١,٧٦ ثانية (نستبعد الإجابة السالبة)

أجب عن الفرعين a,b لكل معادلة تربيعية فيما يأتي :

a) أوجد قيمة المميز

b) أوجد عدد الجذور وحدد أنواعها

25) $3x^2 - 3x + 8 = 0$.

$a=3 , b=-3 , c=8$

$b^2 - 4\,a\,c = 9 - (4\times3\times8)$

$= -87$

← المميز سالب

← يوجد جذران مركبان

← الحل : $\dfrac{3\pm i\sqrt{87}}{6}$

29) $-3x^2 - 7x - 4 = 0$

$a=3 , b=-7 , c=-4$

$b^2 - 4\,a\,c = 49 - (4\times-3\times-4)$

$= 1$

← المميز موجب ← يوجد جذران نسبيان. ← الحل : $x=1,\dfrac{-4}{3}$

32) $-6x^2 + 4x - 3 = 0$.

$a=-6 , b=4 , c=-3$

$b^2 - 4\,a\,c = 16 - (4\times-6\times-3)$

$= 16 - 72$

$= -56$

← المميز سالب ← يوجد جذران مركبا ← الحل : $\dfrac{2\pm i\sqrt{14}}{6}$

38) $-4x^2 + 6x + 20 = 0$.

$a=-4, b=6, c=20$

$$b^2 - 4ac = 36 - (4 \times -4 \times 20)$$
$$= 36 + 320$$
$$= 356$$

← المميز موجب

← يوجد جذران غير نسبيين.

← الحل : $\frac{3 \pm \sqrt{89}}{4}$

40) $S = \frac{1}{2}n(n+1)$.

بالتعويض عن S بـ (٦٦٦):

$$666 = \frac{1}{2}n(n+1)$$

بضرب المعادلة في (٢):

$$1332 = n(n-1)$$
$$1332 = n^2 + n$$
$$n^2 - n - 1332 = 0$$
$$N = \frac{-1 \pm \sqrt{1-(4\times1\times-1332)}}{2}$$
$$= \frac{-1 \pm \sqrt{5329}}{2}$$
$$= \frac{-1 \pm 73}{2}$$
$$N = 36$$

تم استبعاد الإجابة السالبة لان عدد الأرقام لا يمكن أن يكون بالسالب .

٤١) إجابة هدى صحيحة وإجابة لولوه خاطئة لان لولوه عوضت عن قيمة c بالعدد ٧ بينما هي -٧

٤٣) a) صحيحة دائما.

b) صحيحة أحيانا.

٤٥) البديل الصحيح (B) ٢٠ ريالا.

٤٦) البديل الصحيح (D) ١١٠ .

3-3 العمليات على كثيرات الحدود

تذكر:
نعني بعملية تبسيط عبارات تتضمن قوى إعادة كتابتها دون أقواس أو أسس سالبة.

انتبه
الأسس السالبة هي طريقة للتعبير عن النظير الضربي لعدد ما.

خصائص الأسس

ملخص المفهوم — خصائص الأسس

لأي عددين حقيقيين x, y وعددين صحيحين a, b،

الخاصية	التعريف	مثال
ضرب القوى	$x^a \cdot x^b = x^{a+b}$	$3^2 \cdot 3^4 = 3^{2+4} = 3^6$ $p^2 \cdot p^9 = p^{2+9} = p^{11}$
قسمة القوى	$\frac{x^a}{x^b} = x^{a-b}$ ، حيث $x \neq 0$	$\frac{9^5}{9^2} = 9^{5-2} = 9^3$ $\frac{b^6}{b^4} = b^{6-4} = b^2$
الأس السالب	$x^{-a} = \frac{1}{x^a}$ ، $\frac{1}{x^{-a}} = x^a$ ، حيث $x \neq 0$	$3^{-5} = \frac{1}{3^5}$ $\frac{1}{b^{-7}} = b^7$
قوة القوة	$(x^a)^b = x^{ab}$	$(3^3)^2 = 3^{3\cdot 2} = 3^6$ $(d^2)^4 = d^{2\cdot 4} = d^8$
قوة ناتج الضرب	$(xy)^a = x^a y^a$	$(2k)^4 = 2^4k^4 = 16k^4$ $(ab)^3 = a^3b^3$
قوة ناتج القسمة	$\left(\frac{x}{y}\right)^a = \frac{x^a}{y^a}, y \neq 0,$ $\left(\frac{x}{y}\right)^{-a} = \left(\frac{y}{x}\right)^a = \frac{y^a}{x^a}, x \neq 0, y \neq 0$	$\left(\frac{x}{y}\right)^3 = \frac{x^3}{y^3}$ $\left(\frac{a}{b}\right)^{-n} = \frac{b^n}{a^n}$
القوة الصفرية	$x^0 = 1, x \neq 0$	$7^0 = 1$

وحيدة الحد: هي عدد أو متغير أو عبارة ناتجة عن ضرب متغير أو أكثر وأسسها أعداد صحيحة غير سالبة.

متى تكون وحيدة الحد في ابسط صورة

١) عندما لاتتضمن قوى القوة.
٢) عندما يظهر كل اساس مرة واحدة فقط.
٣) عندما تكون جميع الكسور المتضمنة في ابسط صورة.
٤) عندما لاتتضمن اسس سالبة.

مثال

بسط كل عبارة فيما يلي :

a) $(2x^{-3}y^3)(-7x^5y^{-6})$.

$\frac{2}{x^3} . y. y. y(-7)(x^5)\left(\frac{1}{y^6}\right)$

$= \frac{-14x^2}{y^3}$

b) $\left(\frac{a^{-3}}{4}\right) = \left(\frac{4^3}{a}\right) = \frac{64}{a^3}$

درجة كثيرة الحدود :

هي درجة وحيدة الحد ذات الدرجة الأكبر.

مثال

استثمر فيصل مبلغ ٩٠٠٠٠ ريال في مشروعين احدهما صناعي نسبة ربحه السنوي ١٨% والآخر في مشروع عقاري نسبة ربحه السنوي ٤٢% فإذا كانت x تمثل المبلغ الذي استثمره فيصل في المشروع العقاري فاكتب كثيرة حدود تمثل ربحه في المشروعين بعد عام واحد.

الربح في المشروع الصناعي : $90000(0.18) = 16200$

نسبة الربح في المشروعين: $42 - 18 = 24$

الربح بعد عام واحد: $16200 + 24x$

تدريبات وحلول

بسط كل عبارة فيما يلي مفترضا ا ن ايا من المتغيرات لا يساوي صفرا :

1) $(2a^3b^{-2})(-4a^2b^4)$.

$= 2. a. a. a. \frac{1}{b.b} . -4. a. a. b. b. b. b$

$= -8\,a^5\,b^2$

3) $\left(\frac{2a^2}{3b}\right)^3 = \frac{8a^6}{27b^3}$

٥)نعم كثيرة حدود من الدرجة ١ ٧) ليست كثيرة حدود لأنها تحتوي $\sqrt{x}$

بسط كل عبارة فيما يلي:

٩) $(x^2 - 5x + 2) - (3x^2 + x - 1)$

$= x^2 - 5x + 2 - 3x^2 - x + 1$

$= -2x^2 - 6x + 3$

11) $3x^2\,(2xy - 3xy^2 + 4x^2y^3)$

$= 6x^3y - 9x^3y^2 + 12\,x^4y^3$

١٣) كثيرة الحدود التي تمثل عدد السعرات الحرارية التي حرقها في ممارسته للرياضتين ذلك اليوم : $750 - 2.5x$

٢١) لا تمثل كثيرة حدود لأنها تحتوي $\sqrt{n}$

٢٣) $4x\,(2x^2 + y)$

$= 8\,x^3 + 4xy$

٣٢) $(-3x^3y)^2(4xy^2)$

$= (9x^6y^2)(4xy^2)$

$= 36x^7y^4$

٣٤) $\frac{1}{4}\, g^2(8g + 12h - 16gh^2)$

$= 2g^3 + 3g^2h - 4g^3h^2$

٣٧) $(n^2 - 7)(2n^3 + 4)$

$= 2n^5 + 4n^2 - 14n^3 - 28$

٣٩) $(3z-2)^3$

$= (3z-2)(3z-2)(3z-2)$

$= 9z^2 - 6z - 6z + 4(3z - 2)$

$= 9z^2 - 12z + 4(3z - 2)$

$= 27z^3 - 18z^2 - 36z^2 + 24z + 12z - 8$

$= 27z^3 - 54z^2 + 36z - 8$

٤٢) $4k+5 = 41$

$4k = 41-5$

$K = \frac{36}{4} = 9$

٤٧) $(x^3)^4 = \frac{x^{24}}{x^{12}} = x^6 \times x^6$ ٥٠) البديل الصحيح (C) $X - 1$

3-4 قسمة كثيرات الحدود

خوارزمية القسمة

هي عملية مشابهة للقسمة المطولة لقسمة كثيرة حدود على كثيرة حدود أخرى.

انتبه قد ينتج باق عن قسمت كثيرتي حدود كما في قسمة الأعداد الكلية.

مفهوم القسمة التركيبية

هي طريقة مبسطة لقسمة كثيرة حدود على ثنائية حد.

خطوات القسمة التركيبية

1) نكتب معاملات المقسوم بعد ترتب حدوده تنازليا.
2) تأكد ان المقسوم عليه على الصورة x-r واكتب الثابت r في الصندوق والمعامل الأول أسفل الخط الأفقي.
3) نضرب المعامل الأول في r ونكتب الناتج أسفل المعامل الثاني.
4) نجمع ناتج الضرب مع المعامل الثاني.
5) تكرر الخطوتين ٣، ٤ حتى نصل الى ناتج جمع العدد في العمود الأخير.

<u>لاحظ جيدا أيها الطالب</u> : الأعداد في الصف الأخير تمثل معاملات ناتج القسمة ودرجة الحد الأول اقل بواحد من درجة المقسوم والعدد الأخير هو الباقي.

مثـــال

استعمل القسمة التركيبية لإيجاد ناتج :

a) $(2x^3 + 3x^2 - 4x + 15) \div (x + 3)$

١) نكتب معاملات المقسوم ونكتب الثابت في الصندوق وهو هنا (3-) ثم نكتب المعامل الأول ٢ أسفل الخط الأفقي.

$$\begin{array}{r|rrrr} -3 & 2 & 3 & -4 & 15 \\ \hline & 2 & & & \end{array}$$

٢) نضرب المعامل الأول في الثابت 3- ليصبح الناتج (6-= 2×3-) ونكتب الناتج أسفل المعامل الثاني ٣ .

$$\begin{array}{r|rrrr} -3 & 2 & 3 & -4 & 15 \\ & & -6 & & \\ \hline & 2 & & & \end{array}$$

٣) نجمع ناتج الضرب مع المعامل الثاني ونكتب الناتج أسفل الخط .

$$\begin{array}{r|rrrr} -3 & 2 & 3 & -4 & 15 \\ & & -6 & & \\ \hline & 2 & -3 & & \end{array}$$

٤) نضرب المجموع وهو 3- في الثابت 3- فيكون الناتج ٩ نكتبها أسفل المعامل الثالث ثم نجمع 5=9+4- نضرب المجموع وهو ٥ في الثابت 3- فنحصل على 15- نكتبه تحت المعامل التالي ثم نجمع لنحصل على صفر وهو هنا الباقي.

$$\begin{array}{r|rrrr} -3 & 2 & 3 & -4 & 15 \\ & & -6 & 9 & -15 \\ \hline & 2 & -3 & 5 & 0 \end{array}$$

ناتج القسمة هو $2x^2 - 3x + 5$ والباقي صفر

b) $4a^4 + 2a^2 - 4a + 12) \div (a + 2)$

$$\begin{array}{r|rrrrr} -2 & 4 & 0 & 2 & -4 & 12 \\ & & -8 & 16 & -36 & 80 \\ \hline & 4 & -8 & 18 & -40 & 92 \end{array}$$

ناتج القسمة هو $4a^3 - 8a^2 + 18a - 40 + \frac{92}{a+2}$

ملاحظة هامة جدا

لاجراء القسمة التركيبية يجب ان يكون المقسوم عليه على الصورة x-r واذا كان معامل x في المقسوم عليه لايساوي واحد فيجب اعادة كتابة عبارة القسمة بحيث يمكن استعمال القسمة التركيبية لايجاد ناتج القسمة.

تدريبات وحلول

بسط كل عبارة فيما يأتي :

١) $\frac{4xy^2-2xy+2x^2y}{xy}=\frac{4xy^2}{xy}-\frac{2xy}{xy}+\frac{2x^2y}{xy}$

$= 4y-2+2x$

6) $(y^5-3y^2-20)\div(y-2)$

٢	1	0	0	-3	0	-20
		2	4	8	10	20
	1	2	4	5	10	0

ناتج القسمة هو $y^4+2y^3+4y^2+5y+10$

٧) أي مما يأتي يكافئ المقدار : $(x^2-3x-9)(4-x)^{-1}$

٤	-1	-3	9
		-4	-28
	-1	-7	-19

ناتج القسمة هو $-x-7-\frac{19}{x-4}$ البديل الصحيح (A)

بسط كل عبارة مما يلي :

9) $(18a^2+6a+9)\div(3a-2)$

نقسم كلا من البسط والمقام على معامل a وهو هنا ٣ لتصبح عملية القسمة.

$(6a^2+2a+3)\div\left(a-\frac{2}{3}\right)$

$\frac{2}{3}$	6	2	3
		4	4
	6	6	7

ناتج القسمة $6a+6+\frac{21}{3a-2}$

نقسم كلا من البسط والمقام على معامل y وهو هنا ٩ لتصبح عملية القسمة.

$\left(3y^2+3y-\frac{30}{9}\right)\div\left(y-\frac{2}{3}\right)$

$\frac{2}{3}$	3	3	$\frac{-30}{9}$
		2	$\frac{10}{3}$
	3	5	0

ناتج القسمة $3y+5$

١٢) $\frac{24a^3b^2-16a^2b^3}{8ab}=\frac{24a^3b^2}{8ab}-\frac{16a^2b^3}{8ab}$

$=3a^2b-2ab^2$

۱۸) يقدر عدد أرغفة الخبز التي ينتجها مخبز في اليوم بالعبارة :
$-w^2 + 16w + 1000$ حيث w عدد العاملين في المخبز اقسم العبارة المعطاة على w
لتجد معدل عدد الأرغفة التي ينتجها العامل الواحد:

$$\frac{-w^2+16w+1000}{w} = -w + 16 + \frac{1000}{w}$$

۲۲) $(x^5 - 4x^3 + 4x^2) \div (x-4)$

٤]	1	0	-4	4	0	0
		4	16	48	208	832
	1	4	12	52	208	832

ناتج القسمة هو $x^4 + 4x^3 + 12x^2 + 52x + 208 + \frac{832}{x-4}$

۲٤) $(g^4 - 3g^2 - 18) \div (g-2)$

۲]	1	0	-3	0	-18
		2	4	2	4
	1	2	1	2	-14

ناتج القسمة هو $g^3 + 2g^2 + g + 2 - \frac{14}{g-2}$

(26 $\frac{6x^5 + 5x^4 + x^3 - 3x^2 + x}{3x+1}$

نقسم كلا من البسط والمقام على معامل x وهو هنا 3 لتصبح عملية القسمة.

$$\frac{2x^5+\frac{5}{3}x^4+\frac{1}{3}x^3-x^2+\frac{1}{3}x}{x+\frac{1}{3}}$$

$\frac{-1}{3}$]	2	$\frac{5}{3}$	$\frac{1}{3}$	-1	$\frac{1}{3}$	0
		$\frac{-2}{3}$	$\frac{-1}{3}$	0	$\frac{1}{3}$	$\frac{-2}{9}$
	2	1	0	-1	$\frac{2}{3}$	$\frac{-2}{9}$

ناتج القسمة $4x^4 + x^3 - x + \frac{2}{3} - \frac{2}{9x-3}$

۲۸) $(6z^6 + 3z^4 - 9z^2)(3z-6)^{-1}$

نقسم كلا من البسط والمقام على معامل z وهو هنا 3 لتصبح عملية القسمة:

$(2z^6 + z^4 - 3z^2)(z-2)^{-1}$

۲]	2	0	1	0	-3	0	0
		4	8	18	36	66	132
	2	4	9	18	33	66	132

ناتج القسمة هو $2z^5 + 4z^4 + 9z^3 + 18z^2 + 33z + 66 + \frac{132}{x-2}$

يرتبط فرق الجهد للتيار V بشدة التيار I والقدرة p بالمعادلة $V = \frac{P}{I}$ فإذا عبر عن القدرة بالدالة
$P(t) = t^3 + 9t^2 + 26t + 24$ وشدة التيار بالمعادلة:
$I = t + 4$ فاكتب عبارة تمثل فرق الجهد V

الحل:

$$V=\frac{t^3+9t^2+26t+24}{t+4}$$

$$\begin{array}{r|rrrr} -4 & 1 & 9 & 26 & 24 \\ & & -4 & -20 & -24 \\ \hline & 1 & 5 & 6 & 0 \end{array}$$

ناتج القسمة هو $V(t)=t^2+5t+6$

بسط كل عبارة فيما يلي :

٣٤) $\frac{n^3+3n^2-5n-4}{n+4}$

$$\begin{array}{r|rrrr} -4 & 1 & 3 & -5 & -4 \\ & & -4 & 4 & 4 \\ \hline & 1 & -1 & -1 & 0 \end{array}$$

ناتج القسمة هو $=n^2-n-1$

٣٦)

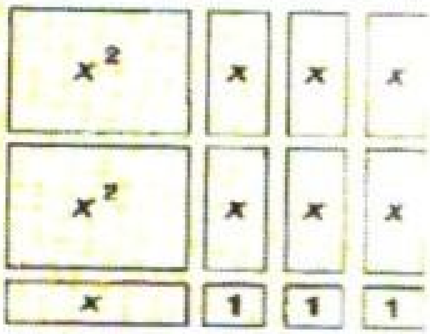
$$(3z^5+5z^4+z+5)\ \div (z+2)$$

$$\begin{array}{r|rrrrrr} -2 & 3 & 5 & 0 & 0 & 1 & 5 \\ & & -6 & 2 & -4 & 8 & -18 \\ \hline & 3 & -1 & 2 & -4 & 9 & -13 \end{array}$$

ناتج القسمة هو

$$3z^4-z^3+2z^2-4z+9-\frac{13}{z+2}$$

٣٨) a.



b. $(2x^2+\ 7x+3\ )\ \div (\ 2x+1)$

c. بحل المعادلة بطريقة القسمة التركيبية نحصل على : x + 3 وهذا يتفق مع الحل باستخدام البطاقات الجبرية.

٤٠) ثنائية الحد عامل من عوامل كثيرة الحدود.

٤٣) $\frac{5}{x^2}$ تختلف عن الباقي لأنها تحتوي في المقام على x^2 بينما باقي العبارات كثيرات حدود.

٤١) درجة ناتج القسمة + درجة المقسوم عليه = درجة المقسوم.

٤٥) البديل الصحيح (C) $-10\,x^2+17\,X$

46) البديل الصحيح (D) $1+x+x^2$

3-5 دوال كثيرات الحدود

كثيرة الحدود بمتغير واحد

هي عبارة جبرية على الصورة :

$$a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x^1 + a_0$$

حيث $a_n , a_{n-1} , a_1 , a_0$ أعداد حقيقية ، $a_n \neq 0$ ، n عدد صحيح غير سالب.

الصورة القياسية لكثيرة حدود

تكون كثيرة الحدود مكتوبة على الصورة القياسية اذا كانت اسس المتغير في حدودها مرتبة ترتيبا تنازليا

درجة كثيرة الحدود : هي أس المتغير ذي أكبر أس فيها.

المعامل الرئيس : هو معامل الحد الأول في كثيرة الحدود المكتوبة بالصورة القياسية.

مثـــال

حدد الدرجة والمعامل الرئيس لكل كثيرة حدود فيما يأتي وإذا لم تكن كثيرة حدود فاذكر السبب

a) $5x^3 - 4x^2 - 8x + \frac{4}{x}$

ليست كثيرة حدود لأنها تحتوي في المقام متغير

b) $5x^6 - 3x^4 + 12x^3 - 14$

كثيرة حدود بمتغير واحد من الدرجة ٦ والمعامل الرئيس فيها هو ٥ .

دالة كثيرة الحدود

هي دالة متصلة يمكن وصفها بمعادلة كثيرة حدود بمتغير واحد وتكتب أبسطها على الصورة $f(x) = bx^a$ حيث b عدد حقيقي لايساوي صفر ، a عدد صحيح غير سالب وتسمى دوال القوة.

انتبه إذا علمت عنصر في مجال دالة كثيرة الحدود فانك تستطيع معرفة القيمة المقابلة له في المدى.

مثـــال

إذا كانت $g(x) = x^2 - 5x + 8$ فأوجد ما يلي :

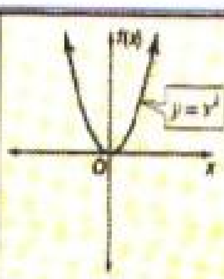
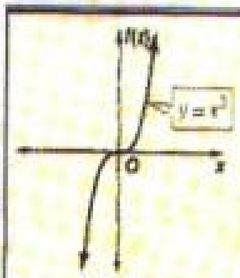
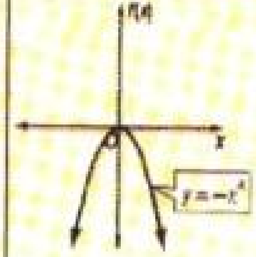
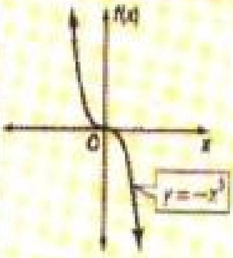
$$G(5a-2) + 3g(2a)$$

- $G(5a-2) = (5a-2)^2 - 5(5a-2) + 8$
  $= 25a^2 - 20a + 4 - 25a + 10 + 8$
  $= 25a^2 - 45a + 22$
- $3g(2a) = 3\{(2a)^2 - 5(2a) + 8\}$
  $= 3(4a^2 - 10a + 8)$
  $= 12a^2 - 30a + 24$

$$G(5a-2) + 3g(2a) = 37a^2 - 75a + 46$$

ملاحظة هامة

تمثيل دوال كثيرات الحدود بيانيا يظهر اكبر عدد من المرات التي يقطع فيها هذا التمثيل المحور x وهذا العدد يمثل درجة كثيرة الحدود.

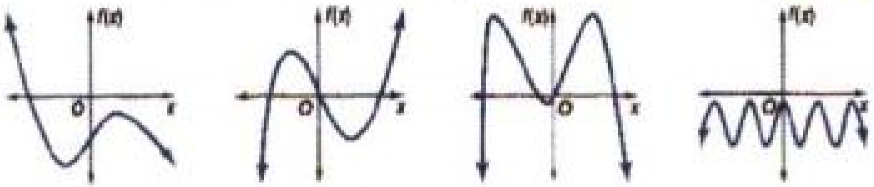
الدرجة : زوجية **المعامل الرئيس :** موجب.  **المجال:** مجموعة الأعداد الحقيقية. **المدى :** مجموعة الأعداد الحقيقية الأكبر من أو التي تساوي القيمة الصغرى . **سلوك طرفي التمثيل البياني :** $f(x) \to +\infty$ عندما $x \to -\infty$ $f(x) \to +\infty$ عندما $x \to +\infty$	**الدرجة :** فردية **المعامل الرئيس :** موجب.  **المجال:** مجموعة الأعداد الحقيقية. **المدى :** مجموعة الأعداد الحقيقية. **سلوك طرفي التمثيل البياني :** $f(x) \to -\infty$ عندما $x \to -\infty$ $f(x) \to +\infty$ عندما $x \to +\infty$
الدرجة : زوجية **المعامل الرئيس :** سالب  **المجال:** مجموعة الأعداد الحقيقية **المدى :** مجموعة الأعداد الحقيقية الأقل من أو التي تساوي القيمة العظمى. **سلوك طرفي التمثيل البياني :** $f(x) \to -\infty$ عندما $x \to -\infty$ $f(x) \to -\infty$ عندما $x \to +\infty$	**الدرجة :** فردية **المعامل الرئيس :** سالب  **المجال:** مجموعة الأعداد الحقيقية **المدى :** مجموعة الأعداد الحقيقية **سلوك طرفي التمثيل البياني :** $f(x) \to +\infty$ عندما $x \to -\infty$ $f(x) \to -\infty$ عندما $x \to +\infty$

تذكر عزيزي الطالب:

مقاطع المحور (x) تحدد أصفار دالة كثيرة الحدود وعدد مرات تقاطع التمثيل البياني مع محور (x) يمثل عدد هذه الأصفار.

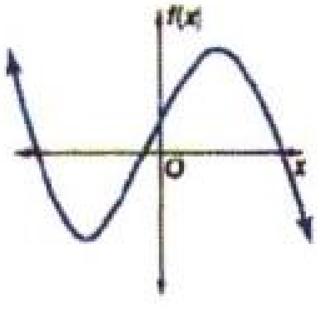
مفهوم

يكون للدوال الفردية الدرجة عدد فردي من الاصفار المنتمية الى ح بينما يكون للدوال الزوجية الدرجة عدد زوجي من الاصفار او لايكون لها اصفار تنتمي الى ح .



ليس لها أصفار تنتمي لمجموعة الأعداد الحقيقية — لها 4 أصفار تنتمي لمجموعة الأعداد الحقيقية — لها 3 أصفار تنتمي لمجموعة الأعداد الحقيقية — لها صفر واحد ينتمي لمجموعة الأعداد الحقيقية

مثال



أجب عما يلي للتمثيل البياني التالي :

- صف سلوك طرفي التمثيل البياني.
- حدد إذا كانت درجة دالة كثيرة الحدود فردية أم زوجية.
- اذكر عدد أصفار الدالة المنتمية لمجموعة الأعداد الحقيقية.

الحل :

$F(x) \to +\infty$ عندما $x \to -\infty$

$F(x) \to -\infty$ عندما $x \to +\infty$

بما أن سلوك طرفي التمثيل البياني في اتجاهين مختلفين فالدالة فردية الدرجة ، ويقطع التمثيل البياني للدالة محور السينات في ثلاث نقاط لذا يكون للدالة ثلاثة أصفار حقيقية.

تدريبات وحلول

حدد الدرجة والمعامل الرئيس لكل كثيرة حدود فيما يأتي وإذا لم تكن كثيرة حدود فاذكر السبب :

1) $11x^6 - 5x^5 + 4x^2$

كثيرة حدود من الدرجة السادسة والمعامل الرئيس فيها ١١ .

3) $14x^4 - 9x^3 + 3x - 4y$

ليست كثيرة حدود لأنها تحتوي متغيران هما x, y

أوجد $w(5), w(-4)$ للدالة :

٥) $w(x) = -2x^3 + 3x - 12$

$$w(5) = -2(5)^3 + 3(5) - 12 = -247$$

$$w(-4) = -2(-4)^3 + 3(-4) - 12 = 104$$

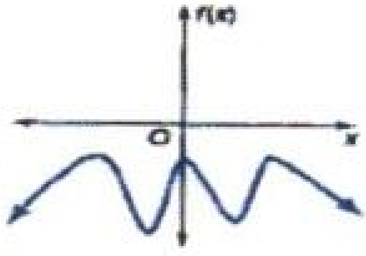
إذا كانت $c(x) = 4x^3 - 5x^2 + 2$, $d(x) = 3x^2 + 6x - 10$ فأوجد قيمة كل مما يلي :

٧) $c(y^3) = 4y^3 - 5y^6 + 2$

أجب عما يلي للتمثيل البياني التالي :

- صف سلوك طرفي التمثيل البياني.
- حدد إذا كانت درجة دالة كثيرة الحدود فردية أم زوجية.
- اذكر عدد أصفار الدالة المنتمية لمجموعة الأعداد الحقيقية.

١٢)



الحل :

$F(x) \to -\infty$ عندما $x \to -\infty$

$F(x) \to -\infty$ عندما $x \to +\infty$

بما أن سلوك طرفي التمثيل البياني في الاتجاه نفسه فالدالة زوجية الدرجة ، ولا يقطع التمثيل البياني للدالة محور السينات في أي نقاط لذا لا يوجد للدالة أصفار حقيقية.

حدد الدرجة والمعامل الرئيس لكل كثيرة حدود فيما يأتي وإذا لم تكن كثيرة حدود فاذكر السبب :

14) $3a^7 - 4a^4 + \frac{3}{a}$

ليست كثرة حدود لأنها تحوي متغير في المقام .

16) $-12 - 8x^2 + 5x - 21x^7$

كثيرة حدود بمتغير واحد من الدرجة ٧ والمعامل الرئيس هو -٢١ .

18) $(5-2y)(4+3y)$

$$= 20 + 15y - 8y - 6y^2$$

$$= 20 + 7y - 6y^2$$

كثيرة حدود بمتغير واحد من الدرجة ٢ والمعامل الرئيس هو -٦ .

(20 $7x^4 + 3x^7 - 2x^8 + 7$

كثيرة حدود بمتغير واحد من الدرجة 8 والمعامل الرئيس هو -٢ .

أوجد $p(3), p(-6)$ للدالة :

(٢١ $p(x) = x^4 - 2x^2 + 3$

$p(3) = (3)^4 - 2(9) + 3 = 66$

$p(-6) = (-6)^4 - 2(36) + 3 = 1227$

(٢٣ $p(x) = -x^3 + 3x^2 - 5$

$p(3) = -(3)^3 + 3(9) - 5 = -5$

$p(-6) = -(-6)^3 + 3(36) - 5 = 319$

ذا كانت $c(x) = 2x^2 - 4x + 3$, $d(x) = -3x^3 + x + 1$ فأوجد قيمة كل مما يلي :

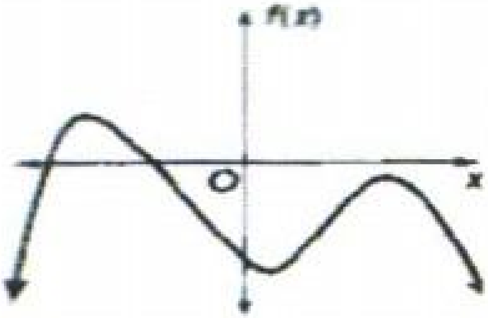
(٢٥ $c(3a) = 2(3a)^2 - 4(3a) + 3$

$= 18a^2 - 12a + 3$

(27 $c(b^2) = 2(b^2)^2 - 4b^2 + 3$

$= 4b^4 - 4b^2 + 3$

(٣٣



الحل :

$x \to -\infty$ عندما $F(x) \to -\infty$

$x \to +\infty$ عندما $F(x) \to -\infty$

بما أن سلوك طرفي التمثيل البياني في الاتجاه نفسه فالدالة زوجية الدرجة ، و يقطع التمثيل البياني للدالة محور السينات في نقطتين لذا يوجد للدالة صفرين حقيقيين.

(٣٤ $KE(\delta) = 0.5\, mv^2$

$= 0.5\,(171)\,(11^2)$

= 10345.5 جول

أوجد $p(8), p(-2)$ للدالة :

(36 $p(x) = \frac{1}{8}x^4 - \frac{3}{2}x^3 + 12x - 18$

$p(-2) = \frac{1}{8}(-2)^4 - \frac{3}{2}(-8) + 12(-2) - 18 = -28$

$p(8) = \frac{1}{8}(8)^4 - \frac{3}{2}(512) + 12(8) - 18 = -178$

٣٩) التمثيل البياني الصحيح (D)

٤١) التمثيل البياني الصحيح (A)

٤٨) a . * التقاطع مع محور x عند 2 , 1- , 3 , 4-
* التقاطع مع محور y ٢٤
* الجذور 2 , 1- , 3 , 4-
* درجة كثيرة الحدود ٤
* سلوك طرفي تمثيلها البياني :
$F(x) \to +\infty$ عندما $x \to -\infty$
$F(x) \to +\infty$ عندما $x \to +\infty$
b. $g(x) = x^4 - 15x^2 + 10x + 24$
٥٠) $g(x) = 2x^5 + 6x^4$
$F(x) \to -\infty$ عندما $x \to -\infty$
$F(x) \to +\infty$ عندما $x \to +\infty$

٥٢) إجابة ماجد صحيحة لان الدالة الزوجية لها عدد زوجي من الاصفار والجذر المكرر مرتين يعبر عن صفرين.

اختبار منتصف الفصل الثالث

١ - الحل: $\sqrt{-81} = \sqrt{-1}.\sqrt{81} = 9i$
٢ - الحل: $(15-3i) - (4-12i)$
$= 15-3i-4+12i = 11+9i$
٣ - الحل: $i^{5^7} . i^2 = i$
٤ - الحل: $\frac{3-2i}{2+5i} . \frac{2-5i}{2-5i} = \frac{6-15i-2i-5}{4+25} = \frac{1-17i}{29}$
٥ - الحل: $x = \frac{8 \pm \sqrt{64-(4\times1\times9)}}{2}$
$= \frac{8 \pm \sqrt{100}}{2}$
$= \frac{8 \pm 10}{2}$
$x = 9$ or $x = -1$

٧- الحل: $-6x^5y^2$

٨-الحل: $12rt^2 - 4rt$
٩- الحل: $\frac{a^2}{2b^2a^2}$

٩ - الحل: $\frac{b^4r^6}{b^2r^8} = \frac{b^2}{r^2}$
١٠ - $-2m^2 - 9m + 6$
١١ - البديل الصحيح هو $6x^2 + X - 1$ (C)

-١٤

٥	3	-16	9	-24
		15	-5	20
	3	-1	4	-4

ناتج القسمة هو $3x^2 - x + 4 - \frac{4}{x-5}$

-١٦

-٣	1	3	-2	-4	10
		-3	0	6	-6
	1	0	-2	2	4

ناتج القسمة هو $x^3 - 2x + 2 + \frac{4}{x+3}$

١٧- $F(x) \to +\infty$ عندما $x \to -\infty$

$F(x) \to -\infty$ عندما $x \to +\infty$

بما أن سلوك طرفي التمثيل البياني في اتجاهين مختلفين فالدالة فردية الدرجة ، و يقطع التمثيل البياني للدالة محور السينات في ثلاث نقاط لذا يوجد للدالة ٣ أصفار حقيقية.

١٨- $P(-3) = \frac{2}{3}(-27) + \frac{1}{3}(9) - 5(-3)$

$= -18 + 3 + 15 = 0$

١٩- البديل الصحيح هو $-a^2 - 9a + 2$ (D)

٢٠- $L(4) = \frac{8(16)}{\pi^2} = \frac{128}{\pi^2} = \frac{128}{9.78} = 12.97ft$

٢١- $P(18) = \frac{18^3}{1000} = \frac{5832}{1000} = 5.832$ وحدة

3-6 حل معادلات كثيرات الحدود

تذكر عزيزي الطالب:

يمكننا تحليل كثيرات الحدود التربيعية إلى مجموع مربعين أو الفرق بين مربعين.

مجموع مكعبين والفرق بينهما:

مجموع مكعبين $a^3 + b^3 = (a+b)(a^2 - ab + b^2)$

الفرق بين مكعبين $a^3 - b^3 = (a-b)(a^2 + ab + b^2)$

انتبه إذا لم يمكننا تحليل كثيرة حدود فإنها تسمى كثيرة حدود أولية.

مثال

حل كثيرة الحدود التالية : $5y^2 - 320yz^3$

$= 5y\,(y^3 - 64z^3)$

$= 5y(y-4z)\,(y^2 + 4yz + 16z^2)$

طرق تحليل كثيرات الحدود

ملخص المفهوم

طرائق التحليل

عدد الحدود	طريقة التحليل	الحالة العامة
أي عدد	إخراج العامل المشترك الأكبر	$4a^3b^2 - 8ab = 4ab(a^2b - 2)$
حدان	الفرق بين مربعين مجموع مكعبين الفرق بين مكعبين	$a^2 - b^2 = (a+b)(a-b)$ $a^3 + b^3 = (a+b)(a^2 - ab + b^2)$ $a^3 - b^3 = (a-b)(a^2 + ab + b^2)$
ثلاثة حدود	ثلاثية حدود المربع الكامل	$a^2 + 2ab + b^2 = (a+b)^2$ $a^2 - 2ab + b^2 = (a-b)^2$
	ثلاثية الحدود بالصورة العامة	$acx^2 + (ad + bc)x + bd = (ax+b)(cx+d)$
أربعة حدود أو أكثر	تجميع الحدود	$ax + bx + ay + by = x(a+b) + y(a+b)$ $= (a+b)(x+y)$

مثال

حل كثيرة الحدود التالية :

$$30ax - 24bx + 6cx - 5ay^2 + 4by^2 - cy^2$$
$$= 6x(5a - 4b + c) - y^2(5a - 4b + c)$$
$$= (6x - y^2)(5a - 4b + c)$$

انتبه الطريقة الوحيدة لتحليل كثيرات الحدود المكونة من أربعة حدود أو أكثر هي تجميع الحدود.

الصورة التربيعية لكثيرة حدود

بحيث $a \neq 0$ و a, b, c أعداد حقيقية ،ويمكن أن نكتب بعض كثيرات الحدود التي تتضمن المتغير x على هذه الصورة وذلك بعد تعريف u بدلالة x.

انتبه هناك بعض كثيرات الحدود لا يمكن كتابتها على الصورة التربيعية.

مثال

اكتب العبارتين التاليتين على الصورة التربيعية :

$x^4 + 5x + 6$

لا يمكن كتابتها على الصورة التربيعية.

$8x^4 + 12x^2 + 18$

$= 2(2x^2)^2 + 6(2x)^2 + 18$

$= 2u^2 + 6u + 18$

لاحظ عزيزي الطالب:

يمكننا استعمال الصورة التربيعية لحل معادلات كثيرات حدود ذات درجة اكبر من الدرجة الثانية.

مثال

حل المعادلة : $8x^4 + 10x^2 - 12 = 0$

$= 2(2x^2)^2 + 5(2x^2) - 12 = 0$

$2u^2 + 5u - 12 = 0$

$U = -4 \quad or \quad u = \frac{3}{2}$

$2x^2 = -4 \rightarrow x^2 = -2 \rightarrow x = \pm i\sqrt{2}$

$or \quad 2x^2 = \frac{3}{2} \rightarrow x^2 = \frac{3}{4} \rightarrow x = \pm \frac{\sqrt{3}}{2}$

تدريبات وحلول

حل كل كثيرة حدود مما يأتي تحليلا تاما واذا لم يكن ذلك ممكنا فاكتب كثيرة حدود أولية:

٢)كثيرة حدود أولية.

٤) $12qw^3 - 12q^4$

$= 12q(w^3 - q^3)$

$= 12q(w-q)(w^2 + wq + q^2)$

٦)

$x^3y^3 - 8x^3y + 16x^3 + y^5 - 8y^4 + 16y^3$

$= x^3(y^2 - 8y + 16) + y^3(y^2 - 8y + 16)$

$= (x^3 + y^3)(y^2 - 8y + 16)$

$= (x+y)(x^2 - xy + y^2)(y-4)^2$

٨) $6bx + 12cx + 18dx - by - 2cy - 3dy$

$= 6x(b + 2c + 3d) - y(b + 2c + 3d)$

$= (6x - y)(b + 2c + 3d)$

حل كل معادلة مما يأتي :

٩) $x^4 - 19x^2 + 48 = 0$

$= (x^2)^2 - 19(x^2) + 48 = 0$

$u^2 - 19u + 48 = 0$

$U = 16 \quad or \quad u = 3$

$x^2 = 16 \rightarrow x = \pm 4$

$or \quad x^2 = 3 \rightarrow x = \pm\sqrt{3}$

١٣) الحل : مساحة البركة مع الممر :

$$(40+2x)(30+2x)=2000$$
$$1200+80x+60x+4x^2=2000$$
$$4x^2+140x+1200-2000=0$$
$$(2x)^2+70(2x)-800=0$$
$$u^2+70u-800=0$$
$$U=10 \quad or \quad u=-80$$
$$2x=10 \rightarrow x=5$$
$$or \quad 2x=-80 \rightarrow x=-40$$

الإجابة السالبة مرفوضة لان الطول موجب ← عرض الممر = $5ft$

اكتب العبارة التالية على الصورة التربيعية إن كان ذلك ممكنا :

١٥)لا يمكن كتابتها على الصورة التربيعية لان $y^6 \neq (y^2)^2$

حل المعادلة التالية :

١٧)
$$y^4-18y^2+72=0$$
$$=(y^2)^2-18(y^2)+72=0$$
$$u^2-18u+72=0$$
$$U=12 \quad or \quad u=6$$
$$y^2=12 \rightarrow y=\pm 2\sqrt{3}$$
$$or \quad y^2=6 \rightarrow y=\pm\sqrt{6}$$

حلل كل كثيرة حدود مما يأتي تحليلا تاما واذا لم يكن ذلك ممكنا فاكتب كثيرة حدود أولية:

١٩)
$$64x^4+xy^3$$
$$=x(64x^3+y^3)$$
$$=x(4x+y)(16x^2-4xy+y^2)$$

٢٢)كثيرة حدود أولية.

٢٦)
$$8x^5-25y^3+80x^4-x^2y^3+200x^3-10xy^3$$
$$=8x^3(x^2+10x+25)-y^3(x^2+10x+25)$$
$$=(8x^3-y^3)(x^2+10x+25)$$
$$=(2x-y)(4x^2+2xy+y^2)(x+5)^2$$

حل كل معادلة مما يأتي :

28)
$$x^4-16x^2-720=0$$
$$=(x^2)^2-16(x^2)-720=0$$
$$u^2-16u-720=0$$
$$U=36 \quad or \quad u=-20$$
$$x^2=36 \rightarrow x=\pm 6$$
$$or \quad x^2=-20 \rightarrow x=\pm 2i\sqrt{5}$$

30)
$$x^4+6x^2-91=0$$
$$=(x^2)^2+6(x^2)-91=0$$
$$u^2+6u-91=0$$
$$U=7 \quad or \quad u=-13$$
$$x^2=7 \rightarrow x=\pm\sqrt{7}$$
$$or \quad x^2=-13 \rightarrow x=\pm i\sqrt{13}$$

٣٢) $64x^3+1=0$

$(4x+1)(16x^2+4x+1)=0$

$4x-1=0 \rightarrow x=-\frac{1}{4}$

$Or\ (16x^2+4x-1)=0$

$X=\frac{1\pm i\sqrt{3}}{8}$

اكتب العبارة التالية على الصورة التربيعية إن كان ذلك ممكنا :

٣٤) $-15x^4-18x^2-4$

$=-15(x^2)^2+18(x^2)-4=0$

$=-15u^2-18u-4=0$

٣٦) لا يمكن كتابتها على الصورة التربيعية.

٣٨) $16x^{10}+2x^5-6$

$=4(2x^5)^2+2x^5+6=0$

$=4u^2+2u-6=0$

حل كل معادلة فيما يأتي :

٤٠) $x^4-3x^2-10=0$

$=(x^2)^2-3(x^2)-10=0$

$u^2-3u-10=0$

$U=5\quad or\quad u=-2$

$x^2=5 \rightarrow x=\pm\sqrt{5}$

$or\ \ x^2=-2 \rightarrow x=\pm i\sqrt{2}$

٤٢) $9x^4-27x^2+20=0$

$=(3x^2)^2-9(3x^2)+20=0$

$u^2-9u+20=0$

$U=5\quad or\quad u=4$

$٣x^2=5 \rightarrow x=\pm\sqrt{\frac{5}{3}}$

$or\ \ 3x^2=4 \rightarrow x=\pm\frac{2}{\sqrt{3}}$

حلل كل كثيرة حدود مما يأتي تحليلا تاما وإذا لم يكن ذلك ممكنا فاكتب كثيرة حدود أولية:

٤٥)

x^4-625

$=(x^2)^2-(25)^2$

$=(x^2-25)(x^2+25)$

$=(x-5)(x+5)(x^2+25)$

٤٩) $=5x(3a-2b+c)+4y(3a-2b+c)+5z(3a-2b+c)$

$=(5x+4y+5z)(3a-2b+c)$

حل كل معادلة فيما يأتي :

٥٤) $8x^4+10x^2-3=0$

$=8(x^2)^2+10(x^2)-3=0$

$8u^2+10u-3=0$

$U=\frac{1}{4}\quad or\quad u=\frac{-3}{2}$

$x^2=\frac{1}{4} \rightarrow x=\pm\frac{1}{2}$

$$or \quad x^2 = \frac{-3}{2} \rightarrow x = \pm i\sqrt{\frac{3}{2}}$$

٥٦) $20x^4 - 53x^2 + 18 = 0$

$$= 20(x^2)^2 - 53(x^2) + 18 = 0$$

$$20u^2 - 53u + 18 = 0$$

$$U = \frac{9}{4} \quad or \quad u = \frac{2}{5}$$

$$x^2 = \frac{9}{4} \rightarrow x = \pm\frac{3}{2}$$

$$or \quad x^2 = \frac{2}{5} \rightarrow x = \pm\sqrt{\frac{2}{5}}$$

٥٨) $8x^4 - 18x^2 + 4 = 0$

$$= 8(x^2)^2 - 18(x^2) + 4 = 0$$

$$8u^2 - 18u + 4 = 0$$

$$U = \frac{1}{4} \quad or \quad u = 2$$

$$x^2 = \frac{1}{4} \rightarrow x = \pm\frac{1}{2}$$

$$or \quad x^2 = 2 \rightarrow x = \pm\sqrt{2}$$

٦٦) a. $(x-2)(x-4)(x-6) = 40x$

$$x^2 - 4x - 2x + 8(x-6) = 40x$$

$$x^3 - 6x^2 - 6x^2 + 36x + 8x - 48 = 40x$$

$$x^3 - 12x^2 + 44x - 48 = 40$$

b. بالتحليل إلى عوامل نجد أن $x = 12, 2i, -2i$

c. القيم الغير مقبولة هي $x = 2i, -2i$ لأنهما عددان تخيليان.

d. أبعاد المنشور هي $x-2 = 12-2 = 10$

$$x-4 = 12-4 = 8$$

$$x-6 = 12-6 = 6$$

٦٩) a. $F(x) = 8x^2 + 34x + 24$

b. $8x^2 + 34x + 24 = 1366$

$$8x^2 + 34x - 1342 = 0$$

$$X = 11 \quad or \quad x = -15.25$$

باستبعاد الإجابة السالبة لان المساحة موجبة فان $x = 11$

٧٣) a.

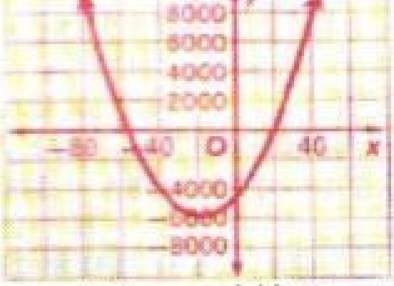
b. المساحة الجديدة $4.5(1280) = 5760ft$

$$(32x - 2x)(40 - 2x) = 5760$$

$$1280 - 64x - 80x - 4x^2 = 5760$$

$$4x^2 - 144x - 4480 = 0$$

$$X = -56 \quad or \quad x = 20$$



d) الحل الغير مقبول هو $x=-56$ لان الطول موجب دائما.

٧٨) الاحتمال هو $\frac{1}{15}$

٧٩) البديل الصحيح هو $\frac{13}{60}$ (D)

٨٣) $(2-6j)+(3+4j)=(2+3)(-6j+4j)=5-2j$

٨٦)

-٢	8	4	0	6
		-16	24	-48
	8	-12	24	-42

ناتج القسمة هو $8x^2-12x+24-\frac{42}{x+2}$

3-7 نظريتا الباقي والعوامل

نظرية الباقي

اذا قسمت كثيرة حدود p(x) على x-r فان الباقي ثابت ويساوي p(r) وكذلك :

$$p(x) = q(x) . (x-r) + p(r)$$

الباقي + المقسوم عليه . ناتج القسمة = المقسوم

حيث q(x) دالة كثيرة حدود تقل درجتها بواحد عن درجة المقسوم p(x) .

التعويض التركيبي:

هي عملية تطبيق نظرية الباقي واستعمال القسمة التركيبية لإيجاد قيمة دالة خاصة عندما تكون درجة كثيرة الحدود اكبر من الدرجة الثانية.

مثال

اذا كانت $f(x)=3x^3-6x^2+x-11$ فاوجد $f(3)$

بناء على نظرية الباقي فان $f(3)$ يساوي باقي قسمة كثيرة الحدود على $x-3$.

٣	3	-6	1	-11
		9	9	30
	3	3	10	19

باقي القسمة هو ١٩ ← f(3)=19

مثال

يمكن استعمال الدالة $c(x) = 2.4x^3 - 22.3x^2 + 53.8x + 548.2$ لتقدير عدد الطلاب في إحدى محافظات المملكة منذ عام ١٤٢٠ حيث تمثل x عدد السنوات $c(x)$ عدد الطلاب بالعشرات قدر عدد طلاب المحافظة عام ١٤٣٢.

نوجد ناتج قسمة الدالة $c(x)$ على $x-12$ مستعملا القسمة التركيبية.

١٢	2.4	-22.3	58.8	548.2
		28.8	78	1581.6
	2.4	6.5	131.8	2129.8

باقي القسمة هو ٢١٢٩.٨ ← $f(12)=2129.8$ وهو يمثل عدد الطلاب.

نظرية العوامل

هي حالة خاصة من نظرية الباقي وهي تنص على ان ثنائية الحد $x-r$ تكون عاملا من عوامل كثيرة الحدود $p(x)$ اذا وفقط اذا كان $p(r)=0$

انتبه يمكن استعمال نظرية العوامل للتحقق من أن ثنائية حد معينة عامل من عوامل كثيرة حدود معطاة ويمكن استعمالها أيضا لتحديد جميع عوامل كثيرة الحدود.

لاحظ عزيزي الطالب: عند التحليل إلى عوامل ليس شرطا أن تكون عوامل كثيرة الحدود لثنائيات حد.

مثال

بين ان $(x-2)$ عامل من عوامل كثيرة الحدود : $x^3-7x^2-4x+12$ ثم أوجد عواملها الأخرى :

باستعمال القسمة التركيبية:

٢	1	-7	4	12
		2	-10	-12
	1	-5	-6	0

باقي القسمة هو ٠ ← $(x-2)$ عامل من عوامل كثيرة الحدود لذا يمكن تحليلها على النحو:

$$= (x-2)(x^2-5x-6)$$
$$=(x-2)(x+1)(x-6)$$

تدريبات وحلول

اوجد $f(-2), f(4)$ لكل مما يلي مستعملا التعويض التركيبي:

١) $f(x)=2x^3-5x^2-x+14$

بناء على نظرية الباقي فان $f(4)$ يساوي باقي قسمة كثيرة الحدود على $x-4$.

٤	2	-5	-1	14
		8	12	44
	2	3	11	58

باقي القسمة هو ٥٨ ← $f(4)=58$

بناء على نظرية الباقي فان $f(-2)$ يساوي باقي قسمة كثيرة الحدود على $x+2$.

-٢	2	-5	-1	14

-4 18 -34

2 -9 17 -20

باقي القسمة هو ٢٠ - ← $f(-2)=-20$

في كل مما يلي كثيرة حدود واحد عواملها اوجد عواملها الأخرى:

٥) $x^3 + x^2 - 16x - 16, (x+1)$

باستعمال القسمة التركيبية:

-١] 1 1 -16 -16

-1 0 16

1 0 -16 0

ناتج القسمة هو $x^2 - 16$

$= (x-4)(x+4)$

العوامل هي $(x+1)(x-4)(x+4)$

٧) $2x^3 - 5x^2 - 28x + 15, (x+3)$

باستعمال القسمة التركيبية:

-٣] 2 -5 -28 15

-6 33 -15

2 -11 5 0

ناتج القسمة هو $2x^2 - 11x + 5$

$= (2x-1)(x-5)$

العوامل هي $(x+3)(2x-1)(x-5)$

اوجد $f(2), f(-5)$ لكل مما يلي مستعملا التعويض التركيبي:

٩) $f(x) = x^2 - 8x + 6$

بناء على نظرية الباقي فان $f(2)$ يساوي باقي قسمة كثيرة الحدود على $x-2$.

٢] 1 -8 6

2 -12

1 -6 -6

باقي القسمة هو ٦- ← $f(2)=-6$

بناء على نظرية الباقي فان $f(-5)$ يساوي باقي قسمة كثيرة الحدود على $x+5$.

-٥] 1 -8 6

-5 65

1 -13 71

باقي القسمة هو ٧١ ← $f(-5)=71$

١١) $f(x) = 2x^3 - 8x^2 - 2x + 5$

بناء على نظرية الباقي فان $f(2)$ يساوي باقي قسمة كثيرة الحدود على $x-2$.

٢] 2 -8 -2 5

4 -8 -20

2 -4 -10 -15

باقي القسمة هو ١٥- ← $f(2)=-15$

بناء على نظرية الباقي فان $f(-5)$ يساوي باقي قسمة كثيرة الحدود على $x-5$.

-٥] 2 -8 -2 5

-10 90 -440

2 -18 88 -435

باقي القسمة هو -435 ← $f(-5)=-435$

١٣) $f(x) = x^5 + 8x^3 + 2x - 15$

بناء على نظرية الباقي فان $f(2)$ يساوي باقي قسمة كثيرة الحدود على $x-2$.

٢] 1 0 8 0 2 -15

		2	4	24	48	100
	1	2	12	24	50	85

باقي القسمة هو ٨٥ $\leftarrow$ $f(2)=85$

بناء على نظرية الباقي فان $f(-5)$ يساوي باقي قسمة كثيرة الحدود على $x+5$.

-٥|	1	0	8	0	2	-15
		-5	25	-165	825	-4135
	1	-5	33	-165	827	-4150

باقي القسمة هو -4150 $\leftarrow$ $f(-5)=-4150$

١٥) $f(x)=x^4-6x-8$

بناء على نظرية الباقي فان $f(2)$ يساوي باقي قسمة كثيرة الحدود على $x-2$.

٢|	1	0	0	-6	-8
		2	4	8	4
	1	2	4	2	-4

باقي القسمة هو -4 $\leftarrow$ $f(2)=-4$

بناء على نظرية الباقي فان $f(-5)$ يساوي باقي قسمة كثيرة الحدود على $x+5$.

-٥|	1	0	0	-6	-8
		-5	25	-125	655
	1	-5	25	-131	647

باقي القسمة هو 647 $\leftarrow$ $f(-5)=647$

في كل مما يلي كثيرة حدود واحد عواملها أوجد عواملها الأخرى:

١٩) $x^3-x^2-10x-8,\ (x+2)$

باستعمال القسمة التركيبية:

-٢|	1	-1	-10	-8
		-2	6	8
	1	-3	-4	0

ناتج القسمة هو x^2-3x-4

$=(x-4)(x+1)$

العوامل هي $(x+2)(x-4)(x+1)$

٢١) $2x^3+17x^2-23x-42,\ (x-1)$

باستعمال القسمة التركيبية:

١|	2	17	23	-42
		2	19	42
	2	19	42	0

ناتج القسمة هو $2x^2+19x+42$

$=(2x+7)(x+1)$

العوامل هي $(x-1)(2x+7)(x+1)$

٢٣) $x^4+2x^3-2x^2-2x-3,\ (x-1)$

باستعمال القسمة التركيبية:

١|	1	2	2	-2	-3
		1	3	5	3
	1	3	5	3	0

ناتج القسمة هو x^3+3x^2+5x+3

$=(x^2+2x+3)(x+1)$

العوامل هي $(x^2+2x+3)(x+1)(x-1)$

a (27

الزمن(t)	السرعة f(t)
1	0.26ft/s
2	5.76fts
3	19.86ft/s

f(6) .b

$$\begin{array}{r|rrrrr} ٦ & -0.04 & 0.8 & 0.5 & -1 & 0 \\ & & -0.24 & 3.36 & 23.16 & 132.96 \\ \hline & -0.04 & 0.56 & 3.86 & 22.16 & 132.96 \end{array}$$

* $f(6) = 132.96\ ft/s$ وهذا يعني أن الزورق يسير بسرعة ١٣٢,٩٦ عندما يمر بالعوامة الثانية.

29) $f(x)=20x^3-47x^2+8x+12$

من الرسم الدالة تقطع المحور x في النقطة ٢ ← $(x-2)$ أحد عوامل الدالة.

باستعمال القسمة التركيبية:

$$\begin{array}{r|rrrr} ٢ & 20 & -47 & 8 & 12 \\ & & 40 & -14 & -12 \\ \hline & 20 & -7 & -6 & 0 \end{array}$$

ناتج القسمة هو $20x^2-7x-6$

$= (4x-3)(5x+2)$

العوامل هي $(4x-3)(5x+2)(x-2)$

a (30

باستعمال القسمة التركيبية:

$$\begin{array}{r|rrrrr} ٢ & 1 & 0 & -4 & 0 & 0 \\ & & 2 & 4 & 0 & 0 \\ \hline & 1 & 2 & 0 & 0 & \end{array}$$

ناتج القسمة هو x^3-2x^2

.b

(x)	g(x)
-2	0
-1	1
0	0
1	3
2	16

c. نستنتج أن كلا من $(x-2)$, (x) عامل من عوامل الدالة.

40) البديل الصحيح هو (B) $(3x+y)(9x^2-3xy+y^2)$

41) البديل الصحيح هو (c) ١٧

3-8 الجذور والأصفار

تذكر عزيزي الطالب : صفر دالة $f(x)$ يمكن أن يكون أية قيمة مثل c حيث $f(c)=0$ وعند تمثيل الدالة بيانيا تكون أصفار الدالة الحقيقية هي مقاطع المحور x.

مفهوم هام

لتكن $p(x)= a_n x^n+\dots+a_1x+a_0$ كثيرة حدود فانه ينطبق عليها مايلي:

١) c صفر للدالة $p(x)$.

٢) c جذر او حل للمعادلة بحيث $p(x)=0$.

٣) $x-c$ عامل من عوامل كثيرة الحدود $p(x)$.

٤) اذا كان c عدد حقيقي ← $(c , 0)$ هو المقطع x للدالة $p(x)$.

انتبه :

١) قد يوجد جذر واحد أو أكثر للدالة درجتها اكبر من صفر.

٢) قد لا يوجد جذور حقيقية للدالة (أي لها جذور تخيلية).

٣) كلا من الأعداد الحقيقية والتخيلية تسمى مجموعة الأعداد المركبة.

النظرية الاساسية في الجبر

كل معادلة كثيرة حدود درجتها اكبر من الصفر لها جذر واحد على الأقل ينتمي لمجموعة الأعداد المركبة.

مثال

حل كل معادلة مما يأتي واذكر عدد جذورها وأنواعها :

$$x^3 + 2x = 0$$

$$x(x^2+2)=0$$

$$x=0 \quad or \quad x^2= -2 \rightarrow x=\pm i\sqrt{2}$$

للمعادلة جذر واحد حقيقي وجذران تخيليان.

$$x^4 - 16x = 0$$

$$(x^2+4)(x^2-4)=0$$

$$x^2= -4 \rightarrow x=\pm 2i$$

$$x^2= 4 \rightarrow x=\pm 2$$

للمعادلة جذران حقيقيان وجذران تخيليان.

نتيجة

يكون لمعادلة كثيرة الحدود من الدرجة n العدد n فقط من الجذور المنتمية لمجموعة الأعداد المركبة بما في ذلك الجذور المتكررة.

قانون ديكارت للاشارات

اذا كانت $p(x)$ دالة كثيرة حدود معاملات حدودها اعداد حقيقية فان :

* عدد الاصفار الحقيقية الموجبة للدالة $p(x)$ يساوي عدد مرات تغير اشارة معاملات حدود الدالة $p(x)$ او اقل منه بعدد زوجي.
* عدد الاصفار الحقيقية السالبة للدالة $p(x)$ يساوي عدد مرات تغير اشارة معاملات حدود الدالة $p(-x)$ او اقل منه بعدد زوجي.

مثـــال

اذكر عدد الأصفار الممكنة الحقيقية الموجبة والحقيقية السالبة والتخيلية للدالة:

$$h(x) = 2x^5 + x^4 + 3x^3 - 4x^2 - x + 9$$

عند $h(x)$ نجد تغيرين في إشارة المعاملات لذا فعدد الأصفار الحقيقية الموجبة سيكون ٢أو ٠

عند $h(-x)$ نجد٣ تغيرات في إشارة المعاملات لذا فعدد الأصفار الحقيقية السالبة سيكون٣ أو ١.

عدد الاصفار الموجبة	عدد الاصفار السالبة	عدد الاصفار التخيلية	مجموع الاصفار
2	3	0	2+3+0=5
2	1	2	2+1+2=5
0	3	2	0+3+2=5
0	1	4	0+1+4=5

عدد الاصفار التخيلية = ٤أو٢ أو ٠.

نظرية الأعداد المركبة المترافقة

اذا كان a,b عددين حقيقيين حيث $b\neq0$ وكان $a+bi$ صفر لدالة كثيرة حدود معاملات حدودها اعداد حقيقة فان $a-bi$ صفر للدالة ايضا.

تذكر عزيزي الطالب : أن كلا من $a+bi$,$a-bi$ هما عددان مركبان مترافقان.

مثـــال

اكتب دالة كثيرة حدود درجتها اقل ما يمكن ومعاملات حدودها أعداد صحيحة إذا كان العددان $-1, 1-2i$ من أصفارها.

بما أن $1+2i$ صفر للدالة ← $1-2i$ صفر للدالة أيضا.

عوامل كثيرة الحدود:

$$(x+1)(x-(1+2i))(x-(1-2i))$$
$$=(x+1)[(x-1)^2-(2i)^2]$$
$$=(x+1)[x^2-2x+1+4]$$
$$=(x+1)(x^2-2x+5)$$
$$=x^3-2x^2+5x+x^2-2x+5$$
$$F(x)=x^3-x^2+3x+5$$

تدريبات وحلول

حل كل معادلة مما يأتي واذكر عدد جذوها وأنواعها :

1) $x^2 - 3x - 10 = 0$

$x=5 \quad or \quad x=-2$

للمعادلة جذران حقيقيان.

3) $16x^4 - 81 = 0$

$(4x^2-9)(4x^2+9)=0$

$4x^2-9=0 \rightarrow x^2=\frac{9}{4} \rightarrow x=\pm\frac{3}{2}$

$4x^2+9=0 \rightarrow x^2=\frac{-9}{4} \rightarrow x=\pm i\frac{3}{2}$

للمعادلة جذران حقيقيان وجذران تخيليان.

اذكر عدد الأصفار الممكنة الحقيقية الموجبة والحقيقية السالبة والتخيلية لكل دالة مما يلي:

1) $f(x) = x^3 - 2x^2 + 2x - 6$

عند $f(x)$ نجد ٣ تغيرات في إشارة المعاملات لذا فعدد الأصفار الحقيقية الموجبة سيكون٣ أو ١.

عند $f(-x)$ لا يوجد أي تغير في الإشارات لذلك لا يوجد للدالة أصفار حقيقية سالبة.

عدد الاصفار الموجبة	عدد الاصفار السالبة	عدد الاصفار التخيلية	مجموع الاصفار
3	٠	0	3+0+0=3
1	0	2	1+0+2=3

عدد الاصفار التخيلية = ٢ أو ٠.

7) $f(x) = 3x^5 - 8x^3 + 2x - 4$

عند $f(x)$ نجد ٣ تغيرات في إشارة المعاملات لذا فعدد الأصفار الحقيقية الموجبة سيكون ٣ أو ١.

عند $f(-x)$ نجد تغيرين في إشارة المعاملات لذا فعدد الأصفار الحقيقية السالبة سيكون٢أو ٠

عدد الاصفار الموجبة	عدد الاصفار السالبة	عدد الاصفار التخيلية	مجموع الاصفار
3	2	0	3+2+0=5
3	0	2	3+0+2=5
1	2	2	1+2+2=5
1	0	4	1+0+4=5

عدد الاصفار التخيلية = ٤أو٢ أو ٠.

اكتب دالة كثيرة حدود درجتها اقل ما يمكن ومعاملات حدودها أعداد صحيحة إذا كانت الأعداد المعطاة في كل مما يلي من أصفارها.

١٦) $-4, 4+i$

بما أن $4+i$ صفر للدالة ← $4-i$ صفر للدالة أيضا.

عوامل كثيرة الحدود:

$$F(x)=(x+4)(x-(4+i))(x-(4-i))$$
$$=(x+4)[(x-4)^2-(i)^2]$$
$$=(x+4)[x^2-8x+16+1]$$
$$=(x+4)(x^2-8x+17)$$
$$=x^3-8x^2+17x+4x^2-32x+68$$
$$F(x)=x^3-4x^2-15x+68$$

حل كل معادلة مما يأتي واذكر عدد جذورها وأنواعها :

17) $4x^2+1=0$

$$4x^2=-1$$
$$x^2=-\frac{1}{4} \rightarrow x=\pm\frac{1}{2}i$$

للمعادلة جذران تخيليان.

19) $-3x^2-5x+8=0$

$$x=\frac{5\pm 11}{-6}$$
$$x=\frac{-8}{3} \quad or \quad x=1$$

21) $16x^4-625=0$

$$(4x^2-25)(4x^2+25)=0$$
$$4x^2-25=0 \rightarrow x^2=\frac{25}{4} \rightarrow x=\pm\frac{5}{2}$$
$$4x^2+25=0 \rightarrow x^2=\frac{-25}{4} \rightarrow x=\pm i\frac{5}{2}$$

للمعادلة جذران حقيقيان وجذران تخيليان

اذكر عدد الأصفار الممكنة الحقيقية الموجبة والحقيقية السالبة والتخيلية لكل دالة مما يلي:

25) $f(x)=x^4-5x^3+2x^2+5x+7$

عند $f(x)$ نجد تغيرين في إشارة المعاملات لذا فعدد الأصفار الحقيقية الموجبة سيكون ٢ أو ٠.

عند $f(-x)$ نجد تغيرين في إشارة المعاملات لذا فعدد الأصفار الحقيقية السالبة سيكون ٢ أو ٠.

مجموع الاصفار	عدد الاصفار التخيلية	عدد الاصفار السالبة	عدد الاصفار الموجبة
2+0+2=4	2	0	2
2+2+0=4	0	2	2
0+0+4=4	4	0	0
0+2+2=4	2	2	0

عدد الاصفار التخيلية = ٤ أو ٢ أو ٠.

28) $f(x)=x^4-2x^2-5x+19$

عند $f(x)$ نجد تغيرين في إشارة المعاملات لذا فعدد الأصفار الحقيقية الموجبة سيكون ٢ أو

عند $f(-x)$ نجد تغيرين في إشارة المعاملات لذا فعدد الأصفار الحقيقية السالبة سيكون٢ أو

مجموع الاصفار	عدد الاصفار التخيلية	عدد الاصفار السالبة	عدد الاصفار الموجبة
2+0+2=4	2	0	2
2+2+0=4	0	2	2
0+0+4=4	4	0	0
0+2+2=4	2	2	0

عدد الاصفار التخيلية = ٤ أو ٢ أو ٠.

30) $f(x)=-x^5+14x^3+18x-36$

عند $f(x)$ نجد تغيرين في إشارة المعاملات لذا فعدد الأصفار الحقيقية الموجبة سيكون ٢ أو ٠.

عند$f(-x)$ نجد تغير واحد في إشارة المعاملات لذا فعدد الأصفار الحقيقية السالبة سيكون١.
عدد الاصفار التخيلية = ٢ أو ٤.

اكتب دالة كثيرة حدود درجتها اقل ما يمكن ومعاملات حدودها أعداد صحيحة إذا كانت الأعداد المعطاة في كل مما يلي من أصفارها.

37) $-2, -1, 5$

عوامل كثيرة الحدود:

$$F(x)=(x-5)(x+2)(x+1)$$
$$= x^2 + 2x - 5x - 10(x+1)$$
$$= x^2 - 3x - 10\ (x+1)$$
$$= x^3 + x^2 - 3x^2 - 3x - 10x - 10$$
$$F(x) = x^3 - 2x^2 - 13x - 10$$

39) $-1, -1, 2i$

بما أن $2i$ صفر للدالة ← $-2i$ صفر للدالة أيضا.

عوامل كثيرة الحدود:

$$F(x)=(x+1)(x+1)(x-2i)(x+2i)$$
$$=(x^2+2x+1)[x^2 - 4]$$
$$= x^4 + 4x^2 + 2x^3 + 8x + x^2 + 4$$
$$F(x) = x^4 + 2x^3 + 5x^2 + 8x + 4$$

٤٣) b. تمثل الجذور الغير سالبة عدد الأجهزة المنتجة يوميا دون تحقيق أرباح.

٤٤) b. أصفار الدالة الممثلة بيانيا هي $-4, 3$.

٤٧) الدالة الممثلة بيانيا من الدرجة الثالثة ولا يقطع التمثيل البياني الجزء الموجب من المحور x لذلك ليس هناك أصفار حقيقية موجبة للدالة ويقطع التمثيل البياني الجزء السالب مرة واحدة لذلك للدالة صفر حقيقي واحد سالب وبذلك يصبح للدالة ثلاث أصفار تخيلية.

٥١) $x^4 + 1 = 0$ هي المعادلة التي تختلف عن بقية المعادلات لان حلول هذه المعادلة أعداد تخيلية بينما حل بقية المعادلات أعداد حقيقية.

٥٤) البديل الصحيح (B)

3-9 نظرية الصفر النسبي

لاحظ عزيزي الطالب :
تساعد نظرية الصفر النسب على اختيار بعض الأعداد النسبية لاختبارها.

نظرية الصفر النسبي

لتكن $p(x)$ دالة كثيرة حدود معاملات حدودها اعداد صحيحة فان اي صفر نسبي للدالة $p(x)$ سيكون على صورة العدد النسبي p / q في ابسط صورة حيث p احد عوامل الحد الثابت، q احد عوامل الحد الرئيس.

نتيجة نظرية الصفر النسبي

اذا كانت $p(x)$ دالة كثيرة حدود معاملات حدودها اعداد صحيحة والمعامل الرئيس لها ١ وحدها الثابت لايساوي الصفر فان اي صفر نسبي للدالة يجب ان يكون احد عوامل الحد الثابت.

ايجاد الاصفار النسبية

نختبر كل عدد من الاعداد النسبية باستعمال التعويض التركيبي او الطرق السابقة التي تعلمتها لايجاد اصفار الدالة النسبية.

مثـــال

منشور متوازي مستطيلات حجمه $1056cm^3$ ويزيد طوله بمقدار $1cm$ على عرضه وقل ارتفاعه بمقدار $3cm$ عن عرضه.أوجد أبعاده.

نفرض أن عرض الصندوق هو w فيكون طوله $w+1$ وارتفاعه $w-3$.

حجم الصندوق = الطول × العرض × الارتفاع :

$$1056=w(1+w)(w-3)$$

$$w+w^2(w-3)=1056$$

$$w^2-3w+w^3-3w^2=1056$$

$$w^3-2w^2-3w-1056=0$$

المعامل الرئيس = ١ ← الأعداد النسبية الممكنة هي عوامل ١٠٥٦ وهي :

$$\pm1,\pm2,\pm3,\pm4,\pm6,\pm8,\pm11,\pm12,\pm16\ldots.$$

نختار القيم الموجبة لأنها أبعاد.

هناك تغير واحد في إشارة المعاملات ← هناك صفر واحد حقيقي موجب.

p	١	-2	-3	-1056
1	1	-1	-4	-1060
3	1	1	0	-1056
2	1	0	0	-1056
4	1	2	5	-1036
6	1	4	21	-910
8	1	6	45	-696
11	1	9	96	0

العدد ١١ صفر حقيقي موجب للدالة فلا داعي لاختبار باقي القيم.

$W=11cm\ ,\ l+w=12cm\ ,\ w-3=8cm$

انتبه :ليس من الضروري اختبار جميع قيم الاصفار الممكنة فعند إيجاد احدها نحلل الدالة الناتجة عن عملية قسمة كثيرة الحدود على احد عواملها لنجد الاصفار الأخرى.

مثال

اوجد جميع أصفار الدالة : $f(x)=9x^4+5x^2-4$

- بناء على نتيجة النظرية الأساسية في الجبر للدالة ٤ أصفار مركبة فقط.
- بناء على قانون ديكارت للإشارات فان للدالة صفر واحد حقيقي موجب وصفر حقيقي سالب.
- الأعداد التي تحددها نظرية الصفر النسبي:
- $\frac{p}{q}=\pm\frac{1}{3},\pm\frac{1}{9},\pm1,\pm\frac{2}{3},\pm\frac{2}{9},\pm4,\pm\frac{4}{3},\pm\frac{4}{9}$
- باختبار الأعداد النسبية نجد أن $\frac{2}{3}$ صفر للدالة.

$$\begin{array}{r|rrrrr} \frac{2}{3} & 9 & 0 & 5 & 0 & -4 \\ & & 6 & 4 & 6 & 4 \\ \hline & 9 & 6 & 9 & 6 & 0 \end{array}$$

- نحلل الدالة الناتجة عن قسمة كثيرة الحدود الأصلية على $(x-\frac{2}{3})$ وهي :

$$9x^3+6x^2+9x+6=0$$
$$3x^3+2x^2+3x+2=0$$
$$(3x^3+2x^2)+(3x+2)=0$$
$$x^2(3x+2)+(3x+2)=0$$
$$(x^2+1)(3x+2)=0$$
$$x^2+1=0 \rightarrow x^2=-1 \rightarrow x=\pm i$$
$$3x+2=0 \rightarrow 3x=-2 \rightarrow x=-\frac{2}{3}$$

أصفار الدالة هي : $\pm i,\ \pm\frac{2}{3}$

تمرينات وحلول

اكتب جميع الأعداد النسبية التي تحددها نظرية الصفر النسبي للدالة التالية :

$f(x) = x^3 - 6x^2 - 8x + 24$ (1

إذا كان $\frac{p}{q}$ صفر نسبي فان p احد عوامل العدد ٢٤ و q احد عوامل العدد ١ .

$q = \pm 1$ $\qquad$ $p = \pm 1, \pm 2, \pm 4, \pm 6, \pm 8, \pm 12, \pm 24$

$\frac{p}{q} = \pm 1, \pm 2, \pm 4, \pm 6, \pm 8, \pm 12, \pm 24$

٣)نفرض أن ارتفاع الهرم $5x+3$ وطول القاعدة x وارتفاعها $2x-1$.

حجم الهرم = $\frac{1}{3}$ مساحة القاعدة × الارتفاع

مساحة القاعدة = $\frac{1}{2} \times (x) \times (2x-1)$

$= x^2 - \frac{x}{2}$

حجم الهرم : $= \frac{1}{3}(x^2 - \frac{x}{2})(5x+3)$

بحل المعادلة نصل إلى :

$$10x^3 + x^2 - 3x - 1260 = 0$$

$\frac{p}{q} = \pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 4, \pm 5, \pm 6, \pm 7, ...$

نختار القيم الموجبة لأنها أبعاد.

هناك تغير واحد في إشارة المعاملات ← هناك صفر واحد حقيقي موجب.

p	١٠	1	-3	-1260
1	10	11	8	-1252
2	10	21	39	-1174
3	10	31	90	-990
4	10	41	161	-616
5	10	51	252	0

العدد ١١ صفر حقيقي موجب للدالة فلا داعي لاختبار باقي القيم.

$x = 5in$, $2x-1 = 9in$, $5x+3 = 28in$

اوجد جميع أصفار كل من الدوال التالية :

$f(x) = x^3 - 6x^2 - 13x + 42$ (4

- بناء على نتيجة النظرية الأساسية في الجبر للدالة 3 أصفار مركبة فقط.
- بناء على قانون ديكارت للإشارات فان للدالة صفرين حقيقيين موجبين وصفر حقيقي سالب.
- الأعداد التي تحددها نظرية الصفر النسبي:
- $\frac{p}{q} = \pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 6, \pm 7, \pm 14, ...$
- باختبار الأعداد النسبية نجد أن ٢ صفر للدالة.

$$\begin{array}{r|rrrr} 2 & 1 & -6 & -13 & 42 \\ & & 2 & -8 & -42 \\ \hline & 1 & -4 & -21 & 0 \end{array}$$

- نحلل الدالة الناتجة عن قسمة كثيرة الحدود الأصلية على $(x-2)$ وهي :

$$x^2 - 4x - 21 = 0$$

$x = 7$ or $x = -3$

أصفار الدالة هي : $2, 7, -3$

$f(x) = 3x^3 - 2x^2 - 8x + 5$ (6

- بناء على نتيجة النظرية الأساسية في الجبر للدالة 3 أصفار مركبة فقط.
- بناء على قانون ديكارت للإشارات فان للدالة صفرين حقيقيين موجبين وصفر حقيقي سالب.
- الأعداد التي تحددها نظرية الصفر النسبي:
- $\frac{p}{q}= \pm\frac{1}{3}, \pm\frac{5}{3}, \pm1, \pm5$
- باختبار الأعداد النسبية نجد أن $\frac{5}{3}$ صفر للدالة.

$$\begin{array}{r|rrrr} \frac{5}{3} & 3 & -2 & -8 & 5 \\ & & 5 & 5 & -5 \\ \hline & 3 & 3 & -3 & 0 \end{array}$$

- نحلل الدالة الناتجة عن قسمة كثيرة الحدود الأصلية على $(x-\frac{5}{3})$ وهي :

$$3x^2 + 3x - 3 = 0$$

$$x=\frac{-1\pm\sqrt{5}}{2}$$

- أصفار الدالة هي : $\frac{-1\pm\sqrt{5}}{2}, \frac{5}{3}$

٨) $f(x)= 4x^4 + 13x^3 - 8x^2 + 13x - 12$

- بناء على نتيجة النظرية الأساسية في الجبر للدالة ٤ أصفار مركبة فقط.
- بناء على قانون ديكارت للإشارات فان للدالة صفر واحد حقيقي موجب وصفر حقيقي سالب.

- الأعداد التي تحددها نظرية الصفر النسبي:
- $\frac{p}{q}= \pm1, \pm2, \pm3, \pm4, \pm6, \pm12, ...$
- باختبار الأعداد النسبية نجد أن ٤- صفر للدالة.

$$\begin{array}{r|rrrrr} -4 & 4 & 13 & -8 & 13 & -12 \\ & & -16 & 12 & -16 & 12 \\ \hline & 4 & -3 & 4 & -3 & 0 \end{array}$$

- نحلل الدالة الناتجة عن قسمة كثيرة الحدود الأصلية على $(x+4)$ وهي :

$$4x^3 - 3x^2 + 4x - 3 = 0$$

$$x^2(4x-3)+(4x-3)=0$$

$$(x^2+1)(4x-3)=0$$

$$x^2+1=0 \rightarrow x^2=-1 \rightarrow x=\pm i$$

$$4x-3=0 \rightarrow 4x=3 \rightarrow x=\frac{3}{4}$$

أصفار الدالة هي : $-4, \frac{3}{4}, \pm i$

اكتب جميع الأعداد النسبية التي تحددها نظرية الصفر النسبي للدوال التالية :

10) $f(x)= x^4 + 8x - 32$

إذا كان $\frac{p}{q}$ صفر نسبي فان p احد عوامل العدد 32 و q احد عوامل العدد ١ .

$$\frac{p}{q}=\pm1,\pm2,\pm4,\pm8,\pm16,\pm32$$

12) $f(x)= 3x^6 - 4x^4 - x^2 - 35$

إذا كان $\frac{p}{q}$ صفر نسبي فان p احد عوامل العدد 35 و q احد عوامل العدد 3 .

$$\frac{p}{q}= \pm1, \pm5, \pm7, \pm35, \pm\frac{1}{3}, \pm\frac{5}{3}, \pm\frac{7}{3}, \pm\frac{35}{3}$$

١٦) a) حجم الصندوق = الطول × العرض × الارتفاع :

$V=x(28-2x)(28-2x)$

$=784-56x-56x+4x^2(x)$
$=4x^3-112x^2+84x$
$=x^3-28x^2+196x$

$x^3-28x^2+196x=1152$ (b

$x^3-28x^2+196x-1152=0$

المعامل الرئيس = ١ ← الأعداد النسبية الممكنة هي عوامل ١١٥٢ وهي :

$\pm1,\pm2,\pm3,\pm4,\pm6,\pm8,...$

نختار القيم الموجبة لأنها أبعاد.

هناك تغيرين في إشارة المعاملات ← هناك صفرين حقيقيين موجبين.

باختبار الاصفار نجد أن العدد ٢ صفر حقيقي موجب للدالة فلا داعي لاختبار باقي القيم.

c) بالتعويض عن $x=6cm$

$V=6(28-12)(28-12)$

$=1536cm^3$

أوجد جميع أصفار كل من الدوال التالية :

$f(x)=x^3+10x^2+31x+30$ (17

- بناء على نتيجة النظرية الأساسية في الجبر للدالة 3 أصفار مركبة فقط.
- بناء على قانون ديكارت للإشارات فانه ليس للدالة أصفار حقيقية موجبة و٣ أصفار حقيقية سالبة.
- الأعداد التي تحددها نظرية الصفر النسبي:
- $\frac{p}{q}=\pm1,\pm2,\pm3,\pm5,\pm6,\pm10,....$
- باختبار الأعداد النسبية نجد أن ٢ - صفر للدالة.

-2⌋	1	10	31	30
		-2	-16	-30
	1	8	15	0

- نحلل الدالة الناتجة عن قسمة كثيرة الحدود الأصلية على $(x+2)$ وهي :

$x^2+8x+15=0$

$x=-5$ or $x=-3$

أصفار الدالة هي : $-2,-5,-3$

$f(x)=4x^4+12x^3-5x^2-21x+10$ (١٩

- بناء على نتيجة النظرية الأساسية في الجبر للدالة ٤ أصفار مركبة فقط.
- بناء على قانون ديكارت للإشارات فان للدالة صفرين حقيقيين موجبين وصفرين حقيقيين سالبين.
- الأعداد التي تحددها نظرية الصفر النسبي:
- $\frac{p}{q}=\pm1,\pm2,\pm5,\pm10,\pm\frac{1}{2},\pm\frac{1}{4},....$
- باختبار الأعداد النسبية نجد أن $\frac{1}{2}$ صفر للدالة.

$\frac{1}{2}$⌋	4	12	-5	-21	10
		2	7	1	-10
	4	14	2	-20	0

- نحلل الدالة الناتجة عن قسمة كثيرة الحدود الأصلية على $(x-\frac{1}{2})$ وهي :

$4x^3+14x^2+2x-20=0$

أصفار الدالة هي : $-2,-\frac{5}{2},\frac{1}{2},1$

$f(x)= 4x^3 + x^2 + 16x + 4$ (21

- بناء على نتيجة النظرية الأساسية في الجبر للدالة 3 أصفار مركبة فقط.
- بناء على قانون ديكارت للإشارات فانه لا يوجد أصفار حقيقية موجبة للدالة و٣ أصفار حقيقية سالبة.
- الأعداد التي تحددها نظرية الصفر النسبي:
- $\frac{p}{q}= \pm\frac{1}{2}, \pm\frac{1}{4}, \pm 1, \pm 2, \pm 4$
- باختبار الأعداد النسبية نجد أن $\frac{-1}{4}$ صفر للدالة.

$\frac{-1}{4}$	4	1	16	4
		-1	0	-4
	4	0	16	0

- نحلل الدالة الناتجة عن قسمة كثيرة الحدود الأصلية على $(x+\frac{1}{4})$ وهي :

$$4x^2 + 16 = 0$$

$$x=\pm 2i$$

- أصفار الدالة هي: $\frac{-1}{4}$, $\pm 2i$

$f(x)= 10x^3 - 17x^2 - 7x + 2$ (25

- بناء على نتيجة النظرية الأساسية في الجبر للدالة 3 أصفار مركبة فقط.
- بناء على قانون ديكارت للإشارات فان للدالة صفرين حقيقيين موجبين وصفر حقيقي سالب.
- الأعداد التي تحددها نظرية الصفر النسبي:
- $\frac{p}{q}= \pm 1, \pm 2, \pm\frac{1}{2}, \pm\frac{1}{5}, \pm\frac{1}{10}, \pm\frac{2}{5}$ ....
- باختبار الأعداد النسبية نجد أن $\frac{-1}{2}$ صفر للدالة.

$\frac{-1}{2}$	10	-17	-7	2
		-5	11	-2
	10	-22	4	0

- نحلل الدالة الناتجة عن قسمة كثيرة الحدود الأصلية على $(x+\frac{1}{2})$ وهي :

$$10x^2 - 22x + 4 = 0$$

أصفار الدالة هي : $2, \frac{1}{5}, \frac{-1}{2}$

$f(x)= 6x^3 + 11x^2 - 3x - 2$ (27

- بناء على نتيجة النظرية الأساسية في الجبر للدالة 3 أصفار مركبة فقط.
- بناء على قانون ديكارت للإشارات فان للدالة صفر حقيقي موجب وصفرين حقيقيين سالبين.
- الأعداد التي تحددها نظرية الصفر النسبي:
- $\frac{p}{q}= \pm 1, \pm 2, \pm\frac{1}{2}, \pm\frac{1}{3}, \pm\frac{1}{6}, \pm\frac{2}{3}$ .....
- باختبار الأعداد النسبية نجد أن $\frac{1}{2}$ صفر للدالة.

$\frac{1}{2}$	6	11	-3	-2
		3	7	2
	6	14	4	0

- نحلل الدالة الناتجة عن قسمة كثيرة الحدود الأصلية على $(x-\frac{1}{2})$ وهي :

$$6x^2 + 14x + 4 = 0$$

أصفار الدالة هي : $-2, \frac{-1}{3}, \frac{1}{2}$

$f(x)=2x^3-7x^2-8x+28$ (29

- بناء على نتيجة النظرية الأساسية في الجبر للدالة 3 أصفار مركبة فقط.
- بناء على قانون ديكارت للإشارات فان للدالة صفرين حقيقيين موجبين و صفر حقيقي سالب.
- الأعداد التي تحددها نظرية الصفر النسبي:
- $\frac{p}{q}=\pm1, \pm2, \pm4, \pm7, \pm14, \pm28, ...$
- باختبار الأعداد النسبية نجد أن ٢ صفر للدالة.

2⌋	2	-7	-8	28
		4	-6	-28
	2	-3	-14	0

- نحلل الدالة الناتجة عن قسمة كثيرة الحدود الأصلية على $(x-2)$ وهي :

$$2x^2-3x-14=0$$

$$x=-2 \quad or \quad x=\frac{7}{2}$$

أصفار الدالة هي : $-2, 2, \frac{7}{2}$

$f(t)=t^4-31t^3+308t^2-1100t+1200$ (34

- بناء على نتيجة النظرية الأساسية في الجبر للدالة ٤ أصفار مركبة فقط.
- بناء على قانون ديكارت للإشارات فان للدالة ٤ أصفار حقيقية موجبة ولا يوجد أصفار سالبة.
- الأعداد التي تحددها نظرية الصفر النسبي:
- $\frac{p}{q}=\pm1, \pm2, \pm3, \pm4, \pm5, \pm6, ...$
- باختبار الأعداد النسبية نجد أن ٢ صفر للدالة.

2⌋	1	-31	308	-1100	1200
		2	-58	500	-1200
	1	-29	250	-600	0

- نحلل الدالة الناتجة عن قسمة كثيرة الحدود الأصلية على $(x-2)$ وهي :

$$t^3-29t^2+250t-600=0$$

أصفار الدالة هي : 4,15,10,2

- هذه الاصفار تمثل الأوقات الأربعة التي تكون عندها الافعوانه عند مستوى الأرض.

$f(x)=2x^3+7x^2+2x-3$ (36

- بناء على نتيجة النظرية الأساسية في الجبر للدالة 3 أصفار مركبة فقط.
- بناء على قانون ديكارت للإشارات فان للدالة صفر حقيقي موجب و صفرين حقيقيين سالبين.
- الأعداد التي تحددها نظرية الصفر النسبي:
- $\frac{p}{q}=\pm1, \pm3, \pm\frac{1}{2}, \pm\frac{3}{2} ....$
- باختبار الأعداد النسبية نجد أن ١- صفر للدالة.

-1⌋	2	7	2	-3
		-2	-5	3
	2	5	-3	0

- نحلل الدالة الناتجة عن قسمة كثيرة الحدود الأصلية على $(x+1)$ وهي :

$$2x^2+5x-3=0$$

$$x=-3 \quad or \quad x=\frac{1}{2}$$

أصفار الدالة هي : $-1, -3, \frac{1}{2}$ وبالمثل فان أصفار الدالة $g(x)$ هي $1, 3, \frac{-1}{2}$

a) التمثيل البياني خاص بالدالة $g(x)$.

٣٩) إجابة نوف صحيحة.

٤٤) البديل الصحيح (D) ١.

٤٥) البديل الصحيح (C) ١.

اختبار الفصل الثالث

بسط كلا مما يلي: ١) $\frac{2-i}{1+3i}$

$$\frac{2-i}{1+3i}\cdot\frac{1-3i}{1-3i}$$
$$=\frac{2-6i-i-3}{1+9}$$
$$=\frac{-7i-1}{10}$$

٢) $(2+3i)-(2-3i)$

$$= 2+3i-2+3i$$
$$=6i$$

٥) $(7x-2)(2x+5)$

$$= 14x^2+35x-4x-10$$
$$= 14x^2+31x-10$$

٧) $(4x^3-x^2+5x-4)(5x-10)$

$$= 4x^3-x^2+5x-4+5x-10$$
$$= 4x^3-x^2+10x-14$$

٩)

3	3	-5	-23	24
		9	12	-33
	3	4	-11	-9

- ناتج القسمة:

$$3x^2+4x-11-\frac{9}{x-3}$$

١٢) كثيرة حدود أولية لا يمكن تحليلها.

١٨) البديل الصحيح (B) ٢٧

١٩)

-5	2	15	22	-15
		-10	-25	15
	2	5	-3	0

- بتحليل ناتج القسمة:

$$2x^2+5x-3=(2X-1)(X+3)$$

٢١) $P(x)=2x^6+5x^4-x^3-5x-1$

عند $p(x)$ نجد تغير واحد في إشارة المعاملات لذا فعدد الأصفار الحقيقية الموجبة سيكون ١.

عند $p(-x)$ نجد تغير واحد في إشارة المعاملات لذا فعدد الأصفار الحقيقية السالبة سيكون ١

عدد الاصفار التخيلية = ٤.

٢٢) $p(x)=x^3-4x^2+x+6$

- بناء على نتيجة النظرية الأساسية في الجبر للدالة 3 أصفار مركبة فقط.

- بناء على قانون ديكارت للإشارات فان للدالة صفر حقيقي سالب و صفرين حقيقيين موجبين.
- الأعداد التي تحددها نظرية الصفر النسبي هي احد عوامل العدد ٦ :
- $\frac{p}{q}= \pm1, \pm2, \pm3, \pm6$
- باختبار الأعداد النسبية نجد أن ١- صفر للدالة.

$$\begin{array}{r|rrrr} -1 & 1 & -4 & 1 & 6 \\ & & -1 & 5 & -6 \\ \hline & 1 & -5 & 6 & 0 \end{array}$$

- نحلل الدالة الناتجة عن قسمة كثيرة الحدود الأصلية على $(x+1)$ وهي :

$$x^2 - 5x + 6 = 0$$

$$x=3 \quad or \quad x=2$$

أصفار الدالة هي : $-1, 3, 2$

٢٤) نفرض أن عرض الصندوق هو w فيكون طوله $w-5$ وارتفاعه $w+8$.
حجم الصندوق = الطول × العرض × الارتفاع :

$$612=w(w+8)(w-5)$$

$$(8w+w^2)(w-5)=612$$

$$w^3 + 3w^2 - 40w - 612=0$$

المعامل الرئيس = ١ ← الأعداد النسبية الممكنة هي عوامل ٦١٢ وهي :

$$\pm1, \pm2, \pm3, \pm4, \pm6, \pm9, \ldots.$$

نختار القيم الموجبة لأنها أبعاد.
هناك ٣ تغيرات في إشارة المعاملات ← هناك ٣ أصفار حقيقية موجبة.
باختبار العدد ٩ نجد انه صفر حقيقي موجب للدالة فلا داعي لاختبار باقي القيم.

$$W=9cm\ ,\ 8+w=17cm\ ,\ w-5= 4cm$$

٢٥) $f(x)= 2x^4 + 3x^2 - 12x + 8$

إذا كان $\frac{p}{q}$ صفر نسبي فان p احد عوامل العدد 8 و q احد عوامل العدد 2 .

$$q=\pm1, \pm2 \qquad p=\pm1, \pm2, \pm4, \pm8$$

$$\frac{p}{q}=\pm\frac{1}{2}, \pm1, \pm2, \pm4, \pm8$$

اختبار معياري تراكمي

أجب عن كل من الأسئلة الآتية:

١ - الحل: (B) $3n^2+11n-1$

٢ - الحل: (C) 6

٣ -الحل: (A) 2

٤ - الحل: (D) $\frac{-4}{5}$

٥ - الحل: (D) ٣,٥ ملايين تقريبا

٦ - الحل: (C) $\frac{1}{13}+\frac{5}{13}i$

٧ - الحل: (B) ٨١

٨ - الحل: (B) $X=2A$

٩ - الحل: مساحة الحديقة = الطول × العرض

$$(12+2x)(25+2x) = 558$$

$$300+24x+50x+4x^2-558=0$$

$$4x^2+74x-258=0$$

$$x=3$$

$or\ x=-21.5$ (إجابة مستبعدة لان العرض بعد والبعد موجب)

عرض الممر = $3m$

١٠- $64a^4+ab^3=a(64a^3+b^3)$

$= a(4a^3+b^3)$

$=a(4a+b)(16a^2-4ab+b^2)$

١١-

-2	3	-4	-28	-16
		-6	20	16
	3	-10	-8	0

- بتحليل ناتج القسمة:

$$3x^2-10x-8=(3X+2)(X-4)$$

١٢ الحل: $a = 7.5$

١٣ الحل: حجم المكعب = $(15)^3=3375in^3$

حجم الاسطوانة = مساحة القاعدة × الارتفاع

$= \pi \times 4 \times 6 = 75\ in^3$

يستعمل صالح العلبة : $\frac{3375}{75}$ = ٤٥ مرة.

١٤ الحل:

$$f(x)=\begin{cases} x-1 & x<-2 \\ x+1 & x>-1 \end{cases}$$

الفصل الرابع

العلاقات والدوال العكسية والجذرية

- العمليات على الدوال
- العلاقات والدوال العكسية
- دوال ومتباينات الجذر التربيعي
- الجذر النوني
- العمليات على العبارات الجذرية
- الأسس النسبية
- حل المعادلات والمتباينات الجذرية

التهيئة للفصل الرابع

حلول اختبار سريع

١) $(x^2-4x+1)=0$

$a=1\ ,b=-4\ ,c=1$

$$x=\frac{4\pm\sqrt{16-(4\times1\times1)}}{2}$$

$$=\frac{4\pm2\sqrt{3}}{2}$$

$x=3.75 \quad or \quad x=0.25$

الأعداد الصحيحة المتتالية التي تقع بينها الجذور بين ٠و١ وبين٣و٤

4)

$$\begin{array}{r|rrr} 5 & 5 & -22 & -15 \\ & & 25 & 15 \\ \hline & 5 & 3 & 0 \end{array}$$

ناتج القسمة: $5x+3$

4-1 العمليات على الدوال

تعلمت سابقا: قمت في الفصل السابق بإجراء العمليات الحسابية على كثيرات الحدود وهنا يمكنك إجراء العمليات الحسابية نفسها على الدوال.

العمليات على الدوال

١) عملية الجمع : $(f+g)(x) = f(x) + g(x)$

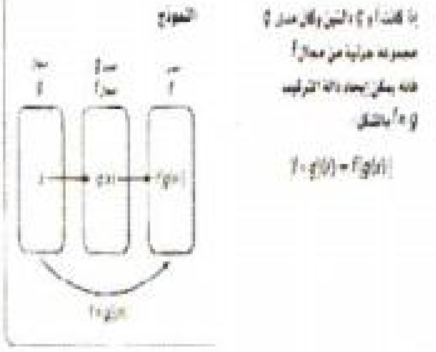
٢) عملية الطرح : $(f-g)(x) = f(x) - g(x)$

٣) عملية الضرب : $(f.g)(x) = f(x)\ .\ g(x)$

٤) عملية القسمة : $\left(\frac{f}{g}\right)(x)=\frac{f(x)}{g(x)}$

انتبه :مجال جميع الدوال الناتجة عن جمع أو طرح أو ضرب دالتين هو تقاطع مجاليهما وكذلك في القسمة باستثناء القيم التي تجعل المقام صفرا .

مثال



إذا كان $g(x)=x+4\ ,\ f(x)=x^2-7x+2$

فاوجد ما يلي :

$(f.g)(x)=x^3+4x^2-7x^2-28x+2x+8$

$=x^3-3x^2-26x+8$

$\left(\frac{f}{g}\right)(x)=\frac{x^2-7x+2}{x+4}\quad , \quad x\neq -4$

لاحظ عزيزي الطالب : يمكن أن يكون تركيب دالتين غير معرف ويكون $(f\circ g)(x)$ معرف إذا كان $g(x)$مجموعة جزئية من مجال $f(x)$.

مثال

اوجد $(f\circ g)(x),(g\circ f)(x)$ لكل زوج من الدوال الآتية :

$$f(x)=\{(3,-2)(-1,-5)(4,7)(10,8)\}$$
$$g(x)=\{(4,3)(2,-1)(9,4)(3,10)\}$$
$$(f\circ g)(x)\ ;\ g(4)=3\rightarrow f(3)=-2$$
$$g(2)=-1\rightarrow f(-1)=-5$$
$$g(9)=4\rightarrow f(4)=7$$
$$g(3)=10\rightarrow f(10)=8$$
$$(f\circ g)(x)=\{(4,-2)(2,-5)(9,7)(3,8)\}$$

$(g\circ f)(x)$ غير معرفة.

$$f(x)=x^2+2\ ,\ g(x)=x-6$$
$$(f\circ g)(x)=f(x-6)$$
$$F(x-6)=(x-6)^2+2$$
$$=x^2-12x+36+2$$
$$=x^2-12x+38$$
$$(g\circ f)(x)=g(x^2+2)$$
$$g(x^2+2)=x^2+2-6$$
$$=x^2-4$$

انتبه :ليس من الضروري أن يكون $(f\circ g)=(g\circ f)$ لذلك يجب أن تراعي ترتيب الدالتين عند تركيبهما.

مثال

يقدم محل أجهزة كهربائية عرضين معا على جهاز كهربائي هم : خصم ٣٥ ريالا وتخفيض نسبته ١٥% فإذا كان سعر الجهاز الأصلي ٣٠٠ ريال فايهما يعطي سعرا اقل : تطبيق التخفيض قبل الخصم أم بعده ؟

نفرض أن سعر الجهاز الأصلي هو x.

نفرض أن $f(x)$ تمثل السعر بعد التخفيض $f(x)=x-0.15x$

نفرض أن $g(x)$ تمثل السعر بعد الخصم $g(x)=x-35$

- إذا طبق التخفيض قبل الخصم فان السعر النهائي للجهاز يمثل بـ :

$$(g\circ f)(x)=g(300-(0.15\times300))$$
$$=g(255)$$
$$g(255)=255-35=220$$

السعر قبل الخصم = ٢٢٠ ريال.

- إذا طبق التخفيض بعد الخصم فان السعر النهائي للجهاز يمثل بـ :

$$(f\circ g)(x)=f(300-35)$$
$$=f(265)$$
$$F(265)=265-(0.15\times265)$$
$$=265-39.75$$
$$=225.25$$

السعر النهائي بعد الخصم = ٢٢٥,٢٥ ريال

إذا طبق التخفيض قبل الخصم فان السعر النهائي سيكون اقل بـ ٥,٢٥ ريال.

تدريبات وحلول

أوجد $(f+g)(x),(f-g)(x),(f.g)(x),(\frac{f}{g})(x)$ للدالتين فيمي يلي :

1) $g(x)=3x-1$

$f(x)=x+2$

$(f+g)(x)=x+2+3x-1$

$=4x+1$

$(f-g)(x)=x+2-3x+1$

$=-2x+3$

$(f.g)(x)=(x+2).(3x-1)$

$=3x^2+5x-2$

$(\frac{f}{g})(x)=\frac{x+2}{3x-1}\ ,\ x\neq\frac{1}{3}$

أوجد $(f+g)(x),(f-g)(x),(f.g)(x),(\frac{f}{g})(x)$ للدالتين فيمي يلي :

9) $g(x)=-x+1$

$f(x)=x^2$

$(f+g)(x)=x^2-x+1$

$(f-g)(x)=x^2+x-1$

$(f.g)(x)=x^2.(-x+1)$

$=-x^3+x^2$

$(\frac{f}{g})(x)=\frac{x^2}{-x+1}\ ,\ x\neq 1$

١١) a. سرعته الكلية إذا كان مشي باتجاه سير الممر المتحرك :

$(w+i)(x)=4x+7+3x-4$

$=7x-3$

١٩) a. الدالة التي تعبر عن ربح المصنع إذا باع x فنجان :

$P(x)=r(x)-c(x)$

$=6.5x-0.75x-1850$

$=5.75x-1850$

b. ربح المصنع عند :

$P(500)=5.75(500)-1850=1025$

$P(1000)=5.75(1000)-1850=3900$

$P(5000)=5.75(5000)-1850=26900$

٢١) $(f-g)(x)=x^2+x-12-x+3$

$=x^2-9$

مجال الدالة مجموعة الاعداد الحقيقية.

٢٢) $2(f.g)(x)=2(x^2+x-12)(x-3)$

$=2(x^3-3x^2+x^2-3x-12x+36)$

$=2x^3-4x^2-30x+72$

مجال الدالة هو مجموعة الاعداد الحقيقية.

٢٣) $(\frac{f}{g})(x)=\frac{x^2+x-12}{x-3}$

$= \frac{(x-3)(x+4)}{(x-3)} = (x-4)$

المجال مجموعة الاعداد الحقيقية ماعدا $\{3\}$

٢٥) $h(f(-5))$

$F(-5)=5(-5)=-25$

$H(-25)=(-25)^2+6(-25)+8$

$= 625-150+8$

$=483$

٢٧) $f(g(3a))$

$G(3a)=-2(3a)+1$

$=-6a+1$

$F(-6a+1)=5(-6a+1)$

$=-30a+5$

٣١) a. العدد الكلي للرجال والنساء الذن تم توظيفهم :

$7x+6-5x+5=2x+11$

b. $(f-g)(x)$ تمثل الفرق بين عدد الرجال وعدد النساء الذن تم توظيفهم.

٣٢) $(f.g.h)(x)$

$(x+2)(-4x+3)(x^2-2x+1)$

$=(-4x^2+3x-8x+6)(x^2-2x+1)$

$=(-4x^2-5x+6)(x^2-2x+1)$

$=-4x^4+3x^3+12x^2-17x+6$

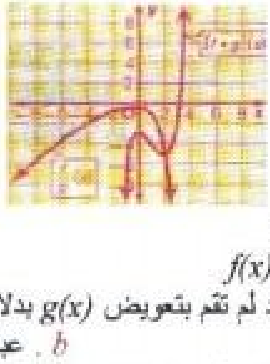
$(f.g.h)(3)=-4(81)+3(27)+12(9)-17(3)+6$

$=-180$

٣٨) a.

x	$(f.g)(x)$	$f/g(x)$
1	-4	-1
2	-5	-5
3	0	غير معرف
4	17	17
5	52	13

b.



c. عندما $x=2$ فان $f(x)=g(x)$

وكذلك عندما $x=4$ فان $f(x)=g(x)$

٤٠) اجابة ريم صحيحة لان العنود لم تقم بتعويض $g(x)$ بدلا من (x) في الدالة $f(x)$.

٤٢) a. عبارة صحيحة دائما b. عبارة صحيحة احيانا.

٤٤) البديل الصحيح (B) $k(x)=x^2+11x+29$ ٤٥) البديل الصحيح (c) 86

4-2 العلاقات والدوال العكسية

تذكر عزيزي الطالب:

١) العلاقة هي مجموعة من الأزواج المرتبة.

٢) العلاقة العكسية هي مجموعة أزواج مرتبة نحصل علها عن طريق تبديل إحداثيات كل زوج مرتب للعلاقة بحيث يصبح مجال العلاقة هو المدى والمدى هو المجال.

مفهوم

تكون كلا من العلاقتين عكسية للاخرى اذا وفقط اذا احتوت إحداهما على اي زوج مرتب مثل (a , b) وتحتوي الاخرى على الزوج المرتب (b , a).

مثال

إذا كانت الأزواج المرتبة للعلاقة $\{(-6,-3)(-6,-8)(-3,-8)\}$ تمثل إحداثيات رؤوس المثلث قائم الزاوية فاوجد العلاقة العكسية لها وصف تمثيلها البياني؟

العلاقة العكسية لها هي $\{(-3,-6)(-8,-6)(-8,-3)\}$ وتمثيل المثلث المنعكس بيانيا سيكون ناتج عن انعكاس للمثلث الأصلي حول المستقيم $x=y$.

ملاحظة: يرمز للدالة العكسية للدالة $f(x)$ بالرمز $f^{-1}(x)$.

- إذا كان كلا من $f^{-1}(x)$ ، $f(x)$ دالة عكسية للأخرى فإن $f(a)=b$ إذا وفقط إذا كان $f^{-1}(b)=a$.

مثال

أوجد معكوس الدالة التالية ثم مثل الدالة ومعكوسها بيانيا على مستوى إحداثي واحد :

$$f(x)=\frac{x-3}{5}$$

- نعيد كتابة الدالة بدلالة المتغيرين x,y : $y=\frac{x-3}{5}$
- نبدل بين كلا من y , x في المعادلة : $x=\frac{y-3}{5}$
- نحل المعادلة بالنسبة للمتغير y: $y-3=5x \leftarrow y=5x+3$
- نضع $f^{-1}(x)$ بدلا من المتغير y : $f^{-1}(x)=5x+3$
- التمثيل البياني لها هو انعكاس للدالة $f(x)$ حول المستقيم $x=y$.

مفهوم الدالة العكسية

تكون كلا من الدالتين f , g دالة عكسية للاخرى اذا وفقط اذا كان تركيب كلا منهما يساوي الدالة المحايدة.

اي ان : الدالتان f(x),g(x) تمثل كل منهما دالة عكسية للاخرى اذا وفقط اذا كان : $(f\circ g)=(g\circ f)=x$

تدريبات وحلول

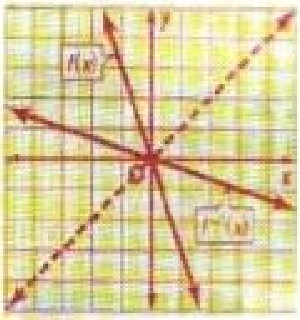
أوجد العلاقة العكسية للدوال للعلاقة التالية :

1) $\{(-9,10)(1,-3)(8,-5)\}$

العلاقة العكسية لها هي $\{(10,-9)(-3,1)(-5,8)\}$

أوجد معكوس الدالة التالية ثم مثل الدالة ومعكوسها بيانيا على مستوى إحداثي واحد :

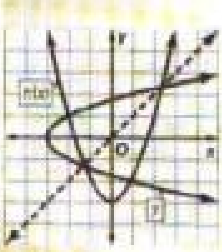
3) $f(x)=-3x$



نعيد كتابة الدالة بدلالة المتغيرين x,y : $y=-3x$

- نبدل بين كلا من x , y في المعادلة : $x=-3y$
- نحل المعادلة بالنسبة للمتغير y: $y=-\frac{1}{3}x$
- نضع $f^{-1}(x)$ بدلا من المتغير y : $f^{-1}(x)=-\frac{1}{3}x$
- التمثيل البياني لها هو :

5) $f(x)=x^2-3$



- نعيد كتابة الدالة بدلالة المتغيرين x,y : $y=x^2-3$
- نبدل بين كلا من x , y في المعادلة : $x=y^2-3$
- نحل المعادلة بالنسبة للمتغير y: $y=\sqrt{x+3}$
- نضع $f^{-1}(x)$ بدلا من المتغير y : $f^{-1}(x)=\pm\sqrt{x+3}$
- التمثيل البياني لها هو :

حدد إذا كانت كل دالتين فيما يلي دالة عكسية للأخرى ام لا مع التوضيح :

7) $f(x)=\frac{1}{2}x+\frac{3}{4}$, $g(x)=2x-\frac{4}{3}$

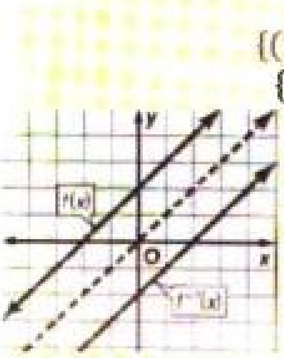
$$(f\circ g)(x)=f(2x-\frac{4}{3})$$
$$=\frac{1}{2}(2x-\frac{4}{3}x)+\frac{3}{4}$$
$$=x-\frac{4}{6}+\frac{3}{4}$$
$$=x-\frac{1}{12}\neq x$$

لا تمثل كل من الدالتين دالة عكسية للأخرى .

أوجد العلاقة العكسية للدوال للعلاقة التالية :

9) $\{(1,-5)(2,6)(3,-7)(4,8)(5,-9)\}$

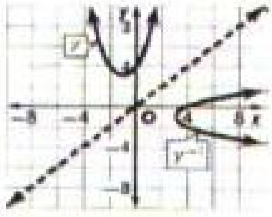
العلاقة العكسية لها هي $\{(-5,1)(6,2)(-7,3)(8,4)(-9,5)\}$



أوجد معكوس الدالة التالية ثم مثل الدالة ومعكوسها بيانيا على مستوى إحداثي واحد :

11) $f(x)=x+2$

- نعيد كتابة الدالة بدلالة المتغيرين x,y : $y=x+2$
- نبدل بين كلا من x , y في المعادلة : $x=y+2$
- نحل المعادلة بالنسبة للمتغير y: $y=x-2$
- نضع $f^{-1}(x)$ بدلا من المتغير y : $f^{-1}(x)=x-2$



(19 $f(x)=(x+1)^2+3$

- نعيد كتبة الدالة بدلالة المتغيرين x,y : $y=(x+1)^2+3$
- نبدل بين كلا من y , x في المعادلة : $x=(y+1)^2+3$
- نحل المعادلة بالنسبة للمتغير y: $y=\pm\sqrt{x-3}-1$
- نضع $f^{-1}(x)$ بدلا من المتغير y : $f^{-1}(x)=\pm\sqrt{x-3}-1$

حدد إذا كانت كل دالتين فيما يلي دالة عكسية للأخرى أم لا مع التوضيح :

(21 $f(x)=-\frac{1}{3}x+3\ ,\ g(x)=-3x+9$

$$(f\circ g)(x)=f(-3x+9)$$
$$=\frac{-1}{3}(-3x+9)+3$$
$$=x-3+3$$
$$=x$$

$$(g\circ f)(x)=g(-\frac{1}{3}x+3)$$
$$=-3(-\frac{1}{3}x+3)+9$$
$$=x-9+9$$
$$=x$$

تمثل كل من الدالتين دالة عكسية للأخرى .

(25 $f(x)=2\sqrt{x-5}\ ,\ g(x)=\frac{1}{4}x^2-5$

$$(g\circ f)(x)=g(2\sqrt{x-5})$$
$$=\frac{1}{4}(2\sqrt{x-5})^2-5$$
$$=\frac{1}{4}(4(x-5))-5$$
$$=\frac{1}{4}(4x-20)-5$$
$$=x-5-5$$
$$=x-10$$

لا تمثل كل من الدالتين دالة عكسية للأخرى.

.b $A=36cm^2\rightarrow r=\sqrt{\frac{36}{314}}\rightarrow r=3.4cm$

(32 a. $F(x)=\frac{9}{5}x+32$

$$y=\frac{9}{5}x+32$$
$$x=\frac{9}{5}y+32$$
$$\frac{9}{5}y=x-32$$
$$y=\frac{5}{9}(x-32)$$
$$f^{-1}(x)=\frac{5}{9}(x-32)$$

$$f(f^{-1}(x))=\frac{9}{5}(\frac{5}{9}(x-32))+32$$
$$=x-32+32\quad =x$$

$$f^{-1}(f(x))=\frac{5}{9}(\frac{9}{5}x+32-32=x$$

كل من الدالتين تمثل دالة عكسية للأخرى.

b. تستعمل قيم $f^{-1}(x)$ للتحويل من درجة الحرارة الفهرنهايتية إلى درجة الحرارة السليزية.

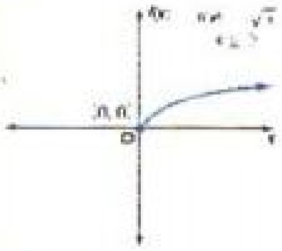
٣٤) العبارة صحيحة أحيانا ومثال على ذلك الدالة معادلة الدائرة لا تمثل دالة ومعكوسها لا يمثل دالة.

٣٦) $f(x) = f^{-1}(x) = x$

٣٨) البديل الصحيح هو $x^2 - 2x + 4$ (D) ٣٩) البديل الصحيح هو (A) $g(x) = \frac{2x+5}{3}$

4-3 دوال ومتباينات الجذر التربيعي

لاحظ عزيزي الطالب: إذا احتوت دالة على الجذر التربيعي لمتغير تسمى دالة الجذر التربيعي وهي نوع من أنواع الدالة الجذرية.



الدالة الرئيسية (الأم): $f(x) = \sqrt{x}$

المجال: $\{x \mid x \geq 0\}$

المدى: $\{f(x) \mid f(x) \geq 0\}$

المقطع x والمقطع y: $x = 0, f(x) = 0$

غير معرفة عندما: $x < 0$

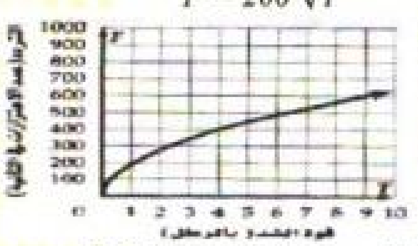
سلوك الدالة عند طرفيها: $x \to 0, f(x) \to 0$

$x \to +\infty, f(x) \to +\infty$

مثال

يمكن تحديد تردد اهتزازات وتر مشدود باستعمال الدالة $F = 200\sqrt{T}$ حيث تمثل F عدد الاهتزازات في الثانية T قوة الشد مقيسة بالرطل مثل هذه الدالة بيانيا في الفترة $0 \leq T \leq 10$ ثم اوجد التردد عندما تكون قوة الشد ٣ أرطال.

$F = 200\sqrt{T}$



F	T
0	0
200	1
282.8	2
346.4	3

التردد عندما تكون قوة الشد ٣ أرطال = ٣٤٦.٤ اهتزازة / ثانية

متباينة الجذر التربيعي

هي متباينة تحوي الجذر التربيعي ويمكن تمثلها بيانيا تماما مثل طريقة تمثيل المتباينات الاخرى.

تدريبات وحلول

٢) عين كلا من المجال والمدى للدالة : $f(x) = \sqrt{x-5}$

$$x - 5 \geq 0$$

$$x \geq 5$$

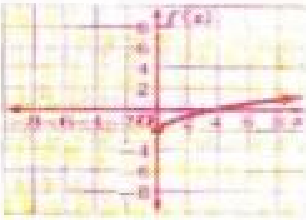
المجال $\{x ; x \geq 5\}$

المدى $\{f(x); f(x) \geq 0\}$

٤) مثل بيانيا الدالة التالية وحدد مجالها ومداها : $f(x) = \sqrt{x} - 2$

- القيمة الصغرى للمجال عند $h=0$, $k=-2$
- نعمل جدولا للقيم x حيث $x \geq 0$

x	y
1	-1
2	-0.5
3	-0.26
4	0



- قيمة a موجبة فالتمثيل البياني للدالة هو تحويل للتمثيل البياني للدالة $f(x)=\sqrt{x}$ مع إزاحة بمقدار وحدتين إلى الأسفل.
- المجال $\{x ; x \geq 0\}$
- المدى $\{f(x); f(x) \geq -2\}$

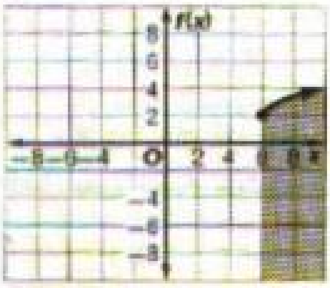
6) $f(x) = \frac{1}{2}\sqrt{x+4} - 1$

- القيمة الصغرى للمجال عند $h=-4$, $k=-1$
- نعمل جدولا للقيم x حيث $x \geq -4$
-

x	y
-3	-0.5
-2	-0.29
-1	-0.13
0	1
1	0.11
2	0.22

- قيمة a موجبة فالتمثيل البياني للدالة هو تحويل للتمثيل البياني للدالة $f(x)=\sqrt{x}$ مع إزاحة بمقدار وحدة إلى الأسفل و ٤ وحدات يسارا.
- المجال $\{x ; x \geq -4\}$
- المدى $\{f(x); f(x) \geq -1\}$

٨)
$$v=356\sqrt{d}$$
$$v=145\ km/h$$
$$145=356\sqrt{d}$$
$$\sqrt{d}=\frac{145}{356}$$
$$\sqrt{d}=0.407$$
$$d=0.17\ km$$

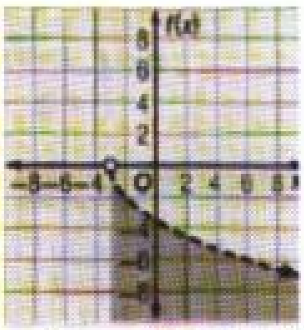


١٠) مثل المتباينة التالية بيانيا : $f(x)\le\sqrt{x-6}+2$

- نمثل المتباينة $f(x)\ \le\sqrt{x-6}+2$
- نمثل الحد $f(x)=\sqrt{x-6}+2$
- المجال $\{x\,;x\ \ge 6\}$
- قيمة y اقل من الحد فالتمثيل البياني للمتباينة هو المنطقة المظللة تحت الحد وضمن المجال.

11) $f(x)<-2\sqrt{x+3}$

- نمثل المتباينة $f(x)<-2\sqrt{x+3}$
- نمثل الحد $f(x)=\ -2\sqrt{x+3}$
- المجال $\{x\,;x\ \ge -3\}$
- قيمة y اقل من الحد فالتمثيل البياني للمتباينة هو المنطقة المظللة تحت الحد وضمن المجال.
- التمثيل البياني لها :



١٣) عين كلا من المجال والمدى للدالة : $f(x)\ =-\sqrt{2x}+2$
$$2x\ \ge 0$$
$$x\ge 0$$
المجال $\{x\,;x\ \ge 0\}$
المدى $\{f(x);f(x)\le 2\}$

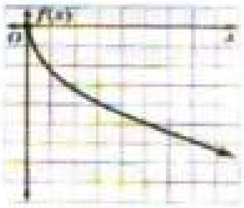
15) $f(x)\ =4\sqrt{x-2}-8$
$$x\text{-}2\ \ge 0$$
$$x\ge 2$$
المجال $\{x\,;x\ \ge 2\}$
المدى $\{f(x);f(x)\ge -8\}$

١٧) مثل بيانيا الدالة التالية وحدد مجالها ومداها : $f(x)\ =-\sqrt{5x}$

- القيمة الصغرى للمجال عند $h=0\ ,\ k=0$

- نعمل جدولا للقيم x حيث $x \geq 0$

x	y
0	0
1	-2.2
2	-3.1
3	-3.8



- قيمة a سالبة فالتمثيل البياني للدالة ينعكس حول المحور x بدون إزاحات.
- المجال $\{x \,;\, x \geq 0\}$
- المدى $\{f(x); f(x) \leq 0\}$

٢٢) $t \leq 11$ ، $t = \sqrt{\frac{d}{16}}$

عند $t = 11s$ ← $121 = \frac{d}{16}$

d= 121(16)

d = 1936 ft

٢٣) a. V = 90ft/s

v=10ft/s

$V = \sqrt{v^2 + 64h}$

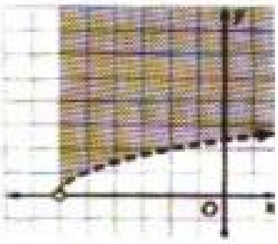
$90 = \sqrt{100 + 64h}$

b. بحل المعادلة في الفقرة (a) $90 = \sqrt{100 + 64h}$

8100=100+64h

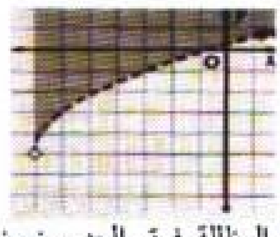
8000=64h

h=125ft



٢٥) مثل المتباينة التالية بيانيا: $y > \sqrt{x + 6}$

- نمثل المتباينة $y > \sqrt{x + 6}$
- نمثل الحد $y = \sqrt{x + 6}$
- المجال $\{x \,;\, x \geq -6\}$
- قيمة y اكبر من الحد فالتمثيل البياني للمتباينة هو المنطقة المظللة فوق الحد وضمن المجال.



27) $y > 2\sqrt{x + 7} - 5$

- نمثل المتباينة $y > 2\sqrt{x + 7} - 5$
- نمثل الحد $y = 2\sqrt{x + 7} - 5$
- المجال $\{x \,;\, x \geq -7\}$
- قيمة y اكبر من الحد فالتمثيل البياني للمتباينة هو المنطقة المظللة فوق الحد وضمن المجال.

٣٦) $y = \sqrt{x + 2} + 4$ ٣٧) الأعداد الفردية الموجبة.

٤٠) البديل الصحيح هو (D) $-8x^3$ ٤١) البديل الصحيح هو (D) III فقط.

4-4 الجذر النوني

عزيزي الطالب: لنتذكر سويا أن الجذر التربيعي هو عملية عكسية لتربيعه وبالمثل فان العملية العكسية لرفع عدد لقوة (n) هي إيجاد الجذر النوني للعدد.

مفهوم

لأي عددين حقيقيين a,b ولأي عدد صحيح موجب n ، إذا كان $a^n = b$ فان a هو الجذر النوني للعدد b.

لاحظ جيدا: يشير الرمز $\sqrt[n]{\ }$ إلى الجذر النوني وبعض الأعداد لها أكثر من جذر نوني حقيقي وحينها عندما تكون n عدد زوجي فان الجذر غير السالب يسمى الجذر الرئيس.

ليكن n عدداً صحيحاً أكبر من 1، و a عدداً حقيقياً.

a	n عدد زوجي	n عدد فردي
$a > 0$	هناك جذر حقيقي موجب وحيد، وجذر حقيقي سالب وحيد: $\pm\sqrt[n]{a}$، الجذر الموجب هو الجذر الرئيس	هناك جذر حقيقي موجب وحيد، وليس هناك جذر حقيقي سالب: $\sqrt[n]{a}$
$a < 0$	ليس هناك جذور حقيقية	ليس هناك جذور حقيقية موجبة، وهناك فقط جذر حقيقي سالب وحيد: $\sqrt[n]{a}$
$a = 0$	هناك فقط جذر حقيقي: $\sqrt[n]{0} = 0$	هناك فقط جذر حقيقي: $\sqrt[n]{0} = 0$

مثال

بسط العبارة التالية: $\sqrt[3]{8x^6}$

$= \sqrt[3]{(2x^2)^3} = 2x^2$

أي أن الجذر الثالث لـ $8x^6$ هو $2x^2$

انتبه: إذا كان دليل الجذر عدد زوجي واس ما تحت الجذر عدد زوجي وكان أس الناتج عدد فردي يجب أن تجد القيمة المطلقة للناتج لنتأكد من أن الجواب ليس سالبا.

مثال

يمكن إيجاد مساحة سطح كرة إذا علم حجمها باستعمال القانون $s = \sqrt[3]{36\pi v^2}$ حيث v تمثل حجم الكرة ، اوجد مساحة سطح كرة حجمها $200in^3$.

$$s = \sqrt[3]{36\pi v^2}$$
$$= \sqrt[3]{36\pi(200)^2}$$
$$= \sqrt[3]{4523893.4}$$
$$= 165.3\ in^2$$

تدريبات وحلول

١) بسط كلا مما يلي : $\pm\sqrt{100y^8}$

$= \pm\sqrt{(10y^4)^2} = \pm 10y^4$

٣) $(y-6)^8$

$= \sqrt{((y-6)^4)^2} = (y-6)^4$

5) $\sqrt[3]{-125}$

$\sqrt[3]{-125} = \sqrt[3]{-5^3} = -5$

استعمل الحاسبة لتقريب قيمة كل مما يأتي إلى اقرب ثلاث منازل عشرية:

٢٥) $r = \sqrt[3]{v} \rightarrow v = 512cm^3$

$= \sqrt[3]{512}$

$= \sqrt[3]{8^3}$

$= 8cm$

استعمل الحاسبة لتقريب قيمة كل مما يأتي إلى اقرب ثلاث منازل عشرية:

٣١) بسط كلا مما يلي: $\sqrt{196c^6d^4}$

$= \sqrt{(14c^3d^2)^2} = 14|c^3|d^2$

33) $\sqrt[4]{-16x^{16}y^8}$

$= \sqrt[4]{-(2x^4y^2)^4} = \pm 2ix^4y^2$

٣٥) $d = \sqrt[3]{6t^2} \rightarrow t = 687$

$= \sqrt[3]{6(687)^2}$

$= 141.4$

بعد كوكب المريخ عن الشمس ١٤١ ملون ميل تقريبا.

٣٦) $p = 73.3\sqrt[4]{m^3}$

الحيوان	الكتلة	متوسط الايض اليومي له
النسر	4.5	$p=73.3\sqrt[4]{(4.5)^3} = 226.5\ cal$
الكلب	30	$p=73.3\sqrt[4]{(30)^3} = 939.6\ cal$
التمساح	72	$p=73.3\sqrt[4]{(72)^3} = 1811.8\ cal$
الدولفين	156	$p=73.3\sqrt[4]{(156)^3} = 3235.5\ cal$
الفيل	2300	$p=73.3\sqrt[4]{(2300)^3} = 24344.4\ cal$

٣٩) العدد ٦٤ جذره التربيعي ٨ وجذره التكعيبي ٤.

٤٢) البديل الصحيح هو (B) 2.7

٤٢) البديل الصحيح هو (B) 26

اختبار منتصف الفصل

١) الحل:

$$(f+g)(x) = 2x^2+4x-3+5x-2$$
$$= 2x^2+9x-5$$

٣) الحل:

$$(f.g)(x) = (2x^2+4x-3).(5x-2)$$
$$= 10x^3 - 4x^2 + 20x^2 - 8x - 15x + 6$$
$$= 10x^3+16x^2-23x+6$$

٥) الحل:

$$(f \circ g)(x) = f(5x-2)$$
$$= 2(5x-2)^2+4(5x-2)-3$$
$$= 2(25x^2-20x+4)+20x-8-3$$
$$= 50x^2-40x+8+20x-11$$
$$= 50x^2-20x-3$$

٧) الحل:

A . نفرض أن $p(x)$ تمثل المبلغ الإجمالي بعد خصم القسيمة $p(x)= 0.75x$

نفرض أن $g(x)$ تمثل المبلغ النهائي بعد إضافة بدل الخدمة $g(x)=1.06x$

• B.

$$(p \circ g)(x) = p(1.06x)$$
$$= 0.75(1.06x)$$
$$= 0.795x$$

$$(g \circ p)(x) = g(0.75x)$$
$$= 1.06(0.75x)$$
$$= 0.795x$$

$$(g \circ p)(x) = (p \circ g)(x)$$

كلتا الدالتين تمثل المبلغ النهائي.

٩) الحل: y

١٢) الحل:

$$h(x) = \frac{2}{5}x + 8$$
$$y = \frac{2}{5}x + 8$$
$$x = \frac{2}{5}y + 8$$
$$x-8 = \frac{2}{5}y$$
$$5x-8 = 2y$$
$$y = \frac{5}{2}(x-8)$$

14) الحل:

$$h(x) = -\frac{10}{3}(x+5)$$
$$y = -\frac{10}{3}(x+5)$$
$$x = -\frac{10}{3}(y+5)$$
$$y+5 = \frac{3}{10}x$$

$y=\frac{3}{10}x-5$

16) الحل:

$f(h) = 15h + 25$

.a $f^{-1}(h) = \frac{1}{15}h - \frac{5}{3}$ وهذه الدالة تمثل عدد ساعات العمل.

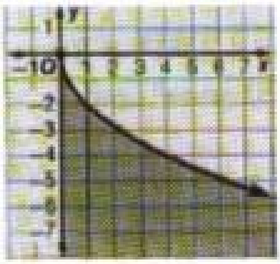
.b $f(h)=15(h)+25$

$85 = 15h + 25$

$15h = 60$

$h = 4$

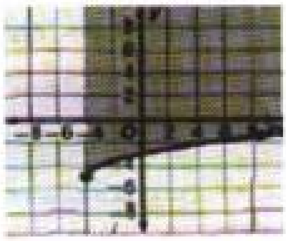
عدد ساعات عمل المؤسسة في الحديقة ٤ ساعات



18) الحل:

تمثل المتباينة $y \le -2\sqrt{x}$

- تمثل الحد $y = -2\sqrt{x}$
- المجال $\{x\,;x \ge 0\}$
- قيمة y اقل من الحد فالتمثيل البياني للمتباينة هو المنطقة المظللة تحت الحد وضمن المجال.



20) الحل:

- تمثل المتباينة $y \ge \sqrt{x+4} - 5$
- تمثل الحد $y = \sqrt{x+4} - 5$
- المجال $\{x\,;x \ge -4\}$
- قيمة y اكبر من الحد فالتمثيل البياني للمتباينة هو المنطقة المظللة فوق الحد وضمن المجال.

22) الحل:

$f(x) = \sqrt{x+4} - 1$

- القيمة الصغرى للمجال عند $h=-4\,,\,k=-1$
- نعمل جدولا للقيم x حيث $x \ge -4$

x	y
-2	0.4
-1	0.7
0	1
1	1.2
2	1.4

- قيمة a موجبة فالتمثيل البياني للدالة هو تحويل للتمثيل البياني للدالة $f(x)=\sqrt{x}$ مع إزاحة بمقدار ٤ وحدات يسارا ووحدة واحدة إلى الأسفل.
- المجال $\{x\,;x \ge -4\}$
- المدى $\{f(x);f(x) \ge -1\}$

24)الحل:

$$\sqrt{121a^4b^{18}}$$

$$= \sqrt{(11a^2b^9)^2} = 11a^2|b^9|$$

26)الحل:

$$\sqrt[3]{27(2x-5)^{15}}$$

$$= \sqrt[3]{3((2x-5)^5)^3} = 3(2x-5)^5$$

28)الحل:

$$\sqrt[3]{8(x+4)^6}$$

$$= \sqrt[3]{2((x+4)^2)^3} = 2(x+4)^2$$

30)الحل: البديل الصحيح (B) 5.42 in

31)الحل:

$c(p(h)) = c(40h)$ .a

$c(40h) = 5(40h) + 60$

$=200h+60$

$h = 8$ .b

$200(8) + 60 = 1600+60=1660$ S.R

4-5 العمليات على العبارات الجذرية

خاصية ضرب الجذور :

لأي عددين حقيقيين a , b ولأي عدد صحيح n حيث $n > 1$ فان :

$\sqrt[n]{ab} = \sqrt[n]{a} . \sqrt[n]{b}$ إذا كانت n عددا زوجيا وكان a , b عددين غير سالبين أو إذا كان n عددا فرديا.

انتبه تكون العبارة الجذرية في ابسط صورة عندما لا يحتوي ما تحت الجذر عوامل هي قوى نونية لعدد صحيح أو كثيرة حدود.

مثـــال

بسط ما يلي : $\sqrt{12d^3c^{12}}$

$= \sqrt{3.4.d^2.d.c^6.c^2}$

$= 2dc^6\sqrt{3d}$

خاصية قسمة الجذور :

لأي عددين حقيقيين a , b حث $b \neq 0$ ولأي عدد صحيح n حيث $n > 1$ فان :

$\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$ إذا كانت جميع الجذور معرفة.

انطاق المقام هو عملية تستعمل لإزالة الجذور من المقام او الكسور تحت الجذر وذلك بضرب البسط والمقام في مقدار ثابت بحيث تكون جميع اسس الثوابت والمتغيرات الموجودة تحت الجذر من مضاعفات دليل الجذر.

تبسيط العبارات الجذرية

تكون العبارة الجذرية في ابسط صورة اذا تحققت جميع الشروط الاتية :

* اذا كان دليل الجذر n اصغر مايمكن.
* اذا لم يتضمن ماتحت الجذر عوامل غير العدد ١ يمكن ان تكتب على صورة قوى نونية لعدد صحيح او كثيرة حدود .
* اذا لم يتضمن ماتحت الجذر كسورا.
* اذا لم توجد جذور في المقام.

مثال

بسط ما يلي : $6\sqrt{8c^3d^5}.4\sqrt{2cd^3}$

$6.4\sqrt{8c^3d^5.2cd^3}$

$=6.4\sqrt{16c^4d^8}$

$=24\sqrt{4^2{c^2}^2{d^4}^2}$

$=24.4c^2d^4$

$=96c^2d^4$

انتبه الجذور المتشابهة لها الدليل نفسه وما تحت الجذر المقادير نفسها.

مثال

بسط ما يلي : $4\sqrt{8}+3\sqrt{50}$

$=4\sqrt{2.2^2}+3\sqrt{2.5^2}$

$=4.2\sqrt{2}+3.5\sqrt{2}$

$=8\sqrt{2}+15\sqrt{2}$

$=23\sqrt{2}$

ملاحظة هامة:

تنطبق خاصية التوزيع على ضرب الجذور.

انتبه حاصل ضرب عددين مرافقين هو عدد نسبي دائما.

مثال

بسط ما يلي :

$=\frac{1}{\sqrt{3}-4}\times\frac{\sqrt{3}+4}{\sqrt{3}+4}$

$=\frac{\sqrt{3}+4}{3-16}=\frac{\sqrt{3}+4}{-13}$

تدريبات وحلول

بسط كل عبارة جذرية مما يلي :

$= \sqrt{6^2 . a . (b^2)^2 . (c^2)^2 . c}$

$= 6b^2c^2\sqrt{ac}$

$(5\sqrt{2x} \ . \ 3\sqrt{8x})$ (5

$= 5 \ . \ 3\sqrt{2x \ .8x}$

$= 15\sqrt{4^2 \ . x^2}$

$= 15 \ . \ 4 \ . \ x$

$= 60x$

$(8\sqrt{3} - 2\sqrt{2})(8\sqrt{3} + 2\sqrt{2})$ (10

$= (8\sqrt{3})^2 - (2\sqrt{2})^2$

$= 64(3) - 4(2)$

$= 192 - 8$

$= 184$

$= \frac{8}{\sqrt{6}-5} \times \frac{\sqrt{6}+5}{\sqrt{6}+5}$ (12

$= \frac{8\sqrt{6}+40}{6-25} = \frac{-8\sqrt{6}-40}{19}$

$14 \quad \frac{6-\sqrt{3}}{\sqrt{3}+4} \times \frac{\sqrt{3}-4}{\sqrt{3}-4}$ (14

$= \frac{6\sqrt{3}-24-3+4\sqrt{3}}{3-16} = \frac{-10\sqrt{3}+27}{13}$

١٥) مساحة المثلث = $\frac{1}{2}$ × القاعدة × الارتفاع

$189 \ . \ 4\sqrt{3} = \frac{1}{2} . (12+\sqrt{3}) . x$

$378 \ . \ 8\sqrt{3} = (12+\sqrt{3}) . x$

$x = \frac{378+8\sqrt{3}}{12+\sqrt{3}} \times \frac{12-\sqrt{3}}{12-\sqrt{3}}$

$= \frac{4536-378\sqrt{3}+96\sqrt{3}-24}{144-3} = \frac{4512-282\sqrt{3}}{141}$

$= 32 - 2\sqrt{3} cm$

بسط كل عبارة جذرية مما يلي :

$= \sqrt{3^2 . a^2 . (a^5) . a . (b^2) . b}$

$= 3a^7b\sqrt{ab}$

$(3\sqrt{5y} \ . \ 8\sqrt{10y})$ (22

$= 3 \ . \ 8 \ .5y\sqrt{2}$

$= 120y\sqrt{2}$

٢٦) مساحة المستطيل = العرض × الطول

$\sqrt{6}(8+\sqrt{3})$

$= 8\sqrt{6}+\sqrt{18}$

المحيط = ٢ (الطول + العرض)

$= 2(\sqrt{6}+8+\sqrt{3})$

$= 2\sqrt{6}+2\sqrt{3}+16$

بسط كل عبارة جذرية مما يلي :

27) $(7\sqrt{2}-3\sqrt{3})(4\sqrt{6}+3\sqrt{12})$

$= 28\sqrt{12}+21\sqrt{24}-12\sqrt{18}-9\sqrt{36}$

$= 28 . 2\sqrt{3}+21 .2\sqrt{6}-12 .3\sqrt{2}-9 .6$

$= 56\sqrt{3}+42\sqrt{6}-36\sqrt{2}-54$)

30) $= \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{5}-\sqrt{3}} \times \frac{\sqrt{5}+\sqrt{3}}{\sqrt{5}+\sqrt{3}}$

$= \frac{\sqrt{10}+\sqrt{6}}{5-3} = \frac{\sqrt{10}+\sqrt{6}}{2}$

33) $= \sqrt{-54x^6y^{11}}$

$= -3x^2y^3\sqrt[3]{2y^2}$

37) $= \frac{x-2}{\sqrt{x^2-4}}$

$= \frac{\sqrt{x^2-4}}{x+2}$

٣٩) $d=\sqrt[3]{3w}$

$w = 6.47$

$d= \sqrt[3]{3(6.47)} = \sqrt[3]{19.41} = 2.68$

٤٠) $\sqrt[b]{a^b} = |a|$ ٤٢) $\sqrt[b]{a^{2b}} = a^2$

٤٥) خالد إجابته صحيحة لان ناصر أخطأ في إتمام عملية الضرب.

٤٧) ٠ هي القيمة التي تجعل المعادلة صحيحة لان $\sqrt{a}$ يساوي عدد حقيقي عندما $a \geq 0$
وكذلك $\sqrt{-a}$ يساوي عدد حقيقي عندما $a \leq 0$.

٤٩) إذا كان n عددا فرديا فهناك فقط جذر حقيقي واحد وبناء على ذلك فلا حاجة إلى استعمال رمز القيمة المطلقة أما إذا كان n عددا زوجيا فان

$\sqrt[n]{x^n} = |x|$

٥٠) البديل الصحيح (B) $6\sqrt{5}\,|a|b^4$

4-6 الأسس النسبية

خاصية العدد $b^{\frac{1}{n}}$:

لأي عدد حقيقي b ولأي عدد صحيح موجب n فان : $b^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{b}$.
إلا إذا كانت $b < 0$ و n عددا زوجيا فان الجذر النوني قد يكون عددا مركبا.

مثال

اكتب ما يلي على الصورة الجذرية : $d^{\frac{7}{4}}$

$= \sqrt[4]{d^7}$

اكتب ما يلي على الصورة الأسية : $\sqrt[3]{c^{-5}}$

$= c^{\frac{-5}{3}}$

الأسس النسبية :

يكون $b^{\frac{x}{y}} = \sqrt[y]{b^x} = (\sqrt[y]{b})^x$ لأي عدد حقيقي b لا يساوي صفر، ولأي عددين صحيحين x , y بحيث $y > 1$ إلا إذا كانت $b < 0$ و y عددا زوجيا فان الجذر قد يكون عددا مركبا.

انتبه القواعد التي تنطبق على الأسس الصحيحة السالبة تنطبق أيضا على الأسس النسبية السالبة.

مثال

1) بسط كل عبارة فيما يأتي : $-3125^{\frac{-1}{5}}$

$= \frac{1}{-3125^{\frac{1}{5}}} = -\frac{1}{\sqrt[5]{3125}} = -\frac{1}{5}$

2) $256^{\frac{3}{8}}$

$= \sqrt[8]{(256)^3} = \sqrt[8]{(2^8)^3} = 2^3 = 8$

انتبه عند تبسيط العبارة الجذرية حاول أن تجعل دليل الجذر اقل ما يمكن.

تبسيط عبارات الأسس النسبية

تكون العبارة التي تتضمن اسسا نسبية في ابسط صورة اذا تحققت جميع الشروط الاتية :

- **جميع الأسس غير سالبة.**
- **جميع الأسس في المقام هي أعداد صحيحة موجبة.**
- **لا يتضمن أي من البسط أو المقام أو كليهما كسرا.**
- **دليل الجذر / الجذور المتبقية فيها أصغر مايمكن.**

تدريبات وحلول

اكتب العبارة الأسية على الصورة الجذرية والعبارة الجذرية على الصورة الأسية فيما يأتي

أوجد قيمة كل عبارة فيما يأتي :

5) $343^{\frac{1}{3}}$

$= \sqrt[3]{343} = \sqrt[3]{(7)^3} = 7$

7) $125^{\frac{2}{3}}$

$= \sqrt[3]{(125)^2} = \sqrt[3]{(5^3)^2} = 5^2 = 25$

١٠) بسط كل عبارة فيما يأتي : $\frac{(x)^{\frac{4}{5}}}{x^{\frac{1}{5}}}$

$= x^{\frac{4}{5}-\frac{1}{5}} = x^{\frac{3}{5}}$

أوجد قيمة كل عبارة فيما يأتي :

20) $27^{\frac{1}{3}}$

$= \sqrt[3]{27} = \sqrt[3]{(3)^3} = 3$

24) $r = (\frac{3v}{4\pi})^{\frac{1}{3}}$

a) $r = (\frac{3(413)}{4\pi})^{\frac{1}{3}} = (\frac{1239}{12.5})^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{99.12} = 4.62in$

b) $r = (\frac{3(455)}{4\pi})^{\frac{1}{3}} = (\frac{1365}{12.5})^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{109.2} = 4.77in$

٢٦) بسط كل عبارة فيما يأتي : $y^{\frac{-4}{5}}$

31) $A = \pi r^2$

$= \pi (3x^{\frac{2}{3}} \cdot y^{\frac{1}{5}} \cdot z^2)^2$

$= 28,26\, x^{\frac{4}{3}} \cdot y^{\frac{2}{5}} \cdot z^4$

٣٣) بسط كل عبارة فيما يأتي : $a^{\frac{7}{4}} \cdot a^{\frac{5}{4}}$

$= a^{\frac{12}{4}} = a^3$

37) $D = 100(2)^{\frac{t}{2}}$

a) $D = 100(2)^{\frac{4.5}{2}}$

$= 100\,(2)^{2.25}$

$= 100(4.75) = 475$

عدد الغزلان بعد أربع سنوات ونصف = ٤٧٥ غزال تقريبا.

b)

السنة	عدد الغزلان
0	100
1	141
2	200
3	282
4	400
5	565

D) لا ليس من المعقول القول بان العدد سيستمر بدون حدود فمن الممكن هلاك عدد كبير من الغزلان في إحدى السنوات بسبب ما .

بسط كل عبارة فيما يأتي :

39) $\dfrac{g^{\frac{5}{2}}}{g^{\frac{1}{2}}+2}$

$$= \frac{g^{\frac{5}{2}}}{g^{\frac{1}{2}}+2} \cdot \frac{g^{\frac{1}{2}}-2}{g^{\frac{1}{2}}-2} = \frac{g^{3}-2g^{\frac{5}{2}}}{g-4}$$

$$= (\sqrt{81})^{\frac{1}{2}} = (9)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{9} = 3$$

٤٧) غير صحيحة أبدا فعندما يكون معامل الأساس سالبا والأس زوجيا يكون الناتج موجبا وإذا ضربت القوة ذات الأس الزوجي في عدد سالب يكون الناتج سالبا.

٤٨) إجابتهما خاطئة لان علي قسم الأسس بدلا من أن يطرحها ومحمود جمع الأسس.

٥١) البديل الصحيح (B) -8

٥٢) البديل الصحيح (B) 3^{-2}

4-7 حل المعادلات والمتباينات الجذرية

خطوات حل المعادلات الجذرية	١) نجعل الجذر في طرف واحد من المعادلة. ٢) نرفع طرفي المعادلة لأس يساوي دليل الجذر وذلك للتخلص من الجذر. ٣) نحل معادلة عشرة الحدود الناتجة ، ثم نتحقق من صحة الحل.

مثال

حل المعادلة التالية : $5 = \sqrt{x-2}\ -1$

$$5+1 = \sqrt{x-2}$$

$$6 = \sqrt{x-2}$$

$$36 = x-2$$

$$38 = x$$

انتبه للتخلص من الجذر التربيعي نرفع العبارة الجذرية للأس ٢ وللتخلص من الجذر التكعيبي نرفع العبارة الجذرية للأس ٣ وهكذا.

مثال

حل المعادلة التالية : $(3n+2)^{\frac{1}{3}} + 1 = 0$

$(3n+2)^{\frac{1}{3}} = -1$

$((3n+2)^{\frac{1}{3}})^3 = (-1)^3$

$3n+2 = -1$

$3n = -1-2$

$3n = -3$

$n = -1$

ما هي المتباينة الجذرية: **هي متباينة تحوي متغيرا في الصورة الجذرية.**

خطوات حل المتباينة الجذرية

١) اذا كان دليل الجذر عددا زوجيا نعين قيم المتغير التي لاتجعل ماتحت الجذر سالبا.

٢) نحل المتباينة جبريا.

٣) نختبر القيم للتاكد من صحة الحل.

مثال

حل المتباينة التالية : $\sqrt{2x+2} + 1 \geq 5$

$2x+2 \geq 0$

$2x \geq -2$

$x \geq -1$

$\sqrt{2x+2} \geq 4$

$2x+2 \geq 16$

$2x \geq 14$

$x \geq 7$ (وهو حل المتباينة)

تدريبات وحلول

حل كل معادلة مما يأتي :

1) $\sqrt{x-4}+6=10$

$4=\sqrt{x-4}$

$16=x-4$

$20=x$

3) $8-\sqrt{x+12}=3$

$8-3=\sqrt{x+12}$

$25=x+12$

$13=x$

9) $5+\sqrt{4y-5}=12$

$7=\sqrt{4y-5}$

$49=4y-5$

$54=4y$

$y=\frac{54}{4}=\frac{27}{2}$

11) $T=2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$

a) $T=2\pi\sqrt{\frac{73}{32}}=2\pi(1.5)=9.4S$

b) $20=2\pi\sqrt{\frac{l}{32}}$

$\frac{20}{2\pi}=\sqrt{\frac{l}{32}}$

$\sqrt{\frac{l}{32}}=3.18$

$\frac{l}{32}=10.11$

$L=323.5\ ft$

حل كل متباينة مما يأتي :

17) $1+\sqrt{7x-3}>3$

$7x-3\geq 0$

$7x\geq 3$

$x\geq \frac{3}{7}$

$1+\sqrt{7x-3}>3$

$7x-3>4$

$7x>7$

$x>1$ (وهو حل المتباينة)

19) $-2+\sqrt{9-5x} \geq 6$

$9-5x \geq 64$

$-55 \geq 5x$

$x \geq 11-$ (وهو حل المتباينة)

حل كل معادلة مما يأتي :

23) $\sqrt{x-15} = 3-\sqrt{x}$

لا يوجد حل حقيقي للمعادلة.

27) $t = \frac{1}{4}\sqrt{d-h}$

$t = \frac{1}{4}\sqrt{65-h}$

$8 = \sqrt{65-h}$

$64 = 65-h$

$h = 1m$

حل كل معادلة مما يأتي :

29) $(6q+1)^{\frac{1}{4}} + 2 = 5$

$6q+1 = 81$

$6q = 80$

$q = \frac{80}{6} = \frac{40}{3}$

31) $3(x+5)^{\frac{1}{3}} - 6 = 0$

$x+5 = 8$

$x = 3$

33) $\frac{1}{7}(14a)^{\frac{1}{3}} = 1$

$14a = 343$

$a = 24.5$

حل كل متباينة مما يأتي :

35) $\sqrt{2x+14} - 6 \geq 4$

$2x+14 \geq 100$

$2x \geq 86$

$x \geq 43$ (وهو حل المتباينة)

37) $6 + \sqrt{3y+4} < 6$

لا يوجد حل حقيقي للمتباينة

39) $\sqrt{2y+5} + 3 \leq 6$

$2y+5 \geq 0$

$2y \geq -5$

$y \geq -\frac{5}{2}$

$\sqrt{2y+5} \leq 3$

$2y+5 \leq 9$

$2y \leq 4$

$y \le 2$

حل المتباينة : $2 \ge x \ge -\frac{5}{2}$

41) $-3 + \sqrt{6a+1} > 4$

$\sqrt{6a+1} > 7$

$6a+1 > 49$

$6a > 48$

$a > 8$ (وهو حل المتباينة)

43) $s = 2\pi\sqrt{\frac{l}{32}}$

$1.5 = 2\pi\sqrt{\frac{l}{32}}$

$0.24 = \sqrt{\frac{l}{32}}$

$\frac{l}{32} = 0.057$

$L = 1.8\, ft$

44) $L = 0.46\sqrt[3]{M}$

$(\frac{L}{0.46})^3 = (\sqrt[3]{M})^3$

$M = (\frac{L}{0.46})^3$

٤٧) نعم لان $\sqrt[4]{X+5} \ge 0$ فالطرف الأيسر للمعادلة غير سالب لذا فانه لن يساوي ٤ – وبذلك ليس للمعادلة حل حقيقي.

٥٥) محيط المثلث = مجموع أطوال أضلاعه.

طول الضلع الثالث = x

x+٢٠+٢٠ = ٥٦

x=56-40

x=16in

٥٦) البديل الصحيح (A) 4

اختبار الفصل الرابع

2) $f(x) = \frac{1}{3}x + 5\ ,\ g(x) = 3x-15$

$(f\circ g)(x) = f(3x-15)$

$= \frac{1}{3}(3x-15) + 5$

$= x - 5 + 5$

$= x$

$(g\circ f)(x) = g(\frac{1}{3}x + 5)$

$= 3(\frac{1}{3}x + 5) - 15$

$= x + 15 - 15$

$= x$

تمثل كل من الدالتين دالة عكسية للأخرى .

4) $f(x) = \frac{x-2}{3}\ ,\ g(x) = 3x-2$

$(f\circ g)(x) = f(3x-2)$

$= \frac{3x-2-2}{3}$

$= \frac{3x-4}{3} \neq x$

لا تمثل كل من الدالتين دالة عكسية للأخرى.

٥) البديل الصحيح

$(B)\ y \leq \sqrt{x+4}$

6) $(f+g)(x) = 3x+2+x^2-2x+1$

$= x^2+x+3$

8) $(f-g)(x) = 3x+2-x^2+2x-1$

$= -x^2+5x+1$

10) $\sqrt{5a-4} = \sqrt{a+12}$

$5a-4 = a+12$

$5a-a = 4+12$

$4a = 16$

$a = 4$

12) $4\sqrt[4]{3x+1} - 8 = 0$

$4\sqrt[4]{3x+1} = 8$

$\sqrt[4]{3x+1} = 2$

$3x+1 = 16$

$3x = 15$

$x = 5$

15) $\sqrt{x-6} - \sqrt{x} = 3$

لا يوجد حل حقيقي للمعادلة.

١٦) البديل الصحيح $(C)\ \frac{1}{5}$

17) $(2+\sqrt{5}) . (6-3\sqrt{5})$

$(2+\sqrt{5}) . 3(2-\sqrt{5})$

$= (4-5)(3) \quad = -3$

19) $\frac{12}{2-\sqrt{3}} \times \frac{2+\sqrt{3}}{2+\sqrt{3}} =$

$= \frac{12\sqrt{3}+24}{4-3} = 12\sqrt{3} + 24$

23) $\sqrt[6]{729a^9b^{24}}$

$= \sqrt[6]{(3ab^4)^6 . a} = 3ab^4\sqrt{a}$

25) $w^{\frac{-4}{5}}$

$= \frac{1}{w^{\frac{4}{5}}} \cdot \frac{w^{\frac{1}{5}}}{w^{\frac{1}{5}}} = \frac{w^{\frac{1}{5}}}{w}$

27) $\frac{a^{\frac{-1}{2}}}{6a^{\frac{1}{3}} . a^{\frac{-1}{4}}}$

$= \frac{a^{\frac{-1}{2}}}{6a^{\frac{1}{12}}} \cdot \frac{a^{\frac{11}{12}}}{a^{\frac{11}{12}}} = \frac{a^{\frac{5}{12}}}{6a}$

٢٩) البديل الصحيح (A) $2\sqrt{3}+3\sqrt{2}$ وحدة مربعة.

30) $\sqrt{4x-3} < 5$

$4x-3 < 25$

$4x < 28$

$x < 7$

$4x-3 \geq 0$

$4x \geq 3$

$x \geq \frac{3}{4}$

34) $\sqrt{y-7} + 5 \geq 10$

$y-7 \geq 0$

$y \geq 7$

$\sqrt{y-7} \geq 5$

$y-7 \geq 25$

$y \geq 32$ (وهو حل المتباينة)

٣٦) $s = \frac{1}{2}(a+b+c)$

$= \frac{1}{2}(5+10+7)$

$= \frac{1}{2}(22) = 11$

$A = \sqrt{11(11-10)(11-5)(11-7)}$

$= \sqrt{11(1)(6)(4)}$

$= \sqrt{246}$

$= \sqrt{66(4)}$

$= 2\sqrt{66}m^2$

اختبار معياري تراكمي

أجب عن كل من الأسئلة الآتية:

١ - الحل: (B) $p(d)=(0.8 \times d) - 5$

٢ - الحل: (A) -1

٣ - الحل: (B) $4a^2 - a + 6$

٤ - الحل: (H) 64000

٥ - الحل: (B) $-3b^2c^4$

٦ -الحل: (J) $f(x)=\sqrt{x-1} - 3$

٧ - الحل: (C) 200

٨ - الحل: (A) $f(x)=x+5$

٩ - الحل: (A) I فقط

١٠ المجال = مجموعة الأعداد الحقيقية.

المدى = $\{f(x); f(x) \geq 0\}$

١٢- .a $r = \sqrt[3]{\frac{3v}{4\pi}} = \sqrt[3]{\frac{3(8580)}{12.56}} = \sqrt[3]{2049.4} = 12.7in$

.b $r^3 = \frac{3v}{4\pi}$

$4\pi r^3 = 3v$

$v = \frac{4\pi r^3}{3}$

13) .a $x+y=56 \quad x-2y=20$

.b $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 56 \\ 20 \end{bmatrix}$

.c $-\frac{1}{3}\begin{bmatrix} -2 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$

$-\frac{1}{3}\begin{bmatrix} -2 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 56 \\ 20 \end{bmatrix}$

$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 12 \\ 44 \end{bmatrix}$

عمر الأب ٤٤ عاما وعمر الابن ١٢ عاما.

خلاصة الكتاب

عزيزي الطالب

سنقدم لك في الصفحات القليلة القادمة ملخصا لأهم القوانين والقواعد التي احتوى عليها هذا الكتاب لتكون مرجعا مفيدا لك ترجع إليه عند حاجتك إليه خاصة عند قراءتك للامتحانات فستجد هنا أهم ما يلزمك دراسته ومراجعته متمنين لك النجاح والتوفيق بإذن الله.

انتبه إشارة النظير الجمعي لعدد هي عكس إشارة ذلك العدد أما إشارة النظير الضربي لعدد فهي نفسها إشارة العدد.

الدالة المتباينة :
كل عنصر في المجال يرتبط بعنصر واحد فقط في المدى أي أنه لا يرتبط أكثر من عنصر في المجال بالعنصر نفسه في المدى.

أنواع العلاقات :

٣) **علاقة منفصلة :** وهي التي يكون فيها المجال مجموعة من النقاط المنفردة وتمثل بيانيا بنقاط غير متصلة.

٤) **علاقة متصلة :** وهي التي يكون فيها المجال مجموعة من العناصر الغير منتهية وتمثل بيانيا بمستقيم أو منحنى متصل.

ما هو المتغير: المتغير إما تابع أو مستقل أما المستقل فهو في الغالب ما يكون (X) وأما التابع في الغالب ما يكون (Y) وقيمته تعتمد على قيمة (X) .

الدالة المتعددة التعريف: هي الدالة التي تكتب باستعمال عبارتين او أكثر.

كيف نمثلها بيانيا؟
نضع دائرة صغيرة مظللة عند الطرف لتشير إلى أن النقطة تنتمي إلى التمثيل البياني ونضع دائرة غير مظللة لتشر إلى أن النقطة لا تنتمي إلى التمثيل البياني.

الدالة الدرجية:
هي نوع من أنواع الدالة المتعددة التعريف الخطية وهي تتكون من قطع مستقيمة أفقية ومن أمثلتها دالة أكبر عدد صحيح.

دالة القيمة المطلقة:
هي الدالة التي تحتوي على عبارة جبرية يستعمل فيها رمز القيمة المطلقة .

مفهوم أساسي

دالة القيمة المطلقة الأساسية

الدالة الرئيسة (الأم): $f(x) = |x|$ ، وتعرف على النحو الآتي:

$$f(x) = \begin{cases} x & ; \ x > 0 \\ 0 & ; \ x = 0 \\ -x & ; \ x < 0 \end{cases}$$

شكل التمثيل البياني: على شكل حرف V

المجال: مجموعة الأعداد الحقيقية

المدى: مجموعة الأعداد الحقيقية غير السالبة

المقطعان: $x = 0, f(x) = 0$

ولا يمكن أن تكون: $f(x) < 0$

خطوات تمثيل متباينة القيمة المطلقة بيانيا:

١ تمثل معادلة القيمة المطلقة المرتبطة بالمتباينة.

٢ تحدد إذا كان المستقيم الذي يمثل حد المتباينة متقطع أو متصل.

٣ تحدد المنطقة التي يجب تظليلها باختيار نقطة ما.

انتبه * **يمكن أن لا تتقاطع منطقتا حل متباينتين في أي نقطة وبالتالي لا يوجد حل للنظام في هذه الحالة وتكون مجموعة الحل هي المجموعة الخالية التي يرمز لها بالرمز { } أو Ø**

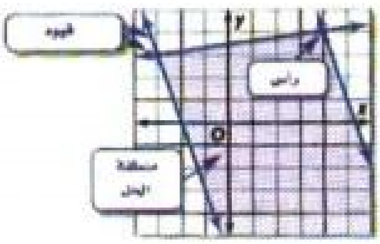
- إذا احتوت المتباينة على رمز <،> فان الحد لا يدخل ضمن منطقة الحل ويمثل الحد بمستقيم متقطع، أما إذا احتوت على رمز ≤ ،≥ فان الحد يدخل ضمن إطار الحل ويمثل الحد بمستقيم متصل .
- ينتج في كثير من الأحيان من تمثيل نظام متباينات خطية منطقة مغلقة على شكل مضلع يمكننا إيجاد إحداثيات رؤوسه بإيجاد إحداثيات نقاط تقاطع المستقيمات المحددة للشكل المضلع.

البرمجة الخطية :

هي طريقة لإيجاد القيمة العظمى أو الصغرى لدالة ما تحت قيود معينة كل منها عبارة عن متباينة خطية وذلك بتمثيل نظام المتباينات بيانيا وتوجد القيمة العظمى أو الصغرى للدالة ذات الصلة دائما عند أحد رؤوس منطقة الحل.

منطقة الحل:

تكون منطقة الحل محدودة أو محصورة بقيود، وتظهر القيمة العظمى أو القيمة الصغرى للدالة عادةً عند رؤوس منطقة الحل.



تكون منطقة الحل مفتوحة وممتدة، فهي بذلك غير محدودة ويمكن أن تحتوي قيمة عظمى أو قيمة صغرى.

انتبه إذا نتج عن التمثيل البياني لنظام متباينات منطقي غير مغلقة فإن النظام غير محدود وهنا نختبر قيمة الدالة عند كل رأس لنحدد إذا كان هناك قيم عظمى أو صغرى.

إيجاد الحل الأمثل:

هو عملية البحث عن السعر أو الكمية الأفضل لتقليل التكلفة أو زيادة الربح ويمكن الحصول عليه باستعمال البرمجة الخطية.

خطوات إيجاد الحل الأمثل باستعمال البرمجة الخطية:

١) نحدد المتغيرات
٢) نكتب نظام المتباينات الخطية الذي مثل المسألة.
٣) نمثل نظام المتباينات بيانيا.
٤) نوجد إحداثيات رؤوس منطقة الحل.
٥) نكتب الدالة الخطة التي نريد إيجاد القيمة العظمة أو الصغرى لها.
٦) نعوض عن إحداثيات الرؤوس في الدالة.
٧) نختار القمة العظمى أو الصغرى حسب ما هو مطلوب في الدالة.

ما هي المصفوفة؟

هي ترتيب على هيئة مستطيل لمتغيرات أو أعداد في صفوف أفقية وأعمدة رأسية محصورة بين قوسين وتسمى كل قيمة في المصفوفة عنصرا ورمز للمصفوفة باستعمال الحروف الكبيرة.

كيف تحدد نوع المصفوفة:

تحدد نوع المصفوفة برتبتها فالمصفوفة المكونة من m صفا و n عمودا يقال عنها مصفوفة من الرتبة $m\times n$

لاحظ عزيزي الطالب/

- تقول عن مصفوفتين أنهما متساويتين إذا كانتا من الرتبة نفسها وتساوت عناصرهما المتناظرة.
- هناك مصفوفات لها تسميات خاصة تعرف عليها فيما يلي :

الاسم	الوصف	مثال
مصفوفة صف	تحتوي صف واحد	$\begin{bmatrix}1 & -5\end{bmatrix}$
مصفوفة عمود	تحتوي عمود واحد	$\begin{bmatrix}3\\2\end{bmatrix}$
مصفوفة مربعة	عدد الأعمدة يساوي عدد الصفوف	$\begin{bmatrix}2 & 4\\-3 & 9\end{bmatrix}$
مصفوفة صفرية	جميع عناصرها أصفار	$\begin{bmatrix}0 & 0\\0 & 0\end{bmatrix}$

- يمكننا جمع مصفوفتين أو طرحهما إذا وإذا فقط كان لهما الرتبة نفسها.

التعبير اللفظي: إذا كانت A , B مصفوفتين من الرتبة $n \times m$ فإن $A + B$ هي مصفوفة أيضا من الرتبة $n \times m$ ويكون كل عنصر فيها هو مجموع العنصرين المتناظرين في A و B وكذلك $A - B$ هي مصفوفة من الرتبة $n \times m$ أيضا، وتحصل عليها بطرح العناصر المتناظرة.

الرموز:

$$\begin{matrix} A & + & B & = & A+B \end{matrix}$$
$$\begin{bmatrix}a & b\\c & d\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}e & f\\g & h\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}a+e & b+f\\c+g & d+h\end{bmatrix}$$
$$\begin{matrix} A & - & B & = & A-B \end{matrix}$$
$$\begin{bmatrix}a & b\\c & d\end{bmatrix} - \begin{bmatrix}e & f\\g & h\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}a-e & b-f\\c-g & d-h\end{bmatrix}$$

مثال:

$$\begin{bmatrix}3 & -5\\1 & 7\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}2 & 0\\-9 & 10\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}3+2 & -5+0\\1+(-9) & 7+10\end{bmatrix}$$

*** خصائص جمع المصفوفات :**

لأي ثلاث مصفوفات A,B,C لها الرتبة نفسها ولأي عدد ثابت K فإن الخصائص التالية صحيحة:

٤) الخاصية الابدالية لجمع المصفوفات $(A+B=B+A)$
٥) الخاصية التجميعية لجمع المصفوفات $((A+B)+C=A+(B+C))$
٦) خاصية التوزيع للضرب في عدد $(K(A+B)=KA+KB)$

انتبه • يمكننا ضرب مصفوفتين إذا وإذا فقط كان عدد أعمدة المصفوفة الأولى يساوي عدد صفوف المصفوفة الثانية.

* عند ضرب مصفوفة A من الرتبة $m \times r$ بالمصفوفة B ذات الرتبة $r \times t$ فإن الناتج هو المصفوفة AB ذات الرتبة $m \times t$

*** خصائص ضرب المصفوفات :**

لأي ثلاث مصفوفات A,B,C ولأي عدد ثابت K فإن الخصائص التالية صحيحة على أن يكون ناتج ضرب أو جمع أ منها معرفا:

١) خاصية التجميع لضرب المصفوفات $(AB)C=A(BC)$
٢) خاصية التجميع لضرب المصفوفات في عدد
$K(AB)=(KA)B=A(KB)$

٣) خاصية التوزيع من اليسار للمصفوفات $C(A+B)=CA+CB$

٤) خاصية التوزيع من اليمين للمصفوفات $(A+B)C=AC+BC$

مفهوم المحددة :

قيمة محددة الدرجة الثانية يساوي حاصل ضرب عنصري القطر الرئيسي مطروحا منه حاصل ضرب عنصري القطر الأخر.

بالرموز: $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - c$

انتبه * كل مصفوفة مربعة لها محددة.

* نعني بمحددات الدرجة الثالثة محددات المصفوفات التي من النوع 3×3 ويمكننا حساب محددات هذا النوع من المصفوفات عن طريق قاعدة الأقطار.

قاعدة الأقطار :

١) نعيد كتابة العمود الأول والثاني إلى يمين المحددة

٢) نوجد حاصل ضرب عناصر القطر الرئيسي وثلاثيات العناصر على الموازيات ثم نجمع.

٣) نوجد حاصل ضرب عناصر القطر الأخر وثلاثيات العناصر على الموازيات ثم نجمع

٤) قيمة المحددة = ناتج الخطوة ٣ - ناتج الخطوة ٢

مصفوفة المعاملات:

هي المصفوفة التي عناصرها معاملات المتغيرات في نظام معادلات بعدة متغيرات بعد ترتيب النظام.

لاحظ عزيزي الطالب/

إذا كانت قيمة المحددة لمصفوفة المعاملات لا تساوي صفرا فان للنظام حلا وحيدا و إذا كانت قيمة المحددة صفرا فإما أن يكون للنظام عدد لانهائي من الحلول أو لا حل له .

استعمال قاعدة كرامر لحل نظام من ثلاث معادلات:

هي طريقة لحل أنظمة المعادلات الخطية بحيث :

$$\begin{aligned} ax + by + c &= m \\ fx + gy + hz &= n \\ jx + ky + lz &= p \end{aligned}$$

إذا كانت C مصفوفة المعاملات للنظام حيث:

$$C = \begin{vmatrix} a & b & c \\ f & g & h \\ j & k & l \end{vmatrix}$$

فان حل النظام هو :

$$x = \frac{\begin{vmatrix} m & b & c \\ n & g & h \\ p & k & l \end{vmatrix}}{|c|} , \; y = \frac{\begin{vmatrix} a & m & c \\ f & n & h \\ j & p & l \end{vmatrix}}{|c|} , z = \frac{\begin{vmatrix} a & b & m \\ f & g & n \\ j & k & p \end{vmatrix}}{|c|}$$

بحيث تكون $|c| \neq ٠$

تذكر عزيزي الطالب/

أن عددين من الأعداد الحقيقية يكون كلا منهما نظيرا ضربيا للأخر إذا كان حاصل ضربهما هو العنصر المحايد لعملية الضرب .

مصفوفة الوحدة :

هي مصفوفة مربعة بحيث إذا ضربت في أي مصفوفة أخرى من الرتبة نفسها كان الناتج هو المصفوفة الأخرى.

انتبه إذا كانت المصفوفتان A , B مربعتين ولهما الرتبة نفسها وكان $AB = BA = I$ فان المصفوفة B تسمى نظيرا ضربيا للمصفوفة A وكذلك تسمى المصفوفة A نظيرا ضربيا للمصفوفة B وإذا كان للمصفوفة A نظير ضربي فانه يرمز إليه بالرمز A^{-1} حيث :

$$A \cdot A = A^{-1}, A = I$$

النظير الضربي لمصفوفة :

هناك مصفوفات ليس لها نظير ضربي ونستطيع تحديد إذا كان لمصفوفة ما نظير ضربي أم لا باستعمال المحددات وذلك عن طريق الآتي :

النظير الضربي للمصفوفة $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ هو :

$$ad\text{-}bc\neq 0 \quad \text{حيث } A^{-1} = \frac{1}{ad-bc}\begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$$

لاحظ عزيزي الطالب/

- أن $ad - bc$ هي قمة محددة A لذا فإذا كانت قيمة محددة مصفوفة ما تساوي صفرا فليس للمصفوفة نظير ضربي.
- يمكن استعمال المصفوفات لتمثيل نظام من معادلات وحله إذا كان لمصفوفة المعاملات نظير ضربي.
- إذا لم يكن لمصفوفة المعاملات نظير ضربي فان النظام ليس له حل أو له عدد لانهائي من الحلول.

الوحدة التخيلية :

الجذر التربيعي الأساسي للعدد -١ أي $i=\sqrt{-1}$

الأعداد التخيلية البحتة :

هي جذور تربيعية لأعداد حقيقية سالبة لأي عدد حقيقي موجب مثل b فإن :

$$\sqrt{-b^2} = \sqrt{b^2} \cdot \sqrt{-1}$$

انتبه الأعداد التخيلية البحتة تحقق خاصيتي التجميع والإبدال على عملية الضرب.

بعض قوى (i):

$i^1 = i$	$i^2 = -1$	$i^3 = -i$	$i^4 = 1$
$i^5 = i$	$i^6 = -1$	$i^7 = -i$	$i^8 = 1$

ما هو العدد المركب ؟

هو عدد مكون من جزأين أحدهما حقيقي والآخر تخيلي ويمكن كتابته على الصورة :

$$a + bi$$

حيث a,b عددان حقيقيان ، i عدد تخيلي

ملاحظات هامة :

- $b = 0$ ← العدد المركب عدد حقيقي
- $b \neq 0$ ← العدد المركب عدد تخيلي
- $a = 0$ ← العدد المركب عدد تخيلي بحت

متى يتساوى عددان مركبان؟

إذا وفقط إذا تساوى الجزأين الحقيقيين والجزأين التخيليين.أي :

$a+bi = c+di$ عندما $a=c$, $b=d$

انتبه عند جمع الأعداد المركبة وطرحها فإننا نجمع الأجزاء الحقيقية معا والأجزاء التخيلية معا.

ما هما العددان المترافقان ؟

يسمى العددان $a + bi$ ، $a - bi$ عددان مترافقان مركبان ناتج ضربهما عدد حقيقي دائما

القانون العام لحل المعادلات التربيعية :

يمكن حل المعادلة التربيعية المكتوبة على الصورة :

$$ax^2 + bx + c = 0 \rightarrow a \neq 0$$

باستعمال القانون :

$$X = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

لاحظ عزيزي الطالب/

- يكون للمعادلة جذر نسبي واحد عندما يكون ما تحت الجذر في القانون العام يساوي صفر.
- يمكنك عزيزي الطالب التعبير عن الجذور التربيعية الغير نسبية بكتابتها على الصورة الجذرية.
- إذا كان ما تحت الجذر في القانون العام عدد سالب فان الحلين يكونان عددين مركبين مترافقين.

مفهوم المميز:

تسمى العبارة تحت الجذر b^2-$4ac$ بالمميز وتستعمل لتحديد عدد جذور المعادلة التربيعية ونوعها وللتأكد من عدد الحلول وأنواعها بعد حل المعادلة التربيعية باستخدام القانون العام.

تذكر عزيزي الطالب/

- نعني بعملية تبسيط عبارات تتضمن قوى إعادة كتابتها دون أقواس أو أسس سالبة.
- الأسس السالبة هي طريقة للتعبير عن النظير الضربي لعدد ما.

وحيدة الحد:

هي عدد أو متغير أو عبارة ناتجة عن ضرب متغير أو اكثر وأسسها أعداد صحيحة غير سالبة.

متى تكون وحيدة الحد في أبسط صورة ؟

١) عندما لا تتضمن قوى القوة.
٢) عندما يظهر كل أساس مرة واحدة فقط.
٣) عندما تكون جميع الكسور المتضمنة في ابسط صورة.
٤) عندما لا تتضمن أسس سالبة.

درجة كثيرة الحدود :

هي درجة وحيدة الحد ذات الدرجة الأكبر.

خوارزمية القسمة :

هي عملية مشابهة للقسمة المطولة لقسمة كثيرة حدود على كثيرة حدود أخرى.

انتبه قد ينتج باق عن قسمت كثيرتي حدود كما في قسمة الأعداد الكلية.

مفهوم القسمة التركيبية :

هي طريقة مبسطة لقسمة كثيرة حدود على ثنائية حد.

خطوات القسمة التركيبية :

١) نكتب معاملات المقسوم بعد ترتب حدوده تنازليا.
٢) تأكد أن المقسوم عليه على الصورة x-r واكتب الثابت r في الصندوق والمعامل الأول أسفل الخط الأفقي.
٣) نضرب المعامل الأول في r ونكتب الناتج أسفل المعامل الثاني.
٤) نجمع ناتج الضرب مع المعامل الثاني .

٥) نكرر الخطوتين ٣، ٤ حتى نصل إلى ناتج جمع العددين في العمود الأخير.

لاحظ عزيزي الطالب :

- الأعداد في الصف الأخير تمثل معاملات ناتج القسمة ودرجة الحد الأول اقل بواحد من درجة المقسوم والعدد الأخير هو الباقي.
- لإجراء القسمة التركيبية يجب أن يكون المقسوم عليه على الصورة $x-r$ وإذا كان معامل x في المقسوم عليه لا يساوي واحد فيجب إعادة كتابة عبارة القسمة بحيث يمكن استعمال القسمة التركيبية لإيجاد ناتج القسمة.

كثيرة الحدود بمتغير واحد :

هي عبارة جبرية على الصورة :

$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x^1 + a_0$$

حيث a_0 ، a_1 ، a_{n-1} ، n أعداد حقيقية ، $a_n \neq 0$ ، n عدد صحيح غير سالب.

الصورة القياسية لكثيرة الحدود :

تكون كثيرة الحدود مكتوبة على الصورة القياسية إذا كانت أسس المتغير في حدودها مرتبة ترتيبا تنازليا

درجة كثيرة الحدود :

هي أس المتغير ذي أكبر أس فيها.

المعامل الرئيس :

هو معامل الحد الأول في كثيرة الحدود المكتوبة بالصورة القياسية.

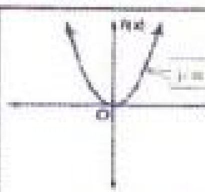
دالة كثيرة الحدود :

هي دالة متصلة يمكن وصفها بمعادلة كثيرة حدود بمتغير واحد وتكتب أبسطها على الصورة $f(x) = bx^a$ حيث b عدد حقيقي لا يساوي صفر ، a عدد صحيح غير سالب وتسمى دوال القوة.

انتبه • إذا علمت عنصر في مجال دالة كثيرة الحدود فانك تستطيع معرفة القيمة المقابلة له في المدى.

• تمثيل دوال كثيرات الحدود بيانيا يظهر اكبر عدد من المرات التي يقطع فيها هذا التمثيل المحور x وهذا العدد يمثل درجة كثيرة الحدود.

مفهوم أساسي سلوك طرفي التمثيل البياني لدالة كثيرة الحدود



الدرجة : زوجية

المعامل الرئيس : موجب

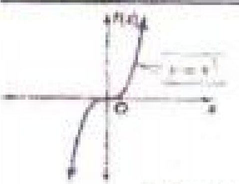
المجال : مجموعة الأعداد الحقيقية

المدى : مجموعة الأعداد الحقيقية الأكبر من أو التي تساوي القيمة الصغرى

سلوك طرفي التمثيل البياني :

$f(x) \to +\infty$ عندما $x \to -\infty$

$f(x) \to +\infty$ عندما $x \to +\infty$



الدرجة : فردية

المعامل الرئيس : موجب

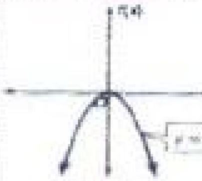
المجال : مجموعة الأعداد الحقيقية

المدى : مجموعة الأعداد الحقيقية

سلوك طرفي التمثيل البياني :

$f(x) \to -\infty$ عندما $x \to -\infty$

$f(x) \to +\infty$ عندما $x \to +\infty$



الدرجة : زوجية

المعامل الرئيس : سالب

المجال : مجموعة الأعداد الحقيقية

المدى : مجموعة الأعداد الحقيقية الأقل من أو التي تساوي القيمة العظمى

سلوك طرفي التمثيل البياني :

$f(x) \to -\infty$ عندما $x \to -\infty$

$f(x) \to -\infty$ عندما $x \to +\infty$

الدرجة : فردية

المعامل الرئيس : سالب

المجال : مجموعة الأعداد الحقيقية

المدى : مجموعة الأعداد الحقيقية

سلوك طرفي التمثيل البياني :

$f(x) \to +\infty$ عندما $x \to -\infty$

$f(x) \to -\infty$ عندما $x \to +\infty$

تذكر عزيزي الطالب:
مقاطع المحور (x) تحدد أصفار دالة كثيرة الحدود وعدد مرات تقاطع التمثيل البياني مع محور (x) يمثل عدد هذه الأصفار.

مفهوم هام:
يكون للدوال الفردية الدرجة عدد فردي من الاصفار المنتمية إلى ح بينما يكون للدوال الزوجية الدرجة عدد زوجي من الاصفار أو لا يكون لها أصفار تنتمي إلى ح .

مجموع مكعبين والفرق بينهما:
مجموع مكعبين $^3 + b^3 = (a+b)(a^2 - ab + b^2)$
الفرق بين مكعبين $a^3 - b^3 = (a-b)(a^2 + ab + b^2)$

انتبه * إذا لم يمكننا تحليل كثيرة حدود فإنها تسمى كثيرة حدود أولية.
* الطريقة الوحيدة لتحليل كثيرات الحدود المكونة من أربعة حدود أو أكثر هي تجميع الحدود.

الصورة التربيعية لكثيرة حدود:
هي عبارة عن : au^2+bu+c بحيث a,b,c $a\neq 0$ أعداد حقيقية ،ويمكن أن نكتب بعض كثيرات الحدود التي تتضمن المتغير x على هذه الصورة وذلك بعد تعريف u بدلالة x.

لاحظ عزيزي الطالب:
- هناك بعض كثيرات الحدود لا يمكن كتابتها على الصورة التربيعية.
- يمكننا استعمال الصورة التربيعية لحل معادلات كثيرات حدود ذات درجة اكبر من الدرجة الثانية.

نظرية الباقي :
إذا قسمت كثيرة حدود $p(x)$ على $x-r$ فان الباقي ثابت ويساوي $p(r)$ وكذلك :
$$p(x) = q(x) . (x-r) + p(r)$$
الباقي + المقسوم عليه . ناتج القسمة = المقسوم
حيث $q(x)$ دالة كثيرة حدود تقل درجتها بواحد عن درجة المقسوم $p(x)$.

التعويض التركيبي :
هي عملية تطبيق نظرية الباقي واستعمال القسمة التركيبية لإيجاد قيمة دالة خاصة عندما تكون درجة كثيرة الحدود اكبر من الدرجة الثانية.

نظرية العوامل :
هي حالة خاصة من نظرية الباقي وهي تنص على أن ثنائية الحد $x-r$ تكون عاملا من عوامل كثيرة الحدود $p(x)$ إذا وفقط إذا كان $p(r)=0$

انتبه * يمكن استعمال نظرية العوامل للتحقق من أن ثنائية حد معينة عامل من عوامل كثيرة حدود معطاة ويمكن استعمالها أيضا لتحديد جميع عوامل كثيرة الحدود.
*** عند التحليل إلى عوامل ليس شرطا أن تكون عوامل كثيرة الحدود ثنائيات حد.**
*** صفر دالة $f(x)$ يمكن أن يكون أية قيمة مثل c حيث $f(©)=0$ وعند تمثيل الدالة بيانيا تكون أصفار الدالة الحقيقية هي مقاطع المحور x.**

مفهوم هام :
لتكن $p(x)= a\bar{x}+....+ax+a$ كثيرة حدود فانه ينطبق عليها ما يلي:
١) c صفر للدالة $p(x)$.
٢) c جذر أو حل للمعادلة بحيث $p(x)=0$.
٣) $x-c$ عامل من عوامل كثيرة الحدود $p(x)$.
٤) إذا كان c عدد حقيقي ← $(c , 0)$ هو المقطع x للدالة $p(x)$.

انتبه :

١) قد يوجد جذر واحد أو أكثر للدالة درجتها اكبر من صفر.
٢) قد لا يوجد جذور حقيقية للدالة (أي لها جذور تخيلية).
٣) كلا من الأعداد الحقيقية والتخيلية تسمى مجموعة الأعداد المركبة.

النظرية الأساسية في الجبر:

كل معادلة كثيرة حدود درجتها اكبر من الصفر لها جذر واحد على الأقل ينتمي لمجموعة الأعداد المركبة.

قانون ديكارت للإشارات :

إذا كانت $p(x)$ دالة كثيرة حدود معاملات حدودها أعداد حقيقية فان :

* عدد الاصفار الحقيقية الموجبة للدالة $p(x)$ يساوي عدد مرات تغير إشارة معاملات حدود الدالة $p(x)$ أو اقل منه بعدد زوجي.

* عدد الاصفار الحقيقية السالبة للدالة $p(x)$ يساوي عدد مرات تغير إشارة معاملات حدود الدالة $p(-x)$ أو اقل منه بعدد زوجي.

نظرية الأعداد المركبة المترافقة :

إذا كان a,b عددين حقيقيين حيث $b \neq 0$ وكان $a+bi$ صفر لدالة كثيرة حدود معاملات حدودها أعداد حقيقة فان $a-bi$ صفر للدالة أيضا.

نظرية الصفر النسبي:

لتكن $p(x)$ دالة كثيرة حدود معاملات حدودها أعداد صحيحة فان أي صفر نسبي للدالة $p(x)$ سيكون على صورة العدد النسبي p / q في ابسط صورة حيث p احد عوامل الحد الثابت، q احد عوامل الحد الرئيس.

نتيجة نظرية الصفر النسبي:

إذا كانت $p(x)$ دالة كثيرة حدود معاملات حدودها أعداد صحيحة والمعامل الرئيس لها ١ وحدها الثابت لا يساوي الصفر فان أي صفر نسبي للدالة يجب أن يكون احد عوامل الحد الثابت.

إيجاد الأصفار النسبية :

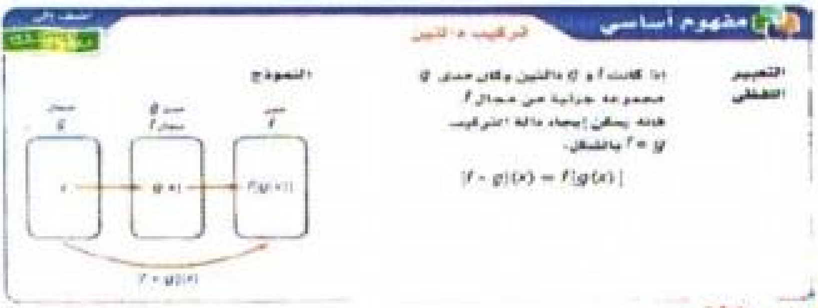
نختبر كل عدد من الأعداد النسبية باستعمال التعويض التركيبي أو الطرق السابقة التي تعلمتها لإيجاد أصفار الدالة النسبية.

انتبه :ليس من الضروري اختبار جميع قيم الاصفار الممكنة فعند إيجاد احدها نحلل الدالة الناتجة عن عملية قسمة كثيرة الحدود على احد عواملها لنجد الاصفار الأخرى.

العمليات على الدوال :

١) عملية الجمع : $(f+g)(x) = f(x) + g(x)$
٢) عملية الطرح : $(f-g)(x) = f(x) - g(x)$
٣) عملية الضرب : $(f.g)(x) = f(x) \cdot g(x)$
٤) عملية القسمة : $\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$

انتبه :مجال جميع الدوال الناتجة عن جمع أو طرح أو ضرب دالتين هو تقاطع مجاليهما وكذلك في القسمة باستثناء القيم التي تجعل المقام صفرا .



لاحظ عزيزي الطالب :

- يمكن أن يكون تركيب دالتين غير معرف ويكون $(fog)(x)$ معرف إذا كان $g(x)$مجموعة جزئية من مجال $f(x)$.
- ليس من الضروري أن يكون $(f\circ g)=(g\circ f)$ لذلك يجب أن تراعي ترتيب الدالتين عند تركيبهما.

مفهوم هام :

تكون كلا من العلاقتين عكسية للأخرى إذا وفقط إذا احتوت إحداهما على أي زوج مرتب مثل (a , b) وتحتوي الأخرى على الزوج المرتب (b , a).

انتبه :

- يرمز للدالة العكسية للدالة $f(x)$ بالرمز $f^{-1}(x)$.
- إذا كان كلا من $f^{-1}(x)$ ، $f(x)$ دالة عكسية للأخرى فان $f(a)=b$ إذا وفقط إذا كان $f^{-1}(b)=a$.

مفهوم الدالة العكسية :

تكون كلا من الدالتين f , g دالة عكسية للأخرى إذا وفقط إذا كان تركيب كلا منهما يساوي الدالة المحايدة.

أي أن : الدالتان $f(x),g(x)$ تمثل كل منهما دالة عكسية للأخرى إذا وفقط إذا كان :

$$(f\circ g) = (g\circ f)=x$$

مفهوم أساسي **تحويلات دوال الجذر التربيعي**

$$f(x) = a\sqrt{x - h} + k$$

k ، إزاحة رأسية	h ، إزاحة أفقية
إزاحة بمقدار $\|k\|$ وحدة إلى الأعلى إذا كانت k موجبة إزاحة بمقدار $\|k\|$ وحدة إلى الأسفل إذا كانت k سالبة المدى هو $\{f(x) \mid f(x) \geq k\}$	إزاحة بمقدار $\|h\|$ وحدة يميناً إذا كانت h موجبة إزاحة بمقدار $\|h\|$ وحدة يساراً إذا كانت h سالبة المجال هو $\{x \mid x \geq h\}$

a ، الشكل والاتجاه

- إذا كانت $a < 0$ فإن التمثيل البياني ينعكس حول المحور x .
- إذا كانت $|a| > 1$ ، فإن التمثيل البياني يتسع رأسياً.
- إذا كانت $0 < |a| < 1$ ، فإن التمثيل البياني يضيق رأسياً.

متباينة الجذر التربيعي:
هي متباينة تحوي الجذر التربيعي ويمكن تمثلها بيانيا تماما مثل طريقة تمثيل المتباينات الأخرى.

مفهوم:
لأي عددين حقيقيين a,b ولأي عدد صحيح موجب n ، إذا كان $a^n = b$ فان a هو الجذر النوني للعدد b.

لاحظ عزيزي الطالب:
يشير الرمز $\sqrt[n]{}$ إلى الجذر النوني وبعض الأعداد لها أكثر من جذر نوني حقيقي وحينها عندما تكون n عدد زوجي فان الجذر غير السالب يسمى الجذر الرئيس.

مفهوم أساسي **الجذر النوني الحقيقي**

ليكن n عدداً صحيحاً أكبر من 1 ، و a عدداً حقيقياً.

a	n عدد زوجي	n عدد فردي
$a > 0$	هناك جذر حقيقي موجب وحيد، وجذر حقيقي سالب وحيد: $\pm\sqrt[n]{a}$ ، الجذر الموجب هو الجذر الرئيس	هناك جذر حقيقي موجب وحيد، وليس هناك جذر حقيقي سالب $\sqrt[n]{a}$
$a < 0$	ليس هناك جذور حقيقية	ليس هناك جذور حقيقية موجبة وهناك فقط جذر حقيقي سالب وحيد $\sqrt[n]{a}$
$a = 0$	هناك فقط جذر حقيقي: $\sqrt[n]{0} = 0$	هناك فقط جذر حقيقي: $\sqrt[n]{0} = 0$

انتبه إذا كان دليل الجذر عدد زوجي واس ما تحت الجذر عدد زوجي وكان أس الناتج عدد فردي يجب أن تجد القيمة المطلقة للناتج لنتأكد من أن الجواب ليس سالبا.

خاصية ضرب الجذور:
لأي عددين حقيقيين a , b ولأي عدد صحيح n حيث $n > 1$ فان :
$\sqrt[n]{ab} = \sqrt[n]{a} . \sqrt[n]{b}$ إذا كانت n عددا زوجيا وكان a , b عددين غير سالبين أو إذا كان n عددا فرديا.

انتبه تكون العبارة الجذرية في ابسط صورة عندما لا يحتوي ما تحت الجذر عوامل هي قوى نونية لعدد صحيح أو كثيرة حدود.

خاصية قسمة الجذور :

لأي عددين حقيقيين a , b حث $b \neq 0$ ولأي عدد صحيح n حيث $n > 1$ فان :

$\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$ إذا كانت جميع الجذور معرفة.

انطاق المقام :

هو عملية تستعمل لإزالة الجذور من المقام أو الكسور تحت الجذر وذلك بضرب البسط والمقام في مقدار ثابت بحيث تكون جميع أسس الثوابت والمتغيرات الموجودة تحت الجذر من مضاعفات دليل الجذر.

تبسيط العبارات الجذرية :

تكون العبارة الجذرية في ابسط صورة إذا تحققت جميع الشروط الآتية :

* إذا كان دليل الجذر n اصغر ما يمكن.
* إذا لم يتضمن ما تحت الجذر عوامل غير العدد ١ يمكن أن تكتب على صورة قوى نونية لعدد صحيح أو كثيرة حدود .
* إذا لم يتضمن ما تحت الجذر كسورا.
* إذا لم توجد جذور في المقام.

انتبه * الجذور المتشابهة لها الدليل نفسه وما تحت الجذر المقادير نفسها.

* تنطبق خاصية التوزيع على ضرب الجذور.
* حاصل ضرب عددين مرافقين هو عدد نسبي دائما.

خاصية العدد $b^{\frac{1}{n}}$:

لأي عدد حقيقي b ولأي عدد صحيح موجب n فان : $b^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{b}$.

إلا إذا كانت $b < 0$ و n عددا زوجيا فان الجذر النوني قد يكون عددا مركبا.

الأسس النسبية :

يكون $b^{\frac{x}{y}} = \sqrt[y]{b^x} = (\sqrt[y]{b})^x$ لأي عدد حقيقي b لا يساوي صفر، ولأي عددين صحيحين x , y بحيث $y > 1$ إلا إذا كانت $b < 0$ و y عددا زوجيا فان الجذر قد يكون عددا مركبا.

انتبه * القواعد التي تنطبق على الأسس الصحيحة السالبة تنطبق أيضا على الأسس النسبية السالبة.

* عند تبسيط العبارة الجذرية حاول أن تجعل دليل الجذر اقل ما يمكن.

تبسيط عبارات الأسس النسبية :

تكون العبارة التي تتضمن أسسا نسبية في ابسط صورة إذا تحققت جميع الشروط الآتية :

* جميع الأسس غير سالبة.
* جميع الأسس في المقام هي أعداد صحيحة موجبة.
* لا يتضمن أي من البسط أو المقام أو كليهما كسرا.
* دليل الجذر / الجذور المتبقية فيها أصغر ما يمكن.

خطوات حل المعادلات الجذرية :

١) نجعل الجذر في طرف واحد من المعادلة.
٢) نرفع طرفي المعادلة لأس يساوي دليل الجذر وذلك للتخلص من الجذر.
٣) نحل معادلة كثيرة الحدود الناتجة ، ثم نتحقق من صحة الحل.

ملاحظات هامة :

- عند حل بعض المعادلات الجذرية قد لا يحقق الحل المعادلة الأصلية ويسمى مثل هذا الحل حلا دخيلا.
- للتخلص من الجذر التربيعي نرفع العبارة الجذرية للأس ٢ وللتخلص من الجذر التكعيبي نرفع العبارة الجذرية للأس ٣ وهكذا.

ما هي المتباينة الجذرية:

هي متباينة تحوي متغيرا في الصورة الجذرية.

خطوات حل المتباينة الجذرية:

١) إذا كان دليل الجذر عددا زوجيا نعين قيم المتغير التي لا تجعل ما تحت الجذر سالبا.
٢) نحل المتباينة جبريا.
٣) نختبر القيم لنتأكد من صحة الحل.

نموذج اختبار (١)

السؤال الأول : اختار الإجابة الصحيحة مما بين الأقواس فيما يلي :

- هو مجموعة الإحداثيات السينية للأزواج المرتبة التي تحدد العلاقة (المجال ، المدى)
- $\sqrt{15}$ ينتمي إلى مجموعة الأعداد (النسبية ، الغير نسبية)
- يسمى عدد الصفوف × عدد الأعمدة (محددة ، رتبة) المصفوفة.
- العدد $3i$ يسمى عدد (مركب ، تخيلي بحت)
- عند (تركيب ، ضرب) دالتين نستعمل نواتج دالة منعما لحساب نواتج الأخرى.
- عندما يكون هناك أكثر من جذر حقيقي يسمى الجذر (السالب ، الموجب) بالجذر الرئيس.

السؤال الثاني:

اشترى محمد ٥ دفاتر بسعر ٢.٥ ريال للدفتر الواحد و ٣ أقلام بسعر ١.٥ ريال للقلم الواحد

استعمل خاصية التوزيع لتكتب تعبيرين يمثل كل منهما المبلغ الذي دفعه محمد

a. أوجد المبلغ الذي دفعه محمد باستعمال خاصية التوزيع

السؤال الثالث : مثل الدالة التالية بيانيا ثم حدد كلا من مجالها ومداها:

$$F(x) = \begin{cases} -3, x < -1 \\ 4x - 3, -1 \le x \le 3 \\ x, x > 3 \end{cases}$$

السؤال الرابع : استعمل المصفوفات A, B لإيجاد ناتج كل مما يأتي إذا كان ذلك ممكنا:

$$A = \begin{bmatrix} 6 & -4 \\ 3 & -5 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 8 & -1 \\ -2 & 7 \end{bmatrix}$$

١) ما هي رتبة المصفوفة A ؟
٢) ما هي قيمة A_{12} , B_{21} ؟
٣) $A + B$ ؟
٤) النظير الضربي للمصفوفة A

السؤال الخامس : للدالة $f(x) = 4x^2 - 4x + 1$ أوجد كلا من :

١) قيمة المميز.
٢) عدد الجذور وأنواعها.
٣) الحلول الدقيقة مستعملا القانون العام

السؤال السادس :
اذكر العدد الممكن للاصفار الحقيقية الموجبة والحقيقية السالبة والتخيلية للدالة :

$$F(x) = -2x^5 + 4x^4 + x^2 - 3$$

السؤال الثامن : حل المعادلة التالية :

$$4 + \sqrt{3x - 1} = 8$$

نموذج اختبار (٢)

السؤال الأول : اختار الإجابة الصحيحة مما بين الأقواس فيما يلي :

- الدالة (المحايدة ، الثابتة) هي الدالة الخطية $f(x) = x$
- تسمى منطقة الحل المفتوحة بـ (الغير محدودة ، الخالية)
- تكون كلا من المصفوفتين نظيرا ضربيا للأخرى إذا كان حاصل ضربهما يعطي (مصفوفة الوحدة ، المصفوفة الصفرية)
- القسمة (التركيبية ، المطولة) هي طريقة مختصرة لقسمة كثيرة حدود على ثنائية الحد .
- دالة الجذر التربيعي نوع من أنواع الدوال (الجذرية ، التربيعية)
- تعد $\sqrt{x+2} > 7$ مثال على (معادلة ، متباينة) جذر تربيعي.

السؤال الثاني:
تتقاضى شركة لتأجير السيارات ٤٠ ريالا عن توصيل السيارة للمكان المراد و ١٠٠ ريال أجرة يومية عن السيارة ويمثل ما تتقاضاه هذه المؤسسة عند تأجير السيارة x يوم بالمعادلة : $y = 40 + 100x$
أوجد مجال هذه المعادلة ومداها ثم حدد إذا كانت المعادلة دالة أم لا وهل هي متصلة أم منفصلة؟

السؤال الرابع : حل النظام الآتي باستعمال قاعدة كرامر:

$$5x+2y= 4$$
$$3x+4y+2z = 6$$
$$7x+3y+4z = 29$$

السؤال الخامس : بسط كلا من العبارات التالية:

١) $3n(4l - 6)$
٢) $2a(b - 1) + (4a - 10)$
٣) $(6y^3 + 13y^2 - 10y - 24) \div (y + 2)$

السؤال السادس : أوجد جميع أصفار الدالة التالية :

$$F(x) = 4x^3 + 4x^2 - x - 1$$

السؤال السابع :
إذا كانت :

$$g(x) = 5x-1$$
$$f(x) = 3x+4$$

فأوجد كلا من :

١) $(f.g)(x)$ 2- $(f+g)(x)$ ٣- $(\frac{f}{g})(x)$
٢) معكوس $g(x)$ ومثله بيانيا مع $g(x)$ على مستوى إحداثي واحد.

كتاب التمارين

1-1 خصائص الأعداد الحقيقية

حدد مجموعات الأعداد التي ينتمي إليها كل عدد مما يأتي :

٢) $\sqrt{7} \in \{I, R\}$

٤) $0 \in \{I, W, Z, Q, R\}$

٦) $-\sqrt{16} \in \{Z, Q, R\}$

٨) $-31.8 \in \{Q, R\}$

اذكر الخاصية الموضحة في كل مما يلي:

١٠) خاصية العملية التجميعية في عملية الجمع.

١٢) خاصية توزيع الضرب على الجمع.

١٤) خاصية العملية التجميعية في عملية الضرب.

١٦) خاصية النظير الضربي.

١٨) خاصية النظير الجمعي.

أوجد النظير الجمعي والضربي لكل عدد مما يلي :

٢٠) 1.6 -النظير الجمعي 1.6 بينما النظير الضربي 0.625 -

٢٢) $\frac{5}{6}$ه النظير الجمعي $\frac{5}{6}$ ه- بينما النظير الضربي $\frac{-6}{35}$

بسط كل عبارة مما يأتي:

24) $-11a-13b+7a-3b$

$=-4a-13b$

26) $4c-2c-(4c+2c)$

$=-4c$

28) $\frac{1}{5}(10a-15b)+0.5(8b+4a)$

$=2a-13b+4b+2a = 4a-9b$

30) $\frac{5}{6}(\frac{3}{5}x+12y)-0.25(2x-12y)$

$=0.5x+10y-0.5x+3y = 13y$

٣٢) العبارة خاطئة لأن $a(\frac{1}{a}) = 1$, $b(\frac{1}{b}) = 1$

1-2 العلاقات والدوال

حدد كلا من مجال ومدى كل علاقة فيما يأتي ثم حدد إذا كانت دالة أم لا وإذا كانت كذلك فهل هي متباينة أم لا

٢) المجال = $\{5,10,15\}$

المدى = $\{105,110\}$

وهذه العلاقة دالة وهي ليست متباينة .

٤) المجال = $\{-2,1,-1,2\}$

المدى = $\{-1,1,0\}$

وهذه العلاقة ليست دالة وهي ليست متباينة

٦) $y = 2x - 1$

المجال : جميع الأعداد الحقيقة

المدى : جميع الأعداد الحقيقة.

الدالة متباينة ومتصلة.

إذا كانت $f(x) = \frac{5}{x+2}$, $g(x) = -2x+3$ فأوجد كل مما يلي :

٨) $f(-4) = \frac{-5}{2}$

10) $f(-2)$ غر معرفة.

١٢) $f(m-2)=\frac{5}{m}$

١٤) الزمن الذي يتطلبه ذلك الحاسوب لتنفيذ ٥ بلايين عملية حسابية :

$$T(0.0000000015) = 0.0000000015(5)$$
$$= 7.5$$

أي ٧,٥ بلايين ثانية.

2-1 مقدمة في المصفوفات

حدد رتبة كل مصفوفة فيما يأتي:

١١) 1×3

١٢) 2×3

١٣) 3×4

إذا كانت $B=\begin{bmatrix} 2 & 6 & -1 & 0 \\ 9 & 5 & 7 & 2 \end{bmatrix}$ ، $A=\begin{bmatrix} 4 & 7 & 0 \\ 9 & 8 & -4 \\ 3 & 0 & 5 \end{bmatrix}$ فحدد كل عنصر فيما يأتي :

٤) $7 = b_{23}$

٦) $2 = b_{11}$

٨) $0 = b_{14}$

٩) $-4 = a_{23}$

١٠) يمكن تمثيل مصدر الطاقة المستعمل في الطهو وعدد السكان في كل من المدينتين بالمصفوفة :

2-2 العمليات على المصفوفات

أوجد الناتج في كل مما يأتي إذا كان ذلك ممكنا:

٢) $\begin{bmatrix} 71 \\ -116 \\ -6 \end{bmatrix}$

٤) $\begin{bmatrix} 16 & -15 & 62 \\ 14 & 45 & 75 \end{bmatrix}$

٦) $\begin{bmatrix} 24 & 3 \\ 24 & 3 \end{bmatrix}$

استعمل المصفوفات A,B,C لإيجاد ناتج كل مما يأتي:

$$A=\begin{bmatrix} 4 & -1 & 0 \\ -3 & 6 & 2 \end{bmatrix}, B=\begin{bmatrix} -2 & 4 & 5 \\ 1 & 0 & 9 \end{bmatrix}, C=\begin{bmatrix} 10 & -8 & 6 \\ -6 & -4 & 20 \end{bmatrix}$$

8) $A - C = \begin{bmatrix} -6 & 7 & -6 \\ 3 & 10 & -18 \end{bmatrix}$

10) $4B - A = \begin{bmatrix} -12 & 17 & 20 \\ 7 & -6 & 34 \end{bmatrix}$

12) $A + 0.5\,C = \begin{bmatrix} 9 & -5 & 3 \\ -6 & 4 & 12 \end{bmatrix}$

١٤) المصفوفة التي تمثل الفروق بين نسب المواد الغذائية الثلاثة في نوعي الأعلاف:

$$\begin{bmatrix} 22 \\ 12 \\ 5 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 24 \\ 8 \\ 8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 \\ 4 \\ -3 \end{bmatrix}$$

2-3 ضرب المصفوفات

حدد إذا كانت عملية الضرب معرفة في كل مما يلي أم لا وإن كانت معرفة فأوجد رتبة المصفوفة الناتجة:

2) $A_{3\times 5}, M_{5\times 8}$

بما أن عدد أعمدة المصفوفة A يساوي عدد صفوف المصفوفة M فإن مصفوفة حاصل الضرب $A.M$ معرفة ورتبتها 3×8

بما أن عدد أعمدة المصفوفة M لا يساوي عدد صفوف المصفوفة A فإن مصفوفة حاصل الضرب $M.A$ غير معرفة.

بما أن عدد أعمدة المصفوفة P يساوي عدد صفوف المصفوفة Q فإن مصفوفة حاصل الضرب $C.D$ معرفة ورتبتها 9×9.

اوجد الناتج في كل مما يلي إذا كان ذلك ممكنا:

-٨ $\begin{bmatrix}-3 & 0\\ 2 & 5\end{bmatrix}.\begin{bmatrix}2 & 4\\ 7 & -1\end{bmatrix}$

$=\begin{bmatrix}2 & 22\\ -23 & -5\end{bmatrix}$

-10 $\begin{bmatrix}3 & -2 & 7\\ 6 & 0 & -5\end{bmatrix}.\begin{bmatrix}3 & -2 & 7\\ 6 & 0 & -5\end{bmatrix}$

المصفوفة الناتجة غير معرفة لان عدد أعمدة الأولى لا يساوي عدد صفوف الثانية.

-١١ $\begin{bmatrix}1\\ 3\\ -1\end{bmatrix}.\begin{bmatrix}4 & 0 & 2\end{bmatrix}$

$=[2]$

-١٤ $\begin{bmatrix}6 & 11\\ 23 & -10\end{bmatrix}.\begin{bmatrix}-15 & -9\end{bmatrix}$

$=\begin{bmatrix}-297 & -75\end{bmatrix}$

١٥) $AC = CA$ (عبارة خاطئة لان ضرب المصفوفات غير إبدالي)

١٧) $(AB)K = K(AB)$ (عبارة صحيحة)

2-4 المحددات وقاعدة كرامر

جد قيمة كل محدد مما يأتي:

-2 $\begin{vmatrix}9 & 6\\ 3 & 2\end{vmatrix} = 18-18=0$

-4 $\begin{vmatrix}-14 & -3\\ 2 & -2\end{vmatrix} = 28+6=34$

-6 $\begin{vmatrix}2 & -5\\ 5 & -11\end{vmatrix} = -22+25=3$

-٨ $\begin{vmatrix}2 & -1\\ 3 & -9.5\end{vmatrix} = -19+3=-16$

جد قيمة كل محددة مما يأتي باستعمال قاعدة الأقطار :

١٠) $\begin{vmatrix} -2 & 3 & 1 \\ 0 & 4 & -3 \\ 2 & 5 & -1 \end{vmatrix}$

$$\begin{vmatrix} -2 & 3 & 1 \\ 0 & 4 & -3 \\ 2 & 5 & -1 \end{vmatrix} \begin{matrix} -2 & 3 \\ -0 & 4 \\ 2 & 5 \end{matrix}$$

$8-18+0 = -10$

$8+30+0 = 38$

$-10 - 38 = -48$ (قيمة المحددة)

١٢) $\begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -2 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix}$

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -2 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix} \begin{matrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{matrix}$$

$2-2+1 = 1$

$-1-4-1 = -6$

$1 + 6 = 7$ (قيمة المحددة)

١٤) $\begin{vmatrix} 2 & 7 & -6 \\ 8 & 4 & 0 \\ 1 & -1 & 3 \end{vmatrix}$

$$\begin{vmatrix} 2 & 7 & -6 \\ 8 & 4 & 0 \\ 1 & -1 & 3 \end{vmatrix} \begin{matrix} 2 & 7 \\ 8 & 4 \\ 1 & -1 \end{matrix}$$

$24+0+48 = 72$

$-24+0+168 = 144$

$72-144 = -72$ (قيمة المحددة)

استعمل قاعدة كرامر لحل كل نظام من معادلتين مما يأتي:

١٦) $4x - 2y = -6$

$3x + y = 18$

$$x = \frac{\begin{vmatrix} -6 & -2 \\ 18 & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 4 & -2 \\ 3 & 1 \end{vmatrix}} = \frac{30}{10} = 3$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 4 & -6 \\ 3 & 18 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 4 & -2 \\ 3 & 1 \end{vmatrix}} = \frac{90}{10} = 9$$

حل النظام هو $(3, 9)$.

١٨) $-2x - 3y = -14$

$4x - y = 0$

$$x = \frac{\begin{vmatrix} -14 & -3 \\ 0 & -1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} -2 & -3 \\ 4 & -1 \end{vmatrix}} = \frac{14}{14} = 1$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} -2 & -14 \\ 4 & 0 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} -2 & -3 \\ 4 & -1 \end{vmatrix}} = \frac{56}{14} = 4$$

حل النظام هو $(1, 4)$.

٢٠) $5x - 6 = 3y$

$5y = 54 - 3x$

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 6 & -3 \\ 54 & 5 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 5 & -3 \\ -3 & 5 \end{vmatrix}} = \frac{192}{16} = 12$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 5 & 6 \\ -3 & 54 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 5 & -3 \\ -3 & 5 \end{vmatrix}} = \frac{288}{16} = 18$$

حل النظام هو $(12, 18)$.

٢٢) اوجد مساحة المثلث الذي إحداثيات رؤوسه $(3,5),(6,-5),(-4,10)$؟

$$A == \frac{1}{2}\begin{vmatrix} -4 & 10 & 1 \\ 6 & -5 & 1 \\ 3 & 5 & 1 \end{vmatrix}$$

بتطبيق قاعدة الأقطار :

$$\begin{vmatrix} -4 & 10 & 1 \\ 6 & -5 & 1 \\ 3 & 5 & 1 \end{vmatrix} \begin{matrix} -4 & 10 \\ 6 & -5 \\ 3 & 5 \end{matrix}$$

$20+30+30=80$

$-15-20+60=25$

$80-25 = 55$ (قيمة المحددة)

$A = 0.5(55) = 27.5$

2-5 النظير الضربي للمصفوفة وأنظمة المعادلات الخطية

حدد إذا كانت كل من المصفوفتين تمثل نظيرا ضربيا للأخرى فيما يلي :

2) $X = \begin{bmatrix} -3 & 2 \\ 5 & -3 \end{bmatrix}, Y = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 5 & 3 \end{bmatrix}$

$$\begin{bmatrix} -3 & 2 \\ 5 & -3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 5 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = I$$

كلا من المصفوفتين تمثل نظير ضربي للأخرى.

4) $P = \begin{bmatrix} 6 & -2 \\ -2 & 3 \end{bmatrix}, Q = \begin{bmatrix} \frac{3}{14} & \frac{1}{7} \\ \frac{1}{7} & \frac{3}{7} \end{bmatrix}$

$$\begin{bmatrix} 6 & -2 \\ -2 & 3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \frac{3}{14} & \frac{1}{7} \\ \frac{1}{7} & \frac{3}{7} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = I$$

كلا من المصفوفتين تمثل نظير ضربي للأخرى.

٤) العبارة (لكل مصفوفة مربعة نظير ضربي) صحيحة.

أوجد النظير الضربي لكل مصفوفة فيما يأتي إن كان ذلك ممكنا :

٦) $\begin{bmatrix} 4 & 5 \\ -4 & -3 \end{bmatrix}$

$$A^{-1} = \frac{1}{8}\begin{bmatrix} -3 & -5 \\ 4 & 4 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{-3}{8} & \frac{-5}{8} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

٨) $\begin{bmatrix} -1 & 3 \\ 4 & -7 \end{bmatrix}$

$$A^{-1} = \frac{1}{-5}\begin{bmatrix} -7 & -3 \\ -4 & -1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{7}{5} & \frac{3}{5} \\ \frac{4}{5} & \frac{1}{5} \end{bmatrix}$$

١٠) $\begin{bmatrix} 2 & -5 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$

$$A^{-1} = \frac{1}{17}\begin{bmatrix} 1 & 5 \\ -3 & 2 \end{bmatrix}$$
$$= \begin{bmatrix} \frac{1}{17} & \frac{5}{17} \\ \frac{-3}{17} & \frac{2}{17} \end{bmatrix}$$

استعمل معادلة مصفوفية لحل كل نظام فيما يأتي:

١٢) $p + 3q = 6$

$2p - 3q = -6$

المعادلة المصفوفية هي :

نوجد النظير الضربي لمصفوفة المعاملات :

نضرب طرفي المعادلة المصفوفية في النظير الضربي لمصفوفة المعاملات :

$$\frac{1}{-9}\begin{bmatrix} -3 & -3 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & -3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} p \\ q \end{bmatrix} = \frac{1}{-9}\begin{bmatrix} -3 & -3 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 6 \\ -6 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} p \\ q \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{2}{9} & \frac{-1}{9} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 6 \\ -6 \end{bmatrix}$$

١٤) $2m + 2n = -8$

$6m + 4n = -18$

المعادلة المصفوفية هي :

نوجد النظير الضربي لمصفوفة المعاملات :

$$= \frac{1}{-4}\begin{bmatrix} 4 & -2 \\ -6 & 2 \end{bmatrix}$$

نضرب طرفي المعادلة المصفوفية في النظير الضربي لمصفوفة المعاملات :

$$\frac{1}{-4}\begin{bmatrix} 4 & -2 \\ -6 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 6 & 4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} m \\ n \end{bmatrix} = \frac{1}{-4}\begin{bmatrix} 4 & -2 \\ -6 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -8 \\ -18 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} m \\ n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & \frac{1}{2} \\ \frac{3}{2} & \frac{-1}{2} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -8 \\ -18 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} m \\ n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ -3 \end{bmatrix}$$

3-1 الأعداد المركبة

بسط كلا مما يأتي:

٢) $\sqrt{-8}\,.\,\sqrt{-32}$

$= \sqrt{-1\,.4.2}\,.\,\sqrt{-1\,.16.2}$

$= 2\sqrt{2}i\,.\,4\sqrt{2}i$

$= -16$

٥) $(-3i)(4i)(-5i)$

$= 60i^3$

$= -60i$

٦) (i^{42})

$= i^{6^7} = (-1)^7$

$= -1$

٩) $(5-2i) + (-13-8i)$

$= -8 - 10i$

١٠) $(7-6i) + (9+11i)$

$= 16 + 5i$

١٢) $(10+15i) - (48-30i)$

$= -38 + 45i$

١٤) $(6-4i)(6+4i)$

$= 36 - 16i^2$

$= 36 + 16$

$= 52$

١٦) $(4+3i)(2-5i)$

$= 8 - 20i + 6i - 15i^2$

$= 23 - 14i$

١٨) $\frac{6+5i}{-2i}$

$= \frac{6+5i}{-2i} \times \frac{2i}{2i}$

٢٠) $\frac{3-2i}{2-i}$

$= \frac{3-2i}{2-i} \times \frac{2+i}{2+i}$

حل كل معادلة مما يأتي:

٢٢) $5n^2 + 35 = 0$

$5n^2 = -35$

$n = \pm\sqrt{-7}$

$n = \pm i\sqrt{7}$

$4m^2+76=0$ (24

$4m^2 = -76$

$m^2 = -19$

$m= \pm\sqrt{-19}$

$-5m^2-65=0.9$ (26

$5m^2 = -65$

$m^2 = -13$

$m = \pm\sqrt{-13}$

$m = \pm i\sqrt{13}$

أوجد قيمة l , m الحقيقية التي تجعل كل معادلة مما يأتي صحيحة:

$15-28i = 3l-(4m)i$ (28

الجزء الحقيقي :

$15 = 3l$

$l = 5$

الجزء التخيلي:

$-28i= 4mi$

$-28= 4m$

$m= -7$

$(3l+4)+(3-m)i = 16-3i$ (30

الجزء الحقيقي :

$16 = 3l+4$

$3l = 12$

$l= 4$

الجزء التخيلي:

$(3-m)i= -3i$

$3-m= -3$

$m= 6$

٣٢) المقاومة الكلية في الدائرة الكهربائية :

$= 1 + 3j + 7 -5j = 8-2j$

3-2 القانون العام والمميز

حل كل معادلة مما يأتي باستعمال القانون العام :

-٢ $4x^2-9=0$.

$a=4 ,b=0 ,c=-9$

$x=\frac{0\pm\sqrt{0+144}}{8}$

$=\frac{\pm12}{8}=\frac{\pm3}{2}$

-٤ $x^2-21=4x$.

$a=1 ,b=-4 ,c=-21$

$x=\frac{4\pm\sqrt{16+84}}{2}$

$=\frac{4\pm10}{2}$

$x=7 \quad x=-3$

-٦ $15x^2 + 22x = -8$.

$a=15 , b=22 , c=8$

$x = \frac{-22 \pm \sqrt{484-480}}{30}$

$= \frac{-22 \pm 2}{30}$

$x = \frac{-2}{3}$ or $x = \frac{-4}{5}$

-8 $x^2 - 14x + 53 = 0$.

$a=1 , b=-14 , c=53$

$x = \frac{14 \pm \sqrt{196-212}}{2}$

$= \frac{14 \pm 4i}{2}$

$x=7+2i$ $x=7-2i$

-١٠ $25x^2 - 20x - 6 = 0$.

$a=25 , b=-20 , c=-6$

$x = \frac{20 \pm \sqrt{400+600}}{50}$

$= \frac{20 \pm 31.6}{50}$

$x=1.03$ $x=-0.23$

-١٢ $8x - 1 = 4x^2$.

$a=14 , b=-8 , c=1$

$x = \frac{8 \pm \sqrt{64-16}}{8}$

$= \frac{8 \pm \sqrt{48}}{8}$

$x = 1 + \frac{\sqrt{3}}{2}$ or $x = 1 - \frac{\sqrt{3}}{2}$

-١٤ $4x^2 - 12x + 7 = 0$.

$a=4 , b=-12 , c=7$

$x = \frac{12 \pm \sqrt{144-112}}{8}$

$= \frac{12 \pm \sqrt{32}}{8}$

$x = \frac{3}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}$ or $x = \frac{3}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}$

أجب عن الفرعين a,b لكل معادلة تربيعية فيما يأتي :

a) أوجد قيمة المميز

b) أوجد عدد الجذور وحدد أنواعها

16) $x^2 = 3x$.

$a=1 , b=-3 , c=0$

← المميز موجب

← يوجد جذران حقيقيان

18) $x^2 - 3x = 40$.

$a=1 , b=-3 , c=-40$

$b^2 - 4ac = 9 - (4 \times 1 \times -40)$

$= 169$

← المميز موجب

← يوجد جذران حقيقيان

20) $2x^2 + 7x = 0$.

$a=2, b=7, c=0$

$b^2 - 4ac = 49 - (4 \times 2 \times 0)$

← المميز موجب

← يوجد جذران حقيقيان.

22) $12x^2 - x - 6 = 0$.

$a=12, b=-1, c=-6$

$b^2 - 4ac = 1 - (4 \times 12 \times -6)$

$= 283$

← المميز موجب

← يوجد جذران حقيقيان

24) $12x^2 + 2x - 4 = 0$.

$a=12, b=2, c=-4$

$b^2 - 4ac = 4 - (4 \times 12 \times -4)$

$= 196$

← المميز موجب.

← يوجد جذران حقيقيان.

26) $x^2 + 3x + 6 = 0$.

$a=1, b=3, c=6$

$b^2 - 4ac = 9 - (4 \times 1 \times 6)$

$= -15$

← المميز سالب

← يوجد جذران مركبان.

28) $16x^2 - 8x + 1 = 0$.

$a=16, b=-8, c=1$

$b^2 - 4ac = 64 - (4 \times 16 \times 1)$

$= 0$

← المميز = ٠

← يوجد جذر واحد حقيقي.

30- بحل المعادلة التربيعية لإيجاد الزمن عند $h=56$

$-16t^2 + 60t = 56$

$4t^2 - 15t + 14 = 0.$

$t = \frac{15 \pm \sqrt{255-(4\times4\times14)}}{8}$

$= \frac{15 \pm 1}{8}$

$t = 2$ or $t = 1.75$

3-3 العمليات على كثيرات الحدود

بسط كلا مما يأتي مفترضا أن أيا من المتغيرات لا يساوي صفرا:

١) $n^5 . n^2 = n^7$

٣) $t^9 . t^{-8} = t^1$

٥) $(2f^4)^6 = 2^6 f^{24} = 2^{64} f^{24}$

٨) $8u(2z)^3 = 8u . 8z^3$
$= 64uz^3$

٩) $\frac{12m^8y^6}{-9my^4} = -\frac{4}{3}m^7y^5$

١١) $\frac{-27x^3(-x)^7}{16x^4} = \frac{27}{16x^6}$

١٣) $-(4w^{-3}z^{-5})(8w)^2 = -4 . \frac{1}{w^3} . \frac{1}{z^5} . 64w^2 = \frac{-256}{wz^5}$

١٥) $(\frac{2x^3y^2}{-x^2y^5})^{-2} = (\frac{-x^2y^5}{2x^3y^2})^2 = \frac{-x^4y^{10}}{4x^6y^4} = -\frac{1}{4} . \frac{1}{x^2} . y^6 = \frac{-y^6}{4x^2}$

١٨) $3n^2+1+8n^2-8 = 11n^2-7$

١٩) $6w-11w^2-4-7w^2 = -18w^2+6w-4$

٢١).

الربح في المشروع الأول:

$15000(0.038) = 570$

الربح في المشروع الثاني:

$6 - 3.8 = 2.2$

الربح بعد عام واحد:

$570 + 2.2x$

3-4 قسمة كثيرات الحدود

بسط كل عبارة فيما يأتي مستعملا القسمة:

١) $\frac{15r^{10} - 5r^8 + 40r^2}{5r^4} = \frac{15r^{10}}{5r^4} - \frac{5r^8}{5r^4} + \frac{40r^2}{5r^4}$
$= 3r^6 - r^4 + \frac{8}{r^2}$

٣) $\frac{-30x^3y + 12x^2y^2 - 18x^2y}{-6x^2y} = \frac{-30x^3y}{-6x^2y} + \frac{12x^2y^2}{-6x^2y} - \frac{18x^2y}{-6x^2y}$
$= 5x-2y+3$

٥) $\frac{4a^3 - 8a^2 + a^2}{4a} = \frac{4a^3}{4a} - \frac{8a^2}{4a} + \frac{a^2}{4a}$
$= a^2-2a+\frac{1}{4}a$

9) $(a^3 - 64) \div (a - 4)$

$$\begin{array}{r|rrrr} ٤ & 1 & 0 & 0 & -64 \\ & & 4 & 16 & 64 \\ \hline & 1 & 4 & 16 & 0 \end{array}$$

ناتج القسمة هو $a^2 + 4a + 16$

11) $(2x^3 + 6x + 152) \div (x + 4)$

$$\begin{array}{r|rrrr} -٤ & 2 & 0 & 6 & 152 \\ & & -8 & 32 & -152 \\ \hline & 2 & -8 & 38 & 0 \end{array}$$

ناتج القسمة هو $2x^2 - 8x + 38$

(13 $(3w^3 + 7w^2 - 4w + 3) \div (w + 3)$

$$\begin{array}{r|rrrr} -٣ & 3 & 7 & -4 & 3 \\ & & -9 & 6 & -6 \\ \hline & 3 & -2 & 2 & -3 \end{array}$$

ناتج القسمة هو $3w^2 - 2w + 2 - \frac{3}{w+3}$

(15 $(x^4 - 3x^3 - 11x^2 + 3x + 10) \div (x - 5)$

$$\begin{array}{r|rrrrr} ٥ & 1 & -3 & -11 & 3 & 10 \\ & & 5 & 10 & -5 & -10 \\ \hline & 1 & 2 & -1 & -2 & 0 \end{array}$$

ناتج القسمة هو $x^3 + 2x^2 - x - 2$

(17 $((x^4 - 3x^3 + 5x - 6) \div (x + 2)$

$$\begin{array}{r|rrrrr} -٢ & 1 & -3 & 0 & 5 & -6 \\ & & -2 & 10 & -20 & 30 \\ \hline & 1 & -5 & 10 & -15 & 24 \end{array}$$

ناتج القسمة هو $x^3 - 5x^2 + 10x - 15 + \frac{24}{x+2}$

نقسم كلا من البسط والمقام على معامل x وهو هنا 2 لتصبح عملية القسمة.

$$\left(\frac{2x^2 - x + 3}{x - \frac{3}{2}}\right)$$

$$\begin{array}{r|rrr} \frac{3}{2} & 2 & -1 & 3 \\ & & 3 & 3 \\ \hline & 2 & 2 & 6 \end{array}$$

ناتج القسمة $2x + 2 + \frac{6}{2x-3}$

نقسم كلا من البسط والمقام على معامل r وهو هنا 2 لتصبح عملية القسمة.

$$\left(\frac{r^3 + \frac{5}{2}r^2 - r - \frac{15}{2}}{r - \frac{3}{2}}\right)$$

$$\begin{array}{r|rrrr} \frac{3}{2} & 1 & \frac{5}{2} & -1 & \frac{-15}{2} \\ & & \frac{3}{2} & 6 & \frac{15}{2} \\ \hline & 1 & 4 & 5 & 0 \end{array}$$

ناتج القسمة $r^2 + 4r + 5$

نقسم كلا من البسط والمقام على معامل p وهو هنا 2 لتصبح عملية القسمة.

$$\left(\frac{2p^4 - \frac{17}{2}p^2 + 7p - \frac{3}{2}}{p - \frac{3}{2}}\right)$$

$$\begin{array}{r|rrrrr} \frac{3}{2} & 2 & 0 & \frac{-17}{2} & 7 & \frac{-3}{2} \\ & & 3 & \frac{9}{2} & -6 & \frac{3}{2} \\ \hline & 2 & 3 & -4 & 1 & 0 \end{array}$$

ناتج القسمة $2p^3 + 3p^2 - 4p + 1$

25 نقسم الدالة التي تمثل المساحة على ٢ لتصبح العملية :

$$\left(\frac{x^2-\frac{11}{2}x+\frac{15}{2}}{x-\frac{5}{2}}\right)$$

$$\begin{array}{c|ccc} \frac{5}{2} & 1 & \frac{-11}{2} & \frac{15}{2} \\ & & \frac{5}{2} & \frac{-15}{2} \\ \hline & 1 & -3 & 0 \end{array}$$

ناتج القسمة $(x-3)$ وهو يمثل طول المستطيل

3-5 دوال كثيرات الحدود

حدد الدرجة والمعامل الرئيس لكل كثيرة حدود فيما يأتي وإذا لم تكن كثيرة حدود فاذكر السبب :

1) $(3x^2+1)(2x^2-9)$

كثيرة حدود من الدرجة الرابعة والمعامل الرئيس فيها ٦ .

ليست كثيرة حدود لأنها تحتوي متغير في المقام

أوجد $p(3), p(-2)$ لكل دالة فيما يلي :

٥) $p(x)=x^3-x^5$

$p(-2)=(-2)^3-(-2)^5=24$

$p(3)=(3)^3-(3)^5=-216$

٧) $p(x)=-x^5+4x^3$

$p(-2)=-(-2)^5+4(-2)^3=0$

$p(3)=-(3)^5+4(3)^3=-135$

9) $p(x)=x4+\frac{1}{2}x^3-\frac{1}{2}x$

$p(-2)=(-2)4+\frac{1}{2}(-2)^3-\frac{1}{2}(-2)=-11$

$p(3)=(3)4+\frac{1}{2}(3)^3-\frac{1}{2}(3)=24$

إذا كانت $p(x)=3x^2-4$ ، $r(x)=2x^2-5x+1$ فأوجد قيمة كل مما يلي :

11) $p(8a)=3(8a)^2-4$

$=3(64a^2)-4$

$=192a^2-4$

13) $-5r(2a)$

* $r(2a)=2(2a)^2-5(2a)+1$

$=8a^2-10a+1$

$-5r(2a)=-40a^2+50a-5$

١٥) $p(x^2-1)=3(x^2-1)^2-4$

$=3(x^4-2x^2+1)-4$

$==3x^4-6x^2-1$

18) **الحل :**

$F(x)\to+\infty$ عندما $x\to-\infty$

$F(x)\to+\infty$ عندما $x\to+\infty$

بما أن سلوك طرفي التمثيل البياني في اتجاه واحد فالدالة زوجية الدرجة ، ويقطع التمثيل البياني للدالة محور السينات في نقطتين لذا يكون للدالة صفرين حقيقيين.

٢٠) $c(w)=0.013w^2-w-7$

$c(20)=0.013(20)^2-20-7$

$=5.2-20-7$

$=-21.8$

3-6 حل معادلات كثيرات الحدود

حلل كل كثيرة حدود مما يأتي إلى عواملها الأولية وإن لم تقبل التحليل فاكتب كثيرة حدود أولية:

١) $15a^2b - 10ab^2$

$= 5ab(3a-2b)$

3) كثيرة حدود أولية.

5) كثيرة حدود أولية.

٧) $(y^2 + 20y + 96)$

$=(y+8)(y+12)$

٩) $(6n^2 - 11n - 2)$

$=(n-2)(n+\frac{1}{6})$

١١) $(4x^2 - 8x + 8)$

$x = 1 \pm i$

اكتب العبارة التالية على الصورة التربيعية إن كان ذلك ممكنا :

١٣) $10b^4 + 3b^2 - 11$

$= 10(b^2)^2 + 3(b^2) - 11$

$= 10u^2 + 3u - 11$

١٥) $28d^6 + 25d^3$

$= 28u^2 + 25u$

١٧) $500x^4 - x^2$

$= 500u^2 - u$

حل كل معادلة فيما يأتي :

١٩) $y^4 - 7y^3 - 18y^2 = 0$

$y^2(y^2 - 7y - 18) = 0$

$y^2 = 0 \rightarrow y = 0$

$(y^2 - 7y - 18) = 0$

$y = 9 \quad or \quad y = -2$

٢١) $m^4 - 625 = 0$

$= (m^2)^2 - (25^2)$

$=(m^2-25)(m^2+25)$

$m^2 = 25 \rightarrow m = \pm 5$

$or \quad m^2 = -25 \rightarrow m = \pm 5i$

٢٣) $x^4 - 50x^2 + 49 = 0$

$u^2 - 50u + 49 = 0$

$U = 49 \quad or \quad u = 1$

$x^2 = 49 \rightarrow x = \pm 7$

$or \ x^2 = 1 \rightarrow x = \pm 1$

٢٥) قيم x التي يقطع عندها مسار البروتون المحور x هي حل المعادلة :

$f(x) = x^4 - 2x^2 - 15 = 0$

$u^2 - 2u - 15 = 0$

$U = 5 \quad or \quad u = -3$

$x^2 = 5 \rightarrow x = \pm\sqrt{5}$

$or \ x^2 = -3 \rightarrow x = \pm i\sqrt{3}$

3-7 نظريتا الباقي والعوامل

اوجد $f(4)$ ، $f(-3)$ لكل دالة مما يأتي مستعملاً التعويض التركيبي:

١) $f(x)=x^2+2x+3$

بناء على نظرية الباقي فان $f(4)$ يساوي باقي قسمة كثيرة الحدود على $x-4$.

$$\begin{array}{r|rrr} 4 & 1 & 2 & 3 \\ & & 4 & 24 \\ \hline & 1 & 6 & 27 \end{array}$$

باقي القسمة هو ٢٧ ← $f(4)=27$

بناء على نظرية الباقي فان $f(-3)$ يساوي باقي قسمة كثيرة الحدود على $x+3$.

$$\begin{array}{r|rrr} -3 & 1 & 2 & 3 \\ & & -3 & 3 \\ \hline & 1 & -1 & 6 \end{array}$$

باقي القسمة هو 6 ← $f(-3) = 6$

٣) $f(x)=x^2-5x-4$

بناء على نظرية الباقي فان $f(4)$ يساوي باقي قسمة كثيرة الحدود على $x-4$.

$$\begin{array}{r|rrr} 4 & 1 & -5 & -4 \\ & & 4 & -4 \\ \hline & 1 & -1 & -8 \end{array}$$

باقي القسمة هو -٨ ← $f(4)=-8$

بناء على نظرية الباقي فان $f(-3)$ يساوي باقي قسمة كثيرة الحدود على $x+3$.

$$\begin{array}{r|rrr} -3 & 1 & -5 & -4 \\ & & -3 & 24 \\ \hline & 1 & -8 & 20 \end{array}$$

باقي القسمة هو 20 ← $f(-3) = 20$

٥) $f(x)=x^3+2x^2+5$

بناء على نظرية الباقي فان $f(4)$ يساوي باقي قسمة كثيرة الحدود على $x-4$.

$$\begin{array}{r|rrrr} 4 & 1 & 2 & 0 & 5 \\ & & 4 & 24 & 96 \\ \hline & 1 & 6 & 24 & 101 \end{array}$$

باقي القسمة هو 101 ← $f(4)=101$

بناء على نظرية الباقي فان $f(-3)$ يساوي باقي قسمة كثيرة الحدود على $x+3$.

$$\begin{array}{r|rrrr} -3 & 1 & 2 & 0 & 5 \\ & & -3 & 3 & -9 \\ \hline & 1 & -1 & 3 & -4 \end{array}$$

باقي القسمة هو -4 ← $f(-3) = -4$

٧) $f(x)=x^3-2x^2-2x+8$

بناء على نظرية الباقي فان $f(4)$ يساوي باقي قسمة كثيرة الحدود على $x-4$.

$$\begin{array}{r|rrrr} 4 & 1 & -2 & -2 & 8 \\ & & 4 & 8 & 24 \\ \hline & 1 & 2 & 6 & 32 \end{array}$$

باقي القسمة هو 32 ← $f(4)=32$

بناء على نظرية الباقي فان $f(-3)$ يساوي باقي قسمة كثيرة الحدود على $x+3$.

$$\begin{array}{r|rrrr} -3 & 1 & -2 & -2 & 8 \\ & & -3 & 15 & -39 \\ \hline & 1 & -5 & 13 & -31 \end{array}$$

باقي القسمة هو -31 ← $f(-3) = -31$

٩) $f(x)=x^3+3x^2+2x-50$

بناء على نظرية الباقي فان $f(4)$ يساوي باقي قسمة كثيرة الحدود على $x-4$.

٤	1	3	2	-50
		4	28	120
	1	7	30	70

باقي القسمة هو $70 \leftarrow f(4)=70$

بناء على نظرية الباقي فان $f(-3)$ يساوي باقي قسمة كثيرة الحدود على $x+3$.

٣-	1	3	2	-50
		-3	0	-6
	1	0	2	-56

باقي القسمة هو $-56 \leftarrow f(-3)=-56$

١٣) $f(x)=2x^4-x^3+2x^2-26$

بناء على نظرية الباقي فان $f(4)$ يساوي باقي قسمة كثيرة الحدود على $x-4$.

٤	2	-1	2	0	-26
		8	28	120	480
	2	7	30	120	454

باقي القسمة هو $454 \leftarrow f(4)=454$

بناء على نظرية الباقي فان $f(-3)$ يساوي باقي قسمة كثيرة الحدود على $x+3$.

٣-	2	-1	2	0	-26
		-6	21	-69	207
	2	-7	23	-69	181

باقي القسمة هو $181 \leftarrow f(-3)=181$

١٥) $f(x)=x^5+7x^3-4x-10$

بناء على نظرية الباقي فان $f(4)$ يساوي باقي قسمة كثيرة الحدود على $x-4$.

٤	1	0	7	0	-4	-10
		4	16	92	368	1456
	1	4	23	92	364	1446

باقي القسمة هو $1446 \leftarrow f(4)=1446$

بناء على نظرية الباقي فان $f(-3)$ يساوي باقي قسمة كثيرة الحدود على $x+3$.

٣-	1	0	7	0	-4	-10
		-3	9	-48	144	-420
	1	-3	16	-48	140	-430

باقي القسمة هو $-430 \leftarrow f(-3)=-430$

أوجد العوامل الأخرى لكل كثيرة حدود مما يأتي علما بأنه قد أعطي أحد عواملها:

١٧) $x^3+3x^2-6x-8,\ (x-2)$

باستعمال القسمة التركيبية:

٢	1	3	-6	-8
		2	10	8
	1	5	4	0

ناتج القسمة هو x^2+5x+4

العوامل هي $(x+1)(x+4)(x-2)$

١٩) $x^3-9x^2+27x-27,\ (x-3)$

باستعمال القسمة التركيبية:

٣	1	-9	27	-27
		3	-18	27
	1	-6	9	0

ناتج القسمة هو x^2-6x+9

العوامل هي $(x-2)(x-3)$

٢١) $x^3 - 5x^2 - 2x - 24,\ (x-2)$

باستعمال القسمة التركيبية:

٢]	1	5	-2	-24
		2	14	24
	1	7	12	0

ناتج القسمة هو $x^2+7x+12$

العوامل هي $(x+3)(x+4)(x-2)$

٢٣) $3x^3 - 4x^2 - 17x + 6,\ (x-2)$

باستعمال القسمة التركيبية:

-٢]	3	-4	-17	6
		-6	20	-6
	3	-10	3	0

ناتج القسمة هو $3x^2-10x+3$

العوامل هي $(x-3)(x-\frac{1}{3})(x+2)$

٢٥) $18x^3 - 9x^2 - 2x - 1,\ (2x+1)$

نقسم كلا من البسط والمقام على معامل x وهو هنا 2 لتصبح عملية القسمة.

$\frac{-1}{2}$]	9	$\frac{9}{2}$	-1	$\frac{-1}{2}$
		$\frac{-9}{2}$	0	$\frac{1}{2}$
	9	0	-1	0

ناتج القسمة $9x^2 - 1 = 0$

العوامل هي $(x+\frac{1}{3})(x-\frac{1}{3})(2x+1)$

٣٠) نقسم الدالة التي تمثل حجم البركة على ٢:

$$f(x) = 2x^3 - 9x^2 + 7x + 6 = 0 \ \ (\div 2)$$

$\frac{-1}{2}$]	1	$\frac{-9}{2}$	$\frac{7}{2}$	3
		$\frac{-1}{2}$	$\frac{5}{2}$	-3
	1	-5	6	0

ناتج القسمة $x^2 - 5x + 6 = 0$

العوامل هي $(x-3)(x-2)(2x+1)$

طول البركة $(x-3)$ وعرضها $(x-2)$

3-8 الجذور والأصفار

حل كل معادلة مما يأتي واذكر عدد جذورها وأنواعها :

1) $-9x - 15 = 0$

$-9x = 15$

$x = -\frac{15}{9}$

للمعادلة جذر حقيقي واحد.

3) $x^5 - 81x = 0$

$= x(x^4 - 81) = 0$

$x = 0$ or $x^4 - 81 = 0$

$(x^2)^2 - (9)^2 = 0$

$x^2 - 9 = 0 \rightarrow x = \pm 3$

$x^2 + 9 = 0 \rightarrow x = \pm 3i$

للمعادلة خمسة جذور ثلاثة حقيقية واثنين تخيليين.

5) $x^3 + 6x + 20 = 0$

$(x-2)(x^2-2x+10) = 0$

$x = 2$ or $(x^2-2x+10) = 0$

$x = 2 \pm 3i$

للمعادلة ثلاثة جذور واحد حقيقي واثنين تخيليين.

اذكر عدد الأصفار الممكنة الحقيقية الموجبة والحقيقية السالبة والتخيلية لكل دالة مما يلي:

7) $f(x) = 4x^3 - 2x^2 + x + 3$

عند $f(x)$ نجد تغيرين في إشارة المعاملات لذا فعدد الأصفار الحقيقية الموجبة سيكون ٢ أو ٠.

عند $f(-x)$ نجد تغير واحد في إشارة المعاملات لذا فعدد الأصفار الحقيقية السالبة سيكون١

عدد الاصفار التخيلية = ٢ أو ٠.

9) $q(x) = 3x^4 + x^3 - 3x^2 + 7x + 5$

عند $f(x)$ نجد تغير في إشارة المعاملات لذا فعدد الأصفار الحقيقية الموجبة سيكون ١

عند $f(-x)$ نجد تغيرين في إشارة المعاملات لذا فعدد الأصفار الحقيقية السالبة سيكون٢ أو ٠.

عدد الاصفار التخيلية = ٢ أو ٠.

اكتب دالة كثيرة حدود درجتها أقل ما يمكن ومعاملات حدودها أعداد صحيحة إذا كانت الأعداد المعطاة في كل مما يأتي هي بعض أصفارها :

$-5, 3i$

بما أن $3i$ صفر للدالة ← $-3i$ صفر للدالة أيضا.

عوامل كثيرة الحدود:

$(x+5)(x-3i)(x+3i))$

$= (x+5)[x^2+9]$

$= x^3+9x+5x^2+9x$

$f(x) = x^3+5x^2+18x$

$-1, 4, 3i$

بما أن $3i$ صفر للدالة ← $-3i$ صفر للدالة أيضا.

عوامل كثيرة الحدود:

$(x+1)(x-4)(x+3i)(x-3i)$

$= x^2-4x+x-4(x^2+9)$

$= x^2-3x-4(x^2+9)$

$= x^4+9x^2-3x^3-27x-4x^2-36$

$f(x) = x^4-3x^3+5x^2-27x-36$

3-9 نظرية الصفر النسبي

اكتب جميع الأعداد النسبية التي تحددها نظرية الصفر النسبي للدالة التالية :

(1 $h(x)=x^3-5x^2+2x+12$

إذا كان $\frac{p}{q}$ صفر نسبي فان p احد عوامل العدد ١٢ و q احد عوامل العدد ١ .

$q=\pm 1$ $\quad$ $p=\pm 1,\pm 2,\pm 3,\pm 4,\pm 5,\pm 6,\pm 12$

$\frac{p}{q}=\pm 1,\pm 2,\pm 3,\pm 4,\pm 5,\pm 6,\pm 12$

(3 $f(x)=3x^5-5x^2+x+6$

إذا كان $\frac{p}{q}$ صفر نسبي فان p احد عوامل العدد ٦ و q احد عوامل العدد ٣ .

$q=\pm 1,\pm 3$ $\quad$ $p=\pm 1,\pm 2,\pm 3,\pm 6$

$\frac{p}{q}=\pm\frac{1}{3},\pm\frac{2}{3},\pm 1,\pm 2,\pm 3,\pm 6$

(5 $g(x)=5x^3+x^2-x+8$

إذا كان $\frac{p}{q}$ صفر نسبي فان p احد عوامل العدد ٨ و q احد عوامل العدد ٥ .

$q=\pm 1,\pm 5$ $\quad$ $p=\pm 1,\pm 2,\pm 4,\pm 8$

$\frac{p}{q}=\pm\frac{1}{5},\pm\frac{2}{5},\pm\frac{4}{5},\pm\frac{8}{5},\pm 1,\pm 2,\pm 4,\pm 8$

اوجد جميع الأصفار النسبية لكل من الدوال التالية :

(7 $q(x)=x^3+3x^2-6x-8$

- بناء على نتيجة النظرية الأساسية في الجبر للدالة 3 أصفار مركبة فقط.
- بناء على قانون ديكارت للإشارات فان للدالة صفرين حقيقيين سالبين وصفر حقيقي موجب.
- الأعداد التي تحددها نظرية الصفر النسبي:
- $\frac{p}{q}=\pm 1,\pm 2,\pm 4,\pm 8$
- باختبار الأعداد النسبية نجد أن ٢ صفر للدالة.

$$\begin{array}{c|cccc} 2 & 1 & 3 & -6 & -8 \\ & & 2 & 10 & 8 \\ \hline & 1 & 5 & 4 & 0 \end{array}$$

- نحلل الدالة الناتجة عن قسمة كثيرة الحدود الأصلية على $(x-2)$ وهي :

$$x^2+5x+4=0$$

$x=-1$ or $x=-4$

أصفار الدالة هي : $2,-1,-4$

(9 $c(x)=x^3-x^2-8x+12$

- بناء على نتيجة النظرية الأساسية في الجبر للدالة 3 أصفار مركبة فقط.
- بناء على قانون ديكارت للإشارات فان للدالة صفرين حقيقيين موجبين وصفر حقيقي سالب.
- الأعداد التي تحددها نظرية الصفر النسبي:
- $\frac{p}{q}=\pm 1,\pm 2,\pm 3,\pm 4,\pm 6,\pm 12$
- باختبار الأعداد النسبية نجد أن 2 صفر للدالة.

$$\begin{array}{c|cccc} 2 & 1 & -1 & -8 & 12 \\ & & 2 & 2 & -12 \\ \hline & 1 & 1 & -6 & 0 \end{array}$$

- نحلل الدالة الناتجة عن قسمة كثيرة الحدود الأصلية على $(x-2)$ وهي :

$$x^2+x-6=0$$

$x=-3$ or $x=2$

(11 $h(x)=x^3-7x^2+17x-15$

- بناء على نتيجة النظرية الأساسية في الجبر للدالة 3 أصفار مركبة فقط.
- بناء على قانون ديكارت للإشارات فان للدالة 3 أصفار موجبة
- الأعداد التي تحددها نظرية الصفر النسبي:
- $\frac{p}{q}=\pm 1,\pm 3,\pm 5,\pm 15$

- باختبار الأعداد النسبية نجد أن 3 صفر للدالة.

3⌋	1	-7	17	-15
		3	-12	15
	1	-4	5	0

- نحلل الدالة الناتجة عن قسمة كثيرة الحدود الأصلية على $(x-3)$ وهي :

$$x^2 - 4x + 5 = 0$$

$x=2\pm i$

أصفار الدالة هي : $2\pm i, 3$

$f(x)= x^3 - 6x^2 + 4x - 24$ (13

- بناء على نتيجة النظرية الأساسية في الجبر للدالة 3 أصفار مركبة فقط.
- بناء على قانون ديكارت للإشارات فان للدالة ٣ أصفار موجبة.
- الأعداد التي تحددها نظرية الصفر النسبي:
- $\frac{p}{q} = \pm1, \pm2, \pm3, \pm4, \pm6, \pm8, \pm12, \pm24$
- باختبار الأعداد النسبية نجد أن 6 صفر للدالة.

6⌋	1	-6	4	-24
		6	0	24
	1	0	4	0

- نحلل الدالة الناتجة عن قسمة كثيرة الحدود الأصلية على $(x-6)$ وهي :

$$x^2 + 4 = 0$$

$x=\pm 2i$

أصفار الدالة هي : $\pm 2i, 6$

$h(x)=2x^3 - 7x^2 - 21x + 54$ (15

- بناء على نتيجة النظرية الأساسية في الجبر للدالة 3 أصفار مركبة فقط.
- بناء على قانون ديكارت للإشارات فان للدالة صفرين حقيقين موجبين وصفر حقيقي سالب.
- الأعداد التي تحددها نظرية الصفر النسبي:
- $\frac{p}{q} = \pm1, \pm2, \pm3, \pm6, \pm9, \pm\cdots$
- باختبار الأعداد النسبية نجد أن 2 صفر للدالة.

2⌋	2	-7	-21	54
		4	-6	-54
	2	-3	-27	0

- نحلل الدالة الناتجة عن قسمة كثيرة الحدود الأصلية على $(x-2)$ وهي :

$$2x^2 - 3x - 27 = 0$$

$x=-3$ or $x=\frac{9}{2}$

أصفار الدالة هي : $2, -3, \frac{9}{2}$

$n(x)= x^4 - 2x^3 - 3$ (18

- بناء على نتيجة النظرية الأساسية في الجبر للدالة ٤ أصفار مركبة فقط.
- بناء على قانون ديكارت للإشارات فان للدالة صفر واحد حقيقي موجب وصفر حقيقي سالب.
- الأعداد التي تحددها نظرية الصفر النسبي:
- $\frac{p}{q} = \pm1, \pm3$
- باختبار الأعداد النسبية نجد أن ١- صفر للدالة.

-1⌋	1	-2	0	0	-3
		-1	3	-3	3
	1	-3	3	-3	0

- نحلل الدالة الناتجة عن قسمة كثيرة الحدود الأصلية على $(x+1)$ وهي :

$$x^3 - 3x^2 + 3x - 3 = 0$$

$x^2(x-3)+3(x-1)=0$

$q(x)= x^4 - 4x^3 + x^2 + 16x - 20$ (21

- بناء على نتيجة النظرية الأساسية في الجبر للدالة ٤ أصفار مركبة فقط.
- بناء على قانون ديكارت للإشارات فان للدالة ثلاث أصفار حقيقية موجبة وصفر حقيقي سالب.
- الأعداد التي تحددها نظرية الصفر النسبي:

- $\frac{p}{q} = \pm1, \pm2, \pm4, \pm5, \pm10, \pm20$
- باختبار الأعداد النسبية نجد أن ٢ صفر للدالة.

$$\begin{array}{r|rrrrr} 2 & 1 & -4 & 1 & 16 & -20 \\ & & 2 & -4 & -6 & 20 \\ \hline & 1 & -2 & -3 & 10 & 0 \end{array}$$

- تحلل الدالة الناتجة عن قسمة كثيرة الحدود الأصلية على $(x-2)$ وهي :

$$x^3 - 2x^2 - 3x + 10 = 0$$

23) $n(x) = x^6 - 1$

- بناء على نتيجة النظرية الأساسية في الجبر للدالة ٦ أصفار مركبة فقط.
- بناء على قانون ديكارت للإشارات فإن للدالة صفر واحد حقيقي موجب وصفر حقيقي سالب.
- الأعداد التي تحددها نظرية الصفر النسبي:
- $\frac{p}{q} = \pm1$
- باختبار الأعداد النسبية نجد أن ١ صفر للدالة.

$$\begin{array}{r|rrrrrrr} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ & & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ \hline & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{array}$$

- تحلل الدالة الناتجة عن قسمة كثيرة الحدود الأصلية على $(x-1)$ وهي :

٢٤) نفرض أن عرض الصندوق هو w فيكون طوله $2+2w$ وارتفاعه $w-3$.

حجم الصندوق = الطول × العرض × الارتفاع :

$$1540 = w(2+2w)(w-3)$$
$$(w^2 - 3w)(2w+2) = 1540$$
$$2w^3 + 2w^2 - 6w^2 - 6w = 1540$$
$$w^3 - 2w^2 - 3w - 770 = 0$$

المعامل الرئيس = ١ ← الأعداد النسبية الممكنة هي عوامل ٧٧٠ وهي :

$$\pm1, \pm2, \pm5, \pm7, \pm10, \pm11, \ldots.$$

نختار القيم الموجبة لأنها أبعاد.

هناك تغير واحد في إشارة المعاملات ← هناك صفر واحد حقيقي موجب.

باختبار الأعداد نجد أن العدد ١٠ صفر حقيقي موجب للدالة فلا داعي لاختبار باقي القيم.

العرض : $w = 10\ in$ الارتفاع : $w-3 = 7\ in$ الطول : $2+2w = 22\ in$

4-1 العمليات على الدوال

أوجد $(f+g)(x), (f-g)(x), (f.g)(x), (\frac{f}{g})(x)$ للدالتين فيما يلي :

2) $g(x) = \frac{1}{x^2}$

$f(x) = 8x^2$

$$(f+g)(x) = 8x^2 + \frac{1}{x^2}$$
$$= \frac{8x^4+1}{x^2}$$
$$(f-g)(x) = 8x^2 - \frac{1}{x^2}$$
$$= \frac{8x^4-1}{x^2}$$
$$(f.g)(x) = 8x^2 . \frac{1}{x^2} = 8$$
$$(\frac{f}{g})(x) = 8x^2 . x^2 = 8x^4$$

أوجد $(f∘g)(x), (g∘f)(x)$ لكل زوج من الدوال الآتية :

4) $f(x) = \{(-9,-1)(-1,0)(3,4)\}$

$g(x) = \{(0,-9)(-1,3)(4,-1)\}$

$(g∘f)(x)$: $f(-9) = -1 \rightarrow g(-1) = 3$

$f(-1) = 0 \rightarrow g(0) = -9$

$f(3) = 4 \rightarrow g(4) = -1$

$(g\circ f)(x)=\{(-9,3)(-1,-9)(3,-1)\}$

$(f\circ g)(x)\ ;\ g(0)=-9 \rightarrow f(-9)=-1$

$g(-1)=3 \rightarrow f(3)=4$

$g(4)=-1 \rightarrow f(-1)=0$

$(f\circ g)(x)=\{(0,-1)(-1,4)(4,0)\}$

6) $f(x)=\{(-4,-5)(0,3)(1,6)\}$

$g(x)=\{(6,1)(-5,0)(3,-4)\}$

$(g\circ f)(x)\ ;\ f(-4)=-5 \rightarrow g(-5)=0$

$f(0)=3 \rightarrow g(3)=-4$

$f(3)=-4 \rightarrow g(-4)=-5$

$(g\circ f)(x)=\{(-4,0)(0,-4)(-4,-5)\}$

$(f\circ g)(x)\ ;\ g(6)=1 \rightarrow f(1)=6$

$g(-5)=0 \rightarrow f(0)=3$

$g(3)=-4 \rightarrow f(-4)=-5$

$(f\circ g)(x)=\{(6,6)(-5,3)(3,-5)\}$

أوجد $(h\circ g)(x),(g\circ h)(x)$ إن كان ذلك ممكناً :

8) $h(x)=x-4\ ,\ g(x)=3x$

$(h\circ g)(x)=h(3x)=3x-4$

$(g\circ h)(x)=g(x-4)=3(x-4)=3x-12$

10) $h(x)=3x^2,\ g(x)=x+6$

$(h\circ g)(x)=h(x+6)=3(x+6)^2$

$=3(x^2+12x+36)$

$=3x^2+36x+108$

$(g\circ h)(x)=g(3x^2)=3x^2+6$

12) $h(x)=x^2+3x+2,\ g(x)=-2x$

$(h\circ g)(x)=h(-2x)=(-2x)^2+3(-2x)+2$

$=4x^2-6x+2$

$(g\circ h)(x)=g(x^2+3x+2)$

$=-2(x^2+3x+2)$

$=-2x^2-6x-4$

إذا كان $f(x)=x^2,\ g(x)=5x\ ,\ h(x)=x-4$ فأوجد قيمة كل مما يأتي :

١٤) $f(g(1))$

$g(1)=5 \rightarrow f(5)=25$

١٦) $h(f(4))$

$f(4)=16 \rightarrow h(16)=20$

١٨) $h(g(-3))$

$g(-3)=-15 \rightarrow h(-15)=-11$

٢٠) $f=\frac{2}{12}\ ,\ m=\frac{f}{5280}$

$(m\circ f)=m(\frac{n}{12})=\frac{n}{12}.5280=440n$

4-2 العلاقات والدوال العكسية

أوجد معكوس كل من العلاقات التالية :

2) $\{(-5,1)(-5,-1)(-5,8)\}$

العلاقة العكسية لها هي $\{(1,-5)(-1,-5)(8,-5)\}$

4) $\{(8,-2)(10,5)(12,6)(14,7)\}$

العلاقة العكسية لها هي $\{(-2,8)(5,10)(6,12)(7,14)\}$

6) $\{(-3,9)(-2,4)(0,0)(1,1)\}$

العلاقة العكسية لها هي $\{(9,-3)(4,-2)(0,0)(1,1)\}$

أوجد معكوس الدالة التالية : 8) $g(x)=3+x$

- نعيد كتابة الدالة بدلالة المتغيرين x,y : $y=3+x$
- نبدل بين كلا من y , x في المعادلة : $x=3+y$
- نحل المعادلة بالنسبة للمتغير y: $y=x-3$

نضع $f^{-1}(x)$ بدلا من المتغير y : $f^{-1}(x) = x-3$

حدد إذا كانت كل دالتين فيما يلي دالة عكسية للأخرى :

10) $f(x)=x+6$, $g(x)=x-6$

$$(f\circ g)(x)=f(x-6)$$
$$=x-6+6$$
$$=x$$

$$(g\circ f)(x)=g(x+6)$$
$$=x+6-6$$
$$=x$$

تمثل كل من الدالتين دالة عكسية للأخرى .

حدد إذا كانت كل دالتين فيما يلي دالة عكسية للأخرى أم لا مع التوضيح :

12) $h(x)=\frac{1}{13}x-1$, $g(x)=13x-13$

$$(g\circ h)(x)=g(\tfrac{1}{13}x-1)$$
$$=13(\tfrac{1}{13}x-1)-13$$
$$=x-13-13$$
$$=x-26$$

لا تمثل كل من الدالتين دالة عكسية للأخرى .

14) $f(x)=\frac{6}{7}x$, $g(x)=\frac{7}{6}x$

$$(f\circ g)(x)=f(\tfrac{7}{6}x)$$
$$=\tfrac{6}{7}(\tfrac{7}{6}x)=x$$

$$(g\circ f)(x)=g(\tfrac{6}{7}x)$$
$$=\tfrac{7}{6}(\tfrac{6}{7}x)=x$$

تمثل كل من الدالتين دالة عكسية للأخرى .

١٦) النقاط التي تمثل الطول كدالة بدلالة الوزن :

$\{(121,63)(180,71)(140,67)(108,65)(165,72)\}$

4-3 دوال ومتباينات الجذر التربيعي

عين كلا من المجال والمدى للدوال التالية:

2) $y = -\sqrt{x-1}$

- القيمة الصغرى للمجال عند $(1, 0)$
- نعمل جدولا للقيم x حيث $x \geq 1$
-

x	y
1	0
2	-1
5	-2
10	-3

- قيمة a سالبة فالتمثيل البياني للدالة هو تحويل للتمثيل البياني للدالة $f(x)=\sqrt{x}$ مع إزاحة بمقدار وحدة واحدة إلى اليمين.
- المجال $\{x ; x \geq 1\}$

المدى $\{f(x); f(x) \geq 0\}$

3) $y = 2\sqrt{x+2}$

- القيمة الصغرى للمجال عند $(-2, 0)$
- نعمل جدولا للقيم x حيث $x \geq -2$
-

x	y
-2	0
-1	2
0	2.8
1	3.4
2	4

- قيمة a موجبة فالتمثيل البياني للدالة هو تحويل للتمثيل البياني للدالة $f(x)=\sqrt{x}$ مع إزاحة بمقدار وحدتين إلى اليسار.
- المجال $\{x ; x \geq -2\}$

المدى $\{f(x); f(x) \geq 0\}$

5) $y = \sqrt{x+7} - 4$

- القيمة الصغرى للمجال عند $(-7, -4)$
- نعمل جدولا للقيم x حيث $x \geq -7$
-

x	y
-7	-4
-6	-3
-5	-2.5
0	-1.3
2	-1

- قيمة a موجبة فالتمثيل البياني للدالة هو تحويل للتمثيل البياني للدالة $f(x)=\sqrt{x}$ مع إزاحة بمقدار ٧ وحدات إلى اليسار وأربع وحدات إلى الأسفل.

- المجال $\{x ; x \geq -7\}$

المدى $\{f(x); f(x) \geq -4\}$

7) $y \geq -\sqrt{6x}$

- نمثل الحد $y = -\sqrt{6x}$
- المجال $\{x ; x \geq 0\}$
- قيمة y اكبر من الحد فالتمثيل البياني للمتباينة هو المنطقة المظللة فوق الحد وضمن المجال.

8) $y \leq \sqrt{x-5} + 3$

- نمثل الحد $y = \sqrt{x-5} + 3$
- المجال $\{x ; x \geq 5\}$
- قيمة y اقل من الحد فالتمثيل البياني للمتباينة هو المنطقة المظللة تحت الحد وضمن المجال.

10) الارتفاع h :

$$v = \sqrt{v + 64h}$$
$$70 = \sqrt{8^2 + 64h}$$
$$70 = \sqrt{64 + 64h}$$
$$4900 = 64 + 64h$$
$$4836 = 64h$$
$$75.5 = h$$

4-4 الجذر النوني

بسط كلا مما يأتي :

2) $-\sqrt{324}$

$$= -\sqrt{(18)^2} = -18$$

6) $\sqrt[3]{0.512}$

$$= \sqrt[3]{(0.8)^3} = 0.8$$

8) $-\sqrt[4]{1296}$

$$= \sqrt[4]{6^4} = 6$$

10) $\sqrt[5]{243x^{10}}$

$$= \sqrt[5]{(3x^2)^5} = 3x^2$$

14) $\sqrt{\frac{16m^2}{25}}$

$$= \frac{\sqrt{16m^2}}{\sqrt{25}} = \frac{4m}{5}$$

16) $\sqrt{(2x)^8}$

$$= \sqrt{((2x^2)^2)^2} = 4x^4$$

18) $\sqrt[3]{216p^3q^9}$

$$= \sqrt[3]{(6pq^3)^3} = 6pq^3$$

20) $\sqrt[3]{-27x^9y^{12}}$

$$= \sqrt[3]{-(3x^3y^4)^3} = -i(3x^3y^4)$$

22) $\sqrt[5]{-32x^5y^{10}}$

$$= \sqrt[5]{-(2xy^2)^5} = -i(2xy^2)$$

24) $\sqrt[3]{(2x+1)^3}$
$= (2x+1)$

26) $\sqrt[4]{(x-5)^8}$
$= \sqrt[4]{((x-5)^2)^4} = (x-5)^2$
$= x^2 - 10x + 25$

28) $\sqrt{x^2+10x+25}$
$= \sqrt{(x+5)^2} = x+5$

استعمل الآلة الحاسبة لتقريب قيمة كل مما يلي إلى أقرب ثلاث منازل عشرية:

30) $-\sqrt{89}$
$= -9.434$

32) $\sqrt[3]{-4}$
$= 1.587\, i$

34) $\sqrt[5]{-0.1}$
$= 0.631\, i$

36) $\sqrt[4]{(0.94)^2}$
$= 0.970$

٣٨) $A = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$
محيط المثلث = ١٥+١٧+٢٠=٥٢
نصف المحيط $(s) = 26$
$A = \sqrt{26(26-15)(26-17)(26-20)}$
$= \sqrt{15444} = 124.3$

4-5 العمليات على العبارات الجذرية

بسط كل عبارة جذرية مما يلي :

1) $\sqrt{540}$
$= \sqrt{2^2.3^2.3.5} = 6\sqrt{15}$

3) $\sqrt[3]{128}$
$= \sqrt[3]{4^3.2} = 4\sqrt[3]{2}$

5) $\sqrt[3]{-5000}$
$= \sqrt[3]{10^3.-1.5} = 10i\sqrt[3]{5}$

7) $\sqrt[3]{125t^6w^2}$
$= 5t^2\sqrt[3]{w^2}$

9) $=\sqrt[3]{8g^3k^8}$
$= 2g\sqrt[3]{k^8}$

11) $\sqrt{\frac{11}{9}}$
$= \frac{\sqrt{11}}{\sqrt{9}} = \frac{\sqrt{11}}{3}$

$\sqrt{\frac{1}{128}c^4d^7}$ (13

$= \frac{1}{8}c^2d^3\sqrt{\frac{d}{2}}$

$\sqrt{\frac{9a^5}{64b^4}}$ (15

$= \frac{3a^2\sqrt{a}}{8b^2}$

$(3\sqrt{15})(-4\sqrt{45})$ (16

$= -12\sqrt{(15)(45)}$

$= -12\sqrt{675}$

$\sqrt{810} + \sqrt{240} - \sqrt{250}$ (18

$= \sqrt{2.5.9^2} + \sqrt{4^2.3.5} - \sqrt{5.2.5^2}$

$= 9\sqrt{10} + 4\sqrt{15} - 5\sqrt{10}$

$= 4\sqrt{10} + 4\sqrt{15}$

$8\sqrt{48} - 6\sqrt{75} + 7\sqrt{80}$ (20

$= 8\sqrt{3.4^2} - 6\sqrt{5^2.3} + 7\sqrt{5.4^2}$

$= 32\sqrt{3} - 30\sqrt{3} + 28\sqrt{5}$

$= 2\sqrt{3} + 28\sqrt{5}$

$(3-\sqrt{7})^2$ (22

$= 9 - 3\sqrt{7} - 3\sqrt{7} + 7$

$= 16 - 6\sqrt{7}$

$(\sqrt{2} + \sqrt{10})(\sqrt{2} - \sqrt{10})$ (24

$= (\sqrt{2})^2 - (\sqrt{10})^2$

$= 2 - 10 = -8$

$(\sqrt{3} + 4\sqrt{7})^2$ (26

$= 3 + 2\sqrt{3}.4\sqrt{7} + 112$

$= 8\sqrt{21} + 115$

$\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{5}-2} \times \frac{\sqrt{5}+2}{\sqrt{5}+2}$ (28

$= \frac{\sqrt{15}+2}{5-4} = \sqrt{15} + 2$

$= \frac{5+\sqrt{3}}{4+\sqrt{3}} \times \frac{4-\sqrt{3}}{4-\sqrt{3}}$ (30

$= \frac{20-5\sqrt{3}+4\sqrt{3}-3}{16-3} = \frac{17-\sqrt{3}}{13}$

$s = 2\sqrt{5l}$ (٣٤

$l = 85 \rightarrow s = 2\sqrt{5(85)}$

$= 2\sqrt{425}$

$= 2(20.6) = 41.2$ m/h

4-6 الأسس النسبية

اكتب العبارة الأسية على الصورة الجذرية والعبارة الجذرية على الصورة الأسية فيما يأتي : 1) $5^{\frac{1}{3}}$

$= \sqrt[3]{5}$

$m^{\frac{4}{7}}$ (3

$= \sqrt[7]{m^4}$

$\sqrt{79}$ (5

$= 79^{\frac{1}{2}}$

$\sqrt[3]{27m^6n^4}$ (7

$= 3m^2n^{\frac{4}{3}}$

أوجد قيمة كل عبارة فيما يأتي :

$\sqrt[4]{81}$ (9

$= \sqrt[4]{3^4} = 3$

$8^{\frac{5}{3}}$ (11

$= \sqrt[3]{8^5} = \sqrt[3]{(32)^3} = 32$

$(-64)^{\frac{2}{3}}$ (13

$= \sqrt[3]{-(64)^2} = \sqrt[3]{(16)^3} = 16$

$(\frac{125}{216n})^{\frac{2}{3}}$ (15

$= \sqrt[3]{\frac{125}{210}} = \frac{25}{6}$

$\frac{64^{\frac{2}{3}}}{343^{\frac{2}{3}}n}$ (16

$= \frac{\sqrt[3]{64^2}}{\sqrt[3]{343^2}} = \frac{16}{49}$

بسط كل عبارة مما يأتي :

$g^{\frac{4}{7}} \cdot g^{\frac{3}{7}}$ (18

$= g^{\frac{4}{7}+\frac{3}{7}} = g^{\frac{7}{7}} = g$

$(u^{\frac{1}{3}})^{\frac{4}{5}}$ (20

$= u^{\frac{4}{15}}$

$b^{\frac{-3}{5}}$ (22

$= \frac{1}{b^{\frac{3}{5}}} \cdot \frac{b^{\frac{2}{5}}}{b^{\frac{2}{5}}} \quad = \frac{b^{\frac{2}{5}}}{b^{\frac{5}{5}}} = \frac{b^{\frac{2}{5}}}{b}$

$\frac{(q)^{\frac{3}{5}}}{q^{\frac{2}{5}}}$ (23

$= q^{\frac{3}{5}-\frac{2}{5}} = q^{\frac{1}{5}}$

$\sqrt[4]{6} \cdot 3\sqrt[4]{6}$ (25

$= 3\sqrt[4]{36}$

٢٧) $I = (\frac{P}{R})^{\frac{1}{2}}$

$= (\frac{500}{10})^{\frac{1}{2}}$

$= \sqrt{50} = 7.0$

4-7 حل المعادلات والمتباينات الجذرية

حل كل معادلة مما يأتي :

1) $\sqrt{x} = 8$

$x = 64$

3) $\sqrt{2p} + 3 = 10$

$7 = \sqrt{2p}$

$49 = 2p$

$24.5 = p$

5) $(c)^{\frac{1}{2}} + 6 = 9$

$\sqrt{c} = 3$

$c = 9$

7) $\sqrt[3]{d+2} = 7$

$343 = d+2$

$341 = d$

9) $6 + \sqrt[3]{q-4} = 9$

$27 = q-4$

$31 = q$

11) $\sqrt{2m-6} - 16 = 0$

$16 = \sqrt{2m-6}$

$256 = 2m-6$

$131 = m$

13) $\sqrt{8n-5} - 1 = 2$

$3 = \sqrt{8n-5}$

$9 = 8n-5$

$\frac{7}{4} = n$

15) $(3g+1)^{\frac{1}{2}} - 6 = 4$

$(3g+1)^{\frac{1}{2}} = 10$

$3g+1 = 100$

$3g = 99$

$g = 33$

17) $\sqrt{2d-5} = \sqrt{d-1}$

$2d-5 = d-1$

$2d-d = -1+5$

$d = 4$

19) $\sqrt{6x-4} = \sqrt{2x+10}$

$6x-4 = 2x+10$

$6x-2x = 10+4$

$4x = 14$

$x = \frac{7}{2}$

حل كل متباينة مما يأتي :

21) $3\sqrt{a} \geq 12$

$a \geq 0$

$a \geq 16$

23) $\sqrt{x-1} < 2$

$x-1 \geq 0$

$x \geq 1$

$x - 1 < 4$

$x < 5$

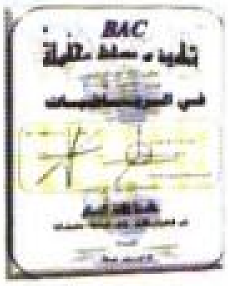
٢٥) $\sigma = \sqrt{v}$

$15 = \sqrt{v}$

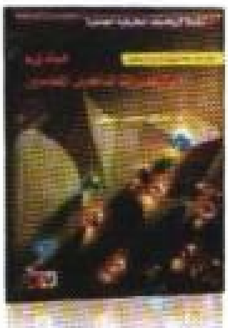
$v = 225$

مراجع

١ -مبادئ أساسية في التحليل العددي .د.فتحي بن حسن فياض، المدرسة الوطنية للعلوم الاعلامية - تونس.



٢ -تمارين ومسائل محلولة في الرياضيات، ابن العامر عادل- BAC مكتبة الجامعة.



٣ -مبادئ الرياضيات لتأهيل المعلمين: عدنان محمد عوض:دار الكتاب الجديد المتحدة مكتبة الرياضيات التطبيقية الجامعية.

٤ -نحن و الرياضيات، تأليف: فايز فوق العادة ، دار الفكر المعاصر .

٥ -معروف عبد الرحمن سمحان، علي بن عبد الله السحيباني، فوزي بن أحمد الذكير مكتبة العبيكان ٢٠٠١.