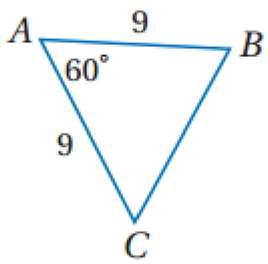
أوجد قياس كل من الزاويتين الآتيتين:

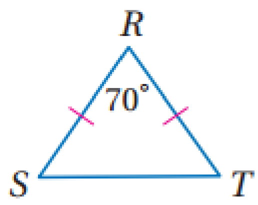
١)



بما أن $AB = AC$ إذن المثلث متطابق الضلعين وبالتالي سيكون زوايا القاعدة متساوية $= 60^\circ$ وبما أن زاوية الرأس ايضا $= 60^\circ$ إذن المثلث متطابق الأضلاع

إذن $BC = 9$

٢)



بما أن $RS = RT$ إذن المثلث متطابق الضلعين وبالتالي سيكون زوايا القاعدة متساوية $= (180^\circ - 70^\circ) \div 2 = 55^\circ$

إذن $m\angle RST = 55^\circ$

٣) حدائق: طول الضلع الثالث يساوي جزر مربع كل ضلع من ضلعي القائمة:

$$\sqrt{(7)^2 + (7)^2} = \sqrt{98} \approx 10$$

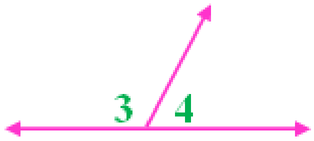
ضع تخمينا مبنياً على المعطيات في كل مما يأتي:

٤)

المعطيات: $\angle 4, \angle 3$ زاويتان متجاورتان على خط مستقيم

التخمين: إذن مجموعهما $180°$ أي أنهما متكاملتان.

التحقق:

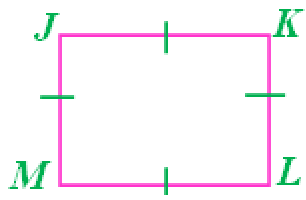


٥)

المعطيات: $JKLM$ مربع

التخمين: $JM = ML = LK = JK$

التحقق:

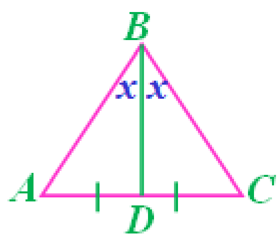


٦)

المعطيات: $\overrightarrow{BD}$ منصف $\angle ABC$

التخمين: $DC = DA, \angle DBC = \angle DBA$

التحقق:



حل كلا من المتباينات الآتية:

8) $x + 13 < 41$

$x + \cancel{13} - \cancel{13} < 41 - 13$

$x < 28$

9) $x - 6 < 2x$

$-\cancel{x} + \cancel{x} - 6 < 2x - x$

$-6 < x$

10) $6x + 9 < 7x$

$-6x + 6x + 9 < 7x - 6x$

$9 < x$

11) $8x + 15 < 9x - 26$

$-\cancel{8x} + \cancel{8x} + 15 < 9x - 26 - 8x$

$15 < x - 26$

$15 + 26 < x$

$41 < x$

١٢) صور:

نفرض أن عدد الصور الألبوم = x

بعد إضافة ١٥ صور أصبح عدد الصور $x + 15$

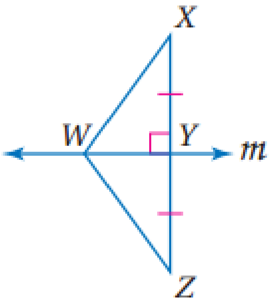
بما أن عدد الصور أكبر من ١٢٠ إذن $x + 15 > 120$

$\cancel{-15} + x + \cancel{15} > 120 - 15$

$x > 105$

4-1 المنصّفات في المثلث

تحقق صفحة 210



(1A

بما أن $\overline{YZ} = \overline{YX}$ (معطى)

إذن $22.4 = \overline{XY}$

(1B

بما أن $\overleftrightarrow{WY}$ عمود منصف لـ $\overline{XZ}$ إذن $\overline{WZ} = \overline{WX}$ حسب نظرية العمود المنصف.

إذن $14.9 = \overline{WX}$ (بالتعويض)

(1C

بما أن $\overleftrightarrow{WY}$ عمود منصف لـ $\overline{XZ}$ إذن $\overline{WZ} = \overline{WX}$ حسب نظرية العمود المنصف.

إذن:

$$4a - 15 = a + 12$$

$$4a - a = 12 + 15$$

$$3a = 27$$

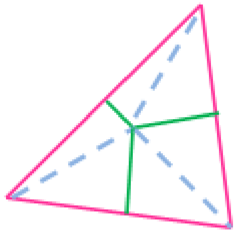
$$a = 9$$

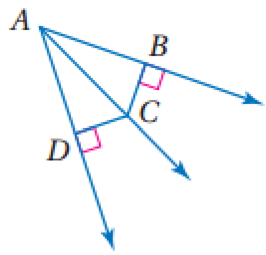
$$\overline{WX} = 4a - 15$$

$$\overline{WX} = 4 \times 9 - 15 = 21$$

(2

بحسب نظرية مركز الدائرة التي تمر برووس مثلث الحديقة يمكن تعيين النقطة التي تكون على أبعاد متساوية من النقاط الثلاث للحديقة باستعمال الأعمدة المنصفة لأضلاع المثلث المتكون من هذه النقاط كما في الشكل الآتي:





(3A

بما أن $BC = DC$ و $BC \perp AB$ و $DC \perp AD$ إذن حسب عكس نظرية منصف الزاوية $\angle BAC = \angle DAC$

إذن $\angle DAC = 38^\circ$

(3B

$DC = BC = 10$ حسب نظرية منصف الزاوية.

(3C

بما أن $\overrightarrow{AC}$ ينصف $\angle DAB$ و $BC \perp AB$ و $DC \perp AD$ إذن $BC = DC$

$$4x + 8 = 9x - 7$$

$$9x - 4x = 8 + 7$$

$$5x = 15$$

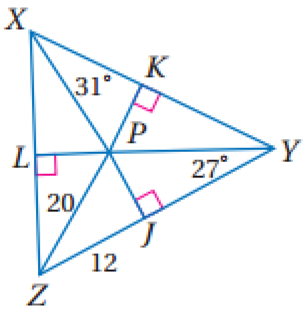
$$x = 3$$

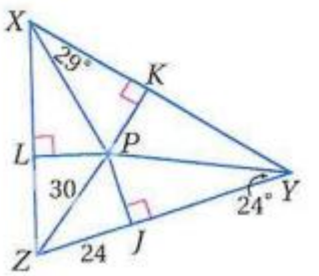
$$\because BC = 4x + 8$$

$$BC = 4 \times 3 + 8$$

$$BC = 20$$

حسب نظرية منصف الزاوية.





(4A

بما أن P على أبعاد متساوية من أضلاع ΔXYZ بحسب نظرية مركز الدائرة الداخلية للمثلث. $PK = PJ$ لذا يجب إيجاد PJ باستعمال نظرية فيثاغورس.

$$(ZP)^2 = (PJ)^2 + (JZ)^2$$

$$(20)^2 = (PJ)^2 + (24)^2$$

$$(PJ)^2 = 900 - 576 = 324$$

$$PJ = PK = 18$$

(4B

بما أن $\overrightarrow{BX}$ ينصف $\angle YXZ$ فإن

$\angle ZXY = 2\angle YXJ = 2\times 29 = 58$

وبالمثل $\angle XYZ = 2\times 24 = 48^\circ$

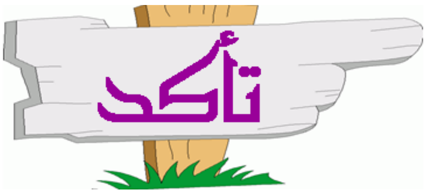
وبالمثل $\angle YZX = 2\angle LZP$

$\angle YXZ + \angle XYZ + XZY = 180^\circ$ نظرية مجموع قياسات زوايا المثلث

$58^\circ + 48^\circ + \angle XZY = 180^\circ$

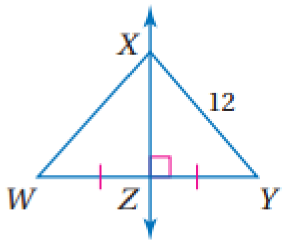
$\angle XZY = 74^\circ$

$\angle LZP = 74 \div 2 = 37^\circ$



أوجد قياس كل مما يأتي: المثال ١

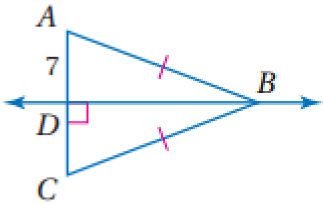
(1



بما أن ZX عمود منصف لـ WY

إذن $XY = WX = 12$ (حسب نظرية العمود المنصف)

(2

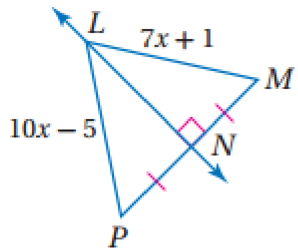


بما أن $AB = BC$ و $BD \perp AC$ إذن BD عمود منصف لـ AC

إذن $DC = AD = 7$ (حسب عكس نظرية العمود المنصف)

$AC = AD + DC = 7 + 7 = 14$

(3



بما أن LN عمود منصف لـ PM إذن $LP = LM$ (نظرية العمود المنصف)

$$10x - 5 = 7x + 1$$

$$10x - 7x = 1 + 5$$

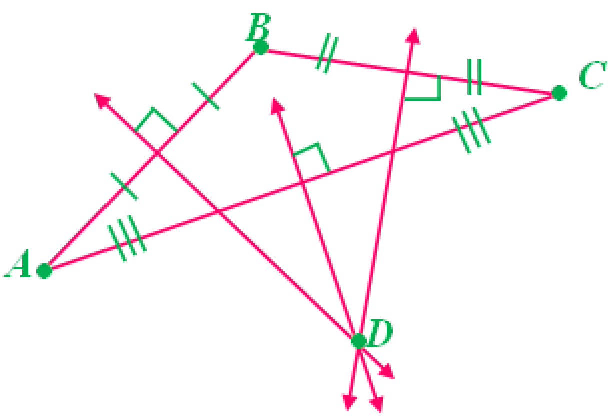
$$3x = 6$$

$$x = 2$$

$$LP = 10 \times 2 - 5$$

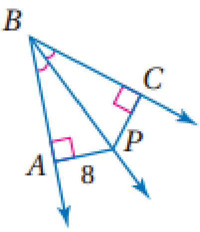
$$LP = 15$$

4) إعلانات: المثال٢



أوجد قياس كل مما يأتي: المثال٣

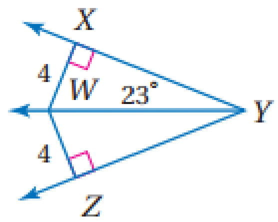
(5



بما أن $\overrightarrow{PB}$ منصفاً لـ $\angle CBA$ و $PA \perp BA$, $PC \perp BC$ (نظرية منصف الزاوية)

فإن $PA = PC = 8$

6)

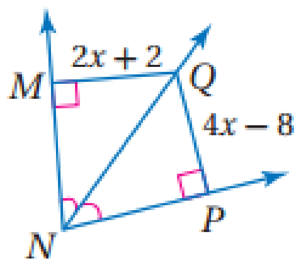


بما أن $WX \perp XY$ و $WZ \perp ZY$ و $WX = WZ$

فإن $\overrightarrow{WY}$ ينصف $\angle XYZ$ (حسب عكس نظرية منصف الزاوية)

إذن $\angle WYZ = 23^{\circ}$

7)



بما أن $\overrightarrow{NQ}$ منصفاً لـ $\angle MNP$ و $QP \perp PN$, $QM \perp MN$ (حسب نظرية منصف الزاوية)

فإن $QP = QM$

$$4x - 8 = 2x + 2$$

$$4x - 2x = 2 + 8$$

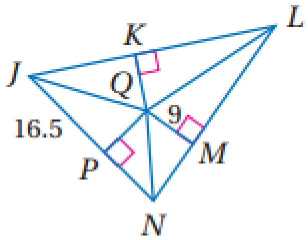
$$2x = 10$$

$$x = 5$$

$$QM = 2x + 2 = 2 \times 5 + 2$$

$$QM = 12$$

8) المثال٤



بما أن Q مركز الدائرة الداخلية لـ ΔJLN

إذن $QK = QM = QP = 9$ وبالتالي يمكن حساب JQ بنظرية فيثاغورث.

$$(QJ)^2 = (QP)^2 + (PJ)^2$$

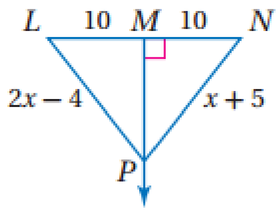
$$(QJ)^2 = (9)^2 + (16.5)^2$$

$$QJ \approx 18.8$$

تدرب وحل المسائل

أوجد قياس كل مما يأتي: المثال١

9)



بما أن $\overrightarrow{PM}$ عمود منصفاً لـ LN (حسب نظرية العمود المنصف)

فإن $PL = NP$

$$2x - 4 = x + 5$$

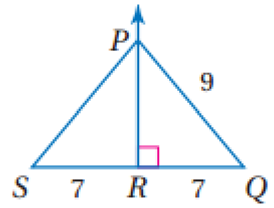
$$2x - x = 5 + 4$$

$$x = 9$$

$$NP = x + 5 = 9 + 5$$

$$NP = 14$$

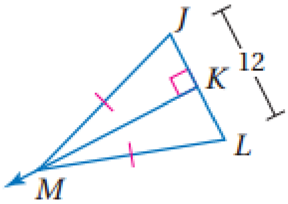
(10



بما أن $\overrightarrow{PR}$ عمود منصفاً لـ $\overline{SQ}$ (حسب نظرية العمود المنصف)

فإن $PQ = PS = 9$

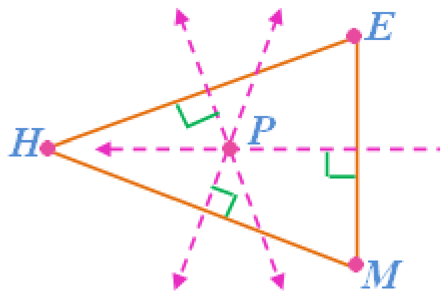
(11



بما أن $MJ = ML$ و $JL \perp MK$ إذن MK عمود منصفاً لـ $\overline{JL}$ (حسب عكس نظرية العمود المنصف) إذن:

$$JK = KL = \frac{12}{2} = 6$$

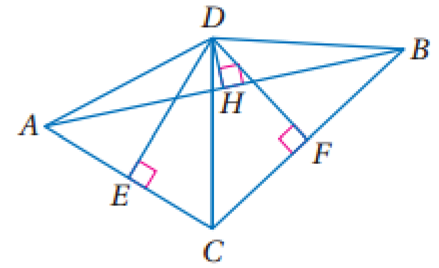
(12 مدرسة: المثال٢



وضع نقطة تعبر عن الحافلة ولتكن P مركز الدائرة الداخلية للمثلث ΔHEM

(حسب نظرية مركز الدائرة الداخلية للمثلث) إذن سيكون بعد النقطة عن كل ضلع من أضلاع المثلث متساوي

اكتب القطعة المستقيمة التي تطابق القطعة المعطاة في كل سؤال مما يأتي:



13) بما أن D هي مركز الدائرة التي تمر برووس ΔABC إذن حسب نظرية مركز الدائرة التي تمر بروس المثلث:

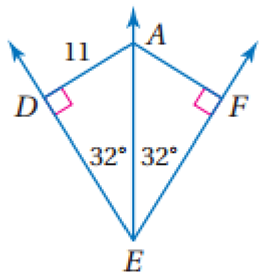
$\overline{BD}, \overline{DC} \cong \overline{AD}$

14) $\overline{DH}$ عمودي وينصف $\overline{AB}$

$\overline{HB} \cong \overline{AH}$

أوجد قياس كل مما يأتي: المثال٣

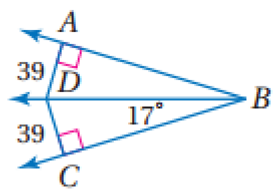
15)



بما أن $\overline{EF} \perp \overline{AF}$ و $\angle AED = \angle AEF$ إذن $AD = AF$

إذن $AF = 11$

16)

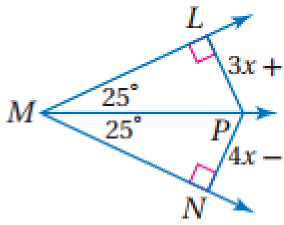


بما أن $\overline{CB} \perp \overline{DC}, \overline{AB} \perp \overline{DA}$ و $AD = DC$ إذن $\angle ABD = \angle DBC$

حسب عكس نظرية منصف الزاوية .

إذن $\angle ABD = 17^\circ$

(17



بما أن $\overline{PN} \perp \overline{MN}$, $\overline{PL} \perp \overline{LM}$ و $\angle PMN = \angle LMP$ إذن $PN = LP$

حسب نظرية منصف الزاوية .

$$4x - 2 = 3x + 6$$

$$4x - 3x = 6 + 2$$

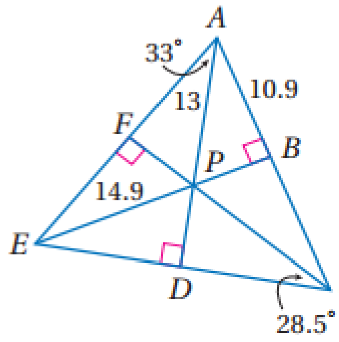
$$x = 8$$

$$PN = 4 \times 8 - 2$$

$$PN = 30$$

إذا كانت النقطة P مركز الدائرة الداخلية لـ ΔAEC ، فأوجد كل من القياسات الآتية:

المثال٤



(18

بما أن النقطة P مركز الدائرة الداخلية لـ ΔAEC ، إذن $PB = PD = PF$

يمكن إيجاد PB حسب نظرية فيثاغورث:

$$(AP)^2 = (AB)^2 + (PB)^2$$

$$(13)^2 = (10.9)^2 + (PB)^2$$

$$PB \approx 7.1$$

(19

بما أن $PB = PD$ إذن باستعمال فيثاغورث:

$$(EP)^2 = (PD)^2 + (ED)^2$$

$$(14.9)^2 = (7.1)^2 + (ED)^2$$

$$ED \approx 13.1$$

(20

بما أن $\overline{EC} \perp \overline{AD}$ وينصف $\angle CAE$ إذن $\angle DAC = 33^\circ$

(21

بما أن $\overline{AE} \perp \overline{FC}$ وينصف $\angle ACE$ إذن $\angle ACE = 28.5 \times 2 = 57^\circ$

$\angle CAE + \angle ACE + \angle AEC = 180^\circ$ نظرية مجموع قياسات زوايا المثلث

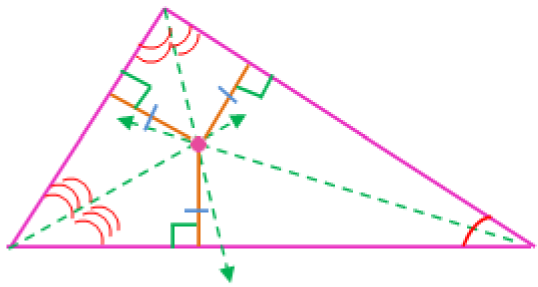
$$26 + 57 + \angle AEC = 180^\circ$$

$$\angle AEC = 97^\circ$$

بما أن $\overline{AC} \perp \overline{EP}$ وينصف $\angle AEC$ إذن $\angle DEB \frac{97}{2} = 48.5^\circ$

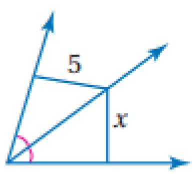
22: تصميم داخلي

أجد نقطة تلاقي منصفات زوايا المثلث التي تمثل مركز الدائرة الداخلية للمثلث وتبعد أبعادا متساوية عن أضلاع المثلث.



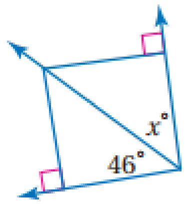
حدد ما إذا كانت المعطيات في كل شكل مما يأتي كافية لإيجاد قيمة x. وضح إجابتك.

(23



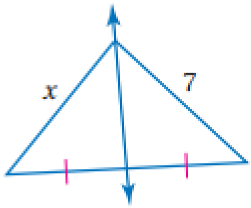
لا، يجب أن تعرف إن كانت القطعتان عموديتين على ضلعي الزاوية.

(24



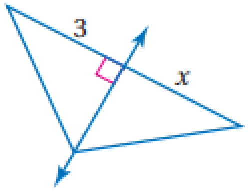
لا، يجب أن تعرف إن كانت القطعتان العموديتان على ضلعي الزاوية متساويتان أم لا.

(25



لا، يجب أن تعرف إن كان منصف القاعدة عموديا عليها.

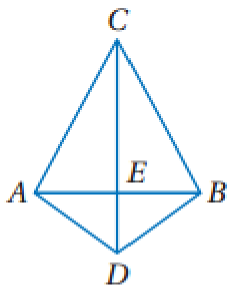
(26



لا، يجب أن تعرف إن كان الوتران متساويين أم لا.

اكتب برهانا ذا عمودين لكل من النظريتين الآتيتين:

27) النظرية٢,٤.



البرهان: العبارات (المبررات)

1) $\overline{BD} \cong \overline{AD}, \overline{CB} \cong \overline{CA}$ (معطى)

2) $\overline{CD} \cong \overline{CD}$ (خاصية الانعكاس لتطابق القطع المستقيمة).

3) $\Delta BCD \cong \Delta ACD$ (SSS)

4) $\angle BCD \cong \angle ACD$ (العناصر المتناظرة في المثلثين المتطابقين متطابقة)

5) $\overline{CE} \cong \overline{CE}$ (خاصية الانعكاس لتطابق القطع المستقيمة)

6) $\Delta CEA \cong \Delta CEB$ (SAS)

7) $\overline{AE} \cong \overline{BE}$ (العناصر المتناظره في المثلثين المتطابقين متطابقة)

8) E نقطة منتصف $\overline{AB}$ (تعريف نقطة المنتصف)

9) $\angle CEA \cong \angle CEB$ (العناصر المتناظرة في المثلثين المتطابقين متطابقة)

10) $\angle CEB , \angle CEA$ متجاورتان على مستقيم

11) $\angle CEB , \angle CEA$ متكاملتان (نظرية الزاويتين المتجاورتين على مستقيم)

12) $m\angle CEA + m\angle CEB = 180^\circ$ (تعريف التكامل)

13) $m\angle CEA + m\angle CEA = 180^\circ$ (بالتعويض)

14) $2m\angle CEA = 180^\circ$ (بالتعويض)

15) $m\angle CEA = 90^\circ$ (خاصية القسمة)

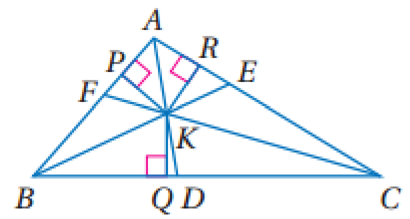
16) $\angle CEB , \angle CEA$ قائمتان (تعريف الزاوية القائمة)

17) $\overline{CD} \perp \overline{AB}$ (تعريف المستقيمين المتعامدين)

18) $\overline{CD}$ عمود منصف $\overline{AB}$ (تعريف العمود المنصف)

19) D , C واقعتان على العمود المنصف لـ $\overline{AB}$ (تعريف النقطة الواقعة على مستقيم).

28) النظرية ٦, ٤



البرهان: العبارات (المبررات)

1) $\overline{AD}, \overline{BE}, \overline{CF}$ منصفات لزاويا ΔABC،

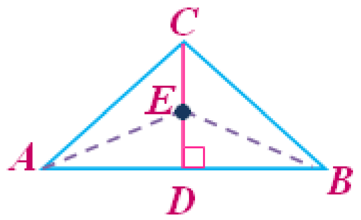
$\overline{KQ} \perp \overline{BC}, \overline{KP} \perp \overline{AB}, \overline{KR} \perp \overline{AC}$ (معطيات)

2) $KP = KR, KQ = KR, KP = KQ$ (كل نقطة على منصف الزاوية تكون على بعدين متساويين من ضلعي الزاوية)

3) $KP = KQ = KR$ (خاصية التعدي)

اكتب برهانا حر لكل من النظريتين الآتيتين:

(29



المعطيات: $\overline{CD}$ عمود منصف لـ $\overline{AB}$.

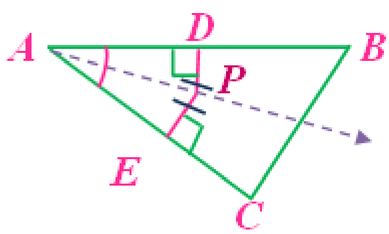
E نقطة على $\overline{CD}$.

المطلوب: $EA = EB$

البرهان: $\overline{CD}$ عمود منصف لـ $\overline{AB}$ ومن تعريف المنصف فإن D نقطة منتصف $\overline{AB}$ لذلك $\overline{AD} \cong \overline{BD}$ حسب نظرية نقطة المنتصف.

$\angle CDA, \angle CDB$ قائمتان حسب تعريف العمود. وبما أن جميع الزاوايا القائمة متطابقة فإن $\angle CDA \cong \angle CDB$. وبما أن E نقطة على $\overline{CD}$ فإن $\angle EDA, \angle EDB$ قائمتان ومتطابقتان. وحسب خاصية الانعكاس $\overline{ED} \cong \overline{ED}$ إذن $\Delta EDA \cong \Delta EDB$ حسب SAS. وتكون $\overline{EA} \cong \overline{EB}$ لأن العناصر المتناظرة في المثلثين المتطابقين متطابقة ومن تعريف التطابق ينتج أن $EA = EB$.

(30



المعطيات:

P نقطة داخل $\angle BAC$.

بعد النقطة P عن $\overline{AB}$ يساوي بعدها عن $\overline{AC}$.

المطلوب: $\overline{AP}$ منصف لـ $\angle BAC$.

البرهان: النقطة P تقع في داخل الزاوية $\angle BAC$، و $PD = PE$. ومن تعريف التطابق $\overline{EP} \cong \overline{PD}$, $\overline{AB} \perp \overline{PD}$ و $\overline{AC} \perp \overline{PE}$ لأن المسافة من نقطة إلى مستقيم تقاس على القطعة المستقيمة العمودية على المستقيم من النقطة.

$\angle AEP, \angle ADP$ قائمتان حسب تعريف المستقيمين المتعامدين
والمثلثان AEP, ADP قائما الزاوية حسب تعريف المثلث قائم الزاوية. وحسب
خاصية الانعكاس $\overline{AP} \cong \overline{AP}$
. إذن، $\Delta AEP, \Delta ADP$ متطابقان حسب LL.
$\angle DAP \cong \angle EAP$ لأن العناصر المتناظرة في المثلثين المتطابقين تكون متطابقة و
$\overline{AP}$ منصف لـ $\angle BAC$ حسب تعريف منصف الزاوية.

31) اكتب بصيغة الميل والمقطع معادلة العمود المنصف:

$$A(-3,1), B(4,3)$$

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{3-1}{4+3} = \frac{2}{7}$$

إذن ميل القطعة المستقيمة $= \frac{2}{7}$ لذلك فميل العمود المنصف $= \frac{-7}{2}$

نقطة المنتصف $= \left(\frac{-3+4}{2}, \frac{3+1}{2}\right) = \left(\frac{1}{2}, 2\right)$

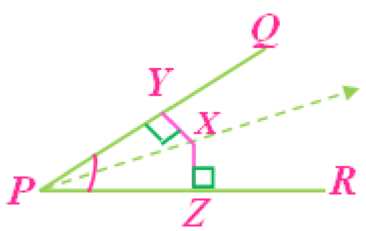
$$y = mx + b$$

$$2 = \frac{-7}{2} \times \frac{1}{2} + b$$

$$b = 2 - \frac{-7}{4} = \frac{15}{4}$$

إذن معادلة المستقيم هي: $y = -\frac{7}{2}x + \frac{15}{4}$

32) برهان: اكتب برهانا ذا عمودين للنظرية ٤ , ٤



المعطيات: PX تنصف $\angle QPR$.
$\overline{XY} \perp \overline{PQ}, \overline{XZ} \perp \overline{PR}$

المطلوب: إثبات أن $\overline{XY} \cong \overline{XZ}$

البرهان: العبارات (المبررات)

١) PX تنصف $\angle QPR$ ، $\overline{XZ} \perp \overline{PR}$, $\overline{XY} \perp \overline{PQ}$ (معطيات)

2) $\angle YPX \cong \angle ZPX$ (تعريف منصف الزاوية)

3) $\angle PYX , \angle PZX$ قائمتان (تعريف التعامد)

4) $\angle PYX \cong \angle PZX$ (الزاويا القائمة متطابقة)

5) $\overline{PX} \cong \overline{PX}$ (خاصية الانعكاس)

6) $\Delta PYX \cong \Delta PZX$ (AAS)

7) $\overline{XY} \cong \overline{XZ}$ (العناصر المتناظره في المثلثين المتطابقين متطابقة)

33) هندسة إحداثية:

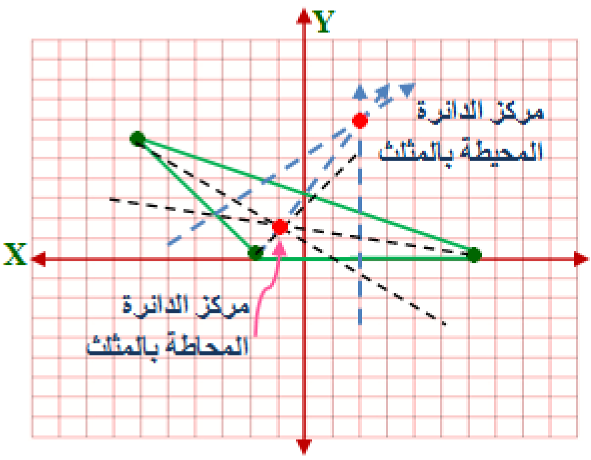
معادلة أحد الأعمدة المنصفة هي $y = 3$ ومعادلة عمود منصف آخر هي $x = 5$. ويتقاطع هذان العمودان عند النقطة $(5,3)$ لذلك فمركز الدائرة التي تمر في رؤوس المثلث يقع عند النقطة $(5,3)$

34) المحل الهندسي:

مستوى يعامد المستوى الذي تقع فيه القطعة $\overline{CD}$ وينصف $\overline{CD}$.

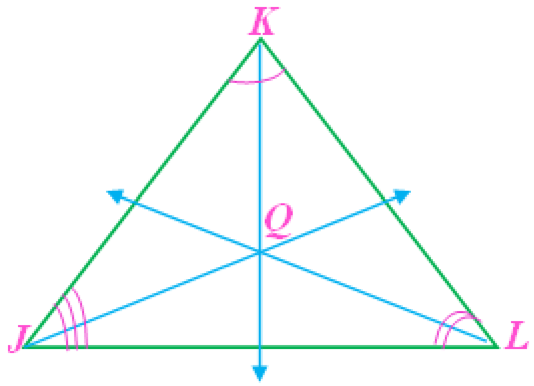
مسائل مهارات التفكير العليا

35) مسألة مفتوحة:

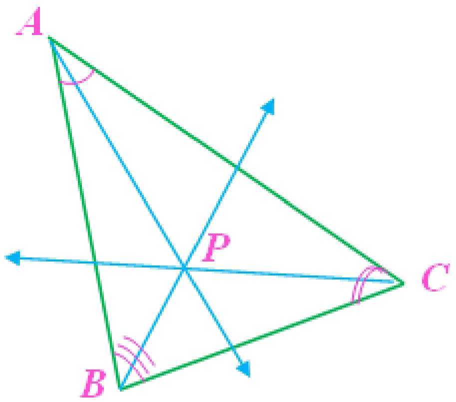


تبرير: حدد ما إذا كانت كل عبارة من العبارتين الآتيتين صحيحة دائماً أو صحيحة أحياناً أو ليست صحيحة أبداً.

36) صحيحة أحيانا إذا كان المثلث متطابق الأضلاع فإن هذه العبارة تكون صحيحة ولكن إذا كان المثلث متطابق الضلعين أو مختلف الأضلاع فإن العبارة خاطئة.

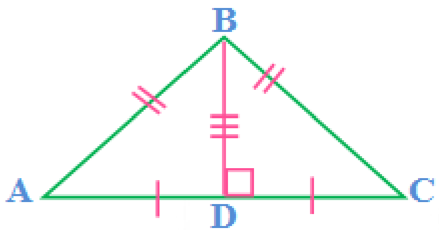


$AP \neq BP \neq CP$



$JQ = KQ = LQ$

37) صحيحة دائما.



المعطيات: ΔABC متطابق الضلعين فيه

$\overline{AB} \cong \overline{BC}$

$\overline{BD}$ عمود منصف لـ $\overline{AC}$.

المطلوب: $\overline{BD}$ منصف لـ $\angle ABC$

البرهان: العبارات (المبررات)

1) ΔABC متطابق الضلعين فيه $\overline{AB} \cong \overline{BC}$ (معطى)

2) $\overline{AB} = \overline{BC}$ (تعريف المثلث متطابق الضلعين)

3) $\overline{BD}$ عمود منصف لـ $\overline{AC}$

4) D نقطة منتصف AC (تعريف منصف القطعة المستقيمة)

5) $\overline{AD} \cong \overline{DC}$

6) $\overline{BD} \cong \overline{BD}$ (خاصية الانعكاس)

7) $\Delta ABD \cong \Delta CBD$ (SSS)

8) $\angle ABD \cong \angle CBD$ (العناصر المتناظرة في مثلثين متطابقين تكون متطابقة)

9) BD منصف لـ $\angle ABC$ (تعريف منصف الزاوية)

38) اكتب:

يتصف كل منهما شيئا ما ولكن الأعمدة المنصفة تنصف القطع المستقيمة في حين تنصف منصفات الزوايا. وتتقاطع كل منها عند نقطة. ونقطة تلاقي الأعمدة المنصفة هي مركز الدائرة التي تمر في رؤوس المثلث. أما نقطة تلاقي منصفات الزوايا فهي مركز الدائرة الداخلية للمثلث والتي تقع دائما داخل المثلث. أما مركز الدائرة التي تمر في رؤوس المثلث فيمكن أن يقع داخل المثلث أو خارجه أو على أحد أضلاعه.

تدريب على الاختبار المعياري

39) D : K, S

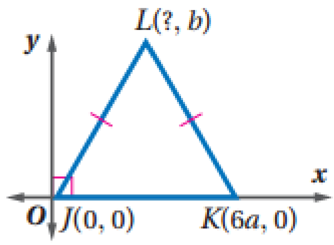
40) D : 3

$$\frac{3x+9}{x+3} = \frac{3\cancel{(x+3)}}{\cancel{x+3}} = 3$$

مراجعة تراكمية

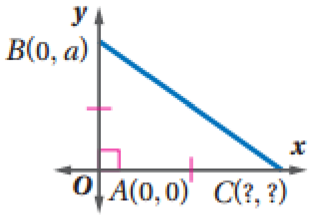
عين الإحداثي المجهول في كل من المثلثات الآتية:

٤١)



بما أن المثلث متطابق الضلعين إذن الاحداثي x للنقطة L يقع في منتصف المسافة بين 0, K إذن إحداثي النقطة L: $(3a, b)$

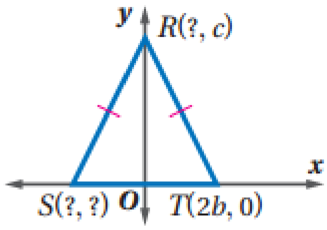
(42



وبما أن النقطة C تقع على المحور x إذن الإحداثي y لها = ٠

و بما أن المثلث متطابق الضلعين إذن النقطة $C:(a,0)$

(٤٣



بما أن المثلث متطابق الضلعين والمحور y عمودي على المحور x إذن R

تنصف $\overline{ST}$ (عكس نظرية العمود المنصف)

إذن الاحداثي للنقطة $S:(-2b,0)$

وبما أن النقطة R تقع على المحور y إذن الإحداثي x لها = ٠، $R:(0,c)$

أوجد البعد بين المستقيم ونقطة في كل مما يأتي:

(٤٤

حيث أن المستقيم $y=5$ يوازي محور السينات

المسافة بين المستقيم و النقطة المعطاة هو الفرق بين الاحداثيهما الصادي.:.

.:. المسافة $=5-4=1$ وحدة

٤٥)

معادلة المستقيم المعطى: $y = 2x + 2$

حاصل ضرب ميل المستقيمين المتعامدين $= -1$

ميل المستقيم المعطى $= 2$

$$2 \times \left(\frac{-1}{2}\right) = -1$$

∴معادلة المستقيم العمودي على المستقيم المعطى $= \frac{-1}{2}$

بكتابة معادلة المستقيم المار بالنقطة $(-1,-5)$ و ميلها $\frac{-1}{2}$

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

$$y + 5 = -\frac{1}{2}(x + 1)$$

$$2y + 10 = -x - 1$$

$$y = -\frac{1}{2}x - \frac{11}{2}$$

بحل المعادلتين لإيجاد نقطة التقاطع

∵ الطرف الايسر متساوي للمعادلتين

$$-\frac{1}{2}x - \frac{11}{2} = 2x + 2$$

$$\therefore -\frac{1}{2}x - 2x = 2 + \frac{11}{2}$$

$$-\frac{5}{2}x = \frac{15}{2}$$

$$x = -3$$

بالتعويض في المعادلة المعطاه لإيجاد قيمة y

$$y = 2(-3) + 2$$
$$= -4$$

∴ نقطة التقاطع هي $(-3, -4)$

لإيجادالمسافة بين النقطة و المستقيم ، نجد المسافة بين النقطتين $(-3, -4)$، $(-1, -5)$بالقانون

$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$
$$d = \sqrt{(-1+3)^2 + (-5+4)^2}$$
$$d = \sqrt{4+1}$$
$$d = \sqrt{5}$$

∴المسافة بين النقطة و المستقيم هي $\sqrt{5}$ وحدات

٤٦)

بوضع معادلة المستقيم على الصورة :

$$y = mx + b$$
$$-3y = -9 - 2x$$
$$\frac{-3y}{-3} = \frac{-9}{-3} - \frac{2x}{-3}$$
$$y = \frac{2}{3}x + 3$$

حاصل ضرب ميل المستقيمين المتعامدين $= -1$

ميل المستقيم المعطى $= \frac{2}{3}$

$$\frac{2}{3}\times\left(\frac{-3}{2}\right)=-1$$

معادلة المستقيم العمودي على المستقيم المعطى.: $= \frac{-3}{2}$

بكتابة معادلة المستقيم المار بالنقطة $(2,0)$ و ميلها $\frac{-3}{2}$

$$y-y_1=m\left(x-x_1\right)$$

$$y-0=\frac{-3}{2}(x-2)$$

$$y=\frac{-3}{2}x+3$$

بحل المعادلتين لإيجاد نقطة التقاطع

$\because$ الطرف الايسر متساوي للمعادلتين

$$\frac{-3}{2}x+3=\frac{2}{3}x+3$$

$$\frac{-3}{2}x-\frac{2}{3}x=-3+3$$

$$\frac{-13}{6}x=0$$

$$x=0$$

$$y=\frac{2}{3}x+3$$

$$y=\frac{2}{3}\times0+3$$

$$y=3$$

$\therefore$ نقطة التقاطع هي $(0\,,\,3)$

لإيجادالمسافة بين النقطة و المستقيم ، نجد المسافة بين النقطتين

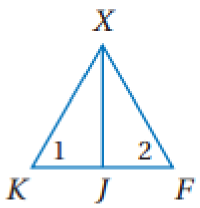
$(2\,,\,0)$ ، $(0\,,\,3)$بالقانون

$$d=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}$$
$$d=\sqrt{(2-0)^2+(0-3)^2}$$
$$d=\sqrt{4+9}$$
$$d=\sqrt{13}$$

.:المسافة بين النقطة و المستقيم هي $\sqrt{13}$ وحدات

استعد للدرس اللاحق

47) برهان: اكتب برهانا ذا عمودين:



العبارات (المبررات)

1) ΔXKF متطابق الأضلاع (معطي)

2) $\angle 1 \cong \angle 2$ (المثلث متطابق الأضلاع يكون متطابق الزوايا)

3) $\overline{KX} \cong \overline{FX}$ (تعريف المثلث متطابق الأضلاع)

4) XJ تنصف $\angle X$ (معطى)

5) $\angle KXJ \cong \angle FXJ$ (تعريف منصف الزاوية)

6) $\Delta KXJ \cong \Delta FXJ$ (ASA)

7) $\overline{KJ} \cong \overline{FJ}$ (العناصر المتناظرة في المثلثين المتطابقين متطابقة)

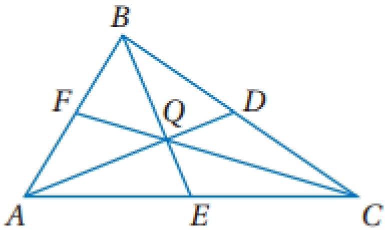
8) J نقطة منتصف $\overline{KF}$ (تعريف نقطة المنتصف)

صفحة 218: التمثيل والتحليل

1) تتقاطع في نقطة واحدة.

2) تتقاطع في نقطة واحدة.

٤-٢ القطع المتوسطة والارتفاعات في المثلث



1A) بما أن Q هي مركز ΔABC إذن حسب نظرية مركز المثلث:

$$QC = \frac{2}{3}FC$$

$$QC = \frac{2}{3}\times 15$$

$$QC = 10$$

$$FQ = FC - QC$$

$$FQ = 15 - 10$$

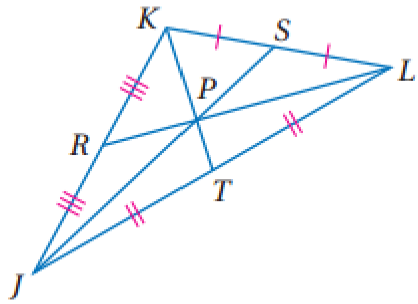
$$FQ = 5$$

1B) بما أن Q هي مركز ΔABC إذن حسب نظرية مركز المثلث:

$$QC = \frac{2}{3}FC$$

$$QC = \frac{2}{3}\times 15$$

$$QC = 10$$



2A) بما أن P هي مركز $\Delta JKLS$ و $RP = 3.5$ إذن حسب نظرية مركز المثلث:

$$PL = \frac{2}{3}LR$$

$$PL = \frac{2}{3}(PL + RP)$$

$$PL = \frac{2}{3}PL + \frac{2}{3}RP$$

$$PL - \frac{2}{3}PL = \frac{2}{3}\times 3.5$$

$$\frac{1}{3}PL = \frac{7}{3}$$

$$PL = 7$$

2B)

$$JP = \frac{2}{3}JS$$

$$9 = \frac{2}{3}\times JS$$

$$JS = 9 \div \frac{2}{3} = 9\times\frac{3}{2}$$

$$JS = 13.5$$

$$PS = JS - JP = 13.5 - 9$$

$$PS = 4.5$$

٣)

ايجاد نقطة المنتصف للنقطة D للضلع $\overline{AC}$

$A(0,4), C(12,1)$

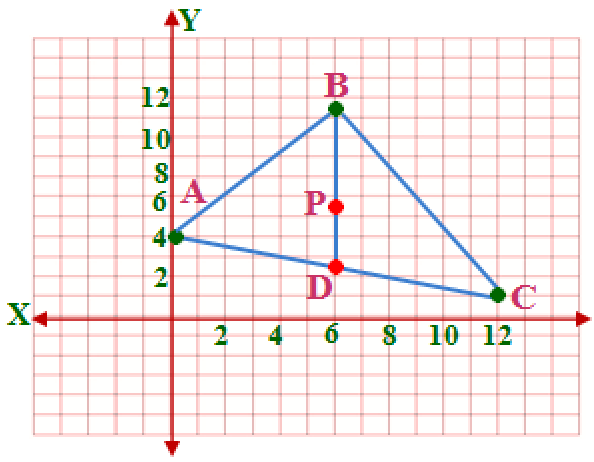
$$D\left(\frac{0+12}{2},\frac{1+4}{2}\right)=D(6,2.5)$$

المسافة من $D(6,2.5)$ إلى $B(6,11.5)$ تساوي $11.5-2.5$ أي ٩ وحدات

واذا كانت P هي مركز ΔABC فإن $BP=\frac{2}{3}BD$ ولذلك يقع المركز على بعد

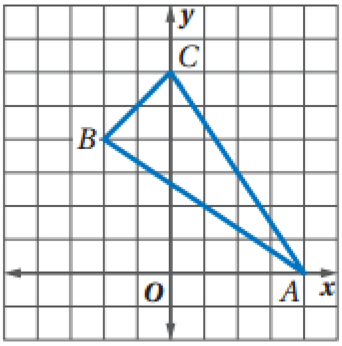
$9\times\frac{2}{3}$ أو ٦ وحدات لأعلى وتكون احداثيات P هي $(6,11.5-6)$ أو $(6,5.5)$

إذن يتوازن المثلث عند النقطة $(6,5.5)$



تحقق صفحة 222

٤)



$A(4,0), B(-2,4), C(0,6)$

أوجد معادلة ارتفاع من C إلى $\overline{AB}$

بما أن ميل $\overline{AB}$ يساوي $m = \dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \dfrac{4-0}{-2-4} = \dfrac{4}{-6} = \dfrac{-2}{3}$

فإن ميل الارتفاع العمودي على $\overline{AB}$ يساوي $\dfrac{3}{2}$

صيغة الميل ونقطة $y - y_1 = m(x - x_1)$

$C(0,6),\ m = \dfrac{3}{2}$

$$y - 6 = \frac{3}{2}(x - 0)$$

$$y - 6 = \frac{3}{2}x$$

$$y = \frac{3}{2}x + 6 \rightarrow 1$$

معادلة الإرتفاع من A إلى $\overline{BC}$

بما أن ميل $\overline{BC}$ يساوي $m = \dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \dfrac{6-4}{0+2} = \dfrac{2}{2} = 1$

فإن ميل الارتفاع العمودي على $\overline{AB}$ يساوي -1

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$ صيغة الميل ونقطة

$$A(4,0),\ m = -1$$

$$y - 0 = -1(x - 4)$$

$$y = -x + 4 \rightarrow 2$$

حل المعادلتين ١ و ٢

$$y = \frac{3}{2}x + 6$$

$$y = -x + 4$$

$$\frac{3}{2}x + 6 = -x + 4$$

$$\frac{3}{2}x + x = 4 - 6$$

$$\frac{5}{2}x = -2$$

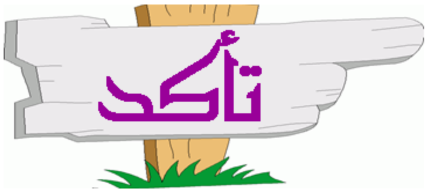
$$x = -\frac{4}{5}$$

$$y = -x + 4$$

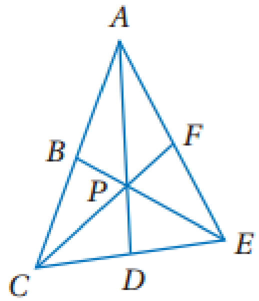
$$y = \frac{4}{5} + 4$$

$$y = 4\frac{4}{5}$$

إذن النقطة $\left(\frac{-4}{5}, 4\frac{4}{5}\right)$ هي ملتقي ارتفاعات المثلث.



أوجد طولي القطعتين الاتيتين: المثالان 1,2



(١

بما أن P هي مركز ΔACE إذن حسب نظرية مركز المثلث:

$$PC=\frac{2}{3}CF$$

$$PC=\frac{2}{3}(PF+CP)$$

$$PC=\frac{2}{3}(6+CP)$$

$$PC=4+\frac{2}{3}CP$$

$$PC-\frac{2}{3}CP=4$$

$$\frac{1}{3}CP=4$$

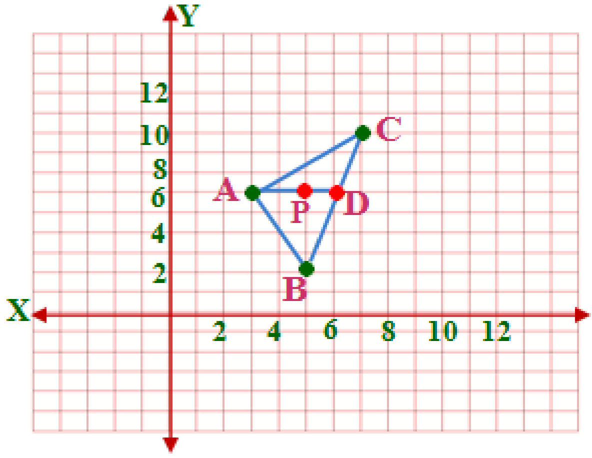
$$CP=12$$

$$AP=\frac{2}{3}AD$$

$$AP=\frac{2}{3}\times 15$$

$$AP=10$$

٣) تصميم داخلي:



بفرض ان اسماء نقاط المثلث هي ABC

$A(3,6), B(5,2), C(7,10)$

ايجاد نقطة المنتصف للنقطة D للضلع $\overline{BC}$

$B(5,2), C(7,10)$

$D\left(\frac{5+7}{2}, \frac{10+2}{2}\right) = D(6,6)$

المسافة من $D(6,6)$ إلى $A(3,6)$ تساوي $6-3$ أي ٣ وحدات.

واذا كانت P هي مركز ΔABC فإن $AP = \frac{2}{3}AD$ ولذلك يقع المركز على بعد

$3 \times \frac{2}{3}$ أو٢ وحدة إلى اليمين من A وتكون احداثيات P هي $(5,6)$

إذن يتوازن المثلث عند النقطة $(5,6)$

4) هندسة احداثية:

$A(-3,3), B(-1,7), C(3,3)$

أوجد معادلة ارتفاع من C إلى $\overline{AB}$

بما أن ميل $\overline{AB}$ يساوي 2 $= \frac{4}{2} = \frac{7-3}{-1+3} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = m$

فإن ميل الارتفاع العمودي على $\overline{AB}$ يساوي $-\frac{1}{2}$

صيغة الميل ونقطة $y - y_1 = m(x - x_1)$

$C(3,3),\ m = -\frac{1}{2}$

$y - 3 = -\frac{1}{2}(x - 3)$

$y - 3 = -\frac{1}{2}x + \frac{3}{2}$

$y = -\frac{1}{2}x + \frac{3}{2} + 3$

$y = -\frac{1}{2}x + \frac{9}{2} \to 1$

معادلة الإرتفاع من A إلى $\overline{BC}$

بما أن ميل $\overline{BC}$ يساوي -1 $m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{3-7}{3+1} = \frac{-4}{4} = -1$

فإن ميل الارتفاع العمودي على $\overline{BC}$ يساوي 1

صيغة الميل ونقطة $y - y_1 = m(x - x_1)$

$A(-3,3),\ m = 1$

$y - 3 = 1(x + 3)$

$y - 3 = x + 3$

$y = x + 6 \to 2$

بطرح المعادلتين ١ و ٢

$y = -\frac{1}{2}x + \frac{9}{2}$

$y = x + 6$

$0 = -\frac{3}{2}x - \frac{3}{2}$

$\frac{3}{2}x = -\frac{3}{2}$

$$x = -1$$

$$y = x + 6$$

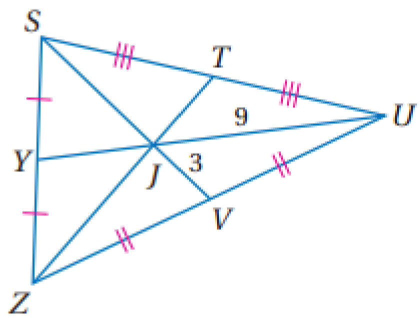
$$y = -1 + 6$$

$$y = 5$$

إذن احداثيات ملتقى ارتفاعات المثلث هي $(-1,5)$

تدرب وحل المسائل

أوجد طول كل مما يأتي:



٥)

بما أن J هي مركز ΔSZU و $JU = 9$ إذن حسب نظرية مركز المثلث:

$$JU = \frac{2}{3}YU$$

$$JU = \frac{2}{3}(JU + YJ)$$

$$9 = \frac{2}{3}JU + \frac{2}{3}YJ$$

$$9 = \frac{2}{3} \times 9 + \frac{2}{3}YJ$$

$$9 = 6 +$$

$$\frac{2}{3}YJ = 9 - 6 = 3$$

$$YJ = 3 \div \frac{2}{3} = 4.5$$

(6

بما أن J هي مركز ΔSZU و $JV = 3$ إذن حسب نظرية مركز المثلث:

$$SJ = \frac{2}{3}SV$$

$$SJ = \frac{2}{3}(JV + SJ)$$

$$SJ = \frac{2}{3}\times 3 + \frac{2}{3}SJ$$

$$SJ - \frac{2}{3}SJ = \frac{2}{3}\times 3$$

$$\frac{1}{3}SJ = 2$$

$$SJ = 6$$

(7

$$YU = (JU + YJ)$$

$$YU = 9 + 4.5$$

$$YU = 13.5$$

(8

$$SV = (SJ + VJ)$$

$$SV = 6 + 3$$

$$SV = 9$$

(9

$$ZJ = \frac{2}{3}ZT$$

$$ZJ = \frac{2}{3}\times 18 = 12$$

$$JT = ZT - ZJ$$

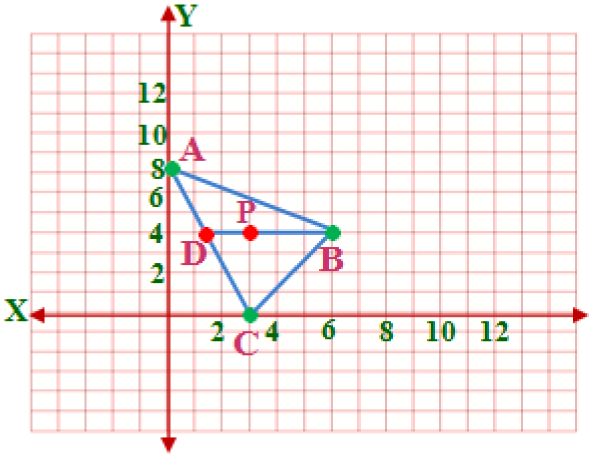
$$JT = 18 - 12 = 6$$

(10

$$ZJ = \frac{2}{3}ZT$$

$$ZJ = \frac{2}{3}\times 18 = 12$$

11) (3, 4) تصميم داخلي: المثال٣



بفرض ان اسماء نقاط المثلث هي ABC

$$A(0,8), B(6,4), C(3,0)$$

ايجاد نقطة المنتصف للنقطة D للضلع $\overline{AC}$

$$A(0,8), C(3,0)$$

$$D\left(\frac{3+0}{2}, \frac{0+8}{2}\right) = D(1.5,4)$$

المسافة من $D(1.5,4)$ إلى $B(6,4)$ تساوي $6-1.5$ أي ٤,٥ وحدات.

واذا كانت P هي مركز ΔABC فإن $BP = \frac{2}{3}BD$ ولذلك يقع المركز على بعد $AD = DC$ أو٣ وحدة إلى اليسار من B وتكون احداثيات P هي $(6-3,4)$

إذن يتوازن المثلث عند النقطة $(3,4)$

12) هندسة احداثية:

$J(3,-2), K(5,6), L(9,-2)$

أوجد معادلة ارتفاع من L إلى $\overline{JK}$

بما أن ميل $\overline{JK}$ يساوي $m=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}=\frac{6+2}{5-3}=\frac{8}{2}=4$

فإن ميل الارتفاع العمودي على $\overline{JK}$ يساوي $-\frac{1}{4}$

$y-y_1=m(x-x_1)$ صيغة الميل ونقطة

$L(9,-2),\ m=-\frac{1}{4}$

$y+2=-\frac{1}{4}(x-9)$

$y+2=-\frac{1}{4}x+\frac{9}{4}$

$y=-\frac{1}{4}x+\frac{9}{4}-2$

$y=-\frac{1}{4}x+\frac{1}{4}\rightarrow 1$

معادلة الإرتفاع من J إلى $\overline{KL}$

$J(3,-2), K(5,6), L(9,-2)$

بما أن ميل $\overline{KL}$ يساوي $m=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}=\frac{-2-6}{9-5}=\frac{-8}{4}=-2$

فإن ميل الارتفاع العمودي على $\overline{KL}$ يساوي $\frac{1}{2}$

$y-y_1=m(x-x_1)$ صيغة الميل ونقطة

$J(3,-2),\ m=\frac{1}{2}$

$$y+2=\frac{1}{2}(x-3)$$

$$y+2=\frac{1}{2}x-\frac{1}{2}\times 3$$

$$y=\frac{1}{2}x-\frac{3}{2}-2$$

$$y=\frac{1}{2}x-\frac{7}{2}\rightarrow 2$$

بطرح المعادلتين ١ و ٢

$$y=-\frac{1}{4}x+\frac{1}{4}$$

$$y=\frac{1}{2}x-\frac{7}{2}$$

$$0=\frac{1}{4}x-3.25$$

$$x=13$$

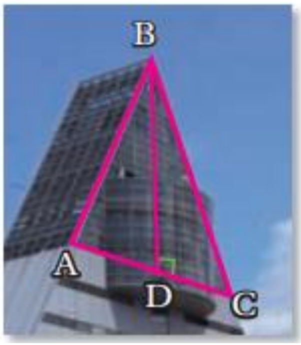
$$y=\frac{1}{2}\times 13-\frac{7}{2}$$

$$y=3$$

إذن احداثيات ملتقى ارتفاعات المثلث هي $(13,3)$

صنف $\overline{BD}$ في كل من الأسئلة الآتية إلي ارتفاع أو عمود منصف أو قطعة متوسطة:

(13

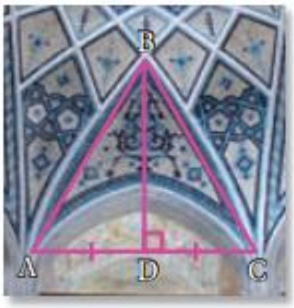


بما أن $\overline{AC} \perp \overline{BD}$ ولا ينصف $\overline{AC}$ إذن $\overline{BD}$ ارتفاع المثلث ΔABC

(14

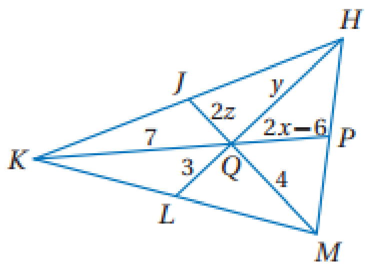
بما أن $\overline{BD}$ ليست عمودية و $AD = DC$ إذن $\overline{BD}$ قطعة متوسطة

(15



بما أن $\overline{BD}$ عمودية وتنصف $\overline{AC}$ إذن $\overline{BD}$ عمود منصف

16) جبر:



بما أن J, P, L نقط منتصفات $\overline{MK}, \overline{HM}, \overline{KH}$

إذن $\overline{LH}, \overline{MJ}, \overline{KP}$ قطع متوسطة في ΔKHM لذلك فالنقطة P هي مركز ΔKHM إذن:

$$KQ = \frac{2}{3} KP$$

$$7 = \frac{2}{3}(QP + KQ)$$

$$7 = \frac{2}{3}(2x - 6 + 7)$$

$$7 = \frac{2}{3}(2x + 1)$$

$$7 = \frac{4}{3}x + \frac{2}{3}$$

$$\frac{4}{3}x = 7 - \frac{2}{3} = \frac{19}{3}$$

$$x = \frac{19}{3} \div \frac{4}{3}$$

$$x = 4.75$$

$$MQ = \frac{2}{3} MJ$$

$$MQ = \frac{2}{3}(JQ + QM)$$

$$4 = \frac{2}{3}(2z + 4)$$

$$4 = \frac{4}{3}z + \frac{8}{3}$$

$$\frac{4}{3}z = 4 - \frac{8}{3}$$

$$\frac{4}{3}z = \frac{4}{3}$$

$$z = 1$$

$$HQ = \frac{2}{3}HL$$

$$y = \frac{2}{3}(HQ + QL)$$

$$y = \frac{2}{3}(y + 3)$$

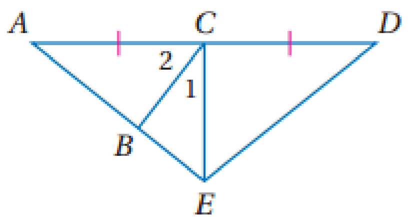
$$y = \frac{2}{3}y + 2$$

$$y - \frac{2}{3}y = 2$$

$$\frac{1}{3}y = 2$$

$$y = 6$$

17) جبر:



بما أن $\overline{AC} = \overline{CD}$ و $\overline{EC}$ ارتفاع ΔAED إذن $EC \perp AD$

$$\angle 1 + \angle 2 = 90^\circ$$

$$(2x + 7) + (3x + 13) = 90^\circ$$

$$5x + 20 = 90^\circ$$

$$5x = 90 - 20$$

$$5x = 70$$

$$x = 14$$

$$m\angle 1 = 2x + 7$$

$$m\angle 1 = 2 \times 14 + 7$$

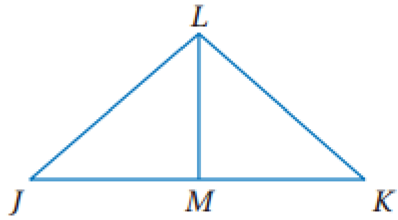
$$m\angle 1 = 35^\circ$$

$m\angle 2 = 3x + 13$

$m\angle 2 = 3 \times 14 + 13$

$m\angle 2 = 55^\circ$

في الشكل المجاور حدد ما إذا كانت $\overline{LM}$ عمودا منصف أو قطعة متوسطة أو ارتفاع لـ ΔJKL في كل حالة مما يأتي:



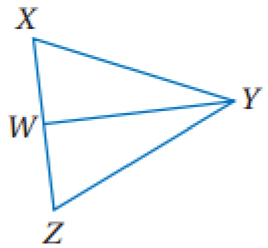
18) بما أن $\overline{JK} \perp \overline{LM}$ ولا ينصف $\overline{JK}$ إذن $\overline{LM}$ ارتفاع

19) بما أن $\Delta KLM \cong \Delta JLM$ إذن $\overline{MK} = \overline{JM}$ إذن $\overline{LM}$ قطعة متوسطة

20) بما أن $\overline{MK} = \overline{JM}$ إذن $\overline{LM}$ قطعة متوسطة

21) بما أن $\overline{JK} \perp \overline{LM}$ و $\overline{LK} \cong \overline{JL}$ إذن حسب عكس نظرية العمود المنصف $\overline{LM}$ ينصف $\overline{JK}$ إذن $\overline{LM}$ عمود منصف.

22) برهان: اكتب برهان حرا.



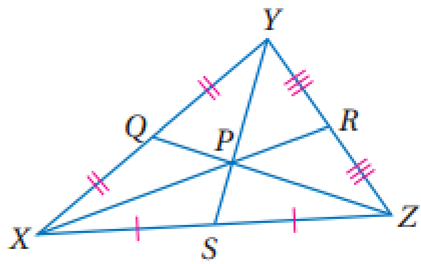
المعطيات: ΔXYZ متطابق الضلعين فيه $\overline{ZY} \cong \overline{XY}$، $\overline{WY}$ ينصف $\angle Y$.

المطلوب: $\overline{WY}$ قطعة متوسطة.

البرهان: بما أن ΔXYZ متطابق الضلعين فيه $\overline{ZY} \cong \overline{XY}$ ومن تعريف منصف الزاوية تعلم أن $\angle ZYW \cong \angle XYW$ كما أن $\overline{YW} = \overline{YW}$ حسب خاصية الانعكاس. لذلك وبحسب SAS يكون $\Delta ZYW \cong \Delta XYW$.

إذن $\overline{ZW} \cong \overline{XW}$ لأن العناصر المتناظرة في المثلثين المتطابقين تكون متطابقة وحسب نقطة المنتصف تكون W نقطة منتصف $\overline{XZ}$ ومن تعريف القطعة المتوسطة تكون $\overline{WY}$ قطعة متوسطة.

23) اكتب برهانا جبريا:



المعطيات: $\overline{ZQ}\,,\overline{YS}\,,\overline{XR}$ قطع متوسطة لـ ΔXYZ

المطلوب: $\dfrac{XP}{PR}=2$

البرهان:

العبارات (المبررات)

1) $\overline{ZQ}\,,\overline{YS}\,,\overline{XR}$ قطع متوسطة لـ ΔXYZ (معطيات)

2) $XR\dfrac{2}{3}= XP$ (نظرية مركز المثلث)

3) $XR = XP + PR$ (مسلمة جمع القطع المستقيمة)

4) $XP=\dfrac{2}{3}(XP+PR)$ (بالتعويض)

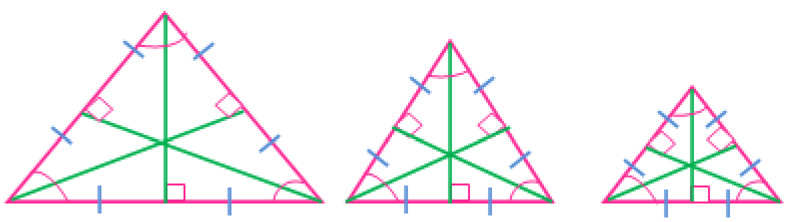
5) $XP=\dfrac{2}{3}XP+\dfrac{2}{3}PR$ (خاصية التوزيع)

6) $\dfrac{1}{3}XP=\dfrac{2}{3}PR$ (خاصية الطرح)

7) $XP = 2RP$ (خاصية الضرب)

8) $\dfrac{XP}{PR}=2$ (خاصية القسمة)

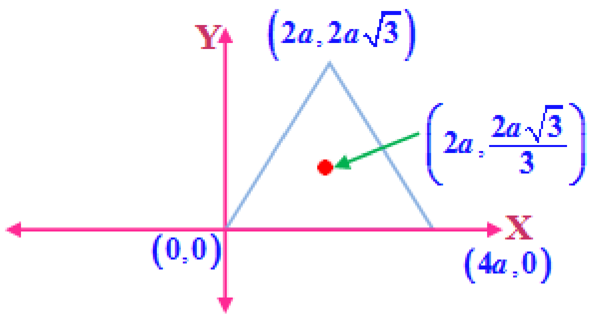
24a) تمثيلات متعددة:



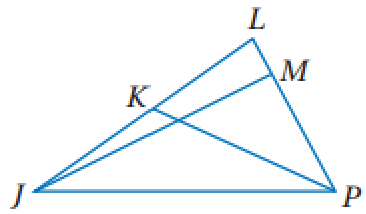
(24b لفظياً:

نقطة التلاقي الأربع للمثلث متطابق الأضلاع هي النقطة نفسها.

(24c بيانياً:



(25 جبر:



بما أن $\overline{JM}$ ارتفاع ΔJLP إذن $\overline{LP} \perp \overline{JM}$ إذن $\angle JMP = 90^\circ$

$$3x - 6 = 90$$

$$3x = 96$$

$$x = 32$$

(26

بما أن $\overline{PK}$ قطعة متوسطة إذن $\overline{KL} = \overline{KJ}$

$$5y - 8 = 3y - 2$$

$$5y - 3y = -2 + 8$$

$$2y = 6$$

$$y = 3$$

$$LK = 5y - 8$$

$$LK = 5 \times 3 - 8$$

$$LK = 7$$

مسائل مهارات التفكير العليا

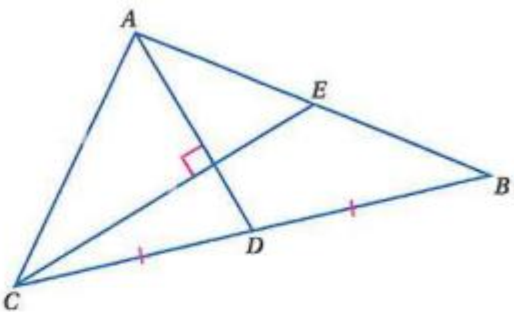
27) اكتشف الخطأ:

إجابة عبد الكريم هي الصحيحة فحسب نظرية مركز المثلث $AP = \frac{2}{3}AD$ وقد بدلت أطوال القطع المستقيمة.

28) تبرير:

صحيحة؛ في المثلث قائم الزاوية يكون الارتفاعان المرسومان من رأسي الزاويتين الحادتين هما ساقي المثلث الذين يتقاطعان عند رأس الزاوية القائمة. وبما أن الارتفاع إلى وتر المثلث يبدأ من الرأس فإن الارتفاعات الثلاثة تتقاطع عند رأس الزاوية القائمة. لذلك فرأس الزاوية القائمة هو دائما ملتقى الارتفاعات.

29) تحد:



بما أن $\overline{AD},\overline{CE}$ قطعتين متوسطتين إذن يقعان داخل المثلث وتتلاقي القطع في نقطة واحدة P ولتكن تسمى مركز المثلث إذن حسب نظرية مركز المثلث:

$$\because \overline{AE} = \overline{EB}$$
$$\overline{AB} = 10$$
$$\therefore \overline{AE} = \overline{EB} = 5$$
$$CP = \frac{2}{3} CE$$
$$CP = \frac{2}{3} \times 9$$
$$CP = 6$$
$$EP = CE - CP$$
$$EP = 9 - 6 = 3$$
$$(AE)^2 = (PE)^2 + (AP)^2$$
$$(5)^2 = (3)^2 + (AP)^2$$
$$25 = 9 + (AP)^2$$
$$(AP)^2 = 25 - 9 = 16$$
$$AP = 4$$
$$(AC)^2 = (PC)^2 + (AP)^2$$
$$(AC)^2 = (6)^2 + (4)^2$$
$$AC = \sqrt{52} = 2\sqrt{13}$$

30) اكتب:

بما أن كل قطعة متوسطة تقسم المثلثين متساويين في المساحة فيمكن أن يتزن المثلث على أي قطعة متوسطة. ولموازنة مثلث على يجب أن أجد النقطة التي تتقاطع عندها خطوط الاتزان الثلاثة. ونقطة الاتزان لمستطيل هي نقطة تقاطع القطعتين المستقيمتين اللتين تصلان بين منتصفي ضلعين متقابلين فيه لأن كل قطعة واصلة بين منتصفي ضلعين متقابلين تقسم المستطيل إلى جزأين متساويين في المساحة.

تدريب على الاختبار المعياري

31) C: $\overline{FJ}$ قطعة متوسطة في ΔFGH

32) B: 2

$$4x - 6y = 12$$

$$\frac{4x}{2} - \frac{6y}{2} = \frac{12}{2}$$

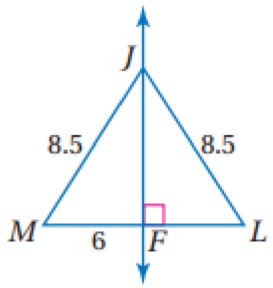
$$2x - 3y = 6$$

إذن المقطع x هو 2

مراجعة تراكمية

أوجد قياس كل مما يأتي:

33)



بما أن $ML \perp JF$ وبحسب فيثاغورث:

$$(JM)^2 = (JF)^2 + (FM)^2$$

$$(8.5)^2 = (JF)^2 + (6)^2$$

$$(JF)^2 = 72.25 - 36$$

$$(JF)^2 = 36.25$$

$$JF \approx 6$$

$$(JL)^2 = (LF)^2 + (6)^2$$

$$(LF)^2 = (8.5)^2 - (6)^2$$

$$(LF)^2 = 72.25 - 36$$

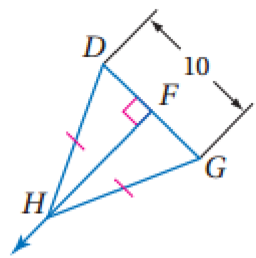
$$(LF)^2 = 36.25$$

$$LF \approx 6$$

$$ML = MF + FL$$

$$\therefore ML = 6 + 6 = 12$$

(34



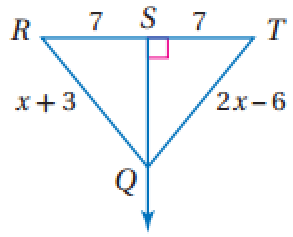
بما أن المثلث DHG متطابق الضلعين و $DG \perp HF$ إذن حسب عكس نظرية العمود المنصف:

$$DF = FG$$

$$DF = 10 \div 2$$

$$DF = 5$$

(35



بما أن $RS = ST$ و $QS \perp RT$ إذن حسب نظرية العمود المنصف

$QT = QR$

$2x - 6 = x + 3$

$2x - x = 3 + 6$

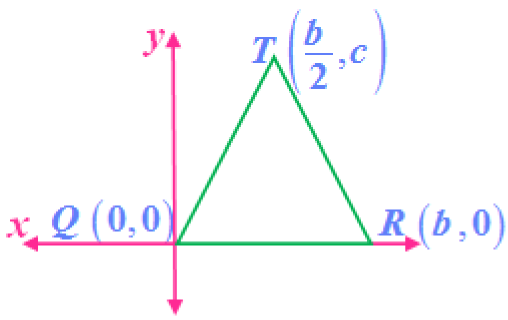
$x = 9$

$TQ = 2x - 6$

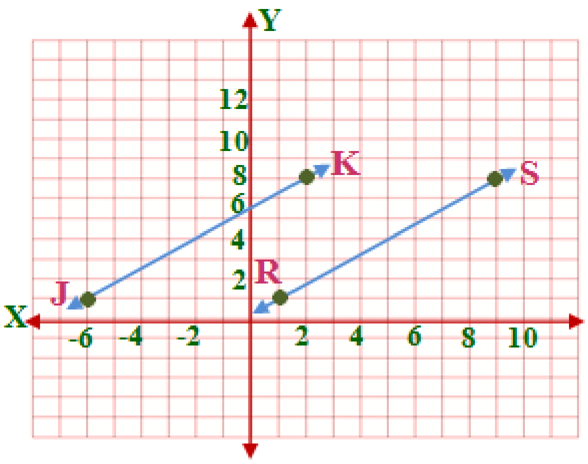
$TQ = 2 \times 9 - 6$

$TQ = 12$

(36



(37



$R(1,1), S(9,8), J(-6,1), K(2,8)$

أولا حساب ميل $\overleftrightarrow{JK}$:

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{8-1}{2+6} = \frac{7}{8}$$

ثانيا ميل $\overleftrightarrow{RS}$:

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{8-1}{9-1} = \frac{7}{8}$$

بما أن ميل كل من $\overleftrightarrow{JK}$ و $\overleftrightarrow{RS}$ متساوي إذن هما متوازيان.

استعد للدرس اللاحق

اكتب < أو > داخل ◯ لتحصل على عبارة صحيحة:

(38 $-\frac{18}{25} < \frac{19}{27}$ لأن الطرف الأيمن موجب والطرف الثاني سالب

(39

أولاً توحيد المقامات

$$\frac{6}{16} \bigcirc \frac{5}{16}$$

$$\frac{6}{16} > \frac{5}{16}$$

$$\therefore \frac{3}{8} > \frac{5}{16}$$

(40

تحويل الكسر لرقم عشري ومقارنتة بالطرف الأخر

$$2.7 \bigcirc \frac{3}{5}$$

$$2.7 \bigcirc 0.6$$

$$2.7 > 0.6$$

$$\therefore 2.7 > \frac{3}{5}$$

(41

$$-4.25 \bigcirc \frac{-19}{4}$$

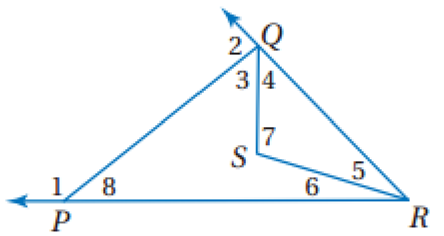
$$-4.25 \bigcirc -4.75$$

$$\therefore -4.25 > -4.75$$

$$-4.25 > \frac{-19}{4}$$

4-3 المتباينات في المثلث

تحقق
صفحة 228



1A) قياساتها أقل من $m\angle 1$:

حسب نظرية متباينة الزاوية الخارجية:

$$\angle 1 > (\angle 5 + \angle 6)$$

$$\angle 1 > (\angle 3 + \angle 4)$$

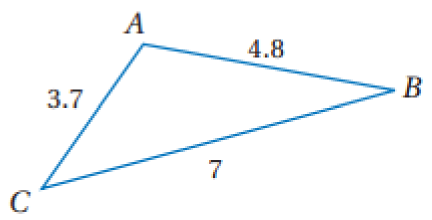
إذن $\angle 3, \angle 4, \angle 5, \angle 6$ قياساتها أقل من $m\angle 1$:

1B) قياساتها أكبرمن $m\angle 8$:

$\angle 2 = \angle 8 + (\angle 5 + \angle 6)$ نظرية الزاوية الخارجة

إذن حسب نظرية متباينة الزاوية الخارجية: $\angle 2 > \angle 8$

تحقق
صفحة 229

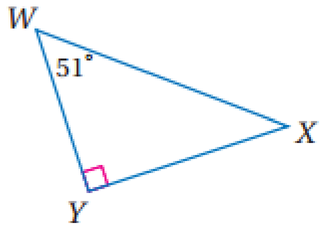


2) الأضلاع بالترتيب من الأقصر إلى الأطول هي : $\overline{AC}, \overline{AB}, \overline{CB}$

الزوايا بالترتيب من الأصغر إلى الأكبرهي: $\angle B, \angle C, \angle A$

تحقق صفحة 230

اكتب زوايا المثلث وأضلاعه مرتبة من الأصغر إلى الأكبر:



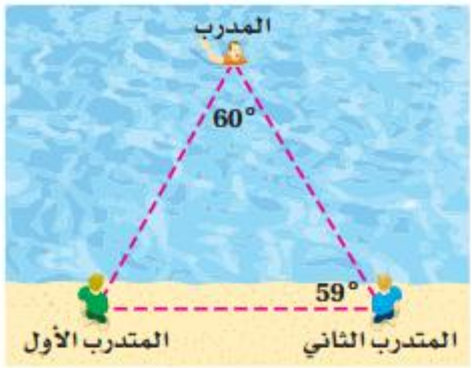
(3

$$\angle X = 180^\circ - \left(51^\circ + 90^\circ\right) = 39^\circ$$

إذن الزوايا هي: $\angle X ,\angle W ,\angle Y$

الأضلاع بالترتيب هي: $\overline{WY} ,\overline{YX} ,\overline{WX}$ **حسب نظرية ١٠,٤**

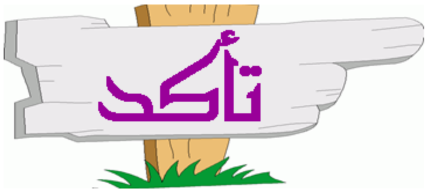
4) سباحو الإنقاذ:



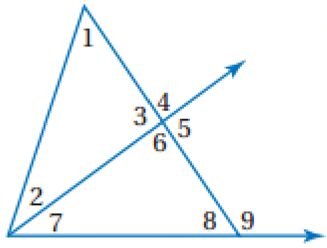
حسب نظرية ١٠,٤:

إذن الضلع المقابل للزاوية 59 أقصر من الضلع المقابل للزاوية ٦١

إذن المتدرب الأول هو الأقرب للمدرب.



استعمل نظرية متباينة الزاوية الخارجية لكتابة جميع الزوايا المرقمة التي تحقق الشرط المعطى في كل مما يأتي: المثال١



(1

$\angle 2 + \angle 1 = \angle 4$ نظرية الزاوية الخارجة

إذن حسب نظرية متباينة الزاوية الخارجية:

$\angle 4 > \angle 1$

$\angle 4 > \angle 2$

إذن $m\angle 1, m\angle 2$ أقل من $m\angle 4$

(2

حسب نظرية متباينة الزاوية الخارجية:

$\angle 9 > \angle 7$

$\angle 5 > \angle 7$

$\angle 3 > \angle 7$

(3

حسب نظرية متباينة الزاوية الخارجية:

$\angle 9 > \angle 2$

$\angle 6 > \angle 2$

$\angle 4 > \angle 2$

(4

حسب نظرية متباينة الزاوية الخارجية:

$\angle 6 < \angle 7$

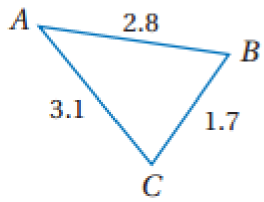
$\angle 7 < \angle 7$

$\angle 2 < \angle 7$

$\angle 1 < \angle 7$

5) اكتب زوايا كل مثلث وأضلاعه مرتبة من الأصغر إلى الأكبر في السؤالين الأتيين:

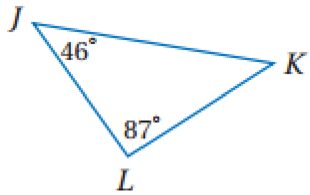
المثالان 2,٣



الأضلاع مرتبة من الأصغر إلى الأكبر: $\overline{BC}, \overline{AB}, \overline{AC}$

وحسب نظرية ٤,٩ الزوايا من الأصغر إلى الأكبر: $m\angle A, m\angle C, m\angle B$

(6



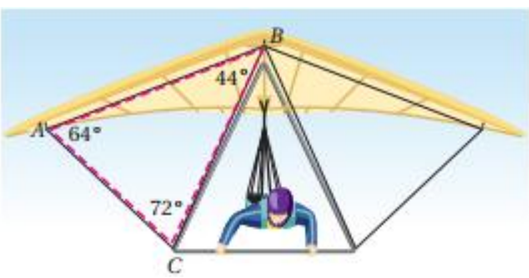
في ΔJLK**:**

$m\angle K = 180^\circ - (46^\circ + 87^\circ) = 47^\circ$ **نظرية مجموع قياسات زوايا المثلث**

الزوايا مرتبة هي: $m\angle J, m\angle K, m\angle L$

حسب نظرية ٤,١٠ : الأضلاع مرتبة هي: $\overline{KL}, \overline{JL}, \overline{JK}$

7) طيران شراعي:



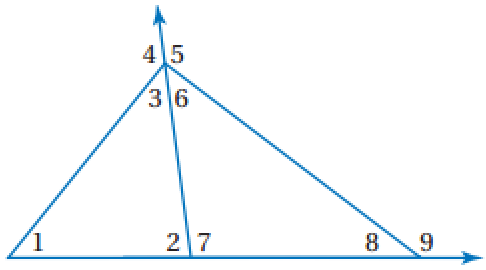
بما أن الزاوية المقابله للضلع $\overline{BC}$ **أكبر من**

الزاوية المقابله للضلع $\overline{AC}$

إذن حسب نظرية ٤,٩ : $\overline{BC}$ **أطول من** $\overline{AC}$

تدرب وحل المسائل

استعمل نظرية متباينة الزاوية الخارجية لكتابة جميع الزوايا المرقمة التي تحقق الشرط المعطى في كل مما يأتي: المثال١



(8

$\angle 4 = \angle 2 + \angle 1$

حسب نظرية متباينة الزاوية الخارجية: $\angle 4 > \angle 2$

(9

حسب نظرية متباينة الزاوية الخارجية:

$\angle 2 < \angle 4$

$\angle 1 < \angle 4$

(10

حسب نظرية متباينة الزاوية الخارجية:

$\angle 1 < \angle 9$

$\angle 3 < \angle 9$

$\angle 6 < \angle 9$

$\angle 7 < \angle 9$

(11

حسب نظرية متباينة الزاوية الخارجية:

$\angle 2 > \angle 9$

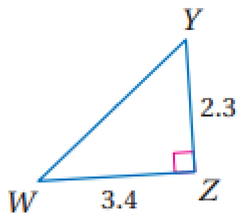
$\angle 4 > \angle 9$

$\angle 5 > \angle 9$

اكتب زوايا كل مثلث وأضلاعه مرتبة من الأصغر إلى الأكبر في السؤالين الآتيين:

المثالان2,٣

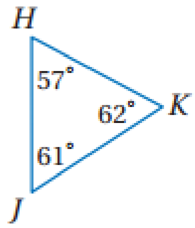
(12



الأضلاع مرتبة: $\overline{YZ}, \overline{WZ}, \overline{WY}$

وحسب نظرية ٤,٩: الزوايا مرتبة: $\angle W, \angle Y, \angle Z$

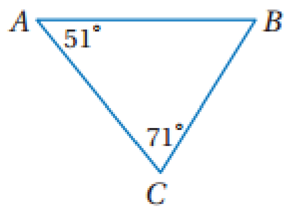
(13



الزوايا مرتبة: $\angle H, \angle J, \angle K$

وبحسب نظرية ٤,١٠: الأضلاع مرتبة هي: $\overline{JK}, \overline{HK}, \overline{HJ}$

(14

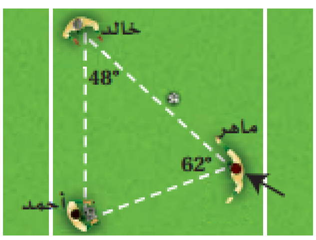


$\angle B = 180^\circ - (51^\circ + 71^\circ) = 58^\circ$ نظرية مجموع قياسات زوايا المثلث

الزوايا مرتبة: $\angle A, \angle B, \angle C$

وبحسب نظرية ٤,١٠: الأضلاع مرتبة هي: $\overline{BC}, \overline{AC}, \overline{AB}$

15) كرة قدم:

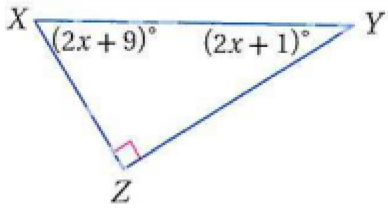


باستعمال نظرية مجموع قياسات زوايا المثلث فإن قياس الزاوية المقابلة للقطعة المستقيمة من ماهر إلى خالد 70° وبما أن $48 < 70$ فإن المسافة من ماهر إلى أحمد ستكون هي الأقصر وهذا يعني أن ماهر سيختار أحمد ليمرر له الكره.

16) منحدرات:

بما أن $m\angle X = 90^\circ$ فإن $m\angle Y + m\angle Z = 90^\circ$ إذن $m\angle Y < 90^\circ$ بحسب تعريف المتباينة لذا فإن $m\angle X > m\angle Y$ أي أن الضلع الذي يقابل $\angle X$ أطول من الضلع الذي يقابل $\angle Y$. وبما أن $\overline{YZ}$ يقابل $\angle X$ و $\overline{XZ}$ يقابل $\angle Y$ فإن $\overline{YZ} > \overline{XZ}$ وهذا يعني أن السطح العلوي للمنحدر أطول من طول المنحدر.

17)



بما أن $m\angle Z = 90^\circ$ فإن $m\angle X + m\angle Y = 90^\circ$ إذن

$$(2x+1)+(2x+9)=90^\circ$$

$$4x+10=90$$

$$4x=80$$

$$x=20$$

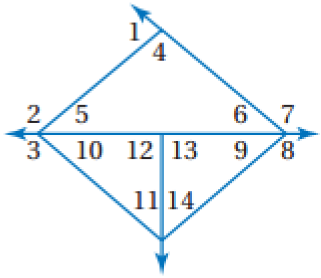
$$\angle Y = 2\times 20+1=41^\circ$$

$$\angle X = 2\times 20+9=49^\circ$$

إذن الزوايا مرتبة: $\angle Y , \angle X , \angle Z$

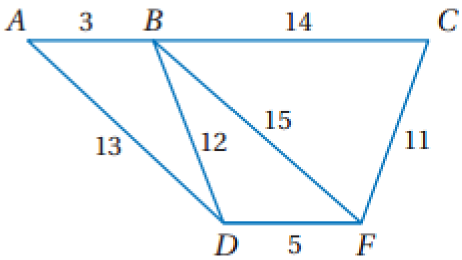
وبحسب نظرية ٤,١٠ : الأضلاع مرتبة هي: $\overline{XZ} , \overline{YZ} , \overline{XY}$

استعمل الشكل المجاور لتحدد الزاوية ذات القياس الأكبر في كل مجموعة مما يأتي:



18) $\angle 1$ هي الأكبر حسب نظرية متباينة الزاوية الخارجية
19) $\angle 2$ هي الأكبر حسب نظرية متباينة الزاوية الخارجية
20) $\angle 7$ هي الأكبر حسب نظرية متباينة الزاوية الخارجية
21) $\angle 3$ هي الأكبر حسب نظرية متباينة الزاوية الخارجية
22) $\angle 3$ هي الأكبر حسب نظرية متباينة الزاوية الخارجية
23) $\angle 8$ هي الأكبر حسب نظرية متباينة الزاوية الخارجية

استعمل الشكل المجاور لتحدد العلاقة بين قياسات الزوايا المعطاة في كل من الأسئلة الأتية:



24)

بما أن الضلع المقابل لـ $\angle ABD$ أكبر من الضلع المقابل لـ $\angle BDA$

إذن حسب نظرية ٤,٩: $m\angle ABD > m\angle BDA$

25)

بما أن الضلع المقابل لـ $m\angle BCF$ أكبر من الضلع المقابل لـ $\angle CFB$

إذن حسب نظرية ٤,٩: $m\angle BCF > m\angle CFB$

26)

بما أن الضلع المقابل لـ $\angle BFD$ أصغر من الضلع المقابل لـ $\angle BDF$

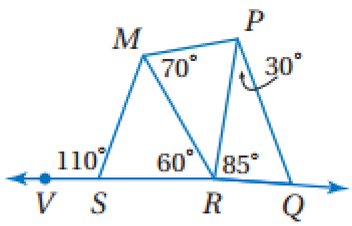
إذن حسب نظرية ٤,٩: $m\angle BFD < m\angle BDF$

27)

بما أن الضلع المقابل لـ $\angle DBF$ أصغر من الضلع المقابل لـ $\angle BFD$

إذن حسب نظرية ٤,٩: $m\angle DBF < m\angle BFD$

استعمل الشكل المجاور لتحدد العلاقة بين قياسات الأضلاع المعطاة في كل من الأسئلة الأتية:



(28

بما أن الزاوية المقابلة لـ $\overline{MR} = \left(180^\circ - 110^\circ = 80^\circ\right)$ وهي أكبر من الزاوية المقابلة المقابل لـ $\overline{SM}$ إذن حسب نظرية ٤,١٠: $\overline{MR} > \overline{SM}$

(29

بما أن الزاوية المقابلة لـ $\overline{RP}$ وهي أكبر من الزاوية المقابلة المقابل لـ $\overline{MP}$ التي تساوي ٣٥ حسب نظرية زوايا المتجاورة على مستقيم.

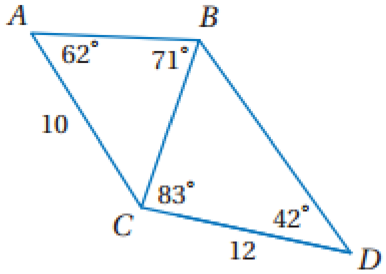
إذن حسب نظرية ٤,١٠: $\overline{RP} > \overline{MP}$

(30

بما أن الزاوية المقابلة لـ $\overline{RQ}$ أصغر من الزاوية المقابلة المقابل لـ $\overline{PQ}$

إذن حسب نظرية ٤,١٠: $\overline{RQ} < \overline{PQ}$

اكتب اضلاع كل مثلث في الشكل المجاور مرتبة من الأقصر إلى الأطول.



(31

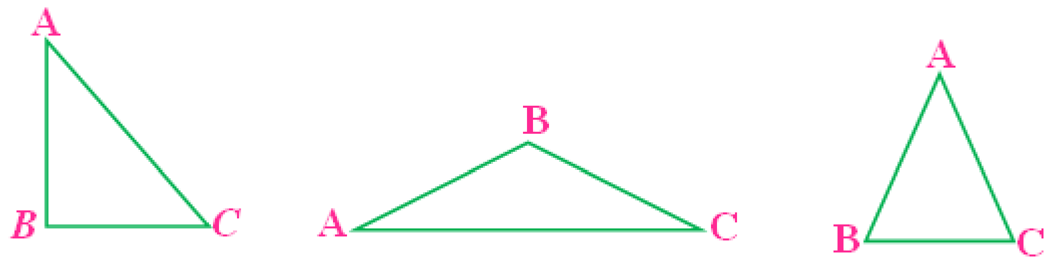
$$\angle ACB = 180^\circ - (62 + 71) = 47^\circ$$

$$\angle CBD = 180^\circ - (83 + 42) = 55^\circ$$

في ΔABC يكون $\overline{AB} < \overline{BC} < \overline{AC}$ حسب نظرية ٤,١٠

وفي ΔBCD يكون $\overline{BC} < \overline{CD} < \overline{BD}$ حسب نظرية ٤,١٠

32a) تمثيلات متعددة: هندسياً



قائم الزاوية   منفرج الزاوية   حاد الزاوية

32b) جدولياً:

المثلث	AB	BC	$AB+BC$	CA
الحاد	٢	٢,٤	٤,٤	٣,٢
المنفرج	٢,٦	٣,٤	٦,٠	٥,٠
القائم	٢,٧	٢,٨	٥,٥	٣,٩

32c) جدولياً:

المثلث	BC	CA	$BC+CA$	AB
الحاد	٢,٤	٣,٢	٥,٦	٢
المنفرج	٣,٤	٥,٠	٨,٤	٢,٦
القائم	٢,٨	٣,٩	٦,٦	٢,٧

المثلث	AB	CA	$AB+CA$	BC
الحاد	٢	٣,٢	٥,٢	٢,٤
المنفرج	٢,٦	٥,٠	٧,٦	٣,٤
القائم	٢,٧	٣,٩	٦,٥	٢,٨

32d) جبرياً:

$$AB + BC > CA,\ BC + CA > AB,\ AB + CA > BC$$

32e) لفظياً:

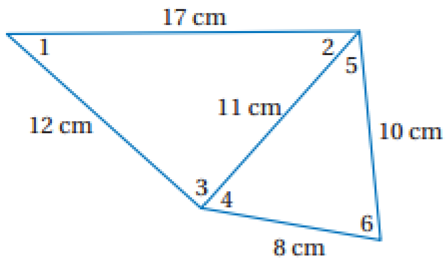
مجموع طولي أي ضلعين في أي مثلث أكبر من طول الضلع الثالث.

مسائل مهارات التفكير العليا

33) تبرير:

أحيانا؛ إذا كان قياسا زاويتي القاعدة أقل من $60°$ فإن القاعدة ستكون الضلع الأطول وإذا كان قياسا زاويتي القاعدة أكبر من $60°$ فإن القاعدة ستكون الضلع الأقصر.

34) تحد:



$$m\angle 4, m\angle 6, m\angle 3, m\angle 1\ ; m\angle 2 = m\angle 5$$

بما أن الضلع المقابل لـ $\angle 5$ هو أقصر ضلع في المثلث الذي يحتويها

و $m\angle 5 = m\angle 2$ فإن كلا من $m\angle 6, m\angle 4, m\angle 1, m\angle 3$ أكبرمن

$m\angle 5, m\angle 2$

وبما أن الضلع المقابل لـ $\angle 4$ أقصر من الضلع المقابل لـ $\angle 1, \angle 6$

وبما أن الضلع المقابل لـ $\angle 1, \angle 6$ أقصر من الضلع المقابل لـ $\angle 3$ إذن:

$$m\angle 5, m\angle 2 < m\angle 4 < m\angle 1, m\angle 6 < m\angle 3$$

35) اكتب:

بما أن الوتر في المثلث قائم الزاوية يقابل الزاوية القائمة وكلا من الزاويتين الأخريين حادتان دائما فإن الوتر يقابل دائما الزاوية الكبرى في المثلث ولذلك فإنه الضلع الأطول دائما.

تدريب على الاختبار المعياري

36) A منفرج الزاوية ومختلف الأضلاع

بما أن يوجد زاويتين بالمثلث إحداهما ٤٥ والاخرى ٩٢ إذن قياس الزاوية الثالثة:

$$180^\circ - (45 + 92) = 43^\circ$$

وبما أن المثلث يحتوي على زاوية أكبر من ٩٠ وهي ٩٢ إذن المثلث منفرج الزاوية ومختلف الأضلاع لأن جميع زواياه مختلفة

37) $B : |15|$

مراجعة تراكمية

38)

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{5-4}{3+2} = \frac{1}{5}$$

ميل المستقيم المعطى $= \frac{1}{5}$

$$-5 \times \left(\frac{1}{5}\right) = -1$$

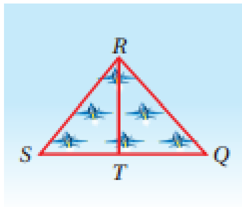
.:ميل المستقيم العمودي $= -5$

نقطة المنتصف: $(0.5, 4.5) = \left(\frac{3+(-2)}{2}, \frac{5+4}{2}\right)$

بكتابة معادلة المستقيم المار بالنقطة $(0.5, 4.5)$ و ميلها -5

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$
$$y - 4.5 = -5(x - 0.5)$$
$$y - 4.5 = -5x + 2.5$$
$$y = -5x + 2.5 + 4.5$$
$$y = -5x + 7$$

39) طائرات:



المعطيات: T نقطة منتصف $\overline{SQ}$.

$\overline{SR} \cong \overline{QR}$

المطلوب: $\Delta SRT \cong \Delta QRT$

البرهان: العبارات (المبررات)

1) T نقطة منتصف $\overline{SQ}$ (معطى).

2) $\overline{ST} \cong \overline{TQ}$ (تعريف نقطة المنتصف)

3) $\overline{SR} \cong \overline{QR}$ (معطى)

4) $\overline{RT} \cong \overline{RT}$ (خاصية الانعكاس)

5) $\Delta SRT \cong \Delta QRT$ (SSS)

استعد للدرس اللاحق

40)

$$z(x - y) = 3(8 - 2) = 3 \times 6 = 18$$

$z(x - y) = 13$ عبارة خاطئة

41)

$$2x = 3yz$$
$$2\times 8 = 3\times 2\times 3$$
$$16 = 18 \quad ✗$$
إذن $2x = 3yz$ عبارة خاطئة

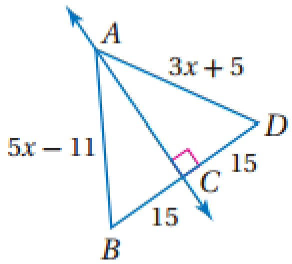
(42

$$x + y > z + y$$
$$8+2>3+2 \rightarrow 10>5$$
إذن $x + y > z + y$ عبارة صحيحة

اختبار منتصف الفصل الرابع

أوجد كل من القياسين الآتيين:

AB (1



بما أن $\overline{BD} \perp \overline{AC}$ و C نقطة منتصف

إذن حسب نظرية العمود المنصف:

$$\overline{AD} = \overline{AB}$$

$$3x + 5 = 5x - 11$$

$$5x - 3x = 5 + 11$$

$$2x = 16$$

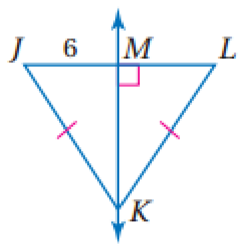
$$x = 8$$

$$AB = 5x - 11$$

$$AB = 5 \times 8 - 11$$

$$AB = 29$$

JL (2



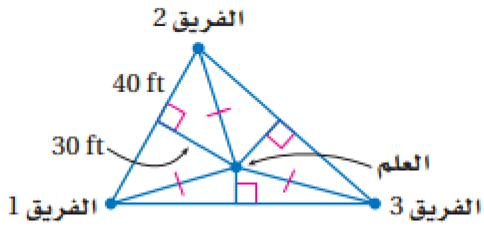
بما أن $\overline{JL} \perp \overline{KM}$ و $KL = KJ$

إذن حسب عكس نظرية العمود المنصف: $ML = MJ = 6$

$$JL = ML + MJ$$

$$JL = 6 + 6 = 12$$

3) مخيم:



باستعمال نظرية فيثاغورث:

$$(40)^2+(30)^2=(D)^2$$

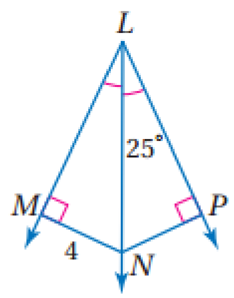
$$1600+900=(D)^2$$

$$D=\sqrt{2500}=50$$

إذن المسافة بين العلم وكل فريق = $50ft$

أوجد كل من القياسين الآتيين:

4)



$$\angle LNP=180^\circ-(25+90)=65^\circ$$

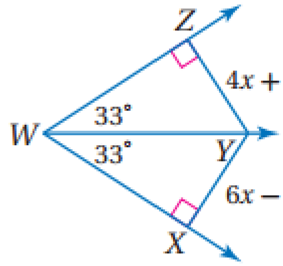
$$\because \angle PLN=\angle MLN$$

$$\therefore \angle MNL=180^\circ-(25+90)=65^\circ$$

$$\therefore \angle MNP=65+65$$

$$\therefore \angle MNP=130^\circ$$

5)



بما أن $\overline{WX} \perp \overline{YX}, \overline{WZ} \perp \overline{YZ}$ و $\overrightarrow{WY}$ ينصف $\angle ZWX$

إذن حسب نظرية منصف الزاوية:

$$\overline{YZ} = \overline{YX}$$

$$4x + 5 = 6x - 3$$

$$6x - 4x = 5 + 3$$

$$2x = 8$$

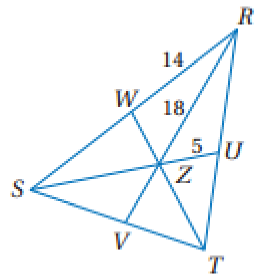
$$x = 4$$

$$\overline{XY} = 6x - 3$$

$$\overline{XY} = 6 \times 4 - 3$$

$$\overline{XY} = 21$$

أوجد كل من الأطوال الآتية:



6) بما أن Z مركز ΔRST إذن:

$$RZ = \frac{2}{3}RV$$

$$18 = \frac{2}{3}RV$$

$$RV = 27$$

$$ZV = RV - RZ$$
$$ZV = 27 - 18$$
$$ZV = 9$$

(7

$$SZ = \frac{2}{3}SU$$
$$SZ = \frac{2}{3}(SZ + ZU)$$
$$SZ = \frac{2}{3}SZ + \frac{2}{3}ZU$$
$$SZ - \frac{2}{3}SZ = \frac{2}{3} \times 5$$
$$\frac{1}{3}SZ = \frac{10}{3}$$
$$SZ = 10$$

(8

حسب نظرية مركز المثلث:

$$WR = WS = 14$$
$$SR = WR + WS$$
$$SR = 14 + 14 = 28$$

(9 هندسة إحداثية:

ايجاد نقطة المنتصف للنقطة D للضلع $\overline{AC}$

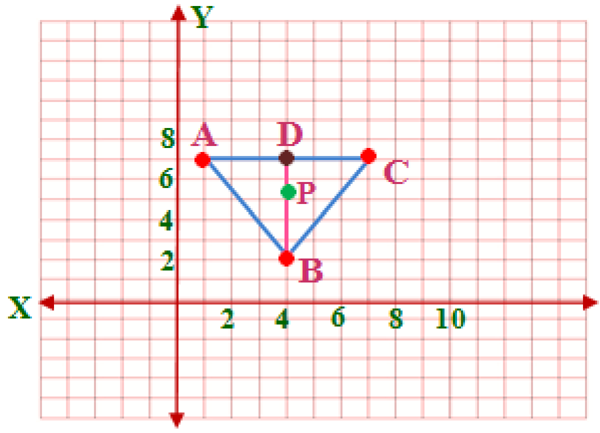
$$A(1,7), C(7,7)$$
$$D\left(\frac{7+1}{2}, \frac{7+7}{2}\right) = D(4,7)$$

المسافة من $D(4,7)$ إلى $B(4,2)$ تساوي $7-2$ أي $5-$ وحدات.

واذا كانت P هي مركز ΔABC فإن $BP = \frac{2}{3}BD$ ولذلك يقع المركز على بعد

$-5\times\frac{2}{3}$ أو $\frac{-10}{3}$ وحدة وتكون احداثيات مركز المثلث P هي $\left(4,2+\frac{10}{3}\right)$ أو

$\left(4,\frac{16}{3}\right)$



(10

ايجاد نقطة المنتصف للنقطة D للضلع $\overline{JK}$

$J\left(-5,5\right),K\left(-5,-1\right)$

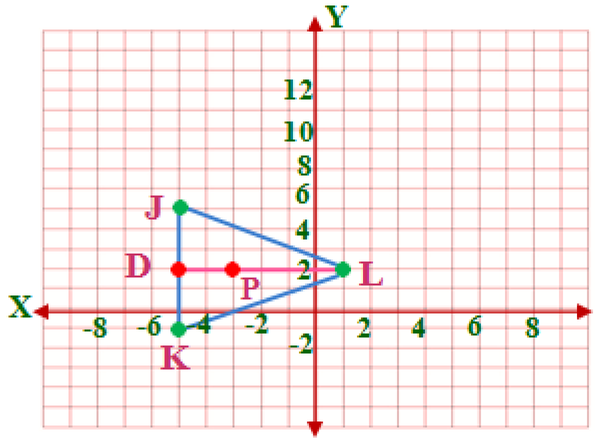
$D\left(\frac{-5-5}{2},\frac{5-1}{2}\right)=D\left(-5,2\right)$

المسافة من $D\left(-5,2\right)$ إلى $L\left(1,2\right)$ تساوي $1-\left(-5\right)$ أي ٦ وحدات.

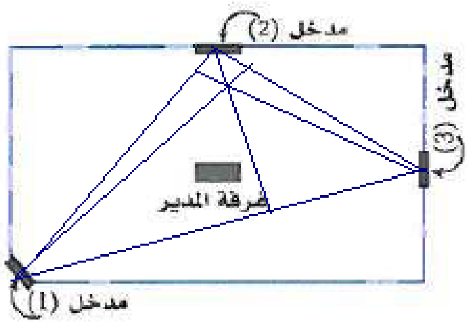
واذا كانت P هي مركز ΔJKL فإن $LP=\frac{2}{3}LD$ ولذلك يقع المركز على بعد

$6\times\frac{2}{3}$ أو ٤ وحدة إلى اليمين من L وتكون احداثيات مركز المثلث P هي $\left(1-4,2\right)$

أو $\left(-3,2\right)$



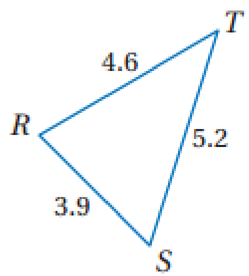
١١) تصميم هندسي:



الثلاث مداخل يكونون مثلث ارتفاعات المثلث تتلاقى في نقطة واحدة نقطة التقاطع لا تنصف الارتفاعات اذن غرفة المدير لا تقع على نقطة التقاء ارتفاعات المثلث

اكتب زوايا كل مثلث وأضلاعه مرتبة من الأصغر إلى الأكبرفي السؤالين الآتيين:

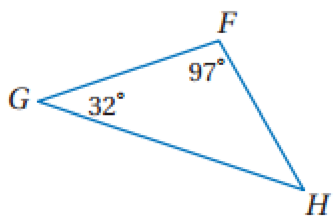
(12



الأضلاع المرتبة: $\overline{ST}, \overline{RT}, \overline{RS}$

وحسب نظرية ٤,٩ إذن الزوايا المرتبة هي $\angle R, \angle S, \angle T$

(13



$\angle H = 180^\circ - (32 + 97) = 51^\circ$ نظرية مجموع قياسات زوايا المثلث

الزوايا مرتبة: $\angle G, \angle H, \angle F$

وحسب نظرية ٤,١٠ إذن الأضلاع مرتبة: $\overline{FH}, \overline{GF}, \overline{GH}$

(14a مسافات:

$$\angle C + \angle A + \angle B = 180$$

$$70 + \frac{2}{3}\angle B + \angle B = 180$$

$$70 + \frac{5}{3}\angle B = 180$$

$$\frac{5}{3}\angle B = 180 - 70$$

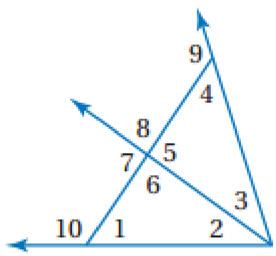
$$\frac{5}{3}\angle B = 110$$

$$\angle B = 66^\circ$$

$$\angle A = 180 - (70 + 66)$$

$$\angle A = 44^\circ$$

(14b بحسب نظرية ٤,١٠ إذن ترتيب الأضلاع: $\overline{BC}, \overline{AC}, \overline{AB}$



(15

$$\angle 8 = \angle 4 + \angle 3$$

حسب نظرية متباينة الزاوية الخارجية: $\angle 4, \angle 3$ أقل من $\angle 8$

(16

حسب نظرية متباينة الزاوية الخارجية: $\angle 9, \angle 6, \angle 8$ أكبر من $\angle 3$

(17

حسب نظرية متباينة الزاوية الخارجية: $\angle 4, \angle 3, \angle 6, \angle 2$ أقل من $\angle 10$

٤-٤ البرهان غير المباشر

1A) الإفتراض هو: $x \leq 5$

1B) الإفتراض هو: النقاط L, K, J لا تقع على استقامة واحدة

1C) الإفتراض هو: ΔXYZ ليس متطابق الأضلاع

اكتب برهانا غير مباشر لكل من العبارتين الآتيتين:

2A)

المعطيات: $7x > 56$

المطلوب: $x > 8$

برهان غير مباشر:

الخطوة ١ : افرض أن $x < 8$ أو $x = 8$

الخطوة ٢:

x	٤	٥	٦	٧	٨
$7x$	٢٨	٣٥	٤٢	٤٩	٥٦

عندما تكون $x < 8$ فإن $7x < 56$ وعندما تكون $x = 8$ فإن $7x = 56$

الخطوة : يؤدي الفرض في الحالتين إلى تناقض مع المعلومة المعطاة $7x > 56$. لذلك فالفرض بأن $x \leq 8$ خطأ والنتيجة الأصلية بأن $x > 8$ صحيحة بالتأكيد.

(2B

المعطيات: $-c > 0$

المطلوب: إثبات أن $c < 0$

برهان غير مباشر:

الخطوة ١: افرض أن $c > 0$ أو $c = 0$

الخطوة ٢:

c	٠	١	٢	٣	٤
$-c$	٠	-1	-2	-3	-4

إذا كانت $c > 0$ فإن $-c < 0$ وإذا كانت $c = 0$ فإن $-c = 0$

الخطوة ٣: يؤدي الفرض في الحالتين إلى تناقض مع المعلومة المعطاه $-c > 0$ لذلك فالفرض بأن $c \geq 0$ خطأ والنتيجة الأصلية بأن $c < 0$ صحيحة وبما أن $c < 0$ صحيحة فإن c عدد سالب بالتأكيد.

3) رحلة:

افرض أن x هي المسافة المقطوعة في المرحلة الأولى من رحلته، y هي المسافة المقطوعة في المرحلة الثانية، z هي المسافة المقطوعة في المرحلة الثالثة.

المعطيات: $x + y + z > 360$

المطلوب: $x > 120$ أو $y > 120$ أو $z > 120$.

برهان غير مباشر:

الخطوة ١: افرض أن $x \leq 120, y \leq 120, z \leq 120$.

الخطوة ٢: إذا كانت $x \leq 120, y \leq 120, z \leq 120$ فإن

$x + y + z \leq 120 + 120 + 120$ أو $x + y + z \leq 360$

الخطوة ٣: وهذا يناقض العبارة المعطاة لذلك فالفرض خطأ والنتيجة الأصلية أن $x > 120$ أو $y > 120$ أو $z > 120$. أي أنه قطع أكثر من $120km$ في مرحلة واحدة على الأقل من رحلته.

4)

المعطيات: x^2 عدد صحيح فردي.

المطلوب: x عدد فردي.

برهان غير مباشر:

الخطوة ١ : افرض أن x عدد زوجي. وهذا يعني أن $x = 2k$ حيث k عدد صحيح.

الخطوة٢ : $x^2 = (2k)^2$ بتعويض الفرض

$= 4k^2$ بالتبسيط

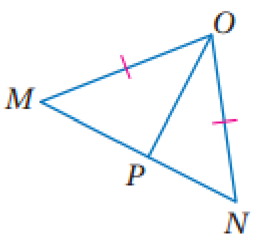
$= (2 \times 2)k^2$ بالتحليل

$= 2(2k^2)$ خاصية التجميع للضرب

وبما أن k عدد صحيح فإن $2k^2$ عدد صحيح أيضا. وليكن m يمثل العدد الصحيح $2k^2$ فإنه يمكن تمثيل x^2 بالعدد $2m$ حيث m عدد صحيح وهذا يعني أن x^2 عدد زوجي ولكن هذا يناقض العبارة المعطاة بأن x^2 عدد فردي.

الخطوة ٣: بما أن الفرض: x عدد زوجي أدى إلى تناقض مع المعطيات فإن النتيجة الأصلية بأن x عدد فردي صحيحة بالتأكيد.

5)



المعطيات: $\overline{MO} \cong \overline{ON}, \overline{MP} \ncong \overline{NP}$

المطلوب: $\angle MOP \ncong \angle NOP$

برهان غير مباشر:

الخطوة 1: نفرض أن $\angle MOP \cong \angle NOP$

الخطوة 2: تعلم أن $\overline{MO} \cong \overline{ON}$ وأن $\overline{OP} \cong \overline{OP}$ حسب خاصية الانعكاس.

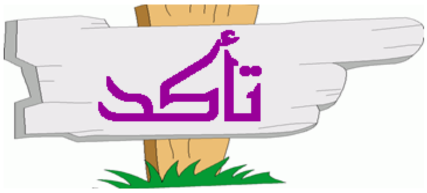
وإذا كانت $\angle MOP \cong \angle NOP$

فإن $\Delta MOP \cong \Delta NOP$ حسب SAS.

ويكون $\overline{MP} \cong \overline{NP}$ لأن العناصر المتطابقة في المثلثين المتطابقين تكون متطابقة.

الخطوة 3: $\overline{MP} \cong \overline{NP}$ تناقض المعلومة المعطاه.لذلك فالفرض خطأ إذن

$\angle MOP \ncong \angle NOP$



اكتب الأفتراض الذي تبدأ به برهانا غير مباشر لكل عبارة مما يأتي: المثال١

1) $\overline{AB} \ncong \overline{CD}$

2) ΔXYZ متطابق الضلعين أو متطابق الأضلاع.

3) إذا كان $4x < 24$، فإن $x \geq 6$

4) $\angle A$ زاوية قائمة

اكتب برهان غير مباشر لكل من العبارتين الآتيتين: المثال٢

5) إذا كان $2x + 3 < 7$، فإن $x < 2$

المعطيات: $2x + 3 < 7$

المطلوب: $x < 2$

البرهان غير المباشر:

الخطوة ١: افرض أن $x > 2$ أو $x = 2$ صحيحة.

الخطوة ٢:

x	٢	٣	٤	٥	٦
$2x+3$	٧	٩	١١	١٣	١٥

عندما تكون $x > 2$ فإن $2x + 3 > 7$ وعندما تكون $x = 2$ فإن $2x + 3 = 7$.

الخطوة ٣: يؤدي الفرض في الحالتين إلى تناقض مع المعلومة المعطاة بأن $2x + 3 < 7$ لذلك فالفرض بأن $x \geq 2$ خطأ. والنتيجة الأصلية بأن $x < 2$ صحيحة بالتأكيد.

6) إذا كان $3x - 4 > 8$ ، فإن $x > 4$

المعطيات: $3x - 4 > 8$

المطلوب: $x > 4$

برهان غير مباشر:

الخطوة١: افرض أن $x < 4$ أو $x = 4$ صحيحة.

الخطوة٢:

x	٠	١	٢	٣	٤
$3x - 4$	-4	-1	٢	٥	٨

عندما $x < 4$ فإن $3x - 4 < 8$ وعندما $x = 4$ فإن $3x - 4 = 8$.

الخطوة٣: يؤدي الفرض في الحالتين إلى تناقض مع المعلومة المعطاة بأن $3x - 4 > 8$ لذلك فالفرض بأن $x \leq 4$ خطأ. والنتيجة الأصلية بأن $x > 4$ صحيحة بالتأكيد.

7) كرة قدم: المثال٣

أفرض أن المتوسط يساوي a هدفا

برهان غير مباشر:

الخطوة ١: افرض أن متوسط عدد الأهداف التي سجلها فهد في كل مباراة كان أكبر من أو يساوي ٣، أي $a \geq 3$.

الخطوة٢: الحالة ١ الحالة ٢

الحالة ١	الحالة ٢
$a = 3$	$a > 3$
$\frac{13}{6} \stackrel{?}{=} 3$	$\frac{13}{6} >? 3$
$2.2 \neq 3$	$2.2 \not> 3$

الخطوة ٣: النتائج ليست صحيحة لذلك فالفرض خطأ. إذن فمتوسط عدد الأهداف التي سجلها فهد في كل مباراة أقل من ٣ أهداف.

(8

المعطيات: $5x-2$ عدد فردي.

المطلوب: x عدد فردي.

برهان غير مباشر:

الخطوة١: افرض أن x عددا ليس فرديا. أي أفرض أ ن x عدد زوجي.

الخطوة٢: ليكن $x=2k$ حيث k عدد صحيح.

$5x-2=5(2k)-2$ بتعويض الفرض.

$=10k-2$ خاصية الضرب.

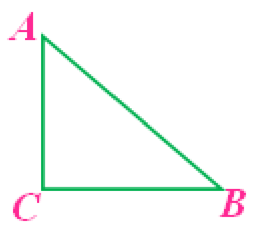
$=2(5k-1)$ خاصية التوزيع.

وبما أن k عدد صحيح فإن $5k-1=$ عدد صحيح أيضا. افرض أن p يمثل العدد $5k-1$ فيمكن تمثيل $5x-2$ بـ $2p$، حيث p عدد صحيح وهذا يعني أن $5x-2$ عدد صحيح زوجي ولكن هذا يناقض المعطيات بأن $5x-2$ عدد فردي.

الخطوة٣: بما أن الفرض بأن x عدد زوجي أدى إلى تناقض مع المعطيات فإن النتيجة الأصلية بأن x عدد فردي نتيجة صحيحة.

اكتب برهانا غير مباشر لكل عبارة من العبارات الآتية:

(9



المعطيات: ABC مثلث قائم الزاوية؛ $\angle C$ زاوية قائمة.

المطلوب: $AB>AC$ و $AB>BC$

برهان غير مباشر:

الخطوة١: أفرض أن وتر المثلث القائم الزاوية ليس الضلع الأطول أي أن

$AB<BC$ و $AB<AC$

الخطوة ٢: إذا كان $AB<BC$ فإن $m\angle C<m\angle A$. وبما أن $m\angle C=90$، فإن $m\angle A>90$ إذن $m\angle C+m\angle A>180$ وبالتبرير نفسه

$m\angle C+m\angle B>180$

الخطوة ٣: كلا العلاقتين تناقضان الحقيقة بأن مجموع قياسات زوايا المثلث يساوي $180°$. لذلك فالوتر هو أطول أضلاع المثلث قائم الزاوية.

(10

المعطيات: $\angle A , \angle B$ متكاملتان

المطلوب: $\angle A , \angle B$ لا يمكن أن تكونا منفرجتين معا.

برهان غير مباشر:

الخطوة ١: أفرض أن $\angle A , \angle B$ كلاهما زاوية منفرجة.

الخطوة 2: من تعريف الزاوية المنفرجة $m\angle A > 90$ و$m\angle B > 90$ لذلك

$$m\angle A + m\angle B > 180^\circ$$

الخطوة ٣: وهذا يناقض المعلومة المعطاة بأن $m\angle A + m\angle B = 180^\circ$ لذلك فالنتيجة الأصلية بأن $\angle A , \angle B$ لا يمكن أن يكونا منفرجتين معا صحيحة بالتأكيد.

تدرب وحل المسائل

اكتب الافتراض الذي تبدأ به برهاناً غير مباشر لكل عبارة مما يأتي: المثال١

(11 اذا كان $2x > 16$، فإن $x \le 8$

(12 $\angle 1, \angle 2$ زاويتان متكاملتان

(13 إذا كان ميلا مستقيمان متساويين فإنهما غير متوازيين.

(14 العدد الفردي يقبل القسمة على 2.

اكتب برهانا غير مباشر لكل مما يأتي: المثال٢

(15

المعطيات: $-3x + 4 < 7$

المطلوب: $x > -1$

برهان غير مباشر: الخطوة ١: افرض أن $x \le -1$ صحيحة.

الخطوة ٢:

x	-5	-4	-3	-2	-1
$-3x + 4$	١٩	١٦	١٣	١٠	٧

عندما تكون $x < -1$ فإن $-3x + 4 > 7$ عندما تكون $x = -1$ فإن $-3x + 4 = 7$

الخطوة ٣: يؤدي الفرض في الحالتين إلى تناقض مع المعلومة المعطاة بأن $-3x + 4 < 7$ لذلك فالفرض بأن $x \le -1$ خطأ والنتيجة الأصلية بأن $x > -1$ صحيحة بالتأكيد.

16)

المعطيات: $-2x-6>12$

المطلوب: $x<-9$

برهان غير مباشر:

الخطوة١ : أفرض أن $x\geq -9$ **صحيحة.**

خطوة ٢ :

x	-9	-8	-7	-6	-5
$-2x-6$	١٢	١٠	٨	٦	٤

عندما تكون $x>-9$ **فإن** $-2x-6<12$ **وعندما تكون** $x=-9$ **فإن** $-2x-6=12$

الخطوة ٣ : يؤدي الفرض في الحالتين إلى تناقض مع المعلومة المعطاة بأن $-2x-6>12$ **لذلك فالفرض بأن** $x\geq -9$ **خطأ والنتيجة الأصلية بأن** $x<-9$ **صحيحة بالتأكيد.**

17) العاب حاسوب: المثال٣

أفرض أن ثمن إحدى الألعاب x **والأخرى** y**.**

الخطوة 1: المعطيات: $x+y>400$

المطلوب: $x>200$ **أو** $y>200$

برهان غير مباشر:

افرض أن $x\leq 200$ **و** $y\leq 200$

الخطوة 2: إذا كانت $x\leq 200$ **و** $y\leq 200$ **فإن:**

$x+y\leq 200+200$ **أو** $x+y\leq 400$ **وهذا يناقض الفرض** $x+y>400$**.**

الخطوة 3: بما أن الفرض $x\leq 200$ **و** $x\leq 200$ **أدى إلى تناقض مع حقيقة معلومة فإن هذا الفرض خطأ لذلك فالنتيجة بأن** $x>200$ **أو** $y>200$ **ستكون صحيحة أي أن ثمن لعبة واحدة من اللعبتين على الأقل أكبر من 200 ريال.**

18) جمع التبرعات:

الخطوة 1: أفرض أنه بيع أقل من 150 تذكرة للكبار.

الخطوة ٢: إذا بيع ١٤٩ تذكرة للكبار فسيكون:

عدد تذاكر الأطفال التي بيعت = ١٤٩ ـ ٣٧٥ = ٢٢٦ تذكرة والثمن الكلي لبيع ١٤٩ تذكرة للكبار و٢٢٦ تذكرة للأطفال = ١٢,٥ × ٢٢٦ + ٣٠ × ١٤٩ = ٧٢٩٥

الخطوة ٣: بما أن النتيجة خطأ فإن الفرض خطأ إذاً عدد تذاكر الكبار التي بيعت ≥ ١٥٠ تذكرة.

اكتب برهاناً غير مباشر لكل مما يأتي: المثالان٣,٤

١٩)

المعطيات: xy عدد صحيح فردي.

المطلوب: كلا من x وy عدد صحيح فردي.

برهان غير مباشر:

الخطوة١: أفرض أن x و y عددان ليسا فرديين معا. أي افرض أن x أو y عدد زوجي.

الخطوة٢: تحتاج فقط إلى بيان أن الفرض: x عدد زوجي يؤدي إلى تناقض لأن البرهان عند افتراض أن y عدد زوجي يتبع التبرير نفسه. لذلك افرض أن x عدد زوجي وأن y عدد فردي هذا يعني أن $x = 2k$ و$y = 2m + 1$ حيث k وm عددان صحيحان.

$xy = (2k)(2m+1)$ **بتعويض الفرض**

$= 4km + 2k$ **خاصية التوزيع**

$= 2(2km + k)$ **خاصية التوزيع**

بما أن k وm عددان صحيحان فإن $2km + k$ عدد صحيح أيضا ليكن p يمثل العدد $2km + k$. لذا فيمكن أن يمثل العدد xy بـ $2p$ حيث p عدد صحيح. وهذا يعني أن xy عدد زوجي ولكن هذا يناقض المعطيات بأن xy عدد فردي.

بما أن الفرض: x عدد زوجي وy عدد فردي يؤدي إلى تناقض مع المعطيات فإن النتيجة الأصلية بأن كلا من x و y عدد صحيح فردي نتيجة صحيحة بالتأكيد.

(٢٠

المعطيات: n^2 عدد زوجي.

المطلوب: n عدد زوجي

برهان غير مباشر:

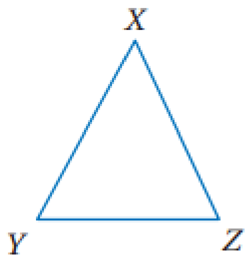
المعطيات: n^2 عدد زوجي

المطلوب: n عدد زوجي أي n^2 يقبل القسمة على ٤

البرهان:

- بفرض أن n^2 لا يقبل القسمة على ٤، أي ان ٤ ليس عامل من عوامل n^2.
- إذا كان مربع عدد هو عدد زوجي ، إذن العدد هو أيضا عدد زوجي لذا اذا كان n^2 عدد زوجي ، يجب أن تكون n عدد زوجي.
- نفرض أن $n = 2a$
- $n^2 = (2a)^2$
- $n^2 = 4a^2$
- 4 عامل من عوامل n^2 و هذا يتعارض مع الفرض

إذن n عدد زوجي



(٢١

المعطيات: $XZ > YZ$

المطلوب: $\angle X \ncong \angle Y$

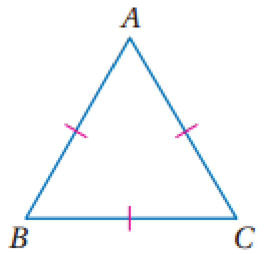
برهان غير مباشر:

الخطوة١: أفرض أن $\angle X \cong \angle Y$.

الخطوة٢: $\overline{XZ} \cong \overline{YZ}$ حسب عكس نظرية المثلث متطابق الضلعين.

الخطوة ٣: وهذا يناقض المعلومة المعطاة بأن $XZ > YZ$ لذلك فالفرض بأن $\angle X \cong \angle Y$ خطأ لذا فإن النتيجة الأصلية بأن $\angle X \ncong \angle Y$ نتيجة صحيحة بالتأكيد.

٢٢)



المعطيات: ΔABC متطابق الأضلاع.

المطلوب: ΔABC متطابق الزاويا.

برهان غير مباشر:

الخطوة ١: أفرض أن ΔABC ليس متطابق الزاويا.

الخطوة ٢: $m\angle B > m\angle C$ فإن $\overline{AB} > \overline{AC}$ حسب متباينة زاوية ضلع في مثلث.

الخطوة ٣: يناقض هذا المعلومة المعطاة بأن ΔABC متطابق الأضلاع. لذا فإن الفرض بأن ΔABC ليس متطابق الزاويا خطأ والنتيجة الأصلية بأن ΔABC متطابق الزوايا نتيجة صحيحة بالتأكيد.

٢٣)

المعطيات: ΔABC

المطلوب: ΔABC لا يمكن أن يكون له أكثر من زاوية قائمة واحدة.

برهان غير مباشر:

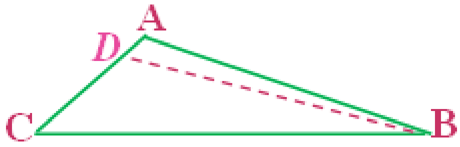
الخطوة ١: أفرض أن للمثلث ABC أكثر من زاوية قائمة.

الخطوة ٢: إذا كانت $\angle B$ و $\angle C$ زاويتين قائمتين فإن

$m\angle B + m\angle C = 180^\circ$. لكن $m\angle A + m\angle B + m\angle C = 180^\circ$ لأن مجموع قياسات زوايا المثلث 180°. وبالتعويض $m\angle A + 180^\circ = 180^\circ$ إذن $m\angle A = 0^\circ$

الخطوة ٣: يناقض هذا المعلومة المعطاة بأن ΔABC مثلث لذلك فالفرض بأن للمثلث ΔABC أكثر من زاوية قائمة خطأ والنتيجة الأصلية بأنه لايمكن أن يكون للمثلث ΔABC أكثر من زاوية قائمة نتيجة صحيحة.

٢٤)



المعطيات: $m\angle A > m\angle ABC$

المطلوب: $BC > AC$

برهان:

أفرض أن $BC < AC$. فحسب خاصية المقارنة يكون $BC = AC$ أو $BC < AC$.

الحالة ١: إذا كان $BC = AC$ فإن $\angle ABC \cong \angle A$ حسب نظرية المثلث متطابق الضلعين (إذا كان ضلعان لمثلث متطابقين فإن الزاويتين المقابلتين لهما متطابقتان).

لكن $\angle ABC \cong \angle A$ تناقض العبارة المعطاة بإن $m\angle A > m\angle ABC$. إذن

$BC \neq AC$.

الحالة ٢:

إذا كان $BC < AC$ فإنه يوجد نقطة D بين A و c بحيث يكون $\overline{DC} \cong \overline{BC}$

ارسم القطعة المستقيمة المساعدة $\overline{BD}$ بما أن $DC = BC$ فإن

$\angle BDC \cong \angle DBC$ حسب نظرية المثلث متطابق الضلعين ولأن $\angle BDC$ زاوية خارجية لـ BAD وحسب نظرية الزاوية الخارجية (قياس الزاوية الخارجية لمثلث أكبر من قياس كل من الزاويتين الداخليتين البعيدتين عنها) يكون

$m\angle BDC > m\angle A$ وحسب مسلمة جمع الزوايا يكون:

$m\angle ABC = m\angle ABD + m\angle DBC$. إذن وحسب تعريف المتباينة يكون

$m\angle ABC > m\angle DBC$. وبالتعويض وخاصية التعدي للمتباينة يكون

$m\angle ABC > m\angle A$ ولكن هذا يناقض العبارة المعطاة بأن

$m\angle A > m\angle ABC$. وفي الحالتين وصلنا إلى تناقض فالفرض خطأ لذلك

$BC > AC$.

٢٥) اكتب برهان غير مباشر:

المعطيات: $\frac{1}{b} < 0$

المطلوب: b عدد سالب.

برهان غير مباشر:

الخطوة ١ : افرض أن $b > 0$ وأن $b \neq 0$ لأن ذلك سيجعل $\frac{1}{b}$ غير معرف.

الخطوة ٢: $b > 0$ فإن $\frac{1}{b} > 0$ لأن ناتج قسمة عدد موجب على عدد موجب يكون موجبا.

الخطوة ٣: لكن $\frac{1}{b} > 0$ يناقض المعطيات لذلك فالفرض خطأ إذن b عدد سالب بالتأكيد.

٢٦) كرة سلة:

نعلم أن الفريق الآخر سجل ٣ نقاط ويعتقد أخو عدنان بأنهم ثلاث نقاط من رمية واحدة ونعلم أيضا أنه يمكن للاعب أن يسجل ٣ نقاط بتسجيل نقطتين والحصول على رمية حرة نتيجة خطأ الفريق المنافس.

الخطوة ١: افرض أن لاعبا من الفريق المنافس سجل نقطتين من رمية وحصل على رمية حرة.

الخطوة٢: بما أن عدد نقاط الفريق المنافس كان قبل أن يخرج عدنان من الملعب ٢٦ نقطة فإن عدد نقاطهم بعد تسجيل نقطتين وحصولهم على رمية حرة سيكون ٢٦ + ٣ أو ٢٩.

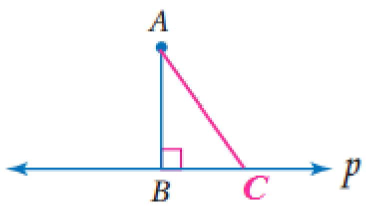
الخطوة٣: بما أن عدد النقاط صحيح عندما افترضنا أن الفريق المنافس سجل نقطتين من رمية وحصل على رمية حرة فإن افتراض أخو عدنان قد يكون غير صحيح.

فالفريق المنافس يمكن أن يكون قد حصل على ثلاث نقاط من رمية واحدة من خارج منطقة الهدف أو على نقطتين ورمية حرة.

٢٧) ألعاب الكترونية:

الباب الأيمن، فإذا كان الإعلان على الباب الأيسر صحيحا فإن الإعلانين سيكونان صحيحين. إلا أن أحد الإعلانين خطأ لذا يجب أن يكون الإعلان المكتوب على الباب الأيسر خطأ.

٢٨)



المعطيات: $\overline{AB} \perp \overleftrightarrow{P}$

المطلوب: $\overline{AB}$ أقصر قطعة مستقيمة من A إلى P.

برهان غير مباشر:

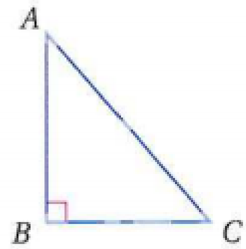
الخطوة ١: أفرض أن $\overline{AB}$ ليست أقصر قطعة مستقيمة من A إلى P.

الخطوة ٢: بما أن أن $\overline{AB}$ ليست أقصر قطعة مستقيمة من A إلى P فإنه توجد نقطة C على P بحيث تكون $\overline{AC}$ أقصر قطعة مستقيمة. وبما أن ΔABC قائم الزاوية

وتره $\overline{AC}$ فإن ΔABC أطول ضلع ΔABC لأنه يقابل أكبر زاوية في ΔABC حسب متباينة زاوية – ضلع في المثلث.

الخطوة ٣: يناقض هذا الفرض بأن $\overline{AC}$ أقصر ضلع ولذلك فالفرض خطأ والصحيح هو أن $\overline{AB}$ أقصر بالتأكيد.

٢٩) برهان مباشر:



المعطيات: ΔABC قائم الزاوية

المطلوب: $\overline{AC}$ أطول ضلع في المثلث

برهان مباشر:

المثلث قائم الزاوية في B إذن مجموع الزاويتين الاخرتين = ٩٠

أي كل منهما أقل من ٩٠ وهذا يعني أن B هي أكبر زوايا المثلث

وبالتالي يكون الوتر $\overline{AC}$ هو أطول ضلع في المثلث

٣٠) نظرية الأعداد:

n^3+3 (30a

(30b

n	n^3+3
٢	١١
٣	٣٠
١٠	١٠٠٣
١١	١٣٣٤
٢٤	١٣٨٢٧
٢٥	١٥٦٢٨
١٠٠	١٠٠٠٠٠٣

١٠١	١٠٣٠٣٠٤
٥٢٦	١٤٥٥٣١٥٧٩
٥٢٧	١٤٦٣٦٣١٨٦

30c) يكون n عدد ا فرديا عندما يكون n^3+3 عددا زوجيا.

30d) برهان غيرمباشر:

الخطوة ١: افرض أن n عدد زوجي وليكن $n=2k$ حيث k عدد صحيح.

الخطوة ٢: $n^3+3=(2k)^3+3$ بتعويض الفرض

$=8k^3+3$ بالتبسيط

$=(8k^3+2)+1$ بكتابة ٣ على صورة $2+1$ وتجمع أول حدين.

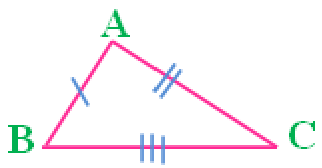
$=2(4k^3+1)+1$ خاصية التوزيع

وبما أن k عدد صحيح فإن k^3+14 عدد صحيح أيضا لذا فإن n^3+3 عدد فردي.

الخطوة ٣: وهذا يناقض الفرض بأن n^3+3 عدد زوجي لذا فإن الفرض خطأ والنتيجة بأن n عدد فردي نتيجة صحيحة.

مسائل مهارات التفكير العليا

٣١)



العبارة هي: ΔABC مختلف الأضلاع.

المعطيات: ΔABC فيه $AB \neq BC$؛

$AB \neq AC$، $BC \neq AC$

المطلوب: ΔABC مختلف الأضلاع.

برهان غير مباشر:

الخطوة ١: أفرض أن ΔABC ليس مختلف الأضلاع.

الحالة ١: ΔABC متطابق الضلعين.

الخطوة ٢: إذا كان ΔABC متطابق الضلعين فإن $AB=BC$ أو $BC=AC$ أو $AB=AC$.

الخطوة ٣: يناقض هذا المعطيات إذن ΔABC ليس متطابق الضلعين.

الحالة ٢: ΔABC متطابق الأضلاع.

ولكي يكون المثلث متطابق الأضلاع يجب أن يكون متطابق الضلعين أيضا وفي الحالة الأولى أثبت أن ΔABC ليس متطابق الضلعين إذن فالمثلث ΔABC ليس متطابق الأضلاع لذلك ΔABC مختلف الأضلاع.

٣٢) تحد:

المعطيات: x عدد نسبي لا يساوي الصفر وy عدد غير نسبي.

المطلوب: xy عدد غير نسبي.

برهان غير مباشر:

الخطوة ١: بما أن x عدد نسبي لا يساوي الصفر فإن $x = \frac{a}{b}$ حيث a وb عددان صحيحان ، حيث $b \neq 0$ وبالتعويض، $xy = \frac{a}{b} \times y = \frac{ay}{b}$

أفرض أن xy عدد نسبي فيكون $xy = \frac{c}{d}$ حيث c وd عددان صحيحان، $d \neq 0$

الخطوة ٢: $xy = \frac{ay}{b}$ $\quad$ x عدد نسبي

$\frac{c}{d} = \frac{ay}{b}$ $\quad$ بتعويض الفرض

$cb = ayd$ $\quad$ بضرب كلا الطرفين في db

$\frac{cb}{ad} = y$ $\quad$ بقسمة كلا الطرفين على ad.

حيث $a \neq 0$ لأن $x = \frac{a}{b \neq 0}$.

بما أن a, b, c, d أعداد صحيحة و $d \neq 0$، و $a \neq 0$ فإن $\frac{cb}{ad}$ هو ناتج قسمة عددين صحيحين. أي أن y عدد نسبي.

الخطوة ٣: بما أن الفرض: xy عدد نسبي أدى إلى تناقض مع المعطيات فإن النتيجة الأصلية بأن xy عدد غير نسبي نتيجة صحيحة.

٣٣) اكتشف الخطأ:

كلاهما على خطأ بما أن الفرض صحيح عندما تكون النتيجة خطأ فإن العبارة خطأ.

٣٤) اكتب:

إذا لم يكن x عدد فرديا فإن $5x-2$ ليس عددا فرديا فإذا لم يكن x عدد فرديا فإنه زوجي وإذا كان x عددا زوجيا فإن $5x$ عدد زوجي لأن حاصل ضرب أي عدد في عدد زوجي يكون زوجيا. $5x-2$ يكون عدد زوجي أيضا لأن ناتج طرح ٢ من أي عدد زوجي يكون زوجيا أيضا. لذلك فالعبارة " إذا لم يكن x عددا فرديا فإن $5x-2$ ليس عددا فرديا" صحيحة البرهان المباشر للمعاكس الإيجابي للعبارة والبرهان غير المباشر للعبارة نفسها يبدآن بالفرضيات نفسها ويتوصلان إلى النتائج نفسها.

تدريب على الاختبار المعياري

٣٥) $D : 38$

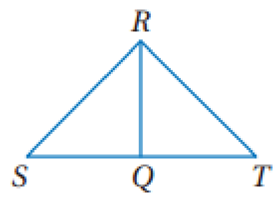
مجموع اي ضلعين في مثلث اكبر من الضلع الثالث لذا ٣٨ لا يكون المحيط المثلث

لان $38-(12+7)=19$

٣٦) $A : -a > -b$

مراجعة تراكمية

٣٧) اكتب برهانا ذا عمودين:



المعطيات: $\overline{RQ}$ تنصف $\angle SRT$

المطلوب: إثبات أن $m\angle SQR > m\angle SRQ$

البرهان: العبارات (المبررات)

١) $\overline{RQ}$ تنصف $\angle SRT$ (معطى)

2) $\angle SRQ \cong \angle QRT$ (تعريف المنصف)

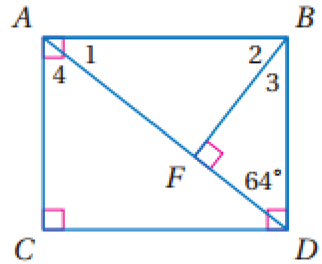
3) $m\angle SRQ = m\angle QRT$ (تعريف الزوايا المتطابقة)

4) $m\angle SQR = m\angle T + m\angle QRT$ (نظرية الزاوية الخارجية)

5) $m\angle SQR > m\angle QRT$ (تعريف المتباينة).

6) $m\angle SQR > m\angle SRQ$ (بالتعويض).

أوجد كل من القياسين الآتيين:



(٣٨

بما أن $\angle BFD = 90^\circ$ إذن:

$$\angle 3 = 180^\circ - (90^\circ + 64^\circ)$$

$$\angle 3 = 26^\circ$$

$$\angle 2 = 90^\circ - 26^\circ = 64^\circ$$

$$\angle 1 = 180^\circ - (90^\circ + 64^\circ)$$

$$\angle 1 = 26^\circ$$

(39

$$\angle 4 = 90^\circ - \angle 1$$

$$\angle 4 = 90^\circ - 26^\circ$$

$$\angle 4 = 64^\circ$$

٤٠) هندسة إحداثية:

بما أن المستقيمين متوازيين إذن ميل كل منهما متساويين = ٢

ارسم المستقيم p على أن يمر بنقطة مقطع المحور y للمستقيم $y = 2x + 2$ وهي $(0,2)$ ويكون عمودياً على كلا المستقيمين.

ميل المستقيم $p = \frac{-1}{2}$ والمستقيم p يمر بالنقطة $(0,2)$

إذن بصيغة الميل ونقطة معادلة المستقيم p هي:

$$(y - y_1) = m(x - x_1)$$

$$y - 2 = \frac{-1}{2}(x - 0)$$

$$y - 2 = \frac{-1}{2}x$$

$$y = \frac{-1}{2}x + 2$$

تحديد نقطة تقاطع المستقيمين $y = 2x - 3$ والمستقيم p

$$2x - 3 = \frac{-1}{2}x + 2$$

$$2x + \frac{1}{2}x = 2 + 3$$

$$\frac{5}{2}x = 5$$

$$x = 2$$

$$y = 2x - 3$$

$$y = 2 \times 2 - 3$$

$$y = 1$$

نقطة التقاطع هي $(2,1)$

المسافة بين $(2,1),(0,2)$:

$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

$$d = \sqrt{(0-2)^2 + (2-1)^2}$$

$$d = \sqrt{4+1}$$

$$d = \sqrt{5}$$

استعد للدرس اللاحق

(41

$$4x+7<180$$
$$4x<180-7$$
$$4x<173$$
$$\frac{4x}{4}<\frac{173}{4}$$
$$x<43.25$$

(42

$$8x-14<3x+19$$
$$8x<3x+19+14$$
$$8x<3x+33$$
$$8x-3x<-3x+3x+33$$
$$5x<33$$
$$\frac{5x}{5}<\frac{33}{5}$$
$$x<6.6$$

(43

$$3x+54<90$$
$$3x<90-54$$
$$3x<36$$
$$\frac{3x}{3}<\frac{36}{3}$$
$$x<12$$

٤-٥ متباينة المثلث

: تحليل النتائج:

(1

$$BC + CA > AB \qquad AB + CA > BC \qquad AB + BC > CA$$

٢) مجموع طولي ضلعين في مثلث أكبر من طول الضلع الثالث.

(٣

$$|BC - CA| < AB \qquad |AB - CA| < BC \qquad |AB - BC| < CA$$

(٤

سيكون الضلع الثالث أقل من مجموع طولي الضلعين الآخرين وأكبر من القيمة المطلقة للفرق بين طوليهما.

(1A

$$30+15 \overset{?}{>} 16 \qquad 30+16 \overset{?}{>} 15 \qquad 15+16 \overset{?}{>} 30$$

$$✓\ 45 > 16 \qquad ✓\ 46 > 15 \qquad ✓\ 31 > 30$$

بما أن طولي كل قطعتين أكبر من طول القطعة الثالثة، فإن القطع المستقيمة التي أطوالها $15, 16, 30$ يمكن تكون مثلث.

(1B

$$2+8 \overset{?}{>} 11$$

$$✗\ 10 \not> 11$$

بما أن طولي كل قطعتين ليس أكبر من طول القطعة الثالثة، فإن القطع المستقيمة التي أطوالها $2, 8, 11$ لا يمكن تكون مثلث.

2) $D: 22$

$13 + 9 \overset{?}{>} n$

$22 > n$ أو $22 < n$

$13 + n \overset{?}{>} 9$

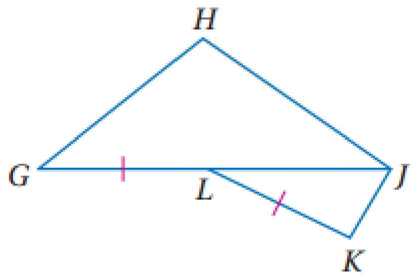
$n > -4$

$9 + n \overset{?}{>} 13$

$n > 4$

$4 < n < 22$

٣) اكتب برهانا ذا عمودين:



البرهان: العبارات (المبررات)

١) $GL = LK$ (معطى)

٢) $JH + GH > GJ$ (نظرية متباينة المثلث)

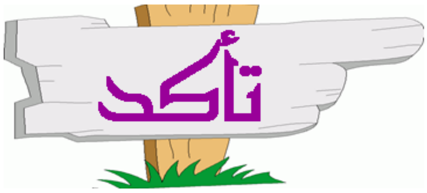
٣) $GJ = GL + LJ$ (مسلمة جمع القطع المستقيمة)

٤) $JH + GH > GL + LJ$ (بالتعويض)

٥) $JH + GH > LK + LJ$ (بالتعويض)

٦) $LK + LJ > JK$ (نظرية متباينة المثلث)

٧) $JH + GH > JK$ (خاصية التعدي)



حدد ما إذا كانت القياسات المعطاة يمكن أن تمثل أطوال أضلاع مثلث في كل مما يأتي ، واذا لم يكن ذلك ممكنا فوضح السبب. المثال١

(١

$5+7 \overset{?}{>} 10$ $5+10 \overset{?}{>} 7$ $10+7 \overset{?}{>} 5$

$12 > 10$ ✓ $15 > 7$ ✓ $17 > 5$ ✓

بما أن طولي كل قطعتين أكبر من طول القطعة الثالثة، فإن القطع المستقيمة التي أطوالها $5,7,10$ يمكن تكون مثلث.

(٢

$3+4 \overset{?}{>} 8$

$7 \ngtr 8$ ✗

بما أن طولي كل قطعتين ليس أكبر من طول القطعة الثالثة، فإن القطع المستقيمة التي أطوالها $3,4,8$ لا يمكن تكون مثلث.

(٣

$6+14 \overset{?}{>} 10$ $14+10 \overset{?}{>} 6$ $6+10 \overset{?}{>} 14$

$20 > 10$ ✓ $24 > 6$ ✓ $16 > 14$ ✓

بما أن طولي كل قطعتين أكبر من طول القطعة الثالثة، فإن القطع المستقيمة التي أطوالها $6,14,10$ يمكن تكون مثلث.

اختيار من متعدد:

(4 $A : 5$

بفرض أن طول الضلع الثالث x

$5+9 \overset{?}{>} x$

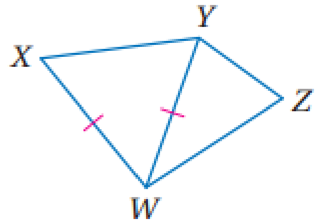
$14 > x$ أو $14 < x$

$9+x \overset{?}{>} 5$ $5+x \overset{?}{>} 9$

$x > -4$ $x > 4$

$4 < x < 14$

٥) برهان: اكتب برهانا ذا عمودين:



المعطيات: $\overline{XW} \cong \overline{YW}$

المطلوب: $YZ + ZW > XW$

البرهان: العبارات والمبررات

١) $\overline{XW} \cong \overline{YW}$ (معطى)

٢) $XW = YW$ (تعريف القطع المستقيمة المتطابقة)

٣) $YZ + ZW > YW$ (نظرية متباينة المثلث)

٤) $YZ + ZW > XW$ (بالتعويض)

تدرب وحل المسائل

حدد ما إذا كانت القياسات المعطاة يمكن أن تمثل أطوال أضلاع مثلث في كل مما يأتي ، واذا لم يكن ذلك ممكنا فوضح السبب. المثال ١

٦)

$9 + 4 \overset{?}{>} 15$

✗ $13 \ngtr 15$

بما أن طولي كل قطعتين ليس أكبر من طول القطعة الثالثة، فإن القطع المستقيمة التي أطوالها $4, 9, 15$ لا يمكن تكون مثلث.

٧)

$11 + 21 \overset{?}{>} 16$ ✓ $32 > 16$

$16 + 11 \overset{?}{>} 21$ ✓ $27 > 21$

$16 + 21 \overset{?}{>} 11$ ✓ $37 > 11$

بما أن طولي كل قطعتين أكبر من طول القطعة الثالثة، فإن القطع المستقيمة التي أطوالها $11, 21, 16$ يمكن تكون مثلث.

٨)

$$8.2+1.1 \overset{?}{>} 9.9$$

$$9.3 \not> 9.9 \quad ✗$$

بما أن طولي كل قطعتين ليس أكبر من طول القطعة الثالثة، فإن القطع المستقيمة التي أطوالها $9.9, 1.1, 8.2$ لا يمكن تكون مثلث.

٩)

$$2\frac{1}{2}+1\frac{3}{4} \overset{?}{>} 5\frac{1}{8}$$

$$4\frac{1}{4} \not> 5\frac{1}{8} \quad ✗$$

بما أن طولي كل قطعتين ليس أكبر من طول القطعة الثالثة، فإن القطع المستقيمة التي أطوالها $2\frac{1}{2}, 1\frac{3}{4}, 5\frac{1}{8}$ لا يمكن تكون مثلث.

اكتب متباينة تمثل مدى طول الضلع الثالث في مثلث علم طولا ضلعين من أضلاعه في كل مما يأتي: المثال٢

١٠)

بفرض أن طول الضلع الثالث x

$$4+8 \overset{?}{>} x$$

$12 > x$ أو $12 < x$

$$8+x \overset{?}{>} 4 \qquad 4+x \overset{?}{>} 8$$

$$x > -4 \qquad x > 4$$

$$4ft < x < 12ft$$

١١)

بفرض أن طول الضلع الثالث x

$$11+5 \overset{?}{>} x$$

$16 > x$ أو $16 < x$

$$11+x \overset{?}{>} 5 \qquad 5+x \overset{?}{>} 11$$

$$x > -6 \qquad x > 6$$

$$6m < x < 16m$$

(١٢

بفرض أن طول الضلع الثالث x

$2.7 + 4.2 \overset{?}{>} x$

$6.9 > x$ أو $6.9 < x$

$2.7 + x \overset{?}{>} 4.2$ $\qquad$ $4.2 + x \overset{?}{>} 2.7$

$x > -1.5$ $\qquad$ $x > 1.5$

$1.5cm < x < 6.9cm$

(١٣

بفرض أن طول الضلع الثالث x

$\frac{1}{2} + 3\frac{1}{4} \overset{?}{>} x$

$3\frac{3}{4} > x$ أو $3\frac{3}{4} < x$

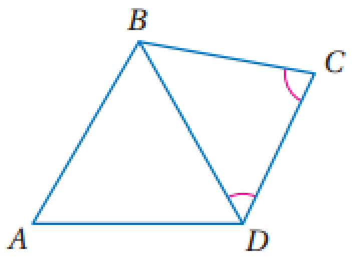
$3\frac{1}{4} + x \overset{?}{>} \frac{1}{2}$ $\qquad$ $\frac{1}{2} + x \overset{?}{>} 3\frac{1}{4}$

$x > -2\frac{3}{4}$ $\qquad$ $x > 2\frac{3}{4}$

$2\frac{3}{4}km < x < 3\frac{3}{4}km$

برهان: اكتب برهانا ذا عمودين: مثال٣

(١٤



البرهان: العبارات (المبررات)

١) $\angle BCD \cong \angle CDB$ (معطى)

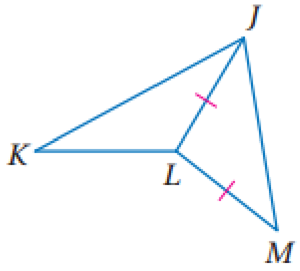
٢) $\overline{BC} \cong \overline{BD}$ (عكس نظرية المثلث متطابق الضلعين)

٣) $BC = BD$ (تعريف القطع المستقيمة)

٤) $AB + AD > BD$ (نظرية متباينة المثلث)

٥) $AB + AD > BC$

١٥)



البرهان: العبارات (المبررات)

١) $\overline{JL} \cong \overline{LM}$ (معطى)

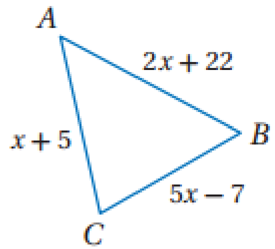
٢) $JL = LM$ (تعريف القطع المستقيمة المتطابقة)

٣) $JK + KL > JL$ (نظرية متباينة المثلث)

٤) $JK + KL > LM$ (بالتعويض)

جبر: حدد القيم الممكنة لـ x في كل من السؤالين الآتيين:

١٦)



$$x + 5 + 5x - 7 \overset{?}{>} 2x + 22$$

$$6x - 2 \overset{?}{>} 2x + 22$$

$$4x > 24$$

$$x > \frac{24}{4}$$

$$x > 6$$

$$2x + 22 + x + 5 \overset{?}{>} 5x - 7$$

$$3x > -27 + 5x - 7$$

$$3x - 5x > -27 - 7$$

$$-2x > -34$$

$$x > \frac{34}{2}$$

$$x > 17$$

$$2x + 22 + 5x - 7 \overset{?}{>} x + 5$$

$$7x + 15 > x + 5$$

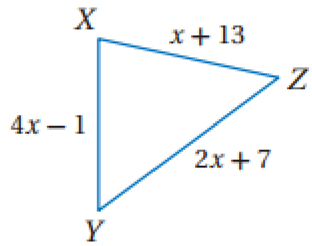
$$7x - x > 5 - 15$$

$$6x > -10$$

$$x > \frac{-10}{6}$$

إذن القيم الممكنة لـ x هي: $6 < x < 17$

١٧)



$$x + 13 + 4x - 1 \overset{?}{>} 2x + 7$$

$$5x - 12 \overset{?}{>} 2x + 7$$

$$5x - 2x \overset{?}{>} 7 + 12$$

$$3x > 19$$

$$x > \frac{19}{3}$$

$$4x - 1 + 2x + 7 \overset{?}{>} x + 13$$

$$6x + 6 > x + 13$$

$$6x - x > 13 - 6$$

$$5x > 7$$

$$x > \frac{7}{5}$$

$$x+13+2x+7 \overset{?}{>} 4x-1$$
$$3x+20>4x-1$$
$$3x-4x>-1-20$$
$$x>21$$

إذن القيم الممكنة لـ x هي: $\frac{7}{5}<x<21$

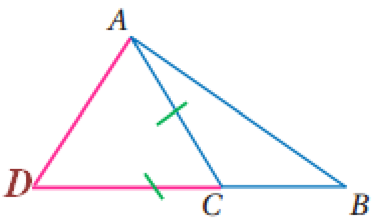
18a) قيادة سيارة:

18a) الطريق ١؛ في أي مثلث مجموع طولي أي ضلعين أكبر من طول الضلع الثالث لذلك فمجموع المسافتين على الطريق ٢ والطريق ٣ أكبر من المسافة على الطريق ١.

18b)

الطريق ٢ ثم الطريق٣؛ بما أنه يمكن لتوفيق أن يقود سيارته بسرعة $60\ km/h$ في الساعة على الطريق ١ الذي طوله $60\ km$ فإنه يستغرق ساعة تقريبا للوصول إلى المجمع. أو أن يقود سيارته بسرعة $100\ km/h$ على الطريق ٢ ثم الطريق ٣ اللذين مجموع طوليهما $85km$ لذلك يستغرق ٠,٨٥ من الساعة أو ٥١ دقيقة تقريبا للوصول إلى المجمع. إذن استعمال الطريق ٢ ثم الطريق ٣ يستغرق وقتا أقل من الطريق ١.

١٩) برهان:



البرهان: العبارات (المبررات)

١) ارسم $\overline{CD}$ بحيث تقع C بين B و D و $\overline{CD} \cong \overline{AC}$ (استعمل المسطرة).

٢) $CD=AC$ (تعريف تطابق القطع المستقيمة)

٣) $\angle CAD \cong \angle ADC$ (نظرية المثلث متطابق الضلعين)

٤) $m\angle CAD = m\angle ADC$ (تعريف الزاويتين المتطابقتين)

٥) $m\angle BAC + m\angle CAD = m\angle BAD$ (مسلمة جمع الزاويا)

٦) $m\angle BAC + m\angle ADC = m\angle BAD$ (بالتعويض)

٧) $AB<BD$ (علاقة الزوايا والأضلاع في المثلث)

٨) $BD=BC+CD$ (مسلمة جمع القطع المستقيمة)

٩) $AB<BC+CD$ (بالتعويض)

١٠) $AB < BC + AC$ (بالتعويض)

اكتب متباينة تمثل مدى القيم الممكنة لـ x في كل من الأسئلة الآتية:

٢٠)

$4+6 \overset{?}{>} x$

$10 > x$ أو $10 < x$

$6+x \overset{?}{>} 4$ $\qquad$ $4+x \overset{?}{>} 6$

$x > -2$ $\qquad$ $x > 2$

$2 < x < 10$

٢١)

$12+8 \overset{?}{>} x$

$20 > x$ أو $20 < x$

$12+x \overset{?}{>} 8$ $\qquad$ $8+x \overset{?}{>} 12$

$x > -4$ $\qquad$ $x > 4$

$4 < x < 20$

٢٢)

$5+7 \overset{?}{>} x+1$

$12-1 > x$

$11 > x$ أو $11 < x$

$7+x+1 \overset{?}{>} 5$ $\qquad$ $5+x+1 \overset{?}{>} 7$

$x+8 > 5$ $\qquad$ $x+6 > 7$

$x > -3$ $\qquad$ $x > 1$

$1 < x < 11$

٢٣)

$$x+2+x+4 \overset{?}{>} x+6$$
$$2x+6>x+6$$
$$2x>x$$
$$2x-x>0$$
$$x>0$$

$$x+2+x+6 \overset{?}{>} x+4$$
$$2x+8>x+4$$
$$2x>x-4$$
$$x>-4$$

$$x+4+x+6 \overset{?}{>} x+2$$
$$2x+10>x+2$$
$$2x-x>2-10$$
$$x>-8$$

$$x<0$$

٢٤) مسرح:

نعم؛ القياسات الظاهرة على الرسم لا تشكل مثلثا. فحسب نظرية متباينة المثلث، مجموع طولي أي ضلعين لمثلث أكبر من طول الضلع الثالث. والأطوال في الرسم هي $6\frac{3}{4}ft$, $3\frac{7}{8}ft$,1ft. وبما أن $1+3\frac{7}{8} \not> 6\frac{3}{4}$ فإن هذه الأطوال لا تمثل أضلاع مثلث. وعليهما أن يعيدا حساب القياسات في قص الخشب.

حدد ما إذا كانت القياسات المعطاة يمكن أن تمثل أطوال أضلاع مثلث في كل مما يأتي ، واذا لم يكن ذلك ممكنا فوضح السبب.

٢٥)

لا؛ لأن $\sqrt{8}+\sqrt{2} \not> \sqrt{35}$

بما أن طولي كل قطعتين ليس أكبر من طول القطعة الثالثة، فإن القطع المستقيمة التي أطوالها $\sqrt{35}, \sqrt{8}, \sqrt{2}$ لا يمكن تكون مثلث.

٢٦)

$$\sqrt{99} \approx 9.9$$
$$\sqrt{48} \approx 6.9$$
$$\sqrt{65} \approx 8.1$$

$9.9+8.1 \overset{?}{>} 6.9$ $\quad$ $6.9+8.1 \overset{?}{>} 9.9$ $\quad$ $9.9+6.9 \overset{?}{>} 8.1$

✓ $18>6.9$ $\quad$ ✓ $15>9.9$ $\quad$ ✓ $16.8>8.1$

بما أن طولي كل قطعتين أكبر من طول القطعة الثالثة، فإن القطع المستقيمة التي أطوالها $\sqrt{65}, \sqrt{48}, \sqrt{99}$ يمكن تكون مثلث.

٢٧) حدد ما إذا كانت النقاط $X(1,-3), Y(6,1), Z(2,2)$ تمثل رؤوس مثلث. وضح إجابتك.

$$d_{(X,Y)}=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}$$
$$d=\sqrt{(6-1)^2+(1+3)^2}$$
$$d=\sqrt{25+16}$$
$$d=\sqrt{41}\approx 6.4$$
$$d_{(Y,Z)}=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}$$
$$d=\sqrt{(2-6)^2+(2-1)^2}$$
$$d=\sqrt{16+1}$$
$$d=\sqrt{17}\approx 4.1$$
$$d_{(X,Z)}=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}$$
$$d=\sqrt{(2-1)^2+(2+3)^2}$$
$$d=\sqrt{1+25}$$
$$d=\sqrt{26}\approx 5.1$$

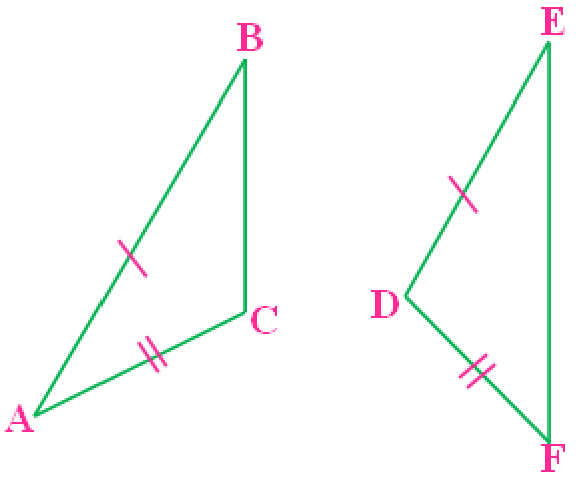
$4.1+5.1 \overset{?}{>} 6.4$ $\quad$ $6.4+5.1 \overset{?}{>} 4.1$ $\quad$ $6.4+4.1 \overset{?}{>} 5.1$

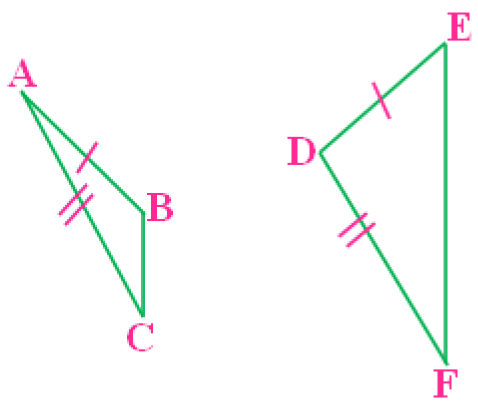
✓ $9.2>6.4$ $\quad$ ✓ $11.5>4.1$ $\quad$ ✓ $10.5>5.1$

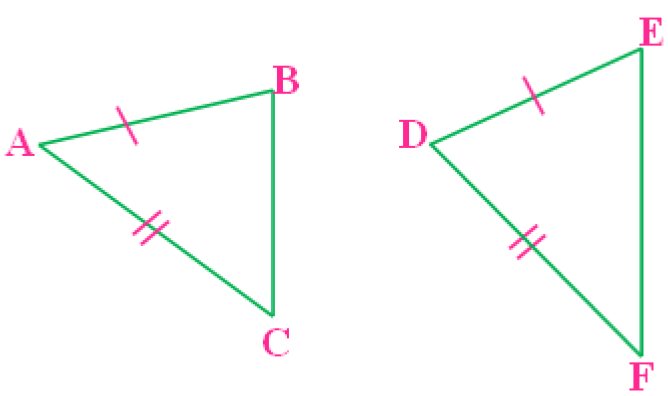
بما أن طولي كل قطعتين أكبر من طول القطعة الثالثة، فإن النقط المعطاة يمكن تكون مثلث.

28a) تمثيلات متعددة:

a) هندسياً:







28b) جدولياً:

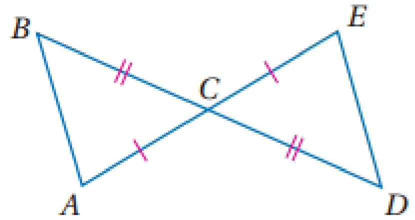
أزواج المثلثات	BC	$m\angle A$	EF	$m\angle D$
١	٠,٧٥	٢٦	٢	١٠٥
٢	٠,٣	١٥	١	٩٧
٣	٠,٨	٤٤	١,٤	١٠١

28c) لفظياً:

قياس الزاوية التي تقابل الضلع الأطول من الضلعين غير المتطابقين أكبر من قياس الزاوية التي تقابل الضلع الأقصر منهما.

مسائل مهارات التفكير العليا

٢٩) تحدٍ:



بفرض أن الضلع الثالث x

بما أن $AC = 7, DC = 9$

$$7+9 \overset{?}{>} x$$

$16 > x$ أو $16 < x$

$$7+x \overset{?}{>} 9 \qquad 9+x \overset{?}{>} 7$$

$$x > 2 \qquad x > -2$$

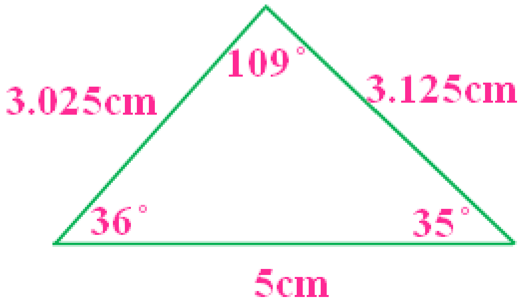
المحيط أكبر من ٣٦ وأقل من ٦٤ نعلم من الشكل أن:

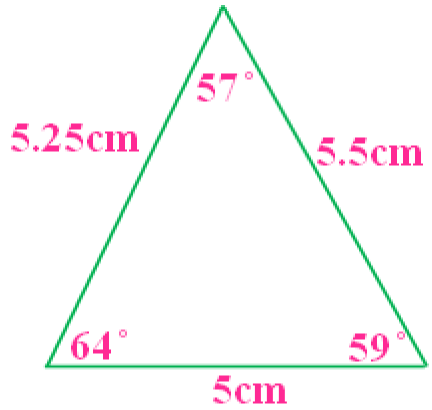
$\overline{EC} \cong \overline{AC}$ و $\overline{BC} \cong \overline{DC}$ و $\angle ECD \cong \angle ACB$ لأن الزاوايا المتقابلة بالرأس متطابقة إذن $\Delta ECD \cong \Delta ACB$ وباستعمال نظرية متباينة المثلث تكون قيمة كل من ED, AB محصورة بين العددين $2, 16$ لذلك أصغر قيمة للمحيط أكبر من $2(2+7+9)$ أو ٣٦؛ وأكبر قيمة للمحيط أصغر من $2(16+7+9)$ أو ٦٤.

٣٠) تبرير:

يجب أن يكون طول كل من الضلعين المتطابقين أكبر من $3cm$ وعند استعمالها لإيجاد أكبر قيمة لطول الساق فإن المتباينة ستكون ٦ > ٠ وهي صحيحة دائما لذلك لا توجد قيمة عظمة للطول.

٣١) مسألة مفتوحة:





٣٢) اكتب:

تنص نظرية متباينة المثلث على أن مجموع طولي أي ضلعين للمثلث يكون دائما أكبر من طول الضلع الثالث للمثلث لذا يمكن كتابة ثلاث متباينات فمثلا للمثلث الذي أطوال أضلاعه a, b, c يمكن كتابة:

$$a + b > c, a + c > b, b + c > a$$

وعادة ما ينتج من إحدى المتباينات عدد سالب ولا يلزم استعمالها عند إيجاد القيمة الصغرى والقيمة العظمى للضلع غير المعروف والمتباينتان الباقيتان تعطيان القيمة التي سيكون طول الضلع أكبر منها والقيمة التي سيكون طول الضلع أصغر منها.

تدريب على الاختبار المعياري

٣٣) B: $m\angle ADC = m\angle BCD$

٣٤) D: $z = 14w - 7$

مراجعة تراكمية

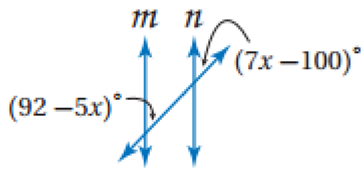
اكتب الافتراض الضروري التي تبدأبه برهاناً غير مباشر لكل مما يأتي:

٣٥) $Y < 6$ أو $Y > 6$

٣٦) إذا قطع مستقيم مستقيمين آخرين، وكانت الزاويتان المتبادلتان داخلياً متطابقتان، فإن المستقيمين غير متوازيين.

أوجد قيمة x على أن يكون $m \parallel n$ في كل مما يأتي، واذكر المسلمة أوالنظرية:

٣٧)



$$7x - 100 = 92 - 5x$$

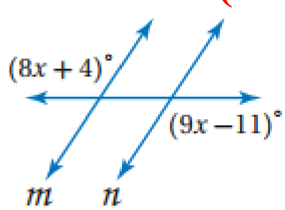
$$7x + 5x = 92 + 100$$

$$12x = 192$$

$$x = 16$$

مسلمة الزاويتين المتناظرتين.

٣٨)



$$8x + 4 = 9x - 11$$

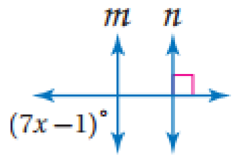
$$8x - 9x = -11 - 4$$

$$-x = -15$$

$$x = 15$$

نظرية الزاويتين المتبادلتين خارجيا.

(٣٩



$$7x - 1 = 90$$

$$7x = 91$$

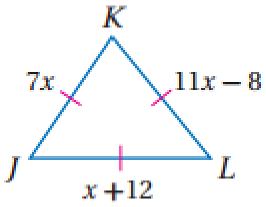
$$x = 13$$

نظرية الزاويتين المتبادلتين خارجيا.

استعد للدرس اللاحق

أوجد قيمة x وأطوال الأضلاع المجهولة في كل مثلث مما يأتي:

(٤٠



$$11x - 8 = 7x$$

$$11x - 7x = 8$$

$$4x = 8$$

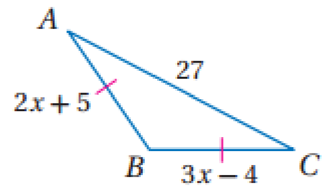
$$x = 2$$

$$KL = 11x - 8 = 11 \times 2 - 8 = 14$$

$$KJ = 7x = 7 \times 2 = 14$$

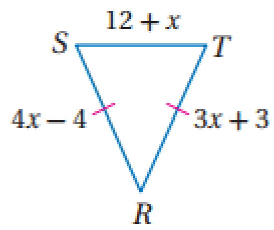
$$JL = x + 12 = 2 + 12 = 14$$

(٤١



$$2x+5=3x-4$$
$$2x-3x=-4-5$$
$$-x=-9$$
$$x=9$$
$$BC=3x-4$$
$$=3\times 9-4=23$$
$$AB=BC=23$$

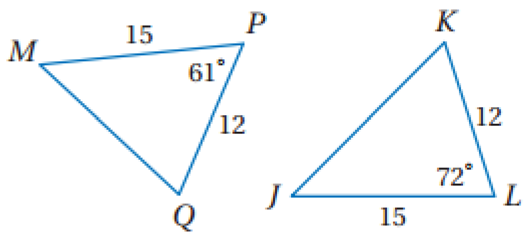
(٤٢



$$4x-4=3x+3$$
$$x=3+4$$
$$x=7$$
$$RT=3\times 7+3=24$$
$$SR=RT=24$$
$$ST=12+7=19$$

٤-٦ المتباينات في مثلثين

(1A

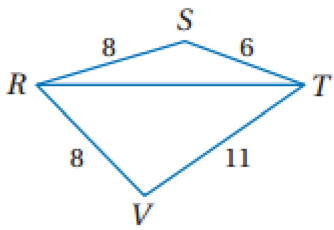


بما أن $LK \cong PQ$ و $MP \cong JL$ و

$\angle KLJ < \angle MPQ$

إذن حسب متباينة SAS: $JK > MQ$

(1B



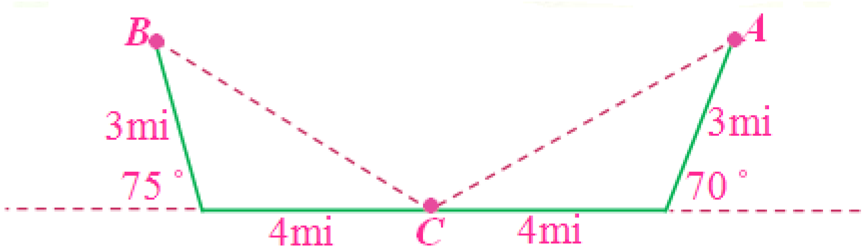
بما أن $RS \cong RV$ و $RT \cong RT$ حسب خاصية الانعكاس و $VT > ST$

إذن عكس حسب متباينة SAS: $\angle TRV > \angle SRT$

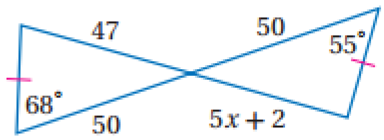
2A) التزلج على الجليد:

المجموعة A ؛ قياس الزاوية المحصورة للمسار الذي سلكته المجموعة A يساوي $180^\circ - 70^\circ$ أو 105°.

وبما أن $110^\circ > 105^\circ$، فحسب متباينة SAS يكون $AC > BC$ أي أن المجموعة A أبعد من المجموعة B من مكان الانطلاق.



٣)



في هذا الشكل يوجد ضلعان في كل مثلث يطابقان ضلعان في المثلث الأخر

و $\angle 55^\circ > \angle 68^\circ$ إذن حسب متباينة SAS:

$$47 > 5x + 2$$

$$47 - 2 > 5x$$

$$45 > 5x$$

$$9 > x$$

وحسب نظرية متباينة المثلث وبفرض أن الضلع الثالث x :

$$5x + 2 > 0$$

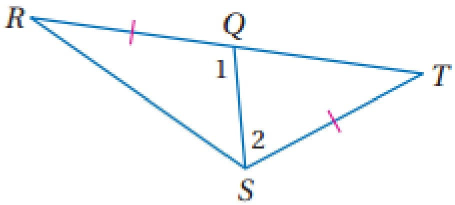
$$5x > -2$$

$$x > \frac{-2}{5}$$

$$x > -0.4$$

$$-0.4 < x < 9$$

٤) اكتب برهانا ذا عمودين:



المعطيات: $\overline{RQ} \cong \overline{ST}$

المطلوب: $RS > TQ$

البرهان: العبارات (المبررات)

1) $\overline{RQ} \cong \overline{ST}$ (معطى)

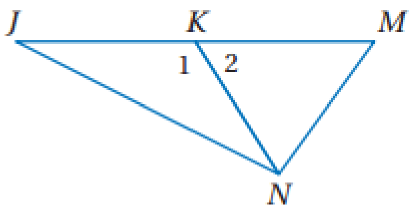
2) $\overline{QS} \cong \overline{QS}$ (خاصية الانعكاس)

3) $\angle 1$ (زاوية خارجية بالنسبة للمثلث QST تعريف الزاوية الخارجية)

4) $m\angle 1 > m\angle 2$ (قياس الزاوية الخارجية أكبرمن قياس أي من الزاويتين الداخلتين البعيدتين)

5) $RS > TQ$ (حسب متباينة SAS)

٥) اكتب برهاناً ذا عمودين:



المعطيات: $\overline{NK}$ قطعة متوسطة في ΔJMN.

$JN > NM$

المطلوب: $m\angle 1 > m\angle 2$

البرهان: العبارات (المبررات)

1) $\overline{NK}$ قطعة متوسطة في ΔJMN (معطى)

2) K نقطة منتصف $\overline{JM}$ (تعريف القطعة المتوسطة)

3) $\overline{JK} \cong \overline{KM}$ (نظرية نقطة منتصف)

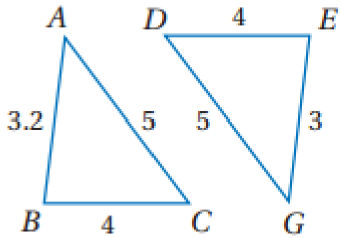
4) $\overline{KN} \cong \overline{KN}$ (خاصية الانعكاس)

5) $JN > NM$ (معطى)

6) $m\angle 1 > m\angle 2$ (عكس متباينة SAS)

قارن بين القياسين المحددين في كل من السؤالين الآتيين: المثال ١

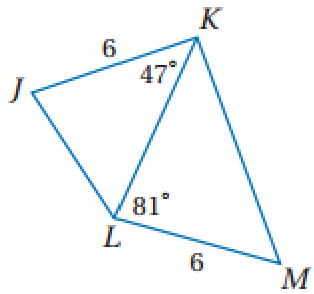
١)



بما أن $AC \cong DG$ و $BC \cong DE$ و $AB > EG$

إذن حسب عكس متباينة SAS: $m\angle ACB > m\angle EDG$

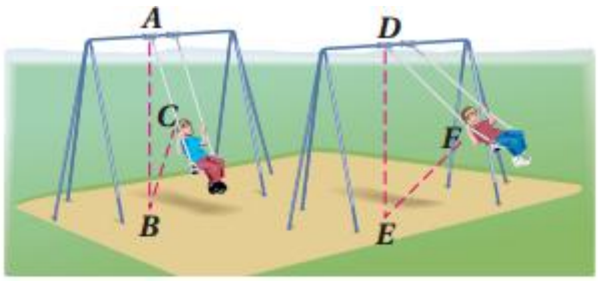
٢)



بما أن $JK \cong LM$ و $LK \cong LK$ حسب خاصية الانعكاس و $MLK > LKJ$

إذن حسب متباينة SAS: $KM > JL$

٣) أراجيح:

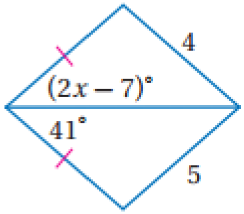


3a) $\overline{AB} \cong \overline{DE}, \overline{AC} \cong \overline{DF}$

3b) $\angle D$ ؛ بما أن $EF > BC$ فإن $m\angle D > m\angle A$ حسب نظرية المفصلة.

اكتب متباينة تمثل مدى القيم الممكنة لـ x فى كل مما يأتي:

٤)



في الشكل المقابل: يوجد في كل مثلث ضلع يطابق ضلع في المثلث الأخر ويوجد ضلع مشترك بينهما متطابقا بحسب خاصية الانعكاس ويوجد طول ضلع في إحدى المثلثين أكبر من الضلع المقابل له في المثلث الأخر إذن بحسب عكس متباينة SAS زاوية $\angle 41^\circ$ أكبر من $\angle 2x-7$

$$41 > 2x - 7$$

$$41 + 7 > 2x$$

$$48 > 2x$$

$$24 > x$$

وبما أن أي زاوية في المثلث أقل من ١٨٠ إذن:

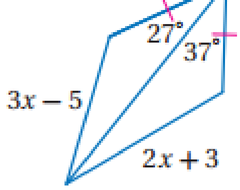
$$2x - 7 > 0$$

$$2x > 7$$

$$x > \frac{7}{2}$$

$$\frac{7}{2} < x < 24$$

٥)



في الشكل المقابل: يوجد في كل مثلث ضلع يطابق ضلع في المثلث الأخر ويوجد ضلع مشترك بينهما متطابقا بحسب خاصية الانعكاس ويوجد زاوية في إحدى المثلثين $\angle 37^\circ$ أكبر من $\angle 27^\circ$ إذن حسب متباينة SAS

$\because 2x+3>3x-5$

$2x+3-2x>3x-5-2x$

$3>x-5$

$\therefore 8>x$

$\because 2x+3>0 \qquad 3x-5>0$

$2x>-3 \qquad 3x>5$

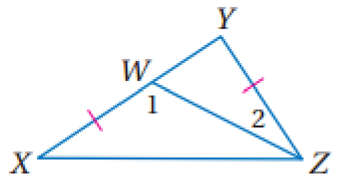
$x>-\frac{3}{2} \qquad x>\frac{5}{3}$

$\therefore x>\frac{5}{3}$

$\frac{5}{3}<x<8$

برهان: اكتب برهانا ذا عمودين في كل من السؤالين ٦, ٧: المثالان ٥, ٤

٦)



المعطيات: ΔYZX ، $\overline{YZ}\cong\overline{XW}$

المطلوب: $ZX>YW$

البرهان: العبارات (المبررات)

1) ΔYZX ، $\overline{YZ}\cong\overline{XW}$ (معطى)

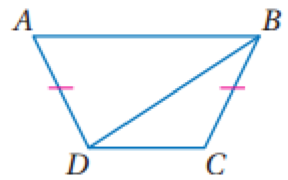
2) $\overline{ZW}\cong\overline{ZW}$ (خاصية الانعكاس)

3) $\angle 1$ زاوية خارجية لـ ΔYZW (تعريف الزاوية الخارجية)

4) $m\angle 1>m\angle 2$ (قياس الزاوية الخارجية لمثلث أكبر من قياس أي من الزاويتين الداخلتين البعيدتين)

5) $ZX>YW$ (المتابينة SAS)

(٧



المعطيات: $\overline{AD} \cong \overline{CB}, DC < AB$

المطلوب: $m\angle CBD < m\angle ADB$

البرهان: العبارات (المبررات)

١) $\overline{AD} \cong \overline{CB}$ (معطى)

٢) $\overline{DB} \cong \overline{DB}$ (خاصية الانعكاس)

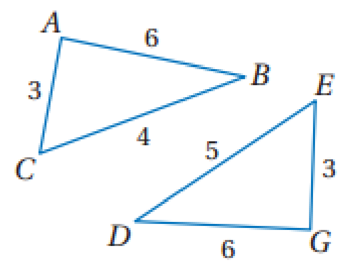
٣) $DC < AB$ (معطى)

٤) $m\angle CBD < m\angle ADB$ (المتباينة SSS)

تدرب وحل المسائل

قارن بين القياسين المحددين في كل من الأسئلة الآتية: المثال١

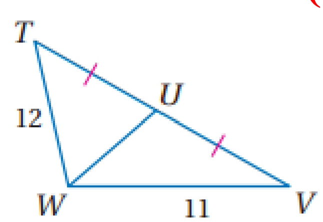
(٨



بما أن $AC \cong EG$ و $AB \cong DG$ و $DE > CB$

إذن حسب عكس متباينة SAS: $m\angle DGE > m\angle BAC$

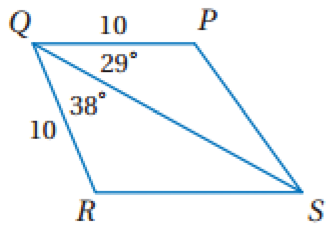
(٩



بما أن $TU \cong UV$ و $WU \cong WU$ حسب خاصية الانعكاس و $TW > WV$

إذن حسب عكس متباينة SAS: $TUW > WUV$

١٠)

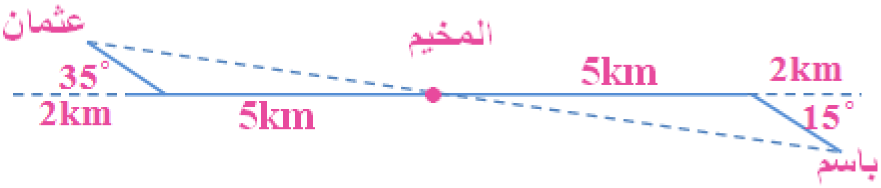


بما أن $QR \cong QP$ و $QS \cong QS$ حسب خاصية الانعكاس و $PQS < SQR$

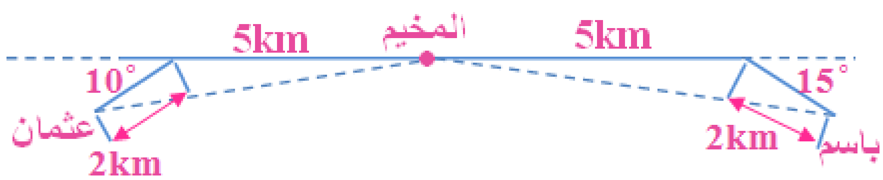
إذن حسب متباينة SAS: $PS < RS$

١١) رحلة صيد: المثال٢

11a) عثمان؛ انعطف باسم $15°$ جنوبا، لذلك فقياس الزاوية المقابلة للضلع الذي يمثل بعده عن المخيم يساوي $180° - 15°$ أو $165°$. أما عثمان فقد انعطف $35°$ شمالا لذلك فقياس الزاوية المقابلة للضلع الذي يمثل بعده عن المخيم يساوي $180° - 35°$ أو $145°$. وحسب متباينة SAS: بما أن $165° > 145°$ فإن عثمان يكون أقرب عن المخيم.

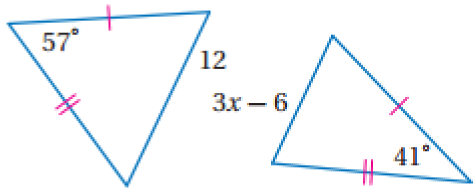


11b) عثمان؛ انعطف باسم $15°$ جنوبا، لذلك فقياس الزاوية المقابلة للضلع الذي يمثل بعده عن المخيم يساوي $180° - 15°$ أو $165°$. أما عثمان فقد انعطف $10°$ لذلك فقياس الزاوية المقابلة للضلع الذي يمثل بعده عن المخيم يساوي $180° - 10°$ أو $170°$. وحسب متباينة SAS: بما أن $165° < 170°$ فإن عثمان يكون أبعد عن المخيم.



اكتب متباينة تمثل مدى القيم الممكنة لـ x في كل مما يأتي:

(١٢



بما أن يوجد ضلعان في المثلث الاول يطابقهما ضلعان في المثلث الأخرويوجد زاوية بين إحدى الضلعين أكبر من الزاوية الاخرى إذن حسب متباينة SAS:

$$12 > 3x - 6$$

$$18 > 3x$$

$$6 > x$$

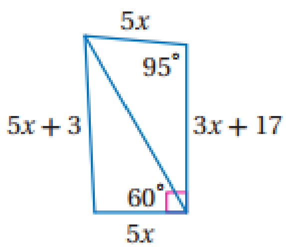
$$3x - 6 > 0$$

$$3x > 6$$

$$x > 2$$

$$2 < x < 6$$

(١٣



بما أنه يوجد ضلعان متطابقان اللذي طولهما $5x, 5x$ ويوجد ضلع مشترك حسب خاصية الانعكاس و $60^\circ > \left(180^\circ - \left(95^\circ + 30^\circ\right)\right)$ أو $60^\circ > 55^\circ$

إذن حسب متباينة SAS:

$$5x + 3 > 3x + 17$$

$$5x - 3x > 17 - 3$$

$$2x > 14$$

$$x > 7$$

$3x + 17 > 0$

$3x > -17$

✗ $x > \frac{-17}{3}$

$\because 5x + 3 > 0$

$5x > -3$

✗ $x > -\frac{3}{5}$

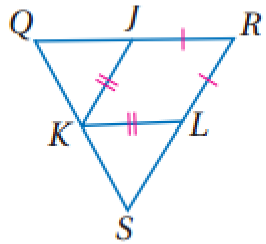
إذن المتباينة هي $x > 7$

١٤) خزائن:

خزانة سليم، بما أن عرضي البابين متساويين وفتحتا الخزانتين متساويتان أيضا وبما أن $17in > 12in$؛ إذن قياس الزاوية التي يكونها باب سليم أكبر من قياس الزاوية التي يكونها باب ماجد بحسب متباينة SAS.

برهان: اكتب برهان ذا عمودين: المثالان ٤،٥

١٥)



البرهان: العبارات (المبررات)

١) $\overline{JK} \cong \overline{LK}$، K نقطة منتصف $\overline{QS}$، $m\angle SKL > m\angle QKJ$ (معطيات)

٢) $QK = SK$ (تعريف نقطة المنتصف)

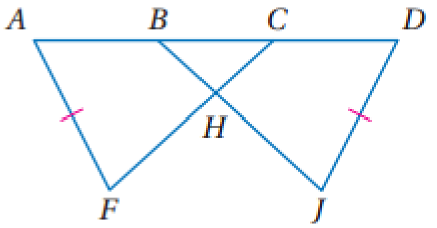
٣) $QJ > SL$ (متباينة SAS)

٤) $\overline{RJ} \cong \overline{RL}$ (معطى)

٥) $RJ = RL$ (تعريف القطع المستقيمة المتطابقة)

٦) $QR > SR$

(١٦



البرهان: العبارات (المبررات)

١) $\overline{AF} \cong \overline{DJ}, \overline{FC} \cong \overline{JB}, AB > DC$

٢) $\overline{BC} \cong \overline{BC}$ (خاصية الانعكاس)

٣) $\overline{BC} = \overline{BC}$ (تعريف القطع المستقيمة المتطابقة)

٤) $AB + BC = AC, DC + CB = DB$ (مسلمة جمع القطع المستقيمة)

٥) $AB + BC > DC + CB$ (خاصية الاضافة)

٦) إذن حسب متباينة SAS: $\angle AFC > \angle BJD$

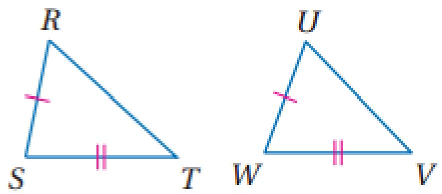
(17a تمرين:

الوضع 1؛ إذا قست المسافة من المرفق إلى الكف في كلا الوضعين باستعمال المسطرة ستجدها أطول في الوضع ١.

(17b

الوضع ١ ؛ باستعمال نتيجة الفرع a ومتباينة SAS، تعلم أن قياس الزاوية المقابلة للضلع الأطول هي الأكبر لذلك فالزاوية عند المرفق في الوضع ١ هي الأكبر.

١٨) برهان غير مباشر:



الخطوة ١: أفترض أن $m\angle S \leq m\angle W$

الخطوة ٢: إذاا كان $m\angle S \leq m\angle W$، فإن $m\angle S < m\angle W$ أو

$m\angle S = m\angle W$

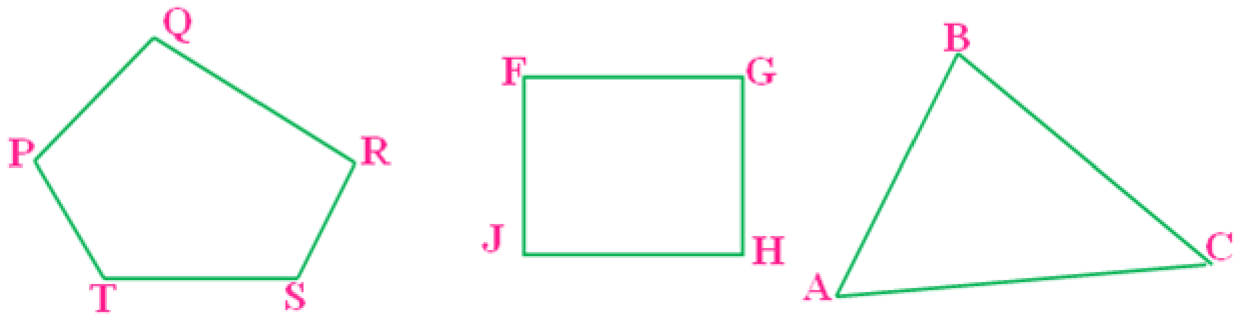
الحالة١: إذا كان $m\angle S < m\angle W$ فإن $RT < UV$ حسب المتباينة SAS.

الحالة ٢:

إذا كان $m\angle S = m\angle W$، فإن $\Delta RST \cong \Delta UVW$ حسب SAS، ويكون $\overline{RT} \cong \overline{UV}$ لأن العناصر المتناظرة في المثلثين المتطابقين تكون متطابقة لذلك $\overline{RT} = \overline{UV}$.

الخطوة ٣: الحالتان تؤديان إلى تناقص مع المعطى $\overline{RT} > \overline{UV}$. لذلك فالفرض يجب أن يكون خطأ والنتيجة $m\angle S > m\angle W$، ستكون صحيحة.

19a) تمثيلات متعددة:



(19b

مجموع قياسات الزوايا	قياسات الزوايا				عدد الأضلاع
180	45	$m\angle C$	59	$m\angle A$	3
			76	$m\angle B$	
360	90	$m\angle H$	90	$m\angle F$	4
	90	$m\angle J$	90	$m\angle G$	
540	116	$m\angle S$	105	$m\angle P$	5
	123	$m\angle T$	100	$m\angle Q$	
			96	$m\angle R$	

(19c

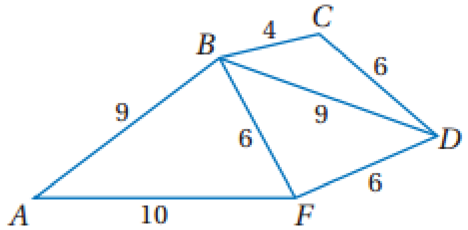
مجموع قياسات زاويا المضلع يساوي ناتج ضرب 180° في عدد أضلاع المضلع مطروحا منها ٢.

(19d

التبرير الاستقرائي ؛ بما إنني استعملت نمطا للتوصل إلى التخمين فإن التبرير الذي استعملته هو التبرير الاستقرائي.

(19e $180^\circ(n-2)$

استعمل الشكل المجاور:



(٢٠

بما أن $FD \cong CD$ و $BD \cong BD$ حسب خاصية الانعكاس و $FD > BC$

إذن عكس حسب متباينة SAS: $m\angle FDB > m\angle BDC$

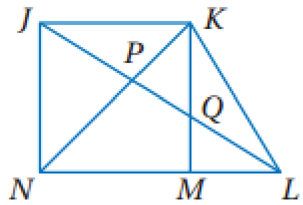
(٢١

بما أن $AB \cong BD$ و $FD \cong BF$ و $FB > AF$

إذن عكس حسب متباينة SAS: $m\angle BDF > m\angle ABF$

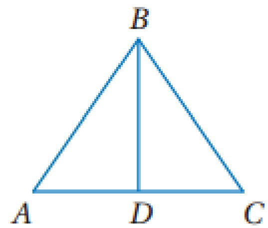
مسائل مهارات التفكير العليا

٢٢) تحد:



في المثلثين JNL, JKL معطى أن $m\angle LJN > m\angle KJL$
$\overline{JN} \cong \overline{KJ}, \overline{JL} \cong \overline{JL}$ ولذلك، وحسب متباينة SAS يكون $LN > LK$. وفي ΔLKN، $LN > LK$ وهذا يعني أن $m\angle LKN > m\angle LNK$.

٢٣) تبرير:



لا تكون حادة أبدا من عكس متباينة SAS، $\angle ADB < \angle BDC$، وبما أن $\angle BDC, \angle ADB$ متجاورتان على مستقيم فإن،
$m\angle ADB + m\angle BDC = 180^\circ$. ولأن $m\angle BDC > m\angle ADB$
فيجب أن يكون $m\angle BDC$ أكبر من 90° و $m\angle ADB$ سيكون أصغر من 90°
ولذلك حسب تعريف الزاوية المنفرجة والزاوية الحادة تكون $\angle BDC$ منفرجة دائما و $\angle ADB$ حادة دائما.

٢٥) اكتب:

تتطلب كل من المسلمة SAS والمتباينة SAS أن يكون هناك زوجان من الأضلاع المتطابقة وزوج من الزوايا المحصورة. وباستعمال المسلمة SAS لتطابق المثلثات، إذا كانت الزاويتان المحصورتان متطابقتين فإن المثلثين يكونان متطابقين. وباستعمال متباينة SAS، إذا كانت إحدى الزاويتين المحصورتين أكبر من الأخرى فإن الضلع المقابل للزاوية الأكبر يكون أطول من الضلع المقابل للزاوية الأصغر في المثلث الآخر.

تدريب على الاختبار المعياري

٢٦) C

بحسب عكس متباينة SAS:

$$46^{\circ} > 5x - 14$$
$$46 + 14 > 5x$$
$$60 > 5x$$
$$12 > x$$

استعمال حقيقة أن أي زاوية في مثلث اقل من 180°:

$$5x - 14 > 0$$
$$5x > 14$$
$$5x > 14$$
$$x > \frac{14}{5}$$
$$2.8 < x < 12$$

٢٧) B

طول القطر $= x\sqrt{2} + 3\sqrt{2} = (x+3)\sqrt{2}$

مراجعة تراكمية

اكتب متباينة تمثل مدى طول الضلع الثالث:

٢٨)

بفرض أن طول الضلع الثالث x

$$3.2 + 4.4 \overset{?}{>} x$$

$7.6 > x$ أو $7.6 < x$

$$3.2 + x \overset{?}{>} 4.4 \qquad\qquad 4.4 + x \overset{?}{>} 3.2$$

$$x > 1.2 \qquad\qquad x > -1.2$$

$$1.2 < x < 7.6$$

٢٩)

بفرض أن طول الضلع الثالث x

$$5+10 \overset{?}{>} x$$

$15 < x$ أو $15 > x$

$$5+x \overset{?}{>} 10 \qquad 10+x \overset{?}{>} 5$$

$$x > 5 \qquad x > -5$$

$$5ft < x < 15ft$$

٣٠)

بفرض أن طول الضلع الثالث x

$$3+9 \overset{?}{>} x$$

$12 < x$ أو $12 > x$

$$3+x \overset{?}{>} 9 \qquad 9+x \overset{?}{>} 3$$

$$x > 6 \qquad x > -6$$

$$6ft < x < 12ft$$

٣١) رحلات:

أفرض أن تكلفة رحلة ماجد x وتكلفة رحلة صديقه y.

الخطوة ١:

المعطيات: $x+y > 500$

المطلوب: $x > 250$ أو $y > 250$

برهان غير مباشر:

أفرض أن $x \le 250$ و $y \le 250$

الخطوة ٢: إذا كانت $x \le 250$ و $y \le 250$ فإن $x+y \le 250+250$

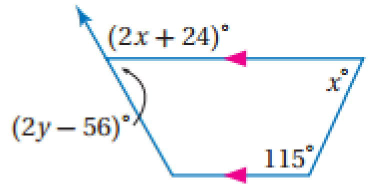
أو $x+y \le 500$ وهذا يناقض الفرض بأن $x+y > 500$.

الخطوة ٣: بما أن الفرض $x \le 250$ و $y \le 250$ أدى تناقض مع حقيقة معلومة فإنه افتراض خطأ. لذلك فالنتيجة بأن $x > 250$ أو $y > 250$ نتيجة صحيحة إذن فتكلفة رحلة أحدهما كانت أكبر من ٢٥٠ ريال.

استعد للدرس اللاحق

أوجد قيمة كل من x,y في الأسئلة الأتية:

٣٢)



حسب نظرية الزاويتين المتخالفتين:

$$x + 115 = 180$$

$$x = 180 - 115$$

$$x = 65^\circ$$

حسب نظرية الزاويتين المتكاملتين:

$$(2x + 24)^\circ = 2 \times 65 + 24 = 154$$

$$154 + 2y - 56 = 180$$

$$2y - 56 = 180 - 154$$

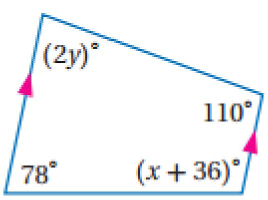
$$2y - 56 = 26$$

$$2y = 26 + 56$$

$$2y = 82$$

$$y = 41$$

٣٣)



حسب نظرية الزاويتين المتحالفتين:

$x + 36 + 110 = 180$

$x + 146 = 180$

$x = 180 - 146$

$x = 34$

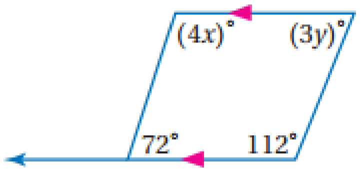
$2y + 78 = 180$

$2y = 180 - 78$

$2y = 102$

$y = 51$

٣٤)



حسب نظرية الزاويتين المتحالفتين:

$4x + 72 = 180$

$4x = 180 - 72$

$4x = 108$

$x = 27$

$3y + 112 = 180$

$3y = 68$

$y = 22.66$

دليل الدراسة والمراجعة

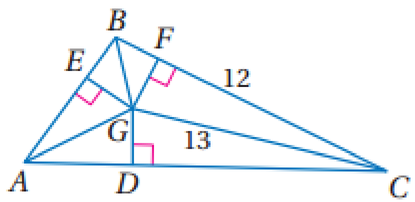
صـ ٢٥٧ : اختبار المفردات:

١) خطأ؛ ملتقى الارتفاعات
٢) خطأ؛ منصفات الزوايا
٣) صحيحة
٤) صحيحة
٥) خطأ؛ القطع المتوسطة
٦) خطأ؛ خطأ
٧) صحيحة
٨) خطأ؛ بالرأس المقابل لذلك الضلع
٩) صحيحة

الفصل 4 دليل الدراسة والمراجعة

4-1 المنصفات في المثلث (ص 217-209)

١٠)



بما أن G هو مركز الدائرة الداخلية للمثلث ΔABC فإن $EG = FG = GD$
وباستعمال فيثاغورث:

$$(GC)^2 = (GF)^2 + (FC)^2$$

$$(13)^2 = (GF)^2 + (12)^2$$

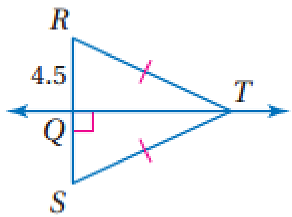
$$(GF)^2 = (13)^2 - (12)^2$$

$$(GF)^2 = 25$$

$$GF = EG = 5$$

أوجد طول كل من القطعتين المستقيمتين الآتيتين:

١١)



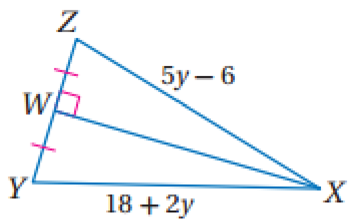
بما أن $TS = RT$ و $RS \perp TQ$ إذن حسب نظرية عكس نظرية العمود المنصف

$RQ = QS = 4.5$

$RS = 4.5 + 4.5$

$RS = 9$

١٢) ٣٤



بما أن $ZY \perp WX$ و WX ينصف ZY إذن حسب نظرية نظرية العمود المنصف

$ZX = YX$

$5y - 6 = 18 + 2y$

$5y - 2y = 18 + 6$

$3y = 24$

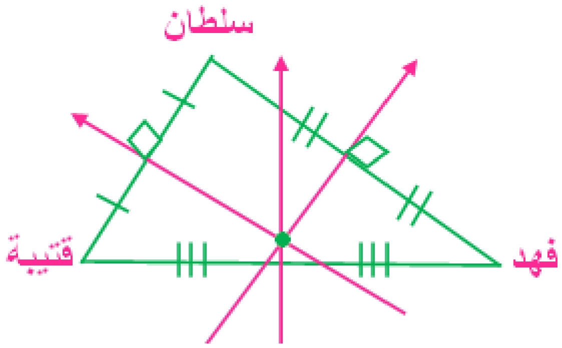
$y = 8$

$XZ = 5Y - 6$

$XZ = 5 \times 8 - 6$

$RS = 34$

١٣) كرة قدم:



4-2 القطع المتوسطة والارتفاعات في المثلث (ص 219-226)

١٤)

$D(0,0), E(0,7), F(6,3)$

أوجد معادلة ارتفاع من D إلى $\overline{EF}$

بما أن ميل $\overline{EF}$ يساوي $m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{3-7}{6-0} = \frac{-4}{6} = -\frac{2}{3}$

فإن ميل الارتفاع العمودي على $\overline{EF}$ يساوي $\frac{3}{2}$

$y - y_1 = m(x - x_1)$ صيغة الميل ونقطة

$D(0,0),\ m = \frac{3}{2}$

$y - 0 = \frac{1}{2}(x - 0)$

$y = \frac{3}{2}x \rightarrow 1$

معادلة الإرتفاع من E إلى $\overline{DF}$

بما أن ميل $\overline{DF}$ يساوي $m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{3-0}{6-0} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$

فإن ميل الارتفاع العمودي على $\overline{DF}$ يساوي -2

$y - y_1 = m(x - x_1)$ صيغة الميل ونقطة

$E(0,7),\ m = -2$

$$y-7=-2(x-0)$$
$$y-7=-2x$$
$$y=-2x+7\rightarrow 2$$
حل المعادلتين ١ و ٢
$$y=-2x+7$$
$$y=\frac{3}{2}x$$
$$\frac{3}{2}x=-2x+7$$
$$\frac{3}{2}x+2x=7$$
$$3.5x=7$$
$$x=2$$
$$y=\frac{3}{2}x$$
$$y=\frac{3}{2}\times 2$$
$$y=3$$
إذن احداثيات ملتقى ارتفاعات ΔDEF هي $(2,3)$

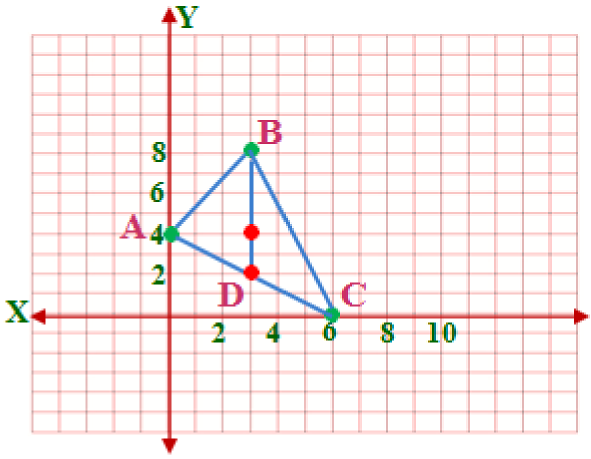
١٥) احتفالات:

ايجاد نقطة المنتصف للنقطة D للضلع $\overline{AC}$
$$A(0,4),C(6,0)$$
$$D\left(\frac{0+6}{2},\frac{0+4}{2}\right)=D(3,2)$$
المسافة من $D(3,2)$ إلى $B(3,8)$ تساوي $8-2$ أي ٦ وحدات

واذا كانت P هي مركز ΔABC فإن $BP=\frac{2}{3}BD$ ولذلك يقع المركز على بعد

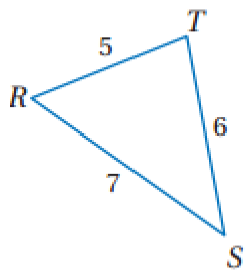
$6\times\frac{2}{3}$ أو ٤ وحدات وتكون احداثيات P هي $(3,8-4)$

إذن يتوازن المثلث عند النقطة $(3,4)$



4-3 المتباينات في المثلث (ص 227-233)

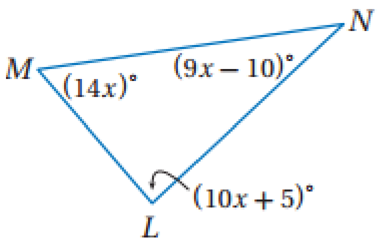
١٦)



الأضلاع بالترتيب من الأقصر إلى الأطول هي : $\overline{RT}, \overline{TS}, \overline{RS}$

الزوايا بالتريب من الأصغر إلى الأكبرهي: $\angle S, \angle R, \angle T$

١٧)



بما أن مجموع قياسات زوايا أي مثلث = ١٨٠ إذن:

$$14x + 9x - 10 + 10x + 5 = 180$$

$$33x - 5 = 180$$

$$33x = 185$$

$$x = 5.6$$

$(14x)^\circ = 78.4$

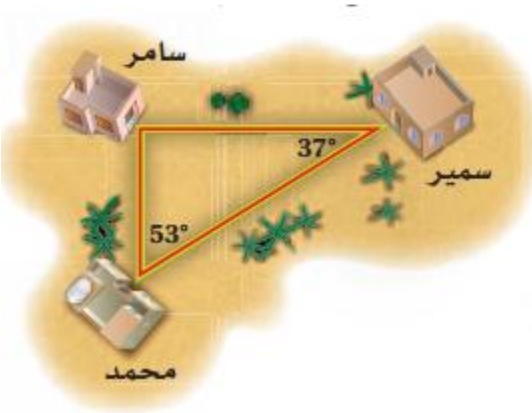
$(9x - 10)^\circ = 40.4$

$(10x + 5)^\circ = 61$

الزوايا بالتريب من الأصغر إلى الأكبرهي: $\angle N, \angle L, \angle M$

الأضلاع بالترتيب من الأقصر إلى الأطول هي : $\overline{ML}, \overline{MN}, \overline{LN}$

١٨) جيران:



الطريق الأقصر اصطحاب محمد لسامر وذهابهما معا إلى بيت سمير.

4-4 البرهان غير المباشر (ص 241-235)

١٩) $m\angle A < m\angle B$

٢٠) $\Delta FGH \ncong \Delta MNO$

٢١) ΔKLM ليس قائم الزاوية.

٢٢) $y \geq 4$

٢٣)

أفرض أن قياس إحدى الزاويتين x وقياس الأخرى y ومن تعريف الزوايا المتتامة يكون $x + y = 90$.

الخطوة ١: افرض أن الزاوية التي قياسها x زاوية قائمة. فيكون $x = 90^\circ$

الخطوة ٢: بما أن $x = 90^\circ$ فإن $x + y > 90^\circ$ وهذا تناقض لأننا نعلم أن $x + y = 90$.

الخطوة ٣: بما أن الفرض بأن إحدى الزاويتين قائمة أدى إلى تناقض فإن هذا الفرض خطأ لذلك فالنتيجة بأن كلا من الزاويتين ليست قائمة هي نتيجة صحيحة بالتأكيد.

٢٤) مطالعة:

أفرض أن ثمن أحد الكتابين x وثمن الآخر y.

المعطيات: $x+y>180$

المطلوب: إثبات أن $x>90$ أو $y>90$

برهان غير مباشر:

الخطوة ١: أفرض $x\le 90$ و $y\le 90$

الخطوة ٢: إذا كانت $x\le 90$ و $y\le 90$ فإن

$x+y\le 90+90$ أو $x+y\le 180$ وهذا تناقض لأننا نعلم أن $x+y>180$.

الخطوة ٣: بما أن الفرض $x\le 90$ و $y\le 90$ أدى إلى تناقض مع حقيقة معطاه فإن هذا الفرض خطأ وبذلك تكون النتيجة بأن $x>90$ أو $y>90$ صحيحة أي أن ثمن كتاب واحد على الأقل يزيد عن 90 ريالا.

4-5 متباينة المثلث (ص 243-248)

٢٥) نعم

$5+6\overset{?}{>}9$ $\quad$ $6+9\overset{?}{>}5$ $\quad$ $9+5\overset{?}{>}6$

$11>9$ ✓ $\quad$ $15>5$ ✓ $\quad$ $14>6$ ✓

بما أن طولي كل قطعتين أكبر من طول القطعة الثالثة، فإن القطع المستقيمة التي أطوالها 5,6,9 يمكن تكون مثلث.

٢٦)

$3+4\overset{?}{>}8$

$7\not>8$ ✗

بما أن طولي كل قطعتين ليس أكبر من طول القطعة الثالثة، فإن القطع المستقيمة التي أطوالها 3,4,8 لا يمكن تكون مثلث.

٢٧)

بفرض أن طول الضلع الثالث x

$5+7\overset{?}{>}x$

$12<x$ أو $12>x$

$7+x\overset{?}{>}5$ $\qquad$ $5+x\overset{?}{>}7$

$x>-2$ $\qquad$ $x>2$

$2ft<x<12ft$

٢٨)

بفرض أن طول الضلع الثالث x

$10.5+4\overset{?}{>}x$

$14.5<x$ أو $14.5>x$

$10.5+x\overset{?}{>}4$ $\qquad$ $4+x\overset{?}{>}10.5$

$x>-6.5$ $\qquad$ $x>6.5$

$6.5cm<x<14.5cm$

٢٩) دراجات:

بفرض أن طول الضلع الثالث x

$2+3\overset{?}{>}x$

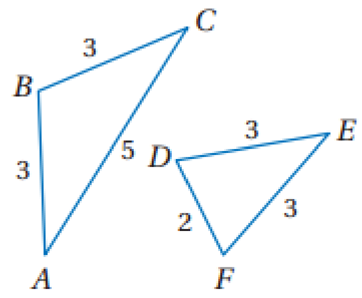
$5<x$ أو $5>x$

$2+x\overset{?}{>}3$ $\qquad$ $3+x\overset{?}{>}2$

$x>1$ $\qquad$ $x>-1$

$1km<x<5km$

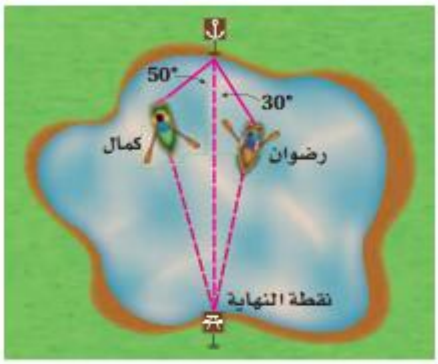
(٣٠



بما أن $BC \cong DE$ و $AB \cong EF$ و $AC > DF$

إذن حسب عكس متباينة SAS: $m\angle ABC > m\angle DEF$

(٣١) تجديف:

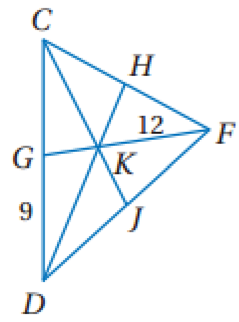


حسب متباينة SAS: رضوان هو الأقرب إلى نقطة النهاية.

اختبار الفصل

١) حدائق: مركز الدائرة الداخلية.

أوجد طول كل مما يأتي:



٢) بما أن K مركز ΔCDF إذن:

$$DK = \frac{2}{3}DH$$

$$16 = \frac{2}{3}DH$$

$$DH = 24$$

$$DK = DH - KH$$

$$16 = 24 - KH$$

$$KH = 24 - 16$$

$$KH = 8$$

٣)

$$CD = CG + GD$$

$$CD = 9 + 9$$

$$CD = 18$$

٤)

$$FK = \frac{2}{3}FG$$

$$12 = \frac{2}{3}FG$$

$$FG = 18$$

٥) برهان اكتب برهان غير مباشر:

المعطيات: $5x+7\geq 52$

المطلوب: $x\geq 9$

البرهان:

الخطوه ١: أفترض أن $x<9$

الخطوه ٢: أعمل جدولا بقيم ممكنه لـ x على فرض أن $x<9$.

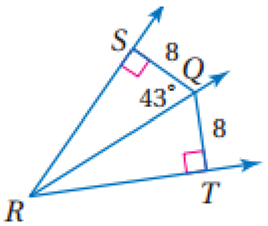
x	٨	٧	٠	-2
$5x+7$	٤٧	٤٢	٧	-3

عندما تكون $x<9$ فإن $5x+7<52$.

الخطوه ٣: أدى الافتراض إلى تناقض مع المعلومة المعطاه $5x+7\geq 52$. لذلك فإن الافتراض بأن $x<9$. وتكون النتيجة الأصلية بأن $x\geq 9$ صحيحة بالتأكيد.

أوجد قياس كل مما يأتي:

٦)

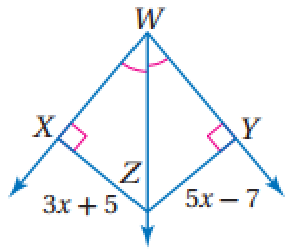


بما أن $SQ=QT$ و $QT\perp RT$ و $QS\perp RS$

إذن حسب عكس نظرية منصف الزاوية: QR ينصف $\angle SQT$

إذن $\angle SQT=43^{\circ}$

٧)



بما أن ZW ينصف $\angle XWY$ و $ZY \perp WY$ و $XZ \perp XW$

إذن حسب نظرية منصف الزاوية:

$$YZ = XZ$$

$$5x - 7 = 3x + 5$$

$$5x - 3x = 5 + 7$$

$$2x = 12$$

$$x = 6$$

$$XZ = 3x + 5$$

$$XZ = 3 \times 6 + 5$$

$$XZ = 23$$

٨) اختيار من متعدد:

الأختيار: B

بفرض أن طول الضلع الثالث x

$$3.1 + 4.6 \overset{?}{>} x$$

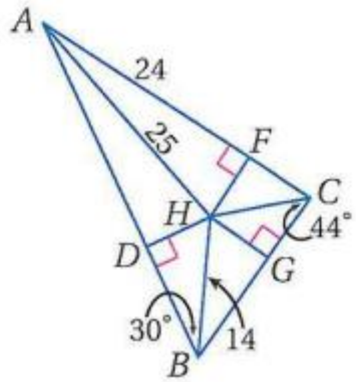
$7.7 > x$ أو $7.7 < x$

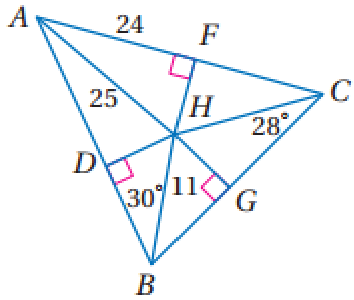
$$3.1 + x \overset{?}{>} 4.6 \qquad 4.6 + x \overset{?}{>} 3.1$$

$$x > 1.5 \qquad x > -1.5$$

$$1.5 < x < 7.7$$

٩)





بما أن H مركز الدائرة الداخلية في ΔABC:

$$(AH)^2=(AF)^2+(FH)^2$$

$$(25)^2=(24)^2+(FH)^2$$

$$625=576+(FH)^2$$

$$(FH)^2=49$$

$$FH=DH=7$$

١٠)

$$(HB)^2=(BD)^2+(DH)^2$$

$$(14)^2=(BD)^2+(7)^2$$

$$196=49+(BD)^2$$

$$(BD)^2=196-49$$

$$(BD)^2=147$$

$$BD\approx 12.12$$

١١)

$\angle ACH=16^\circ$ بالتنصيف

$$\angle BAC=180-(88+60)$$

$$\angle HAC=32^\circ$$

١٢)

$$\angle DHB = 180 - (30 + 90)$$

$$\angle DHB = 60^\circ$$

$$\angle DHG = \angle DHB + \angle GHB$$

$$\angle DHG = 60^\circ + 60^\circ$$

$$\angle DHG = 120^\circ$$

١٣) اختيار من متعدد:

الاختيار: C

بفرض أن طول الضلع الثالث x

$$5 + 11 \overset{?}{>} x$$

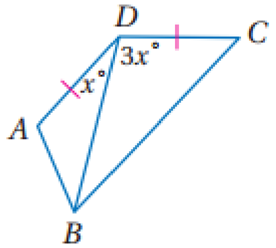
$16 > x$ أو $16 < x$

$5 + x \overset{?}{>} 11$ $\qquad$ $11 + x \overset{?}{>} 5$

$x > 6$ $\qquad$ $x > -6$

$$6 < x < 16$$

١٤) قارن بين BC, AB في الشكل أدناه:



بما أن $DC = AD$ و $\overline{DB} = \overline{DB}$ حسب خاصية الانعكاس

و $\angle ADB < \angle CDB$ إذن حسب متباينة SAS: $BC > AB$

اكتب الافتراض الضروري:

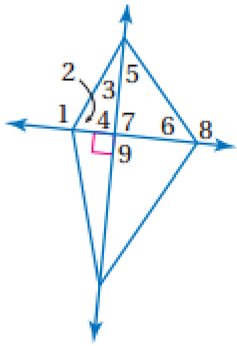
١٥) إذا كان ٨ عاملا لعدد n، فإن ٤ ليس عامل للعدد n

١٦) $\angle M < \angle N$

١٧) إذا كان $3a + 7 \le 28$ فإن $a > 7$

استعمل الشكل المجاور، لتحدد أي زاوية لها أكبر قياس في كل من المجموعات الاتية:

١٨)



١٨) $\angle 1$ هي الزاوية الأكبر حسب متباينة الزاوية الخارجية

١٩) $\angle 8$

٢٠) $\angle 4$ لان المثلث قائم الزاوية وزاوية $90°$ فية تكون هي أكبر زاوية

٢١)

بفرض أن طول الضلع الثالث x

$10 + 16 \overset{?}{>} x$

$26 > x$ أو $26 < x$

$16 + x \overset{?}{>} 10$ $\quad$ $10 + x \overset{?}{>} 16$

$x > -6$ $\quad$ $x > 6$

$6 < x < 26$

٢٢)

بفرض أن طول الضلع الثالث x

$23 + 39 \overset{?}{>} x$

$62 > x$ أو $62 < x$

$23 + x \overset{?}{>} 39$ $\quad$ $39 + x \overset{?}{>} 23$

$x > 16$ $\quad$ $x > -16$

$16 < x < 62$

تمارين ومسائل

١) D

$$QP = \frac{2}{3}QT$$

$$14 = \frac{2}{3}QT$$

$$QT = 21$$

٢) C

مساحة المثلث = $\frac{1}{2}$ طول القاعدة في الإرتفاع

مساحة المثلث = $\frac{1}{2} \times 7 \times 9 = 31.5$

٣) الاختيار: C

بفرض أن النقاط هي: $D(-2,4), E(4,4), F(1,-2)$

أوجد معادلة ارتفاع من D إلى $\overline{EF}$

بما أن ميل $\overline{EF}$ يساوي $2 = \frac{-6}{-3} = \frac{-2-4}{1-4} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = m$

فإن ميل الارتفاع العمودي على $\overline{EF}$ يساوي $-\frac{1}{2}$

$y - y_1 = m(x - x_1)$ صيغة الميل ونقطة

$$D(-2,4),\ m = -\frac{1}{2}$$

$$y-4=-\frac{1}{2}(x+2)$$

$$y-4=-\frac{1}{2}x-1$$

$$y=-\frac{1}{2}x-1+4$$

$$y=-\frac{1}{2}x+3\rightarrow 1$$

معادلة الإرتفاع من E إلى $\overline{DF}$

بما أن ميل $\overline{DF}$ يساوي $m=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}=\frac{-2-4}{1+2}=\frac{-6}{3}=-2$

فإن ميل الارتفاع العمودي على $\overline{DF}$ يساوي $\frac{1}{2}$

$y-y_1=m(x-x_1)$ صيغة الميل ونقطة

$$E(4,4),\ m=\frac{1}{2}$$

$$y-4=\frac{1}{2}(x-4)$$

$$y-4=\frac{1}{2}x-2$$

$$y=\frac{1}{2}x+2\rightarrow 2$$

حل المعادلتين ١ و ٢

$$y = \frac{-1}{2}x + 3$$

$$y = \frac{1}{2}x + 2$$

$$\frac{-1}{2}x + 3 = \frac{1}{2}x + 2$$

$$\frac{-1}{2}x - \frac{1}{2}x = 2 - 3$$

$$-x = -1$$

$$x = 1$$

$$y = \frac{1}{2}x + 2$$

$$Y = 2.5$$

إذن احداثيات ملتقى ارتفاعات ΔDEF هي $\left(1, \frac{5}{2}\right)$

٤) D : $AB = AC$

٥) B

$$(X)^2 = (1.6)^2 + (3)^2$$

حسب نظرية فيثاغورث

$$(X)^2 = 2.56 + 9$$

$$(X)^2 = 11.56$$

$$X = 3.4$$

اختبار معياري

أسئلة الاختيار من متعدد:

١) أوجد قيمة x:

حسب نظرية منصف الزاوية:

$$4x+1=5x-5$$

$$4x-5x=-5-1$$

$$-x=-6$$

$$x=6$$

الاختيار: D

٢)

$$7+4\overset{?}{>}x$$

$11<x$ أو $11>x$

$$4+x\overset{?}{>}7 \qquad 7+x\overset{?}{>}4$$

$$x>3 \qquad x>-3$$

$$3<x<11$$

الاختيار: D

٣)

الاختيار: A: ارتفاع

٤)

الاختيار: A

بما أن $QP<PR<QR$ إذن $\angle R<\angle Q<\angle P$

٥)

الاختيار: B: $\angle S$ زاوية منفرجة

٦)

الاختيار: C: منفرج الزاوية لان الزاوية المتبقية قياسها أكبر من 90° :

$$180^\circ-(25+57)=98^\circ$$

٧) الاختيار: C:

$$m=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}=\frac{-2+5}{-6-3}=\frac{3}{-9}=\frac{-1}{3}$$

أسئلة ذات إجابات قصيرة

٨)

بفرض أن طول الضلع الثالث x

$$9+15\overset{?}{>}x$$

$24>x$ أو $24<x$

$$15+x\overset{?}{>}9 \qquad 9+x\overset{?}{>}15$$

$$x>-6 \qquad x>6$$

$$6<x<24$$

إذن ٧ يمكن أن يكون أصغر رقم للضلع الثالث

٩)

النقاط هي: $X(-3,2), Y(-1,4), Z(5,1)$

أوجد معادلة ارتفاع من Z إلى $\overline{XY}$

بما أن ميل $\overline{XY}$ يساوي 1 $m=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}=\frac{4-2}{-1+3}=\frac{2}{2}=1$

فإن ميل الارتفاع العمودي على $\overline{XY}$ يساوي -1

صيغة الميل ونقطة $y-y_1=m(x-x_1)$

$$Z(5,1),\ m=-1$$

$$y-1=-1(x-5)$$

$$y-1=-x+5$$

$$y=-x+6\rightarrow 1$$

معادلة الإرتفاع من X إلى $\overline{YZ}$

بما أن ميل $\overline{YZ}$ يساوي $m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{1-4}{5+1} = \frac{-3}{6} = \frac{-1}{2}$

فإن ميل الارتفاع العمودي على $\overline{YZ}$ يساوي 2

صيغة الميل ونقطة $y - y_1 = m(x - x_1)$

$X(-3,2),\ m = 2$

$y - 2 = 2(x+3)$

$y - 2 = 2x + 6$

$y = 2x + 8 \rightarrow 2$

حل المعادلتين ١ و ٢

$y = 2x + 8$

$y = -x + 6$

$-x + 6 = 2x + 8$

$-x - 2x = 8 - 6$

$-3x = 2$

$x = \frac{2}{-3}$

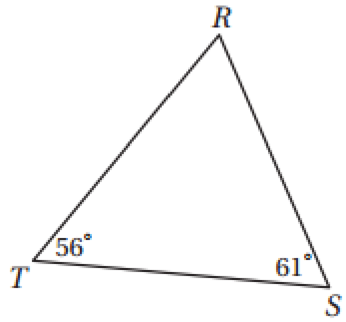
$y = 2x + 8$

$y = 2 \times \frac{2}{-3} + 8$

$y = \frac{20}{3}$

إذن احداثيات ملتقى ارتفاعات ΔDEF هي $\left(\frac{2}{-3}, \frac{20}{3}\right)$

١٠) اكتب أضلاع المثلث أدناه مرتبة من تبعاً لأطوالها من الأقصر إلى الأطول:

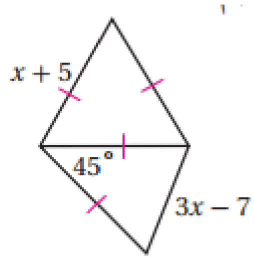


$$\angle R = 180^\circ - \left(56^\circ + 61^\circ\right)$$

$$\angle R = 63^\circ$$

بما أن $\angle T < \angle S < \angle R$ إذن $\overline{RS} < \overline{RT} < \overline{TS}$

١١)



بما أن المثلث العلوي جميع أضلاعه متساوية إذن المثلث متساوي الاضلاع وكل زاوية من زواياه $= 60^\circ$

إذن حسب متباينة (SAS)

$$3x - 7 < x + 5$$

$$3x - x < 5 + 7$$

$$2x < 12$$

$$x < 6$$

$$3x - 7 > 0$$

$$3x > 7$$

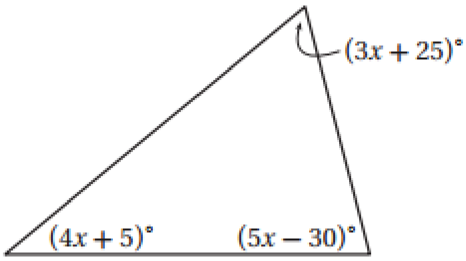
$$x > \frac{7}{3}$$

$$\frac{7}{3} < x < 6$$

١٢)

حمزة؛ انعطف حمزة $20°$ جنوبا، لذلك فقياس الزاوية المقابلة للضلع الذي يمثل بعده عن المخيم يساوي $180° - 20°$ أو $160°$. أما هاني فقد انعطف $30°$ شمالا لذلك فقياس الزاوية المقابلة للضلع الذي يمثل بعده عن المخيم يساوي $180° - 30°$ أو $150°$. وحسب متباينة SAS: بما أن $160° > 150°$ فإن حمزة يكون أبعد عن المخيم.

١٣) أوجد قيمة x:



بما أن مجموع قياسات زوايا المثلث ١٨٠ إذن:

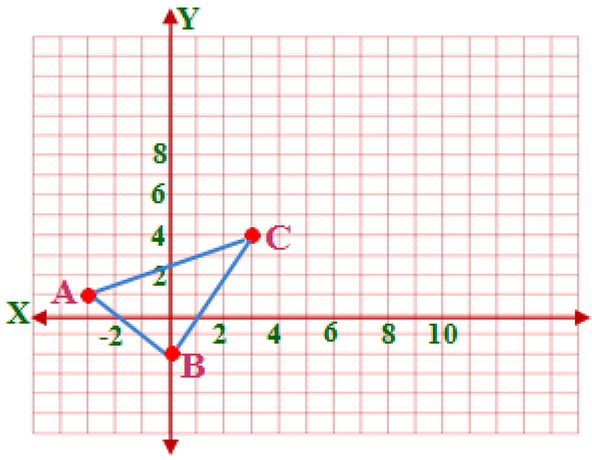
$$3x + 25 + 5x - 30 + 4x + 5 = 180$$

$$12x = 180$$

$$x = 15$$

أسئلة ذات إجابات مطولة

(14a



(14b

$$d_{(A,B)} = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

$$d = \sqrt{(0+3)^2 + (-2-1)^2}$$

$$d = \sqrt{9+9}$$

$$d = \sqrt{18} \approx 4.2$$

$$d_{(B,C)} = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

$$d = \sqrt{(3-0)^2 + (4-(-2))^2}$$

$$d = \sqrt{9+36}$$

$$d = \sqrt{45} \approx 6.7$$

$$d_{(A,C)} = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

$$d = \sqrt{(3+3)^2 + (4-1)^2}$$

$$d = \sqrt{36+9}$$

$$d = \sqrt{45} \approx 6.7$$

14c) ΔABC حاد الزوايا ومتطابق الضلعين.

14d) $m\angle A < m\angle C$ لأن طول الضلع المقابل للزاوية C في المثلث أقصر من طول الضلع المقابل للزاوية A.