وزارة التربية والتعليم
Ministry of Education
المملكة العربية السعودية

الرياضيات

للصف الثالث الثانوي

مصادر المعلم للأنشطة الصفية

الفصل الثامن: النهايات والاشتقاق

العبيكان
Obeikan

McGraw Hill Education

يوزع مجانًا ولا يباع

١٤٣٥ هـ - ٢٠١٤ م

Glencoe Mathematics © 2010

CHAPTER RESOURCE MASTERS

Precalculus

الرياضيات ـ الصف الثالث الثانوي

مصادر المعلم للأنشطة الصفية

أعدَّ النسخة العربية: شركة العبيكان للتعليم

www.obeikaneducation.com

McGraw Hill Education

العبيكان Obeikan

بِسْمِ اللهِ الرَّحْمٰنِ الرَّحِيمِ

المقدمة

الحمد لله، والصلاة والسلام على نبينا محمد، وعلى آله وصحبه أجمعين، وبعد:

عزيزي المعلم / عزيزتي المعلمة

يسرنا أن نقدِّم هذه المجموعة من التدريبات المساندة، التي تراعي الفروق الفردية بين الطلاب. حيث نطمح أن يساعدك التنوع في هذه التدريبات على الوصول إلى جميع الطلاب في الصف، مهما تباينت مستوياتهم.

وقد تم تخصيص صفحة أو أكثر لكل نوعٍ من هذه التدريبات؛ لتغطي درسًا من دروس كتاب الطالب. حيث يمكنك أن تكلف الطلاب حل صفحة التدريبات المقابلة لكل درس بحسب مستوى كل منهم؛ سواء في داخل الصف أم في المنزل. وليست هذه التدريبات بديلًا عن كتاب التمارين، ولكنها مساندة ومكملة له.

وتشمل هذه التدريبات الأنواع التالية:

تدريبات إعادة التعليم

تركِّز هذه التدريبات على محتوى الدروس في كتاب الطالب، وتقدِّمه بأسلوب تدريسي ومعالجة يختلفان عن كتابي الطالب والتمارين. وهي موجَّهة إلى الطلاب ذوي المستوى دون المتوسط.

تدريبات حل المسألة

تأتي هذه التدريبات انطلاقًا من اهتمام هذه المناهج بحلّ المسألة، حيث تم تخصيصها لتقديم تدريبات إضافية على حل المسألة ترتبط بكل درس من دروس كتاب الطالب. وهي موجَّهة إلى جميع الطلاب على اختلاف مستوياتهم التحصيلية.

التدريبات الإثرائية

تساعد هذه التدريبات على التوسُّع في مفاهيم الدرس، كما تؤدي إلى توسيع مدارك الطلاب حول تعلم الرياضيات بشكل عام. وهذه التدريبات موجَّهة إلى الطلاب ذوي المستوى فوق المتوسط.

ملحق الإجابات:

يتضمن هذا المصدر في آخره ملحقًا بالإجابات، حيث تظهر باللون الأسود الغامق على صفحات مصغَّرة.

الفهرس

8-1 تدريبات إعادة التعليم
تقدير النهايات بيانيًّا

تقدير النهاية عند قيمة ثابتة.

النهاية من اليسار	النهاية من اليمين
إذا اقتربت قيم الدالة $f(x)$ من قيمة وحيدة L_1 ، عندما تقترب قيم x من c من اليسار، فإن: $\lim\limits_{x \to c^-} f(x) = L_1$	إذا اقتربت قيم الدالة $f(x)$ من قيمة وحيدة L_2 ، عندما تقترب قيم x من c من اليمين، فإن: $\lim\limits_{x \to c^+} f(x) = L_2$
وجود النهاية عند نقطة تكون نهاية الدالة $f(x)$ موجودة عندما تقترب x من c، إذا وفقط إذا وُجدت النهايتان من اليسار ومن اليمين وكانتا متساويتين. بمعنى أنه: $\lim\limits_{x \to c^+} f(x) = L$ $= \lim\limits_{x \to c^-} f(x)$ ، إذا وفقط إذا $\lim\limits_{x \to c} f(x) = L$	

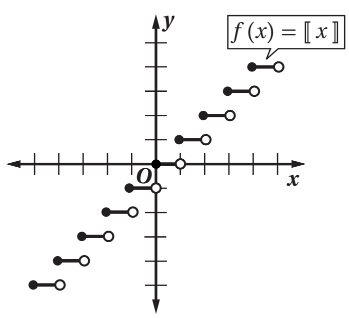
مثال قدِّر كلًّا من النهايات الآتية إذا كانت موجودة.

$\lim\limits_{x \to 2^-} [\![x]\!], \lim\limits_{x \to 2^+} [\![x]\!], \lim\limits_{x \to 2} [\![x]\!]$

يظهر من منحنى الدالة $f(x) = [\![x]\!]$ ، أن $\lim\limits_{x \to 2^-} [\![x]\!] = 1$

وَ $\lim\limits_{x \to 2^+} [\![x]\!] = 2$ ولمّا كانت النهايتان من اليسار واليمين مختلفتين

عندما تقترب x من 2، فإن $\lim\limits_{x \to 2} [\![x]\!]$ غير موجودة.



تمارين

قدِّر كلًّا من النهايات الآتية إذا كانت موجودة:

1) $\lim\limits_{x \to 0^+} \frac{|3x|}{x}$

2) $\lim\limits_{x \to -2^-} \frac{|x-2|}{x^2-4}$

3) $\lim\limits_{x \to 2} \frac{x^2+3x-10}{x-2}$

4) $\lim\limits_{x \to 0} (1 - cos^2 x)$

5) $\lim\limits_{x \to 3^-} \frac{x^3+27}{x^2-9}$

6) $\lim\limits_{x \to -2} \frac{1}{(x+2)^2}$

الاسم: ____________ التاريخ: ________

8-1 تدريبات إعادة التعليم

(تتمة)

تقدير النهايات بيانيًّا

تقدير النهايات عند المالانهاية :

- إذا اقتربت قيم $f(x)$ من عدد وحيد L_1 عندما تزداد قيم x دون حدود، فإن $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = L_1$
- إذا اقتربت قيم $f(x)$ من عدد وحيد L_2 عندما تنقص قيم x دون حدود، فإن $\lim\limits_{x\to -\infty} f(x) = L_2$

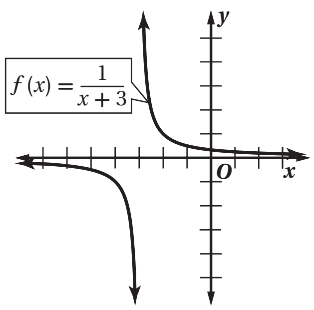
مثال

قدِّر قيمة: $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{1}{x+3}$.

التحليل بيانيًّا : التمثيل البياني للدالة $f(x) = \dfrac{1}{x+3}$ يبيِّن أن $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{1}{x+3} = 0$؛ إذ يقترب منحنى الدالة من المحور x كلما ازدادت قيم x، وهذا يعني وجود خط تقارب أفقي هو $y=0$

التعزيز عدديًّا : كوِّن جدولًا يظهر قيمًا كبيرةً لـِ x.

x	10	100	1000	10000	100000
$f(x)$	0.08	0.01	0.001	0.0001	0.00001



يظهر الجدول أن قيم $f(x)$ تقترب من الصفر كلما ازدادت قيم x.

تمارين

قدِّر كل من نهايةٍ مما يأتي إذا كانت موجودة:

1)

2)

3) $\lim\limits_{x\to -\infty} \dfrac{-3x+1}{x-2}$

4) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{1}{x^2}$

5) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{2x^2-5}{3x^3+2x}$

6) $\lim\limits_{x\to -\infty} (2^x + x)$

7) $\lim\limits_{x\to\infty} (x \sin x)$

8) $\lim\limits_{x\to -\infty} (2.7)^{2x}$

9) $\lim\limits_{x\to\infty} \cos 2x\pi$

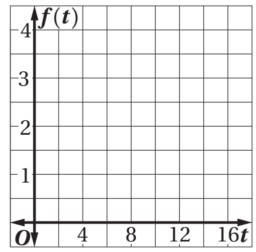
الاسم: ________________ التاريخ: ________

8-1 تدريبات حل المسألة

تقدير النهايات بيانيًّا

1) **نمو البكتيريا:** يعطى وزن مجتمع بكتيري بالعلاقة: $f(t) = \frac{4}{1 + 0.35e-0.2t}$ جرامًا بعد t ساعة.

a) مثِّل بيانيًّا منحنى الدالة $f(t)$ في الفترة $0 \le t \le 18$

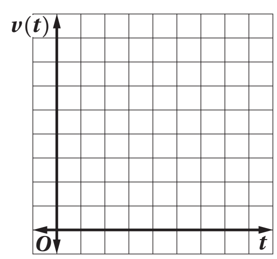


b) استعمل المنحنى لتقدير وزن البكتيريا بعد 8 ساعات. مقرّبًا إجابتك إلى أقرب جزءٍ من عشرةٍ.

c) قدِّر $\lim_{t \to \infty} f(t)$، إذا كانت موجودة ، وفسِّر معناها.

2) **سيارات:** يبلغ ثمن سيارة 30000 ريال، وبعد t سنة من شرائها يصبح سعرها $v(t) = 30000\,(0.85)^t$.

a) مثِّل الدالة $v(t)$ بيانيًّا على الفترة $0 \le t \le 8$.



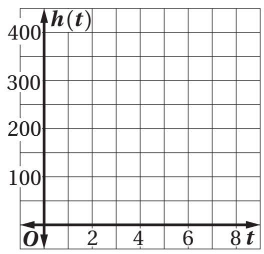
b) قدِّر قيمة السيارة بعد 10 سنوات من شرائها.

c) قدِّر قيمة $\lim_{t \to \infty} v(t)$، إذا كانت موجودة، وفسر معناها.

3) **ارتفاع المقذوفات:** افترض أن جسمًا قذف إلى أعلى، والدالة $h(t)$ تمثل ارتفاعه بالأقدام بعد t ثانية، ويبين الجدول الآتي ارتفاع القذيفة $h(t)$ بالأقدام بعد t ثانية من قذفها.

t	$h(t)$	t	$h(t)$
0	256	4	384
1	336	5	336
2	384	6	256
3	400	7	144

a) مثِّل البيانات، وارسم منحنًى يمر بنقاط البيانات التي مثَّلتها للحصول على الدالة $h(t)$.



b) استعمل التمثيل البياني لتقدير قيمة $\lim_{t \to 8^-} h(t)$

4) **النظرية النسبية:** يُعبَّر عن كتلة جسم متحرك بسرعة v نظريًّا بالمعادلة: $m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{s^2}}}$، حيث m_0 كتلة الجسم عند السكون، وs سرعة الضوء وv سرعة الجسم، فما قيمة $\lim_{v \to s^-} m$ ؟

5) **كهرباء:** وجد أحمد أن معادلة فرق جهد دائرةٍ كهربائية هي: $V(t) = 140\, sin\, 120\, \pi t$، وضح سبب كون $\lim_{t \to \infty} V(t)$ غير موجودة.

الاسم: ________________ التاريخ: ________

8-1 التدريبات الإثرائية

النهايات

هناك العديد من أمثلة النهايات في الحياة العملية؛ بعضها مطلقة لا يمكن تجاوزه، وبعضها الآخر يمثل إرشادات، يدفع من يتجاوزها غرامة.

املأ الجدول

النهاية	كيف تضبط النهاية؟	هل النهاية مطلقة؟	الغرامة في حال تجاوز النهاية
1) السرعة القصوى في شارع سريع			
2) ارتفاع نفق			
3) وزن الحقيبة في رحلة جوية			
4) درجة حرارة جسم دافئ موضوع في غرفة باردة			
5) سرعة مركبة فضائية متسارعة			

رياضيًّا، قد تكون النهاية موجودة ومنتهية، أو غير منتهية، أو غير موجودة، صنِّف كل نهاية من حيث كونها موجودة ومنتهية، أو غير منتهية، أو غير موجودة، وإذا كانت النهاية موجودة ومنتهية، فأوجد قيمتها:

1) $\lim\limits_{x \to 0} \frac{1}{x^2+1}$

2) $\lim\limits_{x \to 1} \frac{x+1}{x^2-1}$

3) $\lim\limits_{x \to 2} \frac{x^2-4}{x^2-x-2}$

4) $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\sin|x|}{x}$

5) $\lim\limits_{x \to 0} \frac{-1}{x^4}$

الاسم: ________________ التاريخ: ________

8-2 تدريبات إعادة التعليم

حساب النهايات جبريًّا

حساب النهاية عند نقطة

مثال 1

أوجد: $\lim\limits_{x \to -2} (-2x^4 + 3x^3 - 5x + 3)$ باستعمال التعويض المباشر إذا كان ممكنًا.

لمّا كانت النهاية المطلوبة لكثيرة حدود، فإنه يمكنك إيجاد النهاية بالتعويض المباشر.

$$\lim_{x \to -2} (-2x^4 + 3x^3 - 5x + 3) = -2(-2)^4 + 3(-2)^3 - 5(-2) + 3$$
$$= -32 - 24 + 10 + 3 = -43$$

مثال 2

احسب: $\lim\limits_{x \to 4} \dfrac{x^2 - 9x + 20}{x - 4}$

$$\lim_{x \to 4} \frac{x^2 - 9x + 20}{x - 4} = \lim_{x \to 4} \frac{(x-5)(x-4)}{(x-4)} \quad \text{حلّل}$$
$$= \lim_{x \to 4} (x - 5) \quad \text{اختصر العامل المشترك}$$
$$= 4 - 5 = -1 \quad \text{عوّض وبسّط}$$

مثال 3

احسب: $\lim\limits_{x \to 16} \dfrac{\sqrt{x} - 4}{x - 16}$

ينتج عن التعويض المباشر: $\dfrac{\sqrt{16}-4}{16-16} = \dfrac{0}{0}$؛ لذا اضرب في مرافق البسط قبل التحليل، واختصر العوامل المشتركة.

$$\lim_{x \to 16} \frac{\sqrt{x} - 4}{x - 16} = \lim_{x \to 16} \frac{\sqrt{x} - 4}{x - 16} \cdot \frac{\sqrt{x} + 4}{\sqrt{x} + 4} \quad \text{اضرب في المرافق}$$
$$= \lim_{x \to 16} \frac{x - 16}{(x - 16)(\sqrt{x} + 4)} \quad \text{بسّط}$$
$$= \lim_{x \to 16} \frac{\cancel{x - 16}}{(\cancel{x - 16})(\sqrt{x} + 4)} \quad \text{اختصر العامل المشترك}$$
$$= \lim_{x \to 16} \frac{1}{(\sqrt{x} + 4)} \quad \text{بسّط}$$
$$= \frac{1}{\sqrt{16} + 4} = \frac{1}{8} \quad \text{عوّض وبسّط}$$

تمارين

احسب كل نهايةٍ مما يأتي:

1) $\lim\limits_{x \to 3} (2x^2 - 5x)$

2) $\lim\limits_{x \to 5} \sqrt{x^3 - 4}$

3) $\lim\limits_{x \to -2} \dfrac{x^2 + 9x + 14}{x + 2}$

4) $\lim\limits_{x \to 4} \dfrac{\sqrt{x} - 2}{x - 4}$

5) $\lim\limits_{x \to -4} \left(\dfrac{1}{x} + x\right)$

6) $\lim\limits_{x \to 2} (-x^2 + 5x - 1)$

الاسم: ________________ التاريخ: ________

8-2 تدريبات إعادة التعليم

(تتمة)

حساب النهايات جبريًا

حساب النهايات عند المالانهاية

دوال القوى	دوال كثيرات الحدود	دوال المقلوب
لأي عدد صحيح موجب n، تكون • $\lim_{x \to \infty} x^n = \infty$ • $\lim_{x \to -\infty} x^n = \infty$ إذا كان n عددًا زوجيًا. • $\lim_{x \to -\infty} x^n = -\infty$ إذا كان n عددًا فرديًا.	افترض أن p كثيرة حدود، $p(x) = a_n x^n + \ldots + a_1 x + a_0$، فإن: $\lim_{x \to \infty} p(x) = \lim_{x \to \infty} a_n x^n$ و $\lim_{x \to -\infty} p(x) = \lim_{x \to -\infty} a_n x^n$	لأي عدد صحيح موجب n، تكون $\lim_{x \to \pm\infty} \frac{1}{x^n} = 0$

مثال

احسب كل نهاية مما يأتي.

a) $\lim_{x \to -\infty} (x^5 - 6x + 1)$

$\lim_{x \to -\infty} (x^5 - 6x + 1) = \lim_{x \to -\infty} x^5$ نهاية دالة كثيرة حدود عند المالانهاية

$= -\infty$ نهاية دالة قوة عند المالانهاية

b) $\lim_{x \to \infty} (2x^4 + 5x^2)$

$\lim_{x \to \infty} (2x^4 + 5x^2) = \lim_{x \to \infty} 2x^4$ نهاية دالة كثيرة حدود عند المالانهاية

$= 2 \lim_{x \to \infty} x^4$ خاصية الضرب في ثابت

$= 2 \cdot \infty = \infty$ نهاية دالة القوة عند المالانهاية

تمارين

احسب كل نهاية مما يأتي:

1) $\lim_{x \to -\infty} (-2x^3 + 5x)$

2) $\lim_{x \to \infty} \frac{5}{x^2}$

3) $\lim_{x \to \infty} \frac{6x - 1}{10x + 7}$

4) $\lim_{x \to \infty} \frac{6x^2 - 2x}{x^3 + 1}$

5) $\lim_{x \to \infty} \frac{5x^4 + 2x^3 - 1}{2x^3 + x^2 - 1}$

6) $\lim_{x \to -\infty} (3x^3 + 5x - 1)$

8-2 تدريبات حل المسألة

حساب النهايات جبريًا

1) **بركة سباحة:** ضُخَّ محلول يحتوي على 0.3 جرام من الكلورين لكل لتر ماء في بركة سباحة، إذا أُعطي تركيز الكلورين في البركة بالجرامات لكل لتر ماء بعد t ثانية بالمعادلة : $C(t)=\dfrac{0.3t}{1000+t}$. أوجد $\lim\limits_{t\to\infty} C(t)$

2) **تلوّث:** المعادلة $C=\dfrac{60000\text{ P}}{100-\text{P}}$ تمثل تكلفة إزالة $P\%$ من الملوثات التي يتسبب فيها أحد المصانع، حيث $0\le p\le 100$ ، أوجد $\lim\limits_{p\to 100^-} C$

3) **سيارات:** اشترى علي سيارة بسعر 24000 ريال، إذا كانت العلاقة $c(t)=24(0.90)^t$. تعبّر عن سعر السيارة بالآلاف بعد t سنة.

a) أكمل الجدول، مقرّبًا الإجابة إلى أقرب جزء من مئة.

السنة	1	3	5	6
القيمة				

b) أوجد قيمة: $\lim\limits_{t\to\infty} c(t)$

4) **القيادة الآمنة:** في أثناء قيادة السيارة، لا بد من الحفاظ على مسافة أمان بين سيارتك والسيارة التي تسير أمامك. افترض أن مسافة الأمان المقترحة بالياردة تتعين بالمعادلة $y(x)=0.005\,x^2+0.3x+3$ ، حيث x السرعة بالأميال لكل ساعة، فأوجد $\lim\limits_{x\to 70} y(x)$.

5) **تصنيع:** تمثل المعادلة $c(p)=3000+20P$ تكلفة إنتاج P قطعة منتج معين بالريالات.

a) أوجد تكلفة إنتاج 100 قطعة.

b) بلغت تكلفة الإنتاج 21000 ريال في أحد الأيام. فكم عدد القطع التي أنتجها المصنع في ذلك اليوم؟

c) يمكن إيجاد متوسط تكلفة إنتاج القطعة بقسمة $c(p)$ على P، أوجد $\lim\limits_{p\to 15000}\dfrac{c(p)}{p}$

6) **أفران كهربائية:** الدالة $f(x)=\dfrac{250x+200000}{x}$ تمثل متوسط تكلفة الفرن الكهربائي عند إنتاج x فرنًا، أوجد $\lim\limits_{x\to 2000} f(x)$

8-2 التدريبات الإثرائية

نظرية الشطيرة

في الدرس (1 –8)، تعلمت أن $\lim\limits_{x \to 0} sin\frac{1}{x}$ غير موجودة، وذلك بسبب تذبذب الدالة بين 1– و1 كلما اقتربت x من 0.

ولكن، ماذا عن $\lim\limits_{x \to 0} x^2 sin\frac{1}{x}$ ؟ هل هذه النهاية غير موجودة لأن $\lim\limits_{x \to 0} sin\frac{1}{x}$ غير موجودة؟
تساعد نظرية الشطيرة على الإجابة عن هذا السؤال.

نظرية الشطيرة
إذا كان: $h(x) \le f(x) \le g(x)$ لجميع قيم x في فترة مفتوحة تحوي c، مع إمكانية استثناء c،
وكانت: $\lim\limits_{x \to c} h(x) = L = \lim\limits_{x \to c} g(x)$ ، فإن $\lim\limits_{x \to c} f(x)$ موجودة وتساوي L.

لاحظ أن $-1 \le sin\frac{1}{x} \le 1$ لجميع قيم x باستثناء $x=0$ ، اضرب المتباينة في x^2؛ لتحصل على $-x^2 \le x^2 sin\frac{1}{x} \le x^2$، ولتطبيق نظرية الشطيرة، افترض أن: $h(x) = -x^2, f(x) = x^2 sin\frac{1}{x}, g(x) = x^2$. تعلمت في الدرس (2–8) أن كلًّا من $\lim\limits_{x \to 0} g(x)$ و $\lim\limits_{x \to 0} h(x)$ تساوي 0؛ لذا فإن $\lim\limits_{x \to 0} x^2 sin\frac{1}{x} = 0$ حسب نظرية الشطيرة.

تمارين

1) إذا كانت: $2\sqrt{x-1} - 1 \le g(x) \le (2.7)^{x-2}$ ، فاستعمل نظرية الشطيرة لإيجاد $\lim\limits_{x \to 2} g(x)$

استعمل نظرية الشطيرة لإيجاد النهاية في كلٍّ مما يأتي:

2) $\lim\limits_{x \to 0} x^4 sin\frac{1}{x}$

3) $\lim\limits_{x \to 0} x^2 cos\frac{1}{\sqrt[3]{x}}$

4) $\lim\limits_{x \to 0} |x| sin\frac{\pi}{x}$

الاسم: ________________________ التاريخ: ____________

8-3 تدريبات إعادة التعليم

المماس والسرعة المتجهة

المماسات

معدل التغير اللحظي

يُعرَّف معدل التغير اللحظي لمنحنى $f(x)$ عند النقطة $(x,f(x))$ على أنه ميل المماس لمنحنى الدالة عند النقطة $(x, f(x))$،

ويُعطى بالصيغة: $m = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(x+h) - f(x)}{h}$، بشرط أن تكون النهاية موجودة.

مثال أوجد معادلة ميل منحنى الدالة $y= 3x^2 +1$ عند أي نقطة عليه.

$$m = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$ صيغة معدل التغير اللحظي

$$m = \lim_{h \to 0} \frac{[3(x+h)^2 + 1] - [3x^2 + 1]}{h}$$ $f(x+h) = 3(x+h)^2 + 1 , f(x) = 3x^2 + 1$

$$m = \lim_{h \to 0} \frac{[3x^2 + 6hx + 3h^2 + 1] - [3x^2 + 1]}{h}$$ فُك الأقواس

$$m = \lim_{h \to 0} \frac{3h(2x+h)}{h}$$ بسّط وحلّل

$$m = \lim_{h \to 0} 3(2x+h)$$ اختصر h

$$m = 6x$$ خواص النهايات

أيْ أن معادلة ميل المنحنى عند أي نقطة عليه هي $m= 6x$.

تمارين

أوجد معادلة ميل منحنى كل دالة مما يأتي عند أي نقطة عليه:

(1 $y = x^3 +1$

(2 $y = 4- 7x$

(3 $y = \dfrac{3}{x^2}$

(4 $y = \dfrac{4}{\sqrt{x}}$

$$\boldsymbol{m = \frac{-2}{x\sqrt{x}}}$$

8-3 تدريبات إعادة التعليم

(تتمة)

المماس والسرعة المتجهة

السرعة المتجهة اللحظية:

السرعة المتجهة اللحظية:
إذا أُعطي موقع جسم متحرك $f(t)$ بوصفه دالة في الزمن، فإن سرعة الجسم المتجهة اللحظية $v(t)$ عند الزمن t تُعطى بالصيغة: $v(t) = \lim_{h \to 0} \frac{f(t+h) - f(t)}{h}$ ، بشرط أن تكون هذه النهاية موجودة.

مثال 1

أُسقط حجر من ارتفاع 1500 قدم، ويُعبَّر عن ارتفاعه بعد t ثانية من إسقاطه بالصيغة: $f(t) = 1500 - 16t^2$ قدمًا، أوجد السرعة المتجهة اللحظية للحجر بعد 4 ثوانٍ.

$$v(t) = \lim_{h \to 0} \frac{f(t+h) - f(t)}{h}$$ صيغة السرعة المتجهة اللحظية

$$= \lim_{h \to 0} \frac{[1500 - 16(4+h)^2] - [1500 - 16(4)^2]}{h}$$ $f(4+h) = 1500 - 16(4+h)^2, f(4) = 1500 - 16(4)^2$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{-128h - 16h^2}{h}$$ اضرب وبسّط

$$= \lim_{h \to 0} \frac{h(-128 - 16h)}{h}$$ حلّل

$$= -128 - 16(0)$$ اختصر وعوّض.

$$= -128$$ بسّط

أي أن السرعة اللحظية بعد 4 ثوانٍ هي 128− قدمًا في الثانية.

تمارين

تمثل $s(t)$ بُعد جسيم متحرك عن نقطة ثابتة بالأقدام بعد t ثانية، أوجد السرعة المتجهة اللحظية للجسيم عند الزمن المعطى في كلٍّ مما يأتي:

(1 $s(t) = 800 - 16t^2;\ t = 3$

(2 $s(t) = -16t^2 + 1700;\ t = 5$

(3 $s(t) = 70t - 16t^2;\ t = 1$

(4 $s(t) = -16t^2 + 90t + 10;\ t = 2$

الاسم: ________ التاريخ: ________

8-3 تدريبات حل المسألة

المماس والسرعة المتجهة

1) **جسم ساقط:** أسقطت منى كرةً من على سطح بناية ارتفاعها $800ft$. والدالة: $s(t) = -16t^2 + 800$ تمثل ارتفاع الكرة عن سطح الأرض بالأقدام بعد t ثانية من إسقاطها، أوجد السرعة المتجهة اللحظية لسقوط الكرة بعد ثانيتين؟

2) **جسم ساقط:** أسقط تامر حجرًا من ارتفاع $1200ft$. والدالة: $s(t) = -16t^2 + 1200$. تمثل ارتفاع الحجر عن سطح الأرض بالأقدام بعد t ثانية من إسقاطه.

a) ما السرعة المتجهة اللحظية للحجر بعد 4 ثوان من إسقاطه؟

b) متى يصل الحجر إلى سطح الأرض؟

c) أوجد صيغة لسرعة الحجر اللحظية في أي لحظة.

d) أوجد سرعة الحجر عندما يصل إلى سطح الأرض.

3) **القفز البهلواني:** المعادلة: $h(t) = 900 - 16t^2$ تمثل ارتفاع بهلوان عن سطح الأرض بعد قفزه من ارتفاع 900 قدم، أوجد السرعة المتجهة اللحظية للبهلوان.

4) **السقوط الحر:** المعادلة: $h(t) = 15000 - 16t^2$ تمثل ارتفاع مِظلّيٍّ بالأقدام بعد t ثانية من قفزه من الطائرة.

a) أوجد السرعة المتجهة اللحظية للمظلي عند أي لحظة؟

b) ما ارتفاع المظلي بعد ثانيتين؟

c) ما السرعة المتجهة اللحظية للمظلي بعد 4 ثوان؟

5) **كرة قدم:** يركل لاعبٌ الكرةَ بسرعة ابتدائية قدرها $80ft/s$، فتصل ارتفاعًا (s) يُعبَّر عنه بالمعادلة: $s(t) = -16t^2 + 80t + 6.5$ قدمًا بعد t ثانية.

a) أوجد السرعة المتجهة اللحظية للكرة $v(t)$.

b) ما سرعة الكرة المتجهة بعد 0.5 ثانية؟

c) متى تصل الكرة إلى أقصى ارتفاع؟

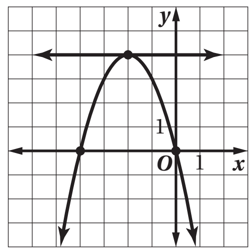
d) ما أقصى ارتفاع تبلغه الكرة؟

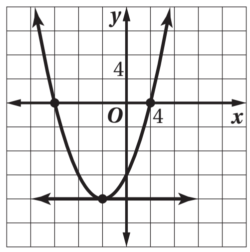
8-3 التدريبات الإثرائية

المماسات والرؤوس

هل يمكنك استعمال معادلة ميل القطع المكافئ الذي معادلته: $y = ax^2 + bx + c$ عند أي نقطة لإيجاد رأس القطع؟

خطوة 1: مثِّل قطعين مكافئين معادلتها $y = ax^2 + bx + c$ ، بحيث يكون $a > 0$ لأحدهما، و $a < 0$ للآخر، ثم ارسم مماس القطع عند رأسه، واكتب معادلة كل قطع تحت تمثيله البياني.





خطوة 2: أوجد ميل مماس كل قطع عند رأسه.

خطوة 3: أوجد معادلة ميل مماس كل قطع عند أي نقطة عليه.

خطوة 4: ساوِ كل معادلة ميل بالصفر، وحُلَّها بالنسبة لـ x، فيكون الحل هو الإحداثي x للرأس.

خطوة 5: عوِّض الإحداثي x للرأس في معادلة القطع لإيجاد الإحداثي y للرأس.

خطوة 6: اكتب إحداثيَّي رأس كل قطع.

تمارين

أوجد رأس القطع المكافئ في كلٍّ مما يأتي:

1) $y = 2x^2 - 4x + 2$

2) $y = -x^2 - 6x - 9$

3) $y = 4x^2 - 25$

4) $y = \frac{1}{2}x^2 - 2x + 4$

8-4 تدريبات إعادة التعليم

المشتقة

المشتقات والقواعد الأساسية : استعَمَلْتَ النهايات في الدرس (3 – 8)؛ لإيجاد ميل مماس منحنى الدالة عند أي نقطة عليه، وتُسمَّى هذه النهاية **مشتقة الدالة**.

يُرمز إلى مشتقة الدالة $f(x)$ بالرمز $f'(x)$، ويعبَّر عنها بالنهاية: $f'(x) = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(x+h) - f(x)}{h}$، بشرط وجود النهاية، وهناك العديد من قواعد الاشتقاق التي يمكن استعمالها لإيجاد مشتقة دالة تحتوي على أكثر من حد.

اسم القاعدة	القاعدة	مثال
مشتقة القوة	إذا كان $f(x) = x^n$ ، حيث n عدد حقيقيّ فإن $f'(x) = nx^{n-1}$.	إذا كان $f(x) = x^3$، فإن $f'(x) = 3x^2$.
مشتقة الثابت	مشتقة الدالة الثابتة تساوي صفرًا. إذا كان $f(x) = c$، فإن $f'(x) = 0$.	إذا كان $f(x) = -2$، فإن $f'(x) = 0$.
مشتقة مضاعفات القوة	إذا كان $f(x) = cx^n$، حيث c ثابت و n عدد حقيقي، فإن $f'(x) = cnx^{n-1}$.	إذا كان $f(x) = 5x^3$، فإن $f'(x) = 15x^2$.
مشتقة المجموع والفرق	إذا كان $f(x) = g(x) \pm h(x)$، فإن $f'(x) = g'(x) \pm h'(x)$.	إذا كان $f(x) = 4x^2 + 3x$، فإن $f'(x) = 8x + 3$.

مثال أوجد مشتقة كل دالة مما يأتي:

a) $f(x) = 3x^2 - 2x + 4$

$f(x) = 3x^2 - 2x + 4$ الدالة المعطاة

$f'(x) = 2 \cdot 3x^{2-1} - 2 \cdot 1x^{1-1} + 0$ قواعد الاشتقاق

$= 6x - 2$ بسّط

b) $f(x) = x^4 (4x^3 - 5)$

$f(x) = x^4 (4x^3 - 5)$ الدالة المعطاة

$f(x) = 4x^7 - 5x^4$ خاصية التوزيع

$f'(x) = 4 \cdot 7x^{7-1} - 5 \cdot 4x^{4-1}$ قواعد الاشتقاق

$= 28x^6 - 20x^3$ بسّط

تمارين

أوجد مشتقة الدالة $f(x)$، في كلٍّ مما يأتي، ثم احسب قيمة المشتقة عند النقاط المعطاة:

1) $f(x) = 4x^2 - 5; x = 3, -2$

2) $f(x) = -x^3 + 5x^2; x = 1, -4$

3) $f(x) = -8 + 3x - x^2; x = 0, -3$

4) $f(x) = 3x^4 + x^5 - 2; x = -1, 2$

أوجد مشتقة كل دالة مما يأتي:

5) $f(x) = 6x^2 - 3x + 4$

6) $f(x) = -x^{3.4} + 3x^{0.2}$

7) $f(x) = 4x^{\frac{1}{2}} - 3x^{\frac{3}{2}}$

8) $f(x) = -4x^2 + 3x^3 - 14$

8-4 تدريبات إعادة التعليم

(تتمة)

المشتقة

قاعدتا الضرب والقسمة استعمل القاعدتين الآتيتين؛ لإيجاد مشتقة حاصل الضرب أو القسمة.

قاعدة مشتقة الضرب	إذا كانت كلٌّ من الدالتين f, g قابلة للاشتقاق عند x، فإن $\frac{d}{dx}[f(x)g(x)] = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$
قاعدة مشتقة القسمة	إذا كانت كلٌّ من الدالتين f, g قابلة للاشتقاق عند x ، وكان $g(x) \neq 0$، فإن: $\frac{d}{dx}\left[\frac{f(x)}{g(x)}\right] = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{[g(x)]^2}$

مثال 1 أوجد مشتقة الدالة: $h(x)=(x^2-2)(2x^3+5x)$

افترض أن $f(x)= x^2 -2$ وَ $g(x)= 2x^3 + 5x$

$f'(x)=2x$ قواعد الاشتقاق $g'(x)= 6x^2+5$

$h'(x) = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$ قاعدة مشتقة الضرب

$= (2x)(2x^3 + 5x) + (x^2 - 2)(6x^2 + 5)$ عوّض

$= 4x^4 + 10x^2 + 6x^4 + 5x^2 - 12x^2 - 10$ خاصية التوزيع

$= 10x^4 + 3x^2 - 10$ بسّط

مثال 2 أوجد مشتقة: $h(x) = \frac{(2x^2 + 4)}{(x^2 - 1)}$

افترض أن $f(x)= 2x^2 + 4$ وَ $g(x)= x^2 -1$

$f'(x)=4x$ قواعد الاشتقاق $g'(x)= 2x$

$h'(x) = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{[g(x)]^2}$ قاعدة مشتقة القسمة

$= \frac{4x(x^2 - 1) - (2x^2 + 4)2x}{(x^2-1)^2}$ عوّض

$= \frac{4x^3 - 4x - 4x^3 - 8x}{(x^2-1)^2}$ خاصية التوزيع

$= \frac{-12x}{(x^2-1)^2}$ بسّط

تمارين

أوجد مشتقة كل دالة مما يأتي:

1) $h(x) = (-4 + 2x^2)(2x + 3)$

2) $m(x) = (3x - 1)(x^2 + 5x)$

3) $d(x) = \frac{x^2 + 3}{x - 1}$

4) $k(x) = \frac{3x^3 + 4}{2x^2 - 1}$

الاسم: ____________________ التاريخ: __________

8-4 تدريبات حل المسألة

المشتقة

1) **طيور:** يمكن تمثيل ارتفاع طائر بالأقدام بعد t ثانية من طيرانه بالمعادلة: $s(t) = \frac{-t^3}{3} + \frac{7}{2}t^2 + 18$ على الفترة $[1, 10]$، أوجد أقصى وأدنى ارتفاع للطائر.

2) **غطس:** قفز غطَّاس من قمة منحدر ارتفاعه 192 قدمًا عن سطح الماء، ويعبَّر عن ارتفاع الغطاس بعد t ثانية بالمعادلة: $h(t) = -16t^2 + 16t + 192$ قدمًا.

a) أوجد سرعة الغطاس عند أي لحظة t.

b) أوجد سرعة الغطاس بعد ثانية واحدة من قفزه.

c) أوجد الزمن الذي يستغرقه الغطاس للوصول إلى سطح الماء.

d) ما سرعة الغطاس عند وصوله سطح الماء؟

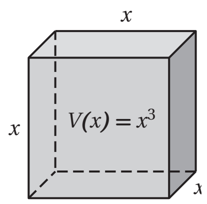
3) **هندسة:** الصيغة $V = \pi r^2 h$ تمثل حجم الأُسطوانة التي طول نصف قطرها r وارتفاعها h، افترض أن أسطوانة ارتفاعها 10 in، وطول نصف قطرها متغير.

a) اكتب صيغة تمثل حجم الأسطوانة بدلالة طول نصف قطرها.

b) أوجد صيغة تمثل معدل تغير حجم الأُسطوانة بالنسبة إلى طول نصف قطرها.

c) أوجد $V'(r)$ عندما $r = 3$ in.

4) **حجم:** الصيغة $V = x^3$ تمثل حجم مكعب طول ضلعه x، افترض أن x تتغير.



a) أوجد معدل تغير الحجم $V(x)$ عندما تتغير x من 3.2in إلى 3.4 in

b) أوجد معدل تغير الحجم $V(x)$ اللحظِيّ عندما $x = 4$ in.

c) وضح العلاقة بين صيغة حجم المكعب ومشتقتها.

5) **حركة الكرة:** أُطلقت كرة إلى أعلى من نقطة ترتفع 6 ft عن سطح الأرض، بسرعة ابتدائية قدرها 80 ft/s، إذا كان ارتفاعها $h(t) = -16t^2 + 80t + 6$ قدمًا بعد t ثانية.

a) أوجد سرعة الكرة عند أي لحظة t .

b) أوجد السرعة اللحظية للكرة عندما $t = 2$ ثانية.

الاسم: ______________________ التاريخ: __________

8-4 التدريبات الإثرائية

اشتقاق متسلسلات القوى

يمكن كتابة بعض الدوال المثلثية والأسية في صورة متسلسلة قوى، فمثلاً متسلسلة قوى الدالة الزوجية $y = \cos x$ تحتوي على القوى الزوجية لـِ x.

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \frac{x^8}{8!} - \dots$$

وأن متسلسلة قوى الدالة الفردية $y = \sin x$ تحتوي على القوى الفردية لـِ x:

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \frac{x^9}{9!} - \dots.$$

يمكن اشتقاق متسلسلات القوى هذه.

1) **a)** أوجد $(\sin x)'$، وذلك باشتقاق حدود متسلسلة قوى $\sin x$ حدًّا حدًّا، ثم بَسِّط النتيجة.

b) ما الدالة التي تمثلها المتسلسلة اللانهائية الجديدة؟

c) أي أن: $(\sin x)' =$ ________

2) **a)** ماذا تتوقع أن تكون مشتقة الدالة $\cos x$؟

b) أوجد $(\cos x)'$ مستعملًا متسلسلة قوى $\cos x$

c) أي أن: $(\cos x)' =$ ________

3) **a)** إذا كانت متسلسلة قوى الدالة $f(x)$ هي $f(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \dots$، فأوجد $f'(x)$.

b) ما العلاقة بين $f(x), f'(x)$؟

c) إذا عبرنا عن الدالة $f(x)$ بالشكل e^x، فأوجد $f'(x)$.

استعمل النتائج التي حصلت عليها في المسائل 3 – 1 ؛ لإيجاد مشتقة كل دالة فيما يأتي:

4) $f(x) = xe^x$ **5)** $f(x) = \sin x + \cos x$ **6)** $f(x) = (\cos x)^2$

8-5 تدريبات إعادة التعليم

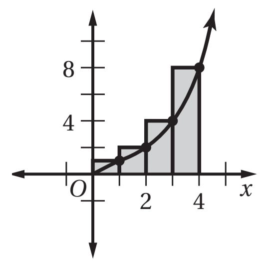
المساحة تحت المنحنى والتكامل

المساحة تحت منحنى: يمكنك استعمال مساحات مستطيلات لتقريب المساحة المحصورة بين منحنى دالة $f(x)$ ومحور x على الفترة $[a , b]$، الواقعة في مجال $f(x)$.

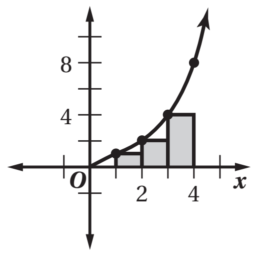
مثال

قرِّب مساحة المنطقة المحصورة بين منحنى $f(x)=\frac{1}{2}x^2$ والمحور x في الفترة $[0, 4]$، باستعمال مستطيلات عرض كل واحد منها وحدة واحدة، استعمل الأطراف اليمنى ثم اليسرى لقاعدات المستطيلات لتحديد ارتفاعها ثم احسب الوسط للتقريبين.

عند استعمال الأطراف اليمنى لقاعدات المستطيلات تنتج أربعة مستطيلات عرض كل منها وحدة واحدة. (الشكل A)، وعند استعمال الأطراف اليسرى للمستطيلات، تنتج أربعة مستطيلات عرض كل منها وحدة واحدة (الشكل B).



الشكل A



الشكل B

المساحة باستعمال الأطراف اليمنى

$R_1= 1. f(1)= 0.5$

$R_2= 1. f(2)= 2$

$R_3 = 1. f(3) = 4.5$

$R_4 = 1. f(4) = 8$

المساحة الكلية = 15 وحدة مربعة

المساحة باستعمال الأطراف اليسرى

$R_1= 1. f(0)= 0$

$R_2= 1. f(1)= 0.5$

$R_3 = 1. f(2) = 2$

$R_4 = 1. f(3) = 4.5$

المساحة الكلية = 7 وحدة مربعة

أي أن المساحة باستعمال الأطراف اليمنى أو اليسرى هي 15 أو 7 وحدة مربعة على الترتيب. وهذا يعطي تقديرًا أعلى وآخر أدنى للمساحة؛ $15 >$ المساحة > 7 . وبأخذ متوسط التقريبين، فإن 11 يُعدُّ تقريبًا أفضل للمساحة.

تمارين

1) قرِّب مساحة المنطقة المحصورة بين منحنى $f(x)=3x^2 + 1$ والمحور x في الفترة $[0,4]$، باستعمال مستطيلات عرض كل واحد منها وحدة واحدة. استعمل الأطراف اليمنى ثم اليسرى لقاعدات المستطيلات لتحديد ارتفاعها ثم احسب الوسط للتقريبين.

2) قرِّب مساحة المنطقة المحصورة بين منحنى $f(x)= -x^2 + 5x + 6$ والمحور x في الفترة $[1,5]$، باستعمال مستطيلات عرض كل واحد منها وحدة واحدة. استعمل الأطراف اليمنى ثم اليسرى لقاعدات المستطيلات لتحديد ارتفاعها ثم احسب الوسط للتقريبين.

الاسم: ________________ التاريخ: ________

8-5 تدريبات إعادة التعليم

(تتمة)

المساحة تحت المنحنى والتكامل

التكامل

التكامل المحدد	مساحة المنطقة المحصورة بين منحنى الدالة $f(x)$ والمحور x في الفترة $[a, b]$ هي: $\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta x$، حيث a و b الحدان السفلي والعلوي على الترتيب. $\Delta x = \frac{b-a}{n}, x_i = a + i\Delta x$

مثال

استعمل النهايات لإيجاد مساحة المنطقة المحصورة بين منحنى $y = 4x^2$ والمحور x في الفترة $[0, 5]$

أي $\int_0^5 4x^2\,dx$

ابدأ بإيجاد $x_i, \Delta x$

$\Delta x = \frac{b-a}{n}$ — صيغة Δx

$= \frac{5-0}{n}$ — $b = 5, a = 0$

$x_i = a + i\Delta x$ — صيغة x_i

$= 0 + i\frac{5}{n} = \frac{5i}{n}$ — $a = 0, \Delta x = \frac{5}{n}$

احسب التكامل المحدد الذي يعطي المساحة المطلوبة.

$\int_0^5 4x^2\,dx = \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta x = \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} 4x_i^2\,\Delta x$ — تعريف التكامل المحدد $f(x_i) = 4x_i^2$

$= \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} 4\left(\frac{5i}{n}\right)^2\frac{5}{n} = \lim_{n\to\infty}\frac{20}{n}\left(\frac{25}{n^2}\sum_{i=1}^{n} i^2\right)$ — خصائص المجموع، $x_i = \frac{5i}{n}, \Delta x = \frac{5}{n}$

$= \lim_{n\to\infty}\frac{20}{n}\left(\frac{25}{n^2}\cdot\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}\right)$ — $\sum_{i=1}^{n} i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

$= \lim_{n\to\infty}\frac{500}{6}\left(\frac{2n^2+3n+1}{n^2}\right) = \lim_{n\to\infty}\frac{500}{6}\left(2+\frac{3}{n}+\frac{1}{n^2}\right)$ — بسّط وأوجد المفكوك، ثم اقسم على n^2

$= \left(\lim_{n\to\infty}\frac{500}{6}\right)\left[\lim_{n\to\infty}2 + \left(\lim_{n\to\infty}3\right)\left(\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\right) + \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^2}\right]$ — خصائص النهايات

$= \frac{500}{6}[2+3(0)+0] \approx 166.67$ — بسّط

تمارين

استعمل النهايات لإيجاد المساحة المحصورة بين منحنى $f(x)$ والمحور x والمعطاة بالتكامل المحدد في كلٍّ مما يأتي:

(1 $\int_0^2 x^3\,dx$

(2 $\int_2^4 (x^2+3)\,dx$

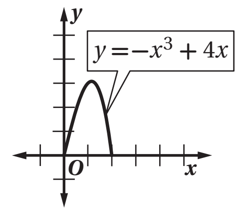
(3 $\int_4^6 (1+x)\,dx$

(4 $\int_1^3 4x^3\,dx$

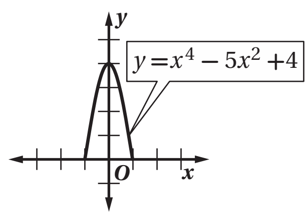
8-5 تدريبات حل المسألة

المساحة تحت المنحنى والتكامل

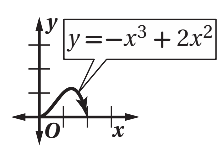
1) مدخل: مدخل باب لعبة له الشكل الظاهر أدناه، فما مساحة المدخل إذا كانت x بالأقدام؟



2) مناجم: يتخذ مدخل منجم للفحم الشكل الظاهر أدناه، فما مساحة المدخل إذا كانت x بالأمتار؟

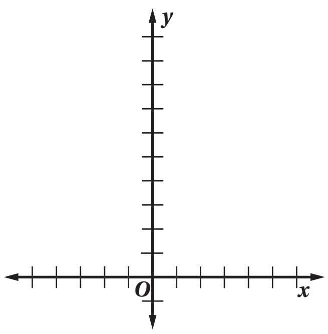


3) سدود: يتخذ سطح سد للماء الشكل الظاهر أدناه، فما مساحة سطح السد إذا كانت x بالكيلو متر؟



4) منطقة مثلثية: ارسم المثلث المكون من المحور x والمستقيمين $x = 5$ و $y = x + 4$ على المستوى الإحداثي.

a) ظلّل المنطقة الداخلية للمثلث.



b) أوجد طول القاعدة، وارتفاع المثلث، واستعملهما لحساب مساحة المثلث.

c) أوجد مساحة المثلث بحساب التكامل $\int_{-4}^{5} (x+4)\, dx$.

5) بذور: ينوي علي زراعة حديقة منزله بالبذور، فإذا كانت مساحة الحديقة التي ينوي علي زراعتها بالأمتار المربعة، تتعين بالتكامل: $\int_{1}^{7} (-x^2 + 8x - 7)\, dx$، وكانت البذور التي بحوزته كافية لزراعة $35\,m^2$، فهل تكفي البذور لزراعتها؟ وضح إجابتك.

8-5 التدريبات الإثرائية

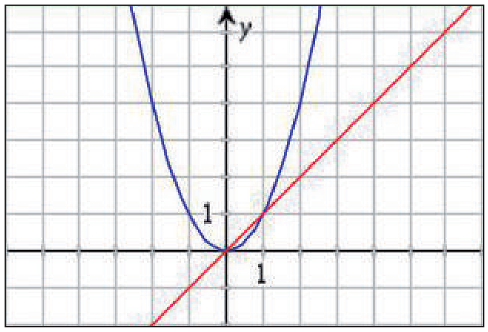
إيجاد المساحة المحصورة بين منحنيين

إيجاد المساحة المحصورة بين منحنيين:

تعلمت إيجاد المساحة المحصورة بين منحنى دالة والمحور x.

أجب عن الأسئلة الآتية لإيجاد المساحة المحصورة بين دالتين.

1) مثِّل كلًّا من الدالتين $y = x^2, y = x$



2) أوجد نقاط التقاطع بين الدالتين: $y = x^2, y = x$

3) أي الدالتين أكبر في الفترة $(0, 1)$؟

4) أوجد كلًّا من

5) أوجد كلًّا من

6) ماذا يمثِّل الناتج في سؤال 6 ؟

7) أوجد

قارن بين الناتجين للسؤالين $5, 7$

8) لخِّص الخطوات لإيجاد المساحة المحصورة بين دالتين.

8-6 تدريبات إعادة التعليم

النظرية الأساسية في التفاضل والتكامل

الدوال الأصلية والتكامل غير المحدد:

يُقال إن الدالة $F(x)$ هي دالة أصلية للدالة المعطاة $f(x)$، إذا كان $F'(x) = f(x)$.

قواعد الدوال الأصلية	
قاعدة القوة	إذا كان $f(x) = x^n$، حيث n عدد حقيقي لا يساوي -1، فإن $F(x) = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C$.
ضرب القوة في عدد	إذا كان $f(x)= kx^n$، حيث n عدد حقيقي لا يساوي -1 و k ثابت، فإن $F(x) = \frac{kx^{n+1}}{n+1} + C$.
الجمع والطرح	إذا كان $F(x)$ و $G(x)$ دالتين أصليتين للدالتين $f(x)$ و $g(x)$ على الترتيب، فإن $F(x)\pm G(x)$ دالة أصلية للدالة $f(x)\pm g(x)$.

مثال 1 أوجد جميع الدوال الأصلية لكل دالة مما يأتي:

a) $f(x)= -3x^5$

$f(x) = -3x^5$ الدالة المعطاة

$F(x) = \frac{-3x^{5+1}}{5+1} + C$ قاعدة ضرب دالة القوة في عدد

$= -\frac{1}{2}x^6 + C$ بسّط

b) $f(x) = x^3 + 4x^2 - 2$

$f(x) = x^3 + 4x^2 - 2$ الدالة المعطاة

$= x^3 + 4x^2 - 2x^0$ إعادة كتابة الدالة

$F(x) = \frac{x^{3+1}}{3+1} + \frac{4x^{2+1}}{2+1} - \frac{2x^{0+1}}{0+1}$ قواعد الدالة الأصلية

$= \frac{1}{4}x^4 + \frac{4}{3}x^3 - 2x + C$ بسّط

تمارين

أوجد جميع الدوال الأصلية لكل دالة مما يأتي:

1) $f(x) = 2x^4 + 3x^2 - 5$

2) $g(x) = \frac{2}{x^3}$

3) $t(x) = \frac{3}{4}x^6 - \frac{1}{2}x^3$

4) $n(x) = \sqrt[5]{x} - 2$

الاسم: ______________________ التاريخ: ______________

8-6 تدريبات إعادة التعليم

(تتمة)

النظرية الأساسية في التفاضل والتكامل

النظرية الأساسية في التفاضل والتكامل: يُعرَّف التكامل غير المحدد للدالة $f(x)$ على أنه $\int f(x)dx = F(x) + C$ ،

حيث $F(x)$ دالة أصلية للدالة $f(x)$ ؛ أي $F'(x) = f(x)$ و C ثابت.

النظرية الأساسية في التفاضل والتكامل	إذا كانت $F(x)$ دالةً أصلية للدالة المتصلة $f(x)$، فإن $\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$ ، ويمكن كتابة الطرف الأيمن للمعادلة في الصورة $F(x)\Big\|_a^b$

مثال

احسب كل تكامل مما يأتي:

a) $\int (3x^2 + 4x - 1)\, dx$

$\int (3x^2 + 4x - 1)\, dx = \frac{3x^{2+1}}{2+1} + \frac{4x^{1+1}}{1+1} - \frac{x^{0+1}}{0+1} + C$ قواعد الدالة الأصلية (ضرب القوة في عدد)

$= \frac{3x^3}{3} + \frac{4x^2}{2} - x + C$ بسّط

$= x^3 + 2x^2 - x + C$ بسّط

b) $\int_2^4 (x^3 - 1)\, dx$

$\int_2^4 (x^3 - 1)\, dx = \left(\frac{x^4}{4} - x\right)\Big|_2^4$ النظرية الأساسية في التفاضل والتكامل

$= \left(\frac{4^4}{4} - 4\right) - \left(\frac{2^4}{4} - 2\right)$ $b = 4 ; a = 2$

$= 60 - 2 = 58$ بسّط

تمارين

أوجد كل تكامل مما يأتي:

1) $\int (3x^7 - x^2)\, dx$

2) $\int_1^2 (x^2 + 1)\, dx$

3) $\int_1^2 (x^2 - 1)\, dx$

4) $\int_{-1}^1 (x^3 - 2x + 1)\, dx$

الاسم: ______________ التاريخ: ______________

8-6 تدريبات حل المسألة

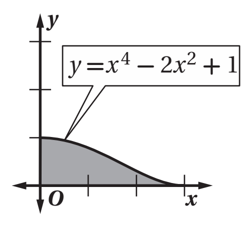
النظرية الأساسية في التفاضل والتكامل

1) **الوثب العالي:** تدرب محمود على الوثب العالي في حصة التربية الرياضية، فأمكن وصف سرعته في أثناء الوثبة بالدالة: $v(t) = -32t + 24$، حيث t بالثواني والسرعة بالأقدام لكل ثانية.

a) أوجد دالة موقع محمود $s(t)$، مفترضًا أن $s(t) = 0$، عندما $t = 0$.

b) عندما وثب محمود، كم استغرق من الوقت للوصول إلى الأرض؟

2) **إعلان:** الشكل أدناه يمثل شعارًا لشركة جديدة، ما المساحة التي سيستغلها الشعار إذا قررت الشركة وضعه على قمصان تابعة لها؛ علمًا بأن x بالبوصات وتقع بين 0 و1؟

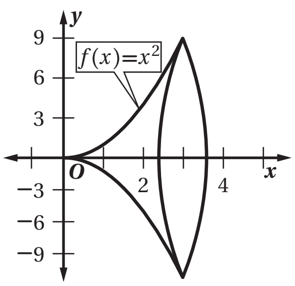


3) **شد زنبرك:** يُعبَّر عن الشغل بالجول اللازم لشد زنبرك مسافة 36 in من وضعه الطبيعي بالمعادلة:

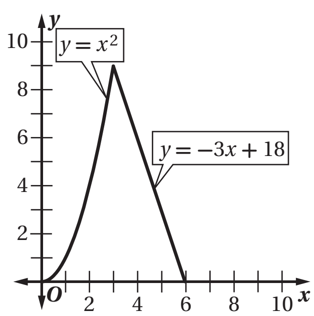
$$\int_0^3 80x\,dx$$ ، فما الشغل اللازم؟

4) **حجم:** في الشكل أدناه، أوجد حجم المجسم الناتج عن دوران منحنى $f(x) = x^2$ حول محور السينات في الفترة $[0,3]$، إذا كان الحجم يُعبَّر عنه بالمعادلة:

$$\int_0^3 \pi(x^2)^2\,dx$$



5) **دعاية:** اشترت شركة لوحة إعلانية، وأمكن تمثيل هذه اللوحة بالشكل أدناه، حيث القياسات بالأقدام، فكم تبلغ مساحة اللوحة الإعلانية التي اشترتها الشركة؟



الاسم: ______________________ التاريخ: ____________

8-6 التدريبات الإثرائية

بعض خصائص التكامل

بعض خصائص التكامل:

اتبع الخطوات التالية للوصول إلى بعض خصائص التكامل المحدد:

1) أوجد كلًّا من التكاملات الآتية: $\int_1^3 (2x^2+1)\,dx,\ \int_2^3 (2x^2+1)\,dx,\ \int_1^2 (2x^2+1)\,dx$

2) قارن النتائج في السؤال الأول.

3) هل تعتقد أن هذه النتيجة صحيحة دائمًا؟

4) عمِّم النتيجة التي توصلت لها في السؤال 2.

5) أوجد $\int_1^2 (2x^2+1)\,dx,\ \int_2^1 (2x^2+1)\,dx$

6) قارن القيمتين في السؤال 5

7) عمِّم النتيجة التي توصلت لها في السؤال 6

8) أوجد $\int_2^2 (2x^2+1)\,dx$

9) عمِّم النتيجة التي توصلت لها في السؤال 8 .

10) استخدم الخصائص الثلاث التي توصلت إليها لحساب قيمة: $\int_3^5 (2x+4)\,dx + \int_1^3 (2x+4)\,dx + \int_2^2 (5x^3+7)\,dx$

ملحق الإجابات

الاسم: ______ التاريخ: ______

8-1 تدريبات إعادة التعليم

تقدير النهايات بيانيًا

تقدير النهاية عند قيمة ثابتة.

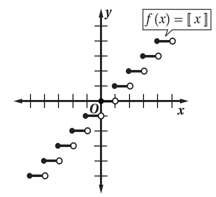
النهاية من اليسار	النهاية من اليمين
إذا اقتربت قيم الدالة $f(x)$ من قيمة وحيدة L_1 ، عندما تقترب قيم x من c من اليسار، فإن: $\lim_{x \to c^-} f(x) = L_1$	إذا اقتربت قيم الدالة $f(x)$ من قيمة وحيدة L_2 ، عندما تقترب قيم x من c من اليمين، فإن: $\lim_{x \to c^+} f(x) = L_2$

وجود النهاية عند نقطة

تكون نهاية الدالة $f(x)$ موجودة عندما تقترب x من c، إذا وفقط إذا وُجدت النهايتان من اليسار ومن اليمين وكانتا متساويتين. بمعنى أنه: $\lim_{x \to c^-} f(x) = \lim_{x \to c^+} f(x) = L$ ، إذا وفقط إذا $\lim_{x \to c} f(x) = L$

مثال قدِّر كلًا من النهايات الآتية إذا كانت موجودة.

$\lim_{x \to 2^-} [\![x]\!], \lim_{x \to 2^+} [\![x]\!], \lim_{x \to 2} [\![x]\!]$



يظهر من منحنى الدالة $f(x) = [\![x]\!]$ ، أن $\lim_{x \to 2^-} [\![x]\!] = 1$

وَ $\lim_{x \to 2^+} [\![x]\!] = 2$ ولمّا كانت النهايتان من اليسار واليمين مختلفتين

عندما تقترب x من 2، فإن $\lim_{x \to 2} [\![x]\!]$ غير موجودة.

تمارين

قدِّر كلًا من النهايات الآتية إذا كانت موجودة:

1) $\lim_{x \to 0^+} \frac{|3x|}{x}$ **3**

2) $\lim_{x \to -2^-} \frac{|x-2|}{x^2-4}$ **∞**

3) $\lim_{x \to 2} \frac{x^2+3x-10}{x-2}$ 7

4) $\lim_{x \to 0} (1 - cos^2 x)$ **0**

5) $\lim_{x \to 3^-} \frac{x^3+27}{x^2-9}$ **$-\infty$**

6) $\lim_{x \to -2} \frac{1}{(x+2)^2}$ **∞**

الاسم: ______ التاريخ: ______

8-1 تدريبات إعادة التعليم (تتمة)

تقدير النهايات بيانيًا

تقدير النهايات عند المالانهاية:

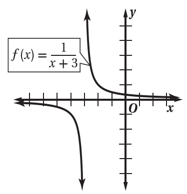
- إذا اقتربت قيم $f(x)$ من عدد وحيد L_1 عندما تزداد قيم x دون حدود، فإن $\lim_{x \to \infty} f(x) = L_1$
- إذا اقتربت قيم $f(x)$ من عدد وحيد L_2 عندما تنقص قيم x دون حدود، فإن $\lim_{x \to -\infty} f(x) = L_2$

مثال قدِّر قيمة: $\lim_{x \to \infty} \frac{1}{x+3}$.

التحليل بيانيًا: التمثيل البياني للدالة $f(x) = \frac{1}{x+3}$ يبيِّن أن $\lim_{x \to \infty} \frac{1}{x+3} = 0$؛ إذ يقترب منحنى الدالة من المحور x كلما ازدادت قيم x، وهذا يعني وجود خط تقارب أفقي هو $y = 0$

التعزيز عدديًا: كوِّن جدولًا يظهر قيمًا كبيرةً لـ x.

x	10	100	1000	10000	100000
$f(x)$	0.08	0.01	0.001	0.0001	0.00001



يظهر الجدول أن قيم $f(x)$ تقترب من الصفر كلما ازدادت قيم x.

تمارين

قدِّر كل من نهايةٍ مما يأتي إذا كانت موجودة:

1) $\lim_{x \to 5} (2x^2 + 3)$ **53**

2) $\lim_{x \to \infty} \frac{2x+1}{x}$ **2**

3) $\lim_{x \to -\infty} \frac{-3x+1}{x-2}$ **−3**

4) $\lim_{x \to \infty} \frac{1}{x^2}$ **0**

5) $\lim_{x \to \infty} \frac{2x^2-5}{3x^3+2x}$ **0**

6) $\lim_{x \to -\infty} (2^x + x)$ **$-\infty$**

7) $\lim_{x \to \infty} (x \sin x)$ **غير موجودة**

8) $\lim_{x \to -\infty} (2.7)^{2x}$ **0**

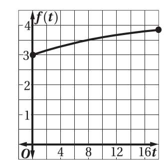
9) $\lim_{x \to \infty} cos\, 2x\pi$ **غير موجودة**

8-1 تدريبات حل المسألة

تقدير النهايات بيانيًا

1) **نمو البكتيريا:** يعطى وزن مجتمع بكتيري بالعلاقة: $f(t) = \dfrac{4}{1 + 0.35e{-}0.2t}$ جرامًا بعد t ساعة.

a) مثِّل بيانيًا منحنى الدالة $f(t)$ في الفترة $0 \le t \le 18$



b) استعمل المنحنى لتقدير وزن البكتيريا بعد 8 ساعات. مقرّبًا إجابتك إلى أقرب جزءٍ من عشرة.

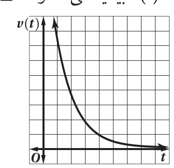
3.7 جرامات.

c) قدِّر $\lim\limits_{t \to \infty} f(t)$، إذا كانت موجودة ، وفسِّر معناها.

4 جرامات؛ الوزن الأقصى للبكتيريا سيصل إلى 4 جرامات.

2) **سيارات:** يبلغ ثمن سيارة 30000 ريال، وبعد t سنة من شرائها يصبح سعرها $v(t) = 30000\ (0.85)^t$.

a) مثِّل الدالة $v(t)$ بيانيًا على الفترة $0 \le t \le 8$.



b) قدِّر قيمة السيارة بعد 10 سنوات من شرائها.

5906 ريالًا.

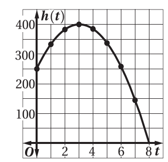
c) قدِّر قيمة $\lim\limits_{t \to \infty} v(t)$، إذا كانت موجودة، وفسر معناها.

0 ؛ بمرور الوقت يصبح ثمن السيارة صفرًا.

3) **ارتفاع المقذوفات:** افترض أن جسمًا قذف إلى أعلى، والدالة $h(t)$ تمثل ارتفاعه بالأقدام بعد t ثانية، ويبين الجدول الآتي ارتفاع القذيفة $h(t)$ بالأقدام بعد t ثانية من قذفها.

t	$h(t)$	t	$h(t)$
0	256	4	384
1	336	5	336
2	384	6	256
3	400	7	144

a) مثِّل البيانات، وارسم منحنًى يمر بنقاط البيانات التي مثّلتها للحصول على الدالة $h(t)$.



b) استعمل التمثيل البياني لتقدير قيمة $\lim\limits_{t \to 8^-} h(t)$

0 قدم

4) **النظرية النسبية:** يُعبَّر عن كتلة جسم متحرك بسرعة v نظريًا بالمعادلة: $m = \dfrac{m_0}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{s^2}}}$، حيث m_0 كتلة الجسم عند السكون، وs سرعة الضوء وv سرعة الجسم، فما قيمة $\lim\limits_{v \to s^-} m$ ؟

∞

5) **كهرباء:** وجد أحمد أن معادلة فرق جهد دائرةٍ كهربائية هي: $V(t) = 140\ sin\ 120\ \pi t$، وضح سبب كون $\lim\limits_{t \to \infty} V(t)$ غير موجودة.

بزيادة t يتذبذب المنحنى بين 140 و140−

8-1 التدريبات الإثرائية

النهايات

هناك العديد من أمثلة النهايات في الحياة العملية؛ بعضها مطلقة لا يمكن تجاوزه، وبعضها الآخر يمثل إرشادات، يدفع من يتجاوزها غرامة.

املأ الجدول

النهاية	كيف تضبط النهاية؟	هل النهاية مطلقة؟	الغرامة في حال تجاوز النهاية
1) السرعة القصوى في شارع سريع	**تضع إدارة المرور حدودًا للسرعة.**	**لا**	**دفع مبلغ محدد في حالة التجاوز**
2) ارتفاع نفق	**وضع حدود ارتفاع السيارات التي يُسمح لها بالمرور في مكان بارز**	**نعم**	**تحطم المركبة، أو تحطم أجزاءٍ من النفق**
3) وزن الحقيبة في رحلة جوية	**تعليمات من شركة الطيران الناقلة**	**لا**	**يدفع المسافر أجور شحن عن الوزن الزائد**
4) درجة حرارة جسم دافئ موضوع في غرفة باردة	**توضع حدود لدرجة حرارة الغرفة**	**نعم**	**غير ممكنة**
5) سرعة مركبة فضائية متسارعة	**وضع ثابت فيزيائي (سرعة الضوء)**	**نعم**	**غير ممكنة**

رياضيًا، قد تكون النهاية موجودة ومنتهية، أو غير منتهية، أو غير موجودة، صنِّف كل نهاية من حيث كونها موجودة ومنتهية، أو غير منتهية، أو غير موجودة، وإذا كانت النهاية موجودة ومنتهية، فأوجد قيمتها:

1) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{1}{x^2 + 1}$

موجودة؛ 1

2) $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x + 1}{x^2 - 1}$

غير موجودة

3) $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{x^2 - 4}{x^2 - x - 2}$

موجودة؛ $\frac{4}{3}$

4) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{sin\,|x|}{x}$

غير موجودة

5) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{-1}{x^4}$

غير منتهية

الاسم: ______________ التاريخ: __________

8-2 تدريبات إعادة التعليم

حساب النهايات جبريًا

حساب النهاية عند نقطة

مثال 1 أوجد: $\lim\limits_{x \to -2} (-2x^4 + 3x^3 - 5x + 3)$ باستعمال التعويض المباشر إذا كان ممكنًا.

لمّا كانت النهاية المطلوبة لكثيرة حدود، فإنه يمكنك إيجاد النهاية بالتعويض المباشر.

$$\lim_{x \to -2} (-2x^4 + 3x^3 - 5x + 3) = -2(-2)^4 + 3(-2)^3 - 5(-2) + 3$$
$$= -32 - 24 + 10 + 3 = -43$$

مثال 2 احسب: $\lim\limits_{x \to 4} \dfrac{x^2 - 9x + 20}{x - 4}$

$\lim\limits_{x \to 4} \dfrac{x^2 - 9x + 20}{x - 4} = \lim\limits_{x \to 4} \dfrac{(x-5)(x-4)}{(x-4)}$ حلّل

$= \lim\limits_{x \to 4} (x - 5)$ اختصر العامل المشترك

$= 4 - 5 = -1$ عوّض وبسّط

مثال 3 احسب: $\lim\limits_{x \to 16} \dfrac{\sqrt{x} - 4}{x - 16}$

ينتج عن التعويض المباشر: $\dfrac{\sqrt{16}-4}{16-16} = \dfrac{0}{0}$؛ لذا اضرب في مرافق البسط قبل التحليل، واختصر العوامل المشتركة.

$\lim\limits_{x \to 16} \dfrac{\sqrt{x} - 4}{x - 16} = \lim\limits_{x \to 16} \dfrac{\sqrt{x} - 4}{x - 16} \cdot \dfrac{\sqrt{x} + 4}{\sqrt{x} + 4}$ اضرب في المرافق

$= \lim\limits_{x \to 16} \dfrac{x - 16}{(x - 16)(\sqrt{x} + 4)}$ بسّط

$= \lim\limits_{x \to 16} \dfrac{\cancel{x - 16}}{(\cancel{x - 16})(\sqrt{x} + 4)}$ اختصر العامل المشترك

$= \lim\limits_{x \to 16} \dfrac{1}{(\sqrt{x} + 4)}$ بسّط

$= \dfrac{1}{\sqrt{16} + 4} = \dfrac{1}{8}$ عوّض وبسّط

تمارين

احسب كل نهايةٍ مما يأتي:

1) $\lim\limits_{x \to 3} (2x^2 - 5x)$ **3**

2) $\lim\limits_{x \to 5} \sqrt{x^3 - 4}$ **11**

3) $\lim\limits_{x \to -2} \dfrac{x^2 + 9x + 14}{x + 2}$ **5**

4) $\lim\limits_{x \to 4} \dfrac{\sqrt{x} - 2}{x - 4}$ $\mathbf{\dfrac{1}{4}}$

5) $\lim\limits_{x \to -4} \left(\dfrac{1}{x} + x\right)$ **−4.25**

6) $\lim\limits_{x \to 2} (-x^2 + 5x - 1)$ **5**

الاسم: ______________ التاريخ: __________

8-2 تدريبات إعادة التعليم (تتمة)

حساب النهايات جبريًا

حساب النهايات عند اللانهاية

دوال القوى	دوال كثيرات الحدود	دوال المقلوب
لأي عدد صحيح موجب n، تكون • $\lim\limits_{x \to \infty} x^n = \infty$ • $\lim\limits_{x \to -\infty} x^n = \infty$ إذا كان n عددًا زوجيًا. • $\lim\limits_{x \to -\infty} x^n = -\infty$ إذا كان n عددًا فرديًا.	افترض أن p كثيرة حدود، $p(x) = a_n x^n + \ldots + a_1 x + a_0$، فإن: $\lim\limits_{x \to \infty} p(x) = \lim\limits_{x \to \infty} a_n x^n$ و $\lim\limits_{x \to -\infty} p(x) = \lim\limits_{x \to -\infty} a_n x^n$	لأي عدد صحيح موجب n، تكون $\lim\limits_{x \to \pm\infty} \dfrac{1}{x^n} = 0$

مثال احسب كل نهاية مما يأتي.

a) $\lim\limits_{x \to -\infty} (x^5 - 6x + 1)$

$\lim\limits_{x \to -\infty} (x^5 - 6x + 1) = \lim\limits_{x \to -\infty} x^5$ نهاية دالة كثيرة حدود عند اللانهاية

$= -\infty$ نهاية دالة قوة عند اللانهاية

b) $\lim\limits_{x \to \infty} (2x^4 + 5x^2)$

$\lim\limits_{x \to \infty} (2x^4 + 5x^2) = \lim\limits_{x \to \infty} 2x^4$ نهاية دالة كثيرة حدود عند اللانهاية

$= 2 \lim\limits_{x \to \infty} x^4$ خاصية الضرب في ثابت

$= 2 \cdot \infty = \infty$ نهاية دالة القوة عند اللانهاية

تمارين

احسب كل نهاية مما يأتي:

1) $\lim\limits_{x \to -\infty} (-2x^3 + 5x)$ **∞**

2) $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{5}{x^2}$ **0**

3) $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{6x - 1}{10x + 7}$ $\mathbf{\dfrac{3}{5}}$

4) $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{6x^2 - 2x}{x^3 + 1}$ **0**

5) $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{5x^4 + 2x^3 - 1}{2x^3 + x^2 - 1}$ **∞**

6) $\lim\limits_{x \to -\infty} (3x^3 + 5x - 1)$ **−∞**

الاسم: ________ التاريخ: ________

8-2 تدريبات حل المسألة

حساب النهايات جبريًا

1) **بركة سباحة:** ضُخَّ محلول يحتوي على 0.3 جرام من الكلورين لكل لتر ماء في بركة سباحة، إذا أُعطي تركيز الكلورين في البركة بالجرامات لكل لتر ماء بعد t ثانية بالمعادلة: $C(t) = \frac{0.3t}{1000+t}$. أوجد $\lim_{t \to \infty} C(t)$

0.3 جرام/لتر

2) **تلوث:** المعادلة $C = \frac{60000\,P}{100-P}$ تمثل تكلفة إزالة $P\%$ من الملوثات التي يتسبب فيها أحد المصانع، حيث $0 \le p \le 100$، أوجد $\lim_{p \to 100^-} C$

∞

3) **سيارات:** اشترى علي سيارة بسعر 24000 ريال، إذا كانت العلاقة $c(t) = 24(0.90)^t$. تعبّر عن سعر السيارة بالآلاف بعد t سنة.

a) أكمل الجدول، مقرِّبًا الإجابة إلى أقرب جزء من مئة.

السنة	1	3	5	6
القيمة	**21.6**	**17.5**	**14.17**	**12.75**

b) أوجد قيمة: $\lim_{t \to \infty} c(t)$

0

4) **القيادة الآمنة:** في أثناء قيادة السيارة، لا بد من الحفاظ على مسافة أمان بين سيارتك والسيارة التي تسير أمامك. افترض أن مسافة الأمان المقترحة بالياردة تتعين بالمعادلة $y(x) = 0.005x^2 + 0.3x + 3$، حيث x السرعة بالأميال لكل ساعة، فأوجد $\lim_{x \to 70} y(x)$.

48.5 ياردة

5) **تصنيع:** تمثل المعادلة $c(p) = 3000 + 20P$ تكلفة إنتاج P قطعة منتج معين بالريالات.

a) أوجد تكلفة إنتاج 100 قطعة.

5000 ريال

b) بلغت تكلفة الإنتاج 21000 ريال في أحد الأيام. فكم عدد القطع التي أنتجها المصنع في ذلك اليوم؟

900

c) يمكن إيجاد متوسط تكلفة إنتاج القطعة بقسمة $c(p)$ على P، أوجد $\lim_{p \to 15000} \frac{c(p)}{p}$

20.20

6) **أفران كهربائية:** الدالة $f(x) = \frac{250x + 200000}{x}$ تمثل متوسط تكلفة الفرن الكهربائي عند إنتاج x فرنًا، أوجد $\lim_{x \to 2000} f(x)$

350 ريالًا

الاسم: ________ التاريخ: ________

8-2 التدريبات الإثرائية

نظرية الشطيرة

في الدرس (1 – 8)، تعلمت أن $\lim_{x \to 0} sin\frac{1}{x}$ غير موجودة، وذلك بسبب تذبذب الدالة بين 1– و1 كلما اقتربت x من 0.

ولكن، ماذا عن $\lim_{x \to 0} x^2 sin\frac{1}{x}$ ؟ هل هذه النهاية غير موجودة لأن $\lim_{x \to 0} sin\frac{1}{x}$ غير موجودة؟ تساعد نظرية الشطيرة على الإجابة عن هذا السؤال.

نظرية الشطيرة

إذا كان: $h(x) \le f(x) \le g(x)$ لجميع قيم x في فترة مفتوحة تحوي c، مع إمكانية استثناء c، وكانت: $\lim_{x \to c} h(x) = L = \lim_{x \to c} g(x)$، فإن $\lim_{x \to c} f(x)$ موجودة وتساوي L.

لاحظ أن $-1 \le sin\frac{1}{x} \le 1$ لجميع قيم x باستثناء $x = 0$، اضرب المتباينة في x^2؛ لتحصل على $-x^2 \le x^2 sin\frac{1}{x} \le x^2$، ولتطبيق نظرية الشطيرة، افترض أن: $g(x) = x^2, f(x) = x^2 sin\frac{1}{x}, h(x) = -x^2$. تعلمت في الدرس (2–8) أن كلًّا من $\lim_{x \to 0} g(x)$ و $\lim_{x \to 0} h(x)$ تساوي 0؛ لذا فإن $\lim_{x \to 0} x^2 sin\frac{1}{x} = 0$ حسب نظرية الشطيرة.

تمارين

1) إذا كانت: $2\sqrt{x-1} - 1 \le g(x) \le (2.7)^{x-2}$، فاستعمل نظرية الشطيرة لإيجاد $\lim_{x \to 2} g(x)$

1

استعمل نظرية الشطيرة لإيجاد النهاية في كلٍّ مما يأتي:

2) $\lim_{x \to 0} x^4 sin\frac{1}{x}$

0

3) $\lim_{x \to 0} x^2 cos\frac{1}{\sqrt[3]{x}}$

0

4) $\lim_{x \to 0} |x| sin\frac{\pi}{x}$

0

الاسم: ____________ التاريخ: ________

8-3 تدريبات إعادة التعليم

المماس والسرعة المتجهة

المماسات

معدل التغير اللحظي

يُعرَّف معدل التغير اللحظي لمنحنى $f(x)$ عند النقطة $(x, f(x))$ على أنه ميل المماس لمنحنى الدالة عند النقطة $(x, f(x))$،
ويُعطى بالصيغة: $m = \lim\limits_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$، بشرط أن تكون النهاية موجودة.

مثال

أوجد معادلة ميل منحنى الدالة $y = 3x^2 + 1$ عند أي نقطة عليه.

$m = \lim\limits_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$ صيغة معدل التغير اللحظي

$m = \lim\limits_{h \to 0} \frac{[3(x+h)^2 + 1] - [3x^2 + 1]}{h}$ $f(x+h) = 3(x+h)^2 + 1 \,, f(x) = 3x^2 + 1$

$m = \lim\limits_{h \to 0} \frac{[3x^2 + 6hx + 3h^2 + 1] - [3x^2 + 1]}{h}$ فُك الأقواس

$m = \lim\limits_{h \to 0} \frac{3h(2x+h)}{h}$ بسّط وحلّل

$m = \lim\limits_{h \to 0} 3(2x+h)$ اختصر h

$m = 6x$ خواص النهايات

أيْ أن معادلة ميل المنحنى عند أي نقطة عليه هي $m = 6x$.

تمارين

أوجد معادلة ميل منحنى كل دالة مما يأتي عند أي نقطة عليه:

1) $y = x^3 + 1$
$m = 3x^2$

2) $y = 4 - 7x$
$m = -7$

3) $y = \frac{3}{x^2}$
$m = \frac{-6}{x^3}$

4) $y = \frac{4}{\sqrt{x}}$
$m = \frac{-2}{x\sqrt{x}}$

الاسم: ____________ التاريخ: ________

8-3 تدريبات إعادة التعليم (تتمة)

المماس والسرعة المتجهة

السرعة المتجهة اللحظية:

السرعة المتجهة اللحظية:

إذا أُعطي موقع جسم متحرك $f(t)$ بوصفه دالة في الزمن، فإن سرعة الجسم المتجهة اللحظية $v(t)$ عند الزمن t تُعطى
بالصيغة: $v(t) = \lim\limits_{h \to 0} \frac{f(t+h) - f(t)}{h}$، بشرط أن تكون هذه النهاية موجودة.

مثال 1

**أُسقط حجر من ارتفاع 1500 قدم، ويُعبَّر عن ارتفاعه بعد t ثانية من إسقاطه بالصيغة:
$f(t) = 1500 - 16t^2$ قدمًا، أوجد السرعة المتجهة اللحظية للحجر بعد 4 ثوانٍ.**

$v(t) = \lim\limits_{h \to 0} \frac{f(t+h) - f(t)}{h}$ صيغة السرعة المتجهة اللحظية

$= \lim\limits_{h \to 0} \frac{[1500 - 16(4+h)^2] - [1500 - 16(4)^2]}{h}$ $f(4+h) = 1500 - 16(4+h)^2, f(4) = 1500 - 16(4)^2$

$= \lim\limits_{h \to 0} \frac{-128h - 16h^2}{h}$ اضرب وبسّط

$= \lim\limits_{h \to 0} \frac{h(-128 - 16h)}{h}$ حلّل

$= -128 - 16(0)$ اختصر وعوّض.

$= -128$ بسّط

أي أن السرعة اللحظية بعد 4 ثوانٍ هي 128– قدمًا في الثانية.

تمارين

تمثل $s(t)$ بُعد جسيم متحرك عن نقطة ثابتة بالأقدام بعد t ثانية، أوجد السرعة المتجهة اللحظية للجسيم عند الزمن المعطى في كلٍّ مما يأتي:

1) $s(t) = 800 - 16t^2; t = 3$
$v(3) = -96\,ft/s$

2) $s(t) = -16t^2 + 1700; t = 5$
$v(5) = -160\,ft/s$

3) $s(t) = 70t - 16t^2; t = 1$
$v(1) = 38\,ft/s$

4) $s(t) = -16t^2 + 90t + 10; t = 2$
$v(2) = 26\,ft/s$

الاسم: ____________ التاريخ: ________

8-3 تدريبات حل المسألة

المماس والسرعة المتجهة

1) **جسم ساقط:** أسقطت منى كرةً من على سطح بناية ارتفاعها $800ft$. والدالة: $s(t)=-16t^2+800$ تمثل ارتفاع الكرة عن سطح الأرض بالأقدام بعد t ثانية من إسقاطها، أوجد السرعة المتجهة اللحظية لسقوط الكرة بعد ثانيتين؟

64 قدمًا/ ثانية إلى أسفل

2) **جسم ساقط:** أسقط تامر حجرًا من ارتفاع $1200ft$. والدالة: $s(t)=-16t^2+1200$. تمثل ارتفاع الحجر عن سطح الأرض بالأقدام بعد t ثانية من إسقاطه.

a) ما السرعة المتجهة اللحظية للحجر بعد 4 ثوان من إسقاطه؟

$128\,ft/s$ إلى أسفل

b) متى يصل الحجر إلى سطح الأرض؟

$5\sqrt{3}$ ثانية

c) أوجد صيغة لسرعة الحجر اللحظية في أي لحظة.

$\boldsymbol{v(t)=-32t}$

d) أوجد سرعة الحجر عندما يصل إلى سطح الأرض.

$\boldsymbol{160\sqrt{3}ft/s}$

3) **القفز البهلواني:** المعادلة: $h(t)=900-16t^2$ تمثل ارتفاع بهلوان عن سطح الأرض بعد قفزه من ارتفاع 900 قدم، أوجد السرعة المتجهة اللحظية للبهلوان.

$\boldsymbol{v(t)=-32t}$

4) **السقوط الحر:** المعادلة: $h(t)=15000-16t^2$ تمثل ارتفاع مِظلّيٍّ بالأقدام بعد t ثانية من قفزه من الطائرة.

a) أوجد السرعة المتجهة اللحظية للمظلي عند أي لحظة؟

$\boldsymbol{v(t)=-32t}$

b) ما ارتفاع المظلي بعد ثانيتين؟

14936 قدمًا

c) ما السرعة المتجهة اللحظية للمظلي بعد 4 ثوان؟

128 قدمًا/ثانية

5) **كرة قدم:** يركل لاعبٌ الكرةَ بسرعة ابتدائية قدرها $80ft/s$، فتصل ارتفاعًا (s) يُعبَّر عنه بالمعادلة: $s(t)=-16t^2+80t+6.5$ قدمًا بعد t ثانية.

a) أوجد السرعة المتجهة اللحظية للكرة $v(t)$.

$\boldsymbol{v(t)=-32t+80}$

b) ما سرعة الكرة المتجهة بعد 0.5 ثانية؟

64 قدمًا/ث

c) متى تصل الكرة إلى أقصى ارتفاع؟

2.5 ثانية

d) ما أقصى ارتفاع تبلغه الكرة؟

106.5 ft

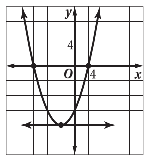
الاسم: ____________ التاريخ: ________

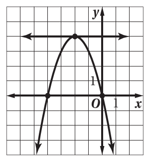
8-3 التدريبات الإثرائية

المماسات والرؤوس

هل يمكنك استعمال معادلة ميل القطع المكافئ الذي معادلته: $y=ax^2+bx+c$ عند أي نقطة لإيجاد رأس القطع؟

خطوة 1: مثِّل قطعين مكافئين معادلتها $y=ax^2+bx+c$ ، بحيث يكون $a>0$ لأحدهما، و $a<0$ للآخر، ثم ارسم مماس القطع عند رأسه، واكتب معادلة كل قطع تحت تمثيله البياني.





إجابة ممكنة: $\boldsymbol{y=-x^2-4x}$ $\boldsymbol{y=x^2+2x-3}$

خطوة 2: أوجد ميل مماس كل قطع عند رأسه.

0

خطوة 3: أوجد معادلة ميل مماس كل قطع عند أي نقطة عليه.

$\boldsymbol{m=-2x-4}$ **للقطع** $\boldsymbol{y=-x^2-4x}$ **، و** $\boldsymbol{m=2x+2}$ **للقطع** $\boldsymbol{y=x^2+2x-3}$

خطوة 4: ساوِ كل معادلة ميل بالصفر، وحُلَّها بالنسبة لـ x، فيكون الحل هو الإحداثي x للرأس.

$2x+2=0$	$-2x-4=0$
$2x=-2$	$-2x=4$
$x=-1$	$x=-2$

خطوة 5: عوِّض الإحداثي x للرأس في معادلة القطع لإيجاد الإحداثي y للرأس.

$y=x^2+2x-3;\ x=-1$	$y=-x^2-4x;\ x=-2$
$y=(-1)^2+2(-1)-3$	$y=-(-2)^2-4(-2)$
$y=-4$	$y=4$

خطوة 6: اكتب إحداثيَّي رأس كل قطع.

$\boldsymbol{(-2,4)}$ **للقطع** $\boldsymbol{y=-x^2-4x}$ **و** $\boldsymbol{(-1,-4)}$ **للقطع** $\boldsymbol{y=x^2+2x-3}$

تمارين

أوجد رأس القطع المكافئ في كلٍّ مما يأتي:

1) $y=2x^2-4x+2$
(1, 0)

2) $y=-x^2-6x-9$
(−3, 0)

3) $y=4x^2-25$
(0, −25)

4) $y=\frac{1}{2}x^2-2x+4$
(2, 2)

الاسم: ________ التاريخ: ________

8-4 تدريبات إعادة التعليم

المشتقة

المشتقات والقواعد الأساسية: استعمَلْتَ النهايات في الدرس (3 – 8)؛ لإيجاد ميل مماس منحنى الدالة عند أي نقطة عليه، وتُسمَّى هذه النهاية **مشتقة الدالة**.

يُرمز إلى مشتقة الدالة $f(x)$ بالرمز $f'(x)$، ويعبَّر عنها بالنهاية: $f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h}$، بشرط وجود النهاية، وهناك العديد من قواعد الاشتقاق التي يمكن استعمالها لإيجاد مشتقة دالة تحتوي على أكثر من حد.

اسم القاعدة	القاعدة	مثال
مشتقة القوة	إذا كان $f(x)=x^n$، حيث n عدد حقيقيّ فإن $f'(x)=nx^{n-1}$.	إذا كان $f(x)=x^3$، فإن $f'(x)=3x^2$.
مشتقة الثابت	مشتقة الدالة الثابتة تساوي صفرًا. إذا كان $f(x)=c$، فإن $f'(x)=0$.	إذا كان $f(x)=-2$، فإن $f'(x)=0$.
مشتقة مضاعفات القوة	إذا كان $f(x)=cx^n$، حيث c ثابت و n عدد حقيقي، فإن $f'(x)=cnx^{n-1}$.	إذا كان $f(x)=5x^3$، فإن $f'(x)=15x^2$.
مشتقة المجموع والفرق	إذا كان $f(x)=g(x)\pm h(x)$، فإن $f'(x)=g'(x)\pm h'(x)$.	إذا كان $f(x)=4x^2+3x$، فإن $f'(x)=8x+3$.

مثال أوجد مشتقة كل دالة مما يأتي:

a) $f(x)=3x^2-2x+4$

$f(x)=3x^2-2x+4$	الدالة المعطاة
$f'(x)=2\cdot 3x^{2-1}-2\cdot 1x^{1-1}+0$	قواعد الاشتقاق
$=6x-2$	بسّط

b) $f(x)=x^4(4x^3-5)$

$f(x)=x^4(4x^3-5)$	الدالة المعطاة
$f(x)=4x^7-5x^4$	خاصية التوزيع
$f'(x)=4\cdot 7x^{7-1}-5\cdot 4x^{4-1}$	قواعد الاشتقاق
$=28x^6-20x^3$	بسّط

تمارين

أوجد مشتقة الدالة $f(x)$ في كلٍّ مما يأتي، ثم احسب قيمة المشتقة عند النقاط المعطاة:

1) $f(x)=4x^2-5;\ x=3,-2$
$f'(x)=8x;\ 24,-16$

2) $f(x)=-x^3+5x^2;\ x=1,-4$
$f'(x)=-3x^2+10x;\ 7,-88$

3) $f(x)=-8+3x-x^2;\ x=0,-3$
$f'(x)=3-2x;\ 3,9$

4) $f(x)=3x^4+x^5-2;\ x=-1,2$
$f'(x)=12x^3+5x^4;\ -7,176$

أوجد مشتقة كل دالة مما يأتي:

5) $f(x)=6x^2-3x+4$ **$f'(x)=12x-3$**

6) $f(x)=-x^{3.4}+3x^{0.2}$ **$f'(x)=-3.4x^{2.4}+0.6x^{-0.8}$**

7) $f(x)=4x^{\frac{1}{2}}-3x^{\frac{3}{2}}$ **$f'(x)=\frac{2\sqrt{x}}{x}-\frac{9\sqrt{x}}{2}$**

8) $f(x)=-4x^2+3x^3-14$ **$f'(x)=-8x+9x^2$**

الاسم: ________ التاريخ: ________

8-4 تدريبات إعادة التعليم (تتمة)

المشتقة

قاعدتا الضرب والقسمة استعمل القاعدتين الآتيتين؛ لإيجاد مشتقة حاصل الضرب أو القسمة.

قاعدة مشتقة الضرب	إذا كانت كلٌّ من الدالتين f, g قابلة للاشتقاق عند x، فإن $\frac{d}{dx}[f(x)g(x)]=f'(x)g(x)+f(x)g'(x)$
قاعدة مشتقة القسمة	إذا كانت كلٌّ من الدالتين f, g قابلة للاشتقاق عند x، وكان $g(x)\neq 0$، فإن: $\frac{d}{dx}\left[\frac{f(x)}{g(x)}\right]=\frac{f'(x)g(x)-f(x)g'(x)}{[g(x)]^2}$

مثال 1 أوجد مشتقة الدالة: **$h(x)=(x^2-2)(2x^3+5x)$**

افترض أن $f(x)=x^2-2$ وَ $g(x)=2x^3+5x$

$f'(x)=2x$ قواعد الاشتقاق $g'(x)=6x^2+5$

$h'(x)=f'(x)g(x)+f(x)g'(x)$	قاعدة مشتقة الضرب
$=(2x)(2x^3+5x)+(x^2-2)(6x^2+5)$	عوّض
$=4x^4+10x^2+6x^4+5x^2-12x^2-10$	خاصية التوزيع
$=10x^4+3x^2-10$	بسّط

مثال 2 أوجد مشتقة: **$h(x)=\frac{(2x^2+4)}{(x^2-1)}$**

افترض أن $f(x)=2x^2+4$ وَ $g(x)=x^2-1$

$f'(x)=4x$ قواعد الاشتقاق $g'(x)=2x$

$h'(x)=\frac{f'(x)g(x)-f(x)g'(x)}{[g(x)]^2}$	قاعدة مشتقة القسمة
$=\frac{4x(x^2-1)-(2x^2+4)2x}{(x^2-1)^2}$	عوّض
$=\frac{4x^3-4x-4x^3-8x}{(x^2-1)^2}$	خاصية التوزيع
$=\frac{-12x}{(x^2-1)^2}$	بسّط

تمارين

أوجد مشتقة كل دالة مما يأتي:

1) $h(x)=(-4+2x^2)(2x+3)$
$12x^2+12x-8$

2) $m(x)=(3x-1)(x^2+5x)$
$9x^2+28x-5$

3) $d(x)=\frac{x^2+3}{x-1}$
$\frac{x^2-2x-3}{(x-1)^2}$

4) $k(x)=\frac{3x^3+4}{2x^2-1}$
$\frac{6x^4-9x^2-16x}{(2x^2-1)^2}$

الاسم: ______________ التاريخ: ______

8-4 تدريبات حل المسألة

المشتقة

1) طيور: يمكن تمثيل ارتفاع طائر بالأقدام بعد t ثانية من طيرانه بالمعادلة: $s(t) = \frac{-t^3}{3} + \frac{7}{2}t^2 + 18$ على الفترة $[1, 10]$، أوجد أقصى وأدنى ارتفاع للطائر.

أقصى ارتفاع: $75\frac{1}{6}$ ft؛ أدنى ارتفاع: $21\frac{1}{6}$ ft

2) غطس: قفز غطَّاس من قمة منحدر ارتفاعه 192 قدمًا عن سطح الماء، ويعبَّر عن ارتفاع الغطاس بعد t ثانية بالمعادلة: $h(t) = -16t^2 + 16t + 192$ قدمًا.

a) أوجد سرعة الغطاس عند أي لحظة t.

$h'(t) = -32t + 16$

b) أوجد سرعة الغطاس بعد ثانية واحدة من قفزه.

$h'(1) = -16$ ft/s

c) أوجد الزمن الذي يستغرقه الغطاس للوصول إلى سطح الماء.

4 ثوانٍ

d) ما سرعة الغطاس عند وصوله سطح الماء؟

$h'(4) = -112$ ft/s

3) هندسة: الصيغة $V = \pi r^2 h$ تمثل حجم الأُسطوانة التي طول نصف قطرها r وارتفاعها h، افترض أن أسطوانة ارتفاعها 10 in، وطول نصف قطرها متغير.

a) اكتب صيغة تمثل حجم الأسطوانة بدلالة طول نصف قطرها.

$V(r) = 10\pi r^2$

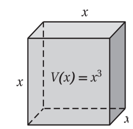
b) أوجد صيغة تمثل معدل تغير حجم الأُسطوانة بالنسبة إلى طول نصف قطرها.

$V'(r) = 20\pi r$

c) أوجد $V'(r)$ عندما $r = 3$ in.

60π

4) حجم: الصيغة $V = x^3$ تمثل حجم مكعب طول ضلعه x، افترض أن x تتغير.



a) أوجد معدل تغير الحجم $V(x)$ عندما تتغير x من 3.2in إلى 3.4 in

32.7

b) أوجد معدل تغير الحجم $V(x)$ اللحظيّ عندما $x = 4$ in.

48

c) وضح العلاقة بين صيغة حجم المكعب ومشتقتها.

إجابة ممكنة: مشتقة صيغة الحجم هي نصف المساحة السطحية للمكعب ($3x^2$)

5) حركة الكرة: أُطلقت كرة إلى أعلى من نقطة ترتفع 6 ft عن سطح الأرض، بسرعة ابتدائية قدرها 80 ft/s، إذا كان ارتفاعها $h(t) = -16t^2 + 80t + 6$ قدمًا بعد t ثانية.

a) أوجد سرعة الكرة عند أي لحظة t.

$v(t) = -32t + 80$

b) أوجد السرعة اللحظية للكرة عندما $t = 2$ ثانية.

16 ft/s

الاسم: ______________ التاريخ: ______

8-4 التدريبات الإثرائية

اشتقاق متسلسلات القوى

يمكن كتابة بعض الدوال المثلثية والأسية في صورة متسلسلة قوى، فمثلاً متسلسلة قوى الدالة الزوجية $y = \cos x$ تحتوي على القوى الزوجية لـ x.

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \frac{x^8}{8!} - \ldots$$

وأن متسلسلة قوى الدالة الفردية $y = \sin x$ تحتوي على القوى الفردية لـ x:

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \frac{x^9}{9!} - \ldots.$$

يمكن اشتقاق متسلسلات القوى هذه.

1) a) أوجد $(\sin x)'$، وذلك باشتقاق حدود متسلسلة قوى $\sin x$ حدًّا حدًّا، ثم بسِّط النتيجة.

$$\mathbf{1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \frac{x^8}{8!} - \ldots}$$

b) ما الدالة التي تمثلها المتسلسلة اللانهائية الجديدة؟

$\cos x$

c) أي أن: $(\sin x)' = \underline{\mathbf{\cos x}}$

2) a) ماذا تتوقع أن تكون مشتقة الدالة $\cos x$؟ **تختلف الإجابات.**

b) أوجد $(\cos x)'$ مستعملًا متسلسلة قوى $\cos x$

$$\mathbf{-x + \frac{x^3}{3!} - \frac{x^5}{5!} + \frac{x^7}{7!} - \frac{x^9}{9!} + \ldots}$$

c) أي أن: $(\cos x)' = \underline{\mathbf{-\sin x}}$

3) a) إذا كانت متسلسلة قوى الدالة $f(x)$ هي $f(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \ldots$، فأوجد $f'(x)$.

$$\mathbf{1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \ldots}$$

b) ما العلاقة بين $f(x), f'(x)$؟ **متساويتان**

c) إذا عبرنا عن الدالة $f(x)$ بالشكل e^x، فأوجد $f'(x)$. **e^x**

استعمل النتائج التي حصلت عليها في المسائل 3 – 1 ؛ لإيجاد مشتقة كل دالة فيما يأتي:

4) $f(x) = xe^x$ — **$xe^x + e^x$**

5) $f(x) = \sin x + \cos x$ — **$\cos x - \sin x$**

6) $f(x) = (\cos x)^2$ — **$-2\cos x \sin x$**

8-5 تدريبات إعادة التعليم

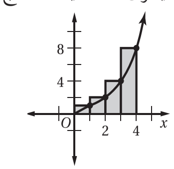
المساحة تحت المنحنى والتكامل

المساحة تحت منحنى: يمكنك استعمال مساحات مستطيلات لتقريب المساحة المحصورة بين منحنى دالة $f(x)$ ومحور x على الفترة $[a, b]$، الواقعة في مجال $f(x)$.

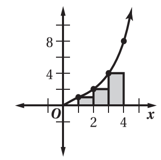
مثال

قرِّب مساحة المنطقة المحصورة بين منحنى $f(x)=\frac{1}{2}x^2$ والمحور x في الفترة $[0, 4]$، باستعمال مستطيلات عرض كل واحد منها وحدة واحدة، استعمل الأطراف اليمنى ثم اليسرى لقاعدات المستطيلات لتحديد ارتفاعها ثم احسب الوسط للتقريبين.

عند استعمال الأطراف اليمنى لقاعدات المستطيلات تنتج أربعة مستطيلات عرض كل منها وحدة واحدة. (الشكل A)، وعند استعمال الأطراف اليسرى للمستطيلات، تنتج أربعة مستطيلات عرض كل منها وحدة واحدة (الشكل B).



الشكل A



الشكل B

المساحة باستعمال الأطراف اليمنى	المساحة باستعمال الأطراف اليسرى
$R_1 = 1.\,f(1) = 0.5$	$R_1 = 1.\,f(0) = 0$
$R_2 = 1.\,f(2) = 2$	$R_2 = 1.\,f(1) = 0.5$
$R_3 = 1.\,f(3) = 4.5$	$R_3 = 1.\,f(2) = 2$
$R_4 = 1.\,f(4) = 8$	$R_4 = 1.\,f(3) = 4.5$
المساحة الكلية = 15 وحدة مربعة	المساحة الكلية = 7 وحدة مربعة

أي أن المساحة باستعمال الأطراف اليمنى أو اليسرى هي 15 أو 7 وحدة مربعة على الترتيب. وهذا يعطي تقديرًا أعلى وآخر أدنى للمساحة؛ 15 > المساحة > 7 . وبأخذ متوسط التقريبين، فإن 11 يُعدُّ تقريبًا أفضل للمساحة.

تمارين

1) قرِّب مساحة المنطقة المحصورة بين منحنى $f(x)=3x^2+1$ والمحور x في الفترة $[0,4]$، باستعمال مستطيلات عرض كل واحد منها وحدة واحدة. استعمل الأطراف اليمنى ثم اليسرى لقاعدات المستطيلات لتحديد ارتفاعها ثم احسب الوسط للتقريبين.

94 وحدة مربعة؛ 46 وحدة مربعة؛ 69.5 وحدة مربعة.

2) قرِّب مساحة المنطقة المحصورة بين منحنى $f(x)=-x^2+5x+6$ والمحور x في الفترة $[1,5]$، باستعمال مستطيلات عرض كل واحد منها وحدة واحدة. استعمل الأطراف اليمنى ثم اليسرى لقاعدات المستطيلات لتحديد ارتفاعها ثم احسب الوسط للتقريبين.

40 وحدة مربعة؛ 44 وحدة مربعة؛ 42 وحدة مربعة.

8-5 تدريبات إعادة التعليم

(تتمة)

المساحة تحت المنحنى والتكامل

التكامل

التكامل المحدد	مساحة المنطقة المحصورة بين منحنى الدالة $f(x)$ والمحور x في الفترة $[a, b]$ هي: $\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta x$، حيث a و b الحدان السفلي والعلوي على الترتيب. $\Delta x = \frac{b-a}{n},\ x_i = a + i\Delta x$

مثال

استعمل النهايات لإيجاد مساحة المنطقة المحصورة بين منحنى $y=4x^2$ والمحور x في الفترة $[0, 5]$ أي $\int_0^5 4x^2\,dx$

ابدأ بإيجاد x_i , Δx

$\Delta x = \frac{b-a}{n}$	صيغة Δx
$= \frac{5-0}{n}$	$b=5, a=0$
$x_i = a + i\Delta x$	صيغة x_i
$= 0 + i\,\frac{5}{n} = \frac{5i}{n}$	$a=0, \Delta x = \frac{5}{n}$

احسب التكامل المحدد الذي يعطي المساحة المطلوبة.

$\int_0^5 4x^2\,dx = \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta x = \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} 4x_i^2\,\Delta x$	تعريف التكامل المحدد $f(x_i) = 4x_i^2$
$= \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} 4\left(\frac{5i}{n}\right)^2 \frac{5}{n} = \lim_{n\to\infty}\frac{20}{n}\left(\frac{25}{n^2}\sum_{i=1}^{n} i^2\right)$	$x_i = \frac{5i}{n}, \Delta x = \frac{5}{n}$، خصائص المجموع
$= \lim_{n\to\infty}\frac{20}{n}\left(\frac{25}{n^2}\cdot\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}\right)$	$\sum_{i=1}^{n} i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$
$= \lim_{n\to\infty}\frac{500}{6}\left(\frac{2n^2+3n+1}{n^2}\right) = \lim_{n\to\infty}\frac{500}{6}\left(2+\frac{3}{n}+\frac{1}{n^2}\right)$	بسِّط وأوجد المفكوك، ثم اقسم على n^2
$= \left(\lim_{n\to\infty}\frac{500}{6}\right)\left[\lim_{n\to\infty}2 + \left(\lim_{n\to\infty}3\right)\left(\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\right) + \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^2}\right]$	خصائص النهايات
$= \frac{500}{6}[2+3(0)+0] \approx 166.67$	بسِّط

تمارين

استعمل النهايات لإيجاد المساحة المحصورة بين منحنى $f(x)$ والمحور x والمعطاة بالتكامل المحدد في كلٍّ مما يأتي:

1) $\int_0^2 x^3\,dx$ **4 وحدات مربعة**

2) $\int_2^4 (x^2+3)\,dx$ **$\frac{74}{3}$ وحدة مربعة**

3) $\int_4^6 (1+x)\,dx$ **12 وحدة مربعة**

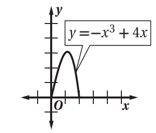
4) $\int_1^3 4x^3\,dx$ **80 وحدة مربعة**

الاسم: ____________ التاريخ: ________

8-5 تدريبات حل المسألة

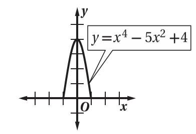
المساحة تحت المنحنى والتكامل

1) **مدخل:** مدخل باب لعبة له الشكل الظاهر أدناه، فما مساحة المدخل إذا كانت x بالأقدام؟



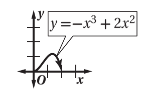
4 أقدام مربعة

2) **مناجم:** يتخذ مدخل منجم للفحم الشكل الظاهر أدناه، فما مساحة المدخل إذا كانت x بالأمتار؟



$5\frac{1}{15}$ أمتار مربعة

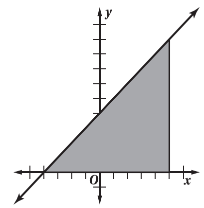
3) **سدود:** يتخذ سطح سد للماء الشكل الظاهر أدناه، فما مساحة سطح السد إذا كانت x بالكيلو متر؟



$1\frac{1}{3}$ كيلومتر مربع

4) **منطقة مثلثية:** ارسم المثلث المكون من المحور x والمستقيمين $x = 5$ و $y = x + 4$ على المستوى الإحداثي.

a) ظلّل المنطقة الداخلية للمثلث.



إجابة ممكنة:

b) أوجد طول القاعدة، وارتفاع المثلث، واستعملهما لحساب مساحة المثلث.

9؛ 9؛ 40.5 وحدة مربعة

c) أوجد مساحة المثلث بحساب التكامل

$$\int_{-4}^{5} (x + 4)\, dx$$

40.5 وحدة مربعة

5) **بذور:** ينوي علي زراعة حديقة منزله بالبذور، فإذا كانت مساحة الحديقة التي ينوي علي زراعتها بالأمتار المربعة، تتعين بالتكامل: $\int_{1}^{7} (-x^2 + 8x - 7)\, dx$ ، وكانت البذور التي بحوزته كافية لزراعة $35\,m^2$، فهل تكفي البذور لزراعتها؟ وضح إجابتك.

لا؛ إجابة ممكنة: يحتاج إلى المزيد من البذور لزراعة $36\,m^2$، في حين يوجد لديه بذور تكفي لزراعة $35\,m^2$ فقط.

الاسم: ____________ التاريخ: ________

8-5 التدريبات الإثرائية

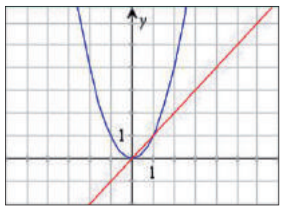
إيجاد المساحة المحصورة بين منحنيين

إيجاد المساحة المحصورة بين منحنيين:

تعلمت إيجاد المساحة المحصورة بين منحنى دالة والمحور x.

أجب عن الأسئلة الآتية لإيجاد المساحة المحصورة بين دالتين.

1) مثّل كلًّا من الدالتين $y = x^2, y = x$



2) أوجد نقاط التقاطع بين الدالتين: $y = x^2, y = x$

(0, 0), (1, 1)

3) أي الدالتين أكبر في الفترة $(0, 1)$؟

$\boldsymbol{y = x}$

4) أوجد كلًّا من $\int_0^1 x^2 dx$, $\int_0^1 x\, dx$

$\frac{1}{2}, \frac{1}{3}$

5) أوجد كلًّا من $\int_0^1 x\, dx - \int_0^1 x^2 dx$

$\frac{1}{6}$

6) ماذا يمثّل الناتج في سؤال 6؟

مساحة المنطقة المحصورة بين الدالتين.

7) أوجد $\int_0^1 (x - x^2)\, dx$

$\frac{1}{6}$

قارن بين الناتجين للسؤالين 7 ,5

متساويان

8) لخّص الخطوات لإيجاد المساحة المحصورة بين دالتين.

انظر إجابات الطلاب

الاسم: ____________ التاريخ: ____________

8-6 تدريبات إعادة التعليم

النظرية الأساسية في التفاضل والتكامل

الدوال الأصلية والتكامل غير المحدد:

يُقال إن الدالة $F(x)$ هي دالة أصلية للدالة المعطاة $f(x)$، إذا كان $F'(x) = f(x)$.

قواعد الدوال الأصلية	
قاعدة القوة	إذا كان $f(x) = x^n$، حيث n عدد حقيقي لا يساوي -1، فإن $F(x) = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C$.
ضرب القوة في عدد	إذا كان $f(x) = kx^n$، حيث n عدد حقيقي لا يساوي -1 و k ثابت، فإن $F(x) = \frac{kx^{n+1}}{n+1} + C$.
الجمع والطرح	إذا كان $F(x)$ و $G(x)$ دالتين أصليتين للدالتين $f(x)$ و $g(x)$ على الترتيب، فإن $F(x) \pm G(x)$ دالة أصلية للدالة $f(x) \pm g(x)$.

مثال 1 أوجد جميع الدوال الأصلية لكل دالة مما يأتي:

a) $f(x) = -3x^5$

$f(x) = -3x^5$	الدالة المعطاة
$F(x) = \frac{-3x^{5+1}}{5+1} + C$	قاعدة ضرب دالة القوة في عدد
$= -\frac{1}{2}x^6 + C$	بسّط

b) $f(x) = x^3 + 4x^2 - 2$

$f(x) = x^3 + 4x^2 - 2$	الدالة المعطاة
$= x^3 + 4x^2 - 2x^0$	إعادة كتابة الدالة
$F(x) = \frac{x^{3+1}}{3+1} + \frac{4x^{2+1}}{2+1} - \frac{2x^{0+1}}{0+1}$	قواعد الدالة الأصلية
$= \frac{1}{4}x^4 + \frac{4}{3}x^3 - 2x + C$	بسّط

تمارين

أوجد جميع الدوال الأصلية لكل دالة مما يأتي:

1) $f(x) = 2x^4 + 3x^2 - 5$

$\boldsymbol{\frac{2}{5}x^5 + x^3 - 5x + C}$

2) $g(x) = \frac{2}{x^3}$

$\boldsymbol{-\frac{1}{x^2} + C}$

3) $t(x) = \frac{3}{4}x^6 - \frac{1}{2}x^3$

$\boldsymbol{\frac{3}{28}x^7 - \frac{1}{8}x^4 + C}$

4) $n(x) = \sqrt[5]{x} - 2$

$\boldsymbol{\frac{5}{6}x^{\frac{6}{5}} - 2x + C}$

الاسم: ____________ التاريخ: ____________

8-6 تدريبات إعادة التعليم (تتمة)

النظرية الأساسية في التفاضل والتكامل

النظرية الأساسية في التفاضل والتكامل: يُعرَّف التكامل غير المحدد للدالة $f(x)$ على أنه $\int f(x)dx = F(x) + C$، حيث $F(x)$ دالة أصلية للدالة $f(x)$ ؛ أي $F'(x) = f(x)$ و C ثابت.

النظرية الأساسية في التفاضل والتكامل	إذا كانت $F(x)$ دالةً أصلية للدالة المتصلة $f(x)$، فإن $\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$، ويمكن كتابة الطرف الأيمن للمعادلة في الصورة $F(x)\Big\|_a^b$

مثال احسب كل تكامل مما يأتي:

a) $\int (3x^2 + 4x - 1)\, dx$

$\int (3x^2 + 4x - 1)\, dx = \frac{3x^{2+1}}{2+1} + \frac{4x^{1+1}}{1+1} - \frac{x^{0+1}}{0+1} + C$	قواعد الدالة الأصلية (ضرب القوة في عدد)
$= \frac{3x^3}{3} + \frac{4x^2}{2} - x + C$	بسّط
$= x^3 + 2x^2 - x + C$	بسّط

b) $\int_2^4 (x^3 - 1)\, dx$

$\int_2^4 (x^3 - 1)\, dx = \left(\frac{x^4}{4} - x\right)\Big\|_2^4$	النظرية الأساسية في التفاضل والتكامل
$= \left(\frac{4^4}{4} - 4\right) - \left(\frac{2^4}{4} - 2\right)$	$b = 4 ; a = 2$
$= 60 - 2 = 58$	بسّط

تمارين

أوجد كل تكامل مما يأتي:

1) $\int (3x^7 - x^2)\, dx$

$\boldsymbol{\frac{3x^8}{8} - \frac{x^3}{3} + C}$

2) $\int_1^2 (x^2 + 1)\, dx$

$\boldsymbol{\frac{10}{3}}$

3) $\int_1^2 (x^2 - 1)\, dx$

$\boldsymbol{\frac{4}{3}}$

4) $\int_{-1}^1 (x^3 - 2x + 1)\, dx$

2

الاسم: ________________ التاريخ: ________

8-6 تدريبات حل المسألة

النظرية الأساسية في التفاضل والتكامل

1) **الوثب العالي:** تدرب محمود على الوثب العالي في حصة التربية الرياضية، فأمكن وصف سرعته في أثناء الوثبة بالدالة: $v(t) = -32t+24$، حيث t بالثواني والسرعة بالأقدام لكل ثانية.

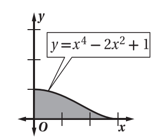
a) أوجد دالة موقع محمود $s(t)$، مفترضًا أن $s(t) = 0$، عندما $t = 0$.

$\boldsymbol{s(t) = -16t^2 + 24t}$

b) عندما وثب محمود، كم استغرق من الوقت للوصول إلى الأرض؟

1.5 ثانية

2) **إعلان:** الشكل أدناه يمثل شعارًا لشركة جديدة، ما المساحة التي سيستغلها الشعار إذا قررت الشركة وضعه على قمصان تابعة لها؛ علمًا بأن x بالبوصات وتقع بين 0 و1؟



$\frac{8}{15}$ بوصة مربعة

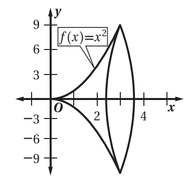
3) **شد زنبرك:** يُعبَّر عن الشغل بالجول اللازم لشد زنبرك مسافة 36 in من وضعه الطبيعي بالمعادلة:

$\int_0^3 80x\,dx$ ، فما الشغل اللازم؟

360 جول

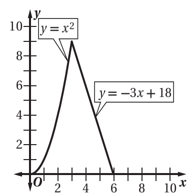
4) **حجم:** في الشكل أدناه، أوجد حجم المجسم الناتج عن دوران منحنى $f(x) = x^2$ حول محور السينات في الفترة $[0,3]$، إذا كان الحجم يُعبَّر عنه بالمعادلة:

$$\int_0^3 \pi (x^2)^2\,dx$$



$\frac{243\pi}{5}$ وحدة مكعبة

5) **دعاية:** اشترت شركة لوحة إعلانية، وأمكن تمثيل هذه اللوحة بالشكل أدناه، حيث القياسات بالأقدام، فكم تبلغ مساحة اللوحة الإعلانية التي اشترتها الشركة؟



22.5 قدمًا مربعة

الاسم: ________________ التاريخ: ________

8-6 التدريبات الإثرائية

بعض خصائص التكامل

بعض خصائص التكامل:

اتبع الخطوات التالية للوصول إلى بعض خصائص التكامل المحدد:

1) أوجد كلًّا من التكاملات الآتية: $\int_1^2 (2x^2+1)\,dx,\ \int_2^3 (2x^2+1)\,dx,\ \int_1^3 (2x^2+1)\,dx$

$\boldsymbol{\frac{17}{3}, \frac{41}{3}, \frac{58}{3}}$

2) قارن النتائج في السؤال الأول.

$$\boldsymbol{\int_1^2 (2x^2+1)\,dx + \int_2^3 (2x^2+1)\,dx = \int_1^3 (2x^2+1)\,dx}$$

3) هل تعتقد أن هذه النتيجة صحيحة دائمًا؟

نعم

4) عمِّم النتيجة التي توصلت لها في السؤال 2.

$$\boldsymbol{\int_a^b f(x)dx + \int_b^c f(x)dx = \int_a^c f(x)dx}$$

5) أوجد $\int_2^1 (2x^2+1)\,dx,\ \int_1^2 (2x^2+1)\,dx$

$\boldsymbol{\frac{17}{3}, \frac{-17}{3}}$

6) قارن القيمتين في السؤال 5

$$\boldsymbol{\int_1^2 (2x^2+1)\,dx = -\int_2^1 (2x^2+1)\,dx}$$

7) عمِّم النتيجة التي توصلت لها في السؤال 6

$$\boldsymbol{\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx}$$

8) أوجد $\int_2^2 (2x^2+1)\,dx$

0

9) عمِّم النتيجة التي توصلت لها في السؤال 8. $\boldsymbol{\int_a^a f(x)dx = 0}$

10) استخدم الخصائص الثلاث التي توصلت إليها لحساب قيمة: $\int_3^5 (2x+4)\,dx + \int_1^3 (2x+4)\,dx + \int_2^2 (5x^3+7)\,dx$

40