وزارة التربية والتعليم
Ministry of Education
المملكة العربية السعودية

الرياضيات

للصف الأول الثانوي

مصادر المعلم للأنشطة الصفية

الفصل الثامن: الدائرة

العبيكان Obeikan
McGraw Hill Education
يوزع مجانًا ولا يباع
١٤٣٥هـ - ٢٠١٤م

Glencoe Mathematics © 2010
CHAPTER RESOURCE MASTERS
Geometry

الرياضيات ـ الصف الأول الثانوي

مصادر المعلم للأنشطة الصفية

أعدَّ النسخة العربية: شركة العبيكان للتعليم

www.obeikaneducation.com

McGraw Hill Education

العبيكان Obeikan

English Edition Copyright © the McGraw-Hill Companies, Inc.
All rights reserved.

Arabic Edition is published by Obeikan under agreement with The McGraw-Hill Companies, Inc. © 2008.

حقوق الطبعة الإنجليزية محفوظة لشركة ماجروهل©.

الطبعة العربية: مجموعة العبيكان للاستثمار
وفقًا لاتفاقيتها مع شركة ماجروهل© ٢٠٠٨م/ ١٤٢٩هـ.

لا يسمح بإعادة إصدار هذا الكتاب أو نقله في أي شكل أو واسطة، سواءً أكانت إلكترونية أو ميكانيكية، بما في ذلك التصوير بالنسخ «فوتوكوبي»، أو التسجيل، أو التخزين و الاسترجاع، دون إذن خطي من الناشر.

بِسْمِ اللَّهِ الرَّحْمَٰنِ الرَّحِيمِ

المقدمة

عزيزي المعلم / عزيزتي المعلمة

يسرنا أن نقدم هذه المجموعة من التدريبات المساندة، التي تراعي الفروق الفردية بين الطلاب. حيث نطمح أن يساعدك التنوع في هذه التدريبات على الوصول إلى جميع الطلاب في الصف، مهما تباينت مستوياتهم التحصيلية.

وقد تم تخصيص صفحتين لتدريبات إعادة التعليم وصفحة واحدة لكلٍّ من التدريبات الأخرى لكل درسٍ من دروس كتاب الطالب. حيث يمكنك أن تكلف الطلاب حل صفحة التدريبات المقابلة لكل درس حسب مستوى كلٍّ منهم؛ سواء أكان ذلك داخل الصف أم في المنزل. وليست هذه التدريبات بديلًا عن كتاب التمارين، ولكنها مساندة ومكملة له.
وهذه التدريبات هي:

تدريبات إعادة التعليم

تركِّز هذه التدريبات على الأفكار الرئيسة في الدرس وتقدمها بأسلوب تدريسي ومعالجة يختلفان أحيانًا عن كتابي الطالب والتمارين. وهي موجّهة إلى الطلاب ذوي المستوى دون المتوسط.

تدريبات المهارات

تركِّز هذه التدريبات على المهارات الحسابية الموجودة في الدرس؛ فتقدم تدريبات إضافية على مهارات الدرس وبعض المسائل التي تركز على تلك المهارات. وهي موجّهة إلى الطلاب ذوي المستوى ضمن المتوسط ودون المتوسط.

تدريبات حل المسألة

تأتي هذه التدريبات انطلاقًا من اهتمام هذه المناهج بحلّ المسألة، حيث تم تخصيصها؛ لتقديم تدريبات إضافية على حل المسألة ترتبط بكل درس من دروس كتاب الطالب. وهي موجهة إلى جميع الطلاب على اختلاف مستوياتهم التحصيلية.

التدريبات الإثرائية

تساعد هذه التدريبات الإثرائية على التوسع أو تدعيم مفاهيم الدرس، كما تؤدي إلى توسيع مدارك الطلاب حول تعلُّم الرياضيات بشكل عام. وهذه التدريبات موجهة إلى الطلاب ذوي المستوى ضمن المتوسط وفوق المتوسط.

الفهرس

الاسم ________________ التاريخ ________

8-1 تدريبات إعادة التعليم
الدائرة ومحيطها

قطع مستقيمة في الدائرة:

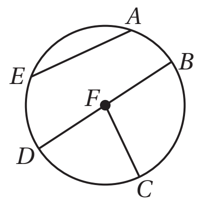
الدائرة هي المحل الهندسي لجميع النقاط في المستوى، بحيث تبعد بعدًا ثابتًا عن نقطةٍ معلومةٍ تسمّى **مركز الدائرة**.

للقطع المستقيمة التي تقطع الدائرة أسماء خاصة.

- القطعة المستقيمة التي يقع أحد طرفَيها على الدائرة والآخر عند مركز الدائرة، تسمّى **نصف قطر**.
- القطعة المستقيمة التي يقع طرفاها على الدائرة تسمّى **وترًا**.
- الوتر المار بمركز الدائرة يسمّى **قطرًا**، ويتكون من نصفَي قطرين يقعان على استقامةٍ واحدةٍ.

تكون العلاقات الآتية صحيحة في الدائرة التي نصف قطرها r وقطرها d:

$d = 2r$ ، $r = \frac{1}{2}d$ أو $r = \frac{d}{2}$

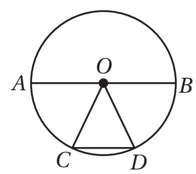


وتر: $\overline{BD}, \overline{AE}$

نصف قطر: $\overline{FD}, \overline{FC}, \overline{FB}$

قطر: $\overline{BD}$

مثال



a) سمِّ الدائرة في الشكل المجاور.

اسم هذه الدائرة $\odot O$

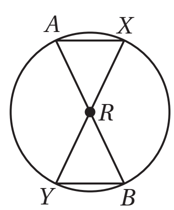
b) عيّن أنصاف أقطار الدائرة.

$\overline{AO}, \overline{BO}, \overline{CO}, \overline{DO}$ أنصاف أقطار في هذه الدائرة.

c) عيّن أوتار الدائرة.

$\overline{AB}, \overline{CD}$ وتران في هذه الدائرة.

تمارين



استعمل الشكل المجاور للإجابة عن الأسئلة 7 – 1.

1) سمِّ الدائرة.

2) عيّن أنصاف أقطار الدائرة.

3) عيّن أوتار الدائرة.

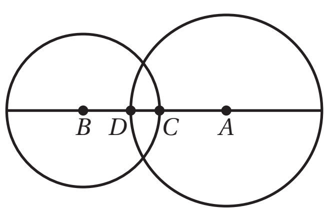
4) عيّن أقطار الدائرة.

5) إذا كان $AB = 18$ mm، فأوجد AR.

6) إذا كان $RY = 10$ in، فأوجد AR وAB.

7) هل $\overline{AB} \cong \overline{XY}$؟ فسّر إجابتك.

8) قطر $\odot A$ يساوي 40 وحدةً، وقطر $\odot B$ يساوي 32 وحدةً، و AC يساوي 14 وحدةً، أوجد قياس كلٍّ من CD وَ BD.



8-1 تدريبات إعادة التعليم (تتمة)

الدائرة ومحيطها

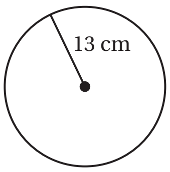
محيط الدائرة:

محيط الدائرة هو طول المنحنى المغلق الذي يمثل الدائرة ويرمز له بالرمز C.

محيط الدائرة	إذا كان محيط الدائرة يساوي C، وقطرها يساوي d، أونصف قطرها يساوي r، فإنه يمكننا التعبير عن المحيط بالعلاقتين الآتيتين: $C = 2\pi r$ ، أو $C = \pi d$ ، حيث π عدد غير نسبي ويساوي 3.14 أو $\frac{22}{7}$ تقريبًا، يكون المضلّع **محاطًا بدائرةٍ** إذا وقعت رؤوسه جميعها على الدائرة، وتسمى هذه الدائرةُ **الدائرة الخارجية**.

مثال

أوجد محيط الدائرة المجاورة، مقربًا إجابتك إلى أقرب جزءٍ من مائةٍ.



$C = 2\pi r$	صيغة محيط الدائرة
$= 2\pi(13)$	$r = 13$
$= 26\pi$	بالتبسيط
≈ 81.68	مستعملًا الآلة الحاسبة

محيط هذه الدائرة يساوي 26π cm أو 81.68 cm تقريبًا.

تمارين

أوجد قطر الدائرة ونصف قطرها إذا كان محيطُها كما هو مبيّن في الأسئلة 6–1، مقربًا إجابتك إلى أقرب جزءٍ من مائةٍ.

1) $C = 40$ in.

2) $C = 256$ ft.

3) $C = 15.62$ m.

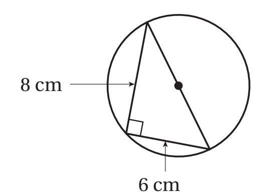
4) $C = 9$ cm.

5) $C = 79.5$ yd.

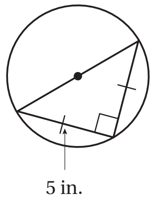
6) $C = 204.16$ m.

أوجد القيمة الدقيقة لمحيط الدائرة في كلٍّ من مما يأتي:

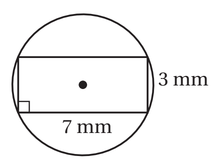
7)



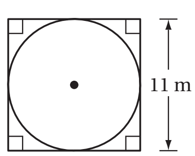
8)



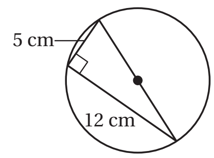
9)



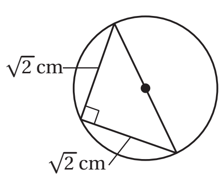
10)



11)



12)

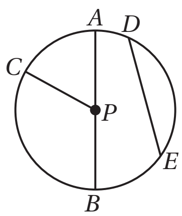


الاسم ________________ التاريخ ________

8-1 تدريبات المهارات

الدائرة ومحيطها

استعمل $\odot P$ في الشكل المجاور للإجابة عن الأسئلة 7 – 1.



1) سمِّ مركز الدائرة.

2) عيِّن نصف قطر في الدائرة.

3) عيِّن وترًا في الدائرة.

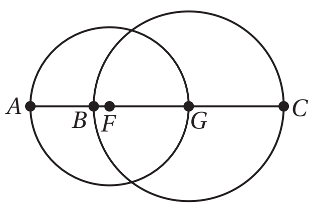
4) عيِّن قطرًا في الدائرة.

5) عيِّن نصف قطرٍ في الدائرة، لا يكون جزءًا من قطرٍ مرسومٍ فيها.

6) إذا كان قطر الدائرة يساوي 16 سم، فأوجد نصف قطرها.

7) إذا كان $PC = 11$ in ، فأوجد AB.

إذا كان قطرا $\odot F$ و$\odot G$ هما 5 و6 وحداتٍ على الترتيب، فأوجد كلًّا من القياسين الآتيين:



8) BF

9) AB

أوجد قطر الدائرة ونصف قطرها المُعطَى محيطُها فيما يأتي، مقرّبًا إجابتك إلى أقرب جزءٍ من مائةٍ:

10) $C = 36$ cm.

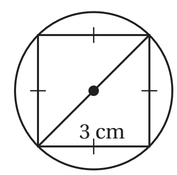
11) $C = 17.2$ ft.

12) $C = 81.3$ cm.

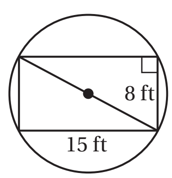
13) $C = 5$ yd.

أوجد القيمة الدقيقة لمحيط كلّ دائرةٍ من الدائرتين الآتيتين:

14)



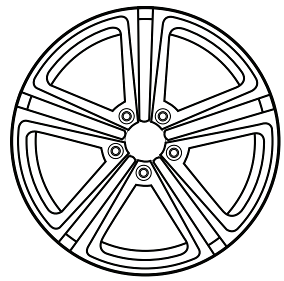
15)



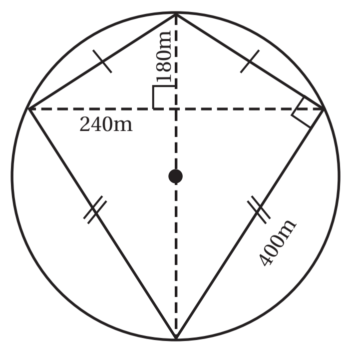
8-1 تدريبات حل المسألة

الدائرة ومحيطها

1) عجلات: يقوم سالم بتصميم إطارات سيارة، إذا كان قطر الإطار يساوي 18 in، وأراد أن يضع دعامات تمتد من مركز الإطار إلى حافته، فما طول كلٍّ من هذه الدعامات؟



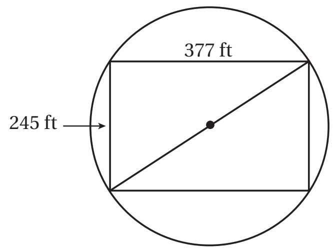
2) حدائق: حديقة دائرية الشكل، صمّمت فيها الطرقات الرئيسة الموضحة في الشكل أدناه، أوجد محيط الحديقة مقربًا إجابتك إلى أقرب مترٍ.



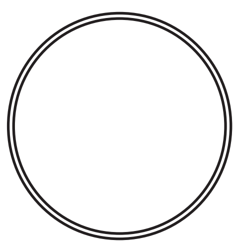
3) نقود: وضعت ثلاث قطع نقود من فئة نصف الريال في صفٍّ واحدٍ كما في الشكل أدناه.

إذا كانت المسافة بين مركزَي القطعتين (الأولى والثالثة) تساوي 5.6 cm، فما نصف قطر قطعة النقود من فئة النصف ريال؟

4) ساحة عامّة: أُحيطت ساحة عامة مستطيلة الشكل بسياجٍ دائريٍّ، على أن يصل كلّ من قُطرَي المستطيل بين نقطتين، على السياج مرورًا بمركز الدائرة كما في الشكل أدناه، ما طول قطر السياج؟ قرّب إجابتك إلى أقرب جزء من عشرة من القدم.



5) أطواق التمرين: يريد حسّان أن يصنع طوقًا دائريًّا يدوّره حول جسمه للتمرينات الرياضية، ومن أجل ذلك استعمل أنبوبًا طوله 2.5 m.



a) ما طول قطر الطوق الذي صنعه حسّان؟ قرّب إجابتك إلى أقرب سنتمتر.

b) ما طول نصف قطر الطوق الذي صنعه حسّان؟ قرّب إجابتك إلى أقرب سنتمترٍ.

8-1 التدريبات الإثرائية

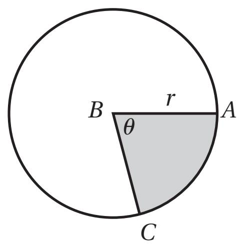
القطاع الدائري:

يمكنك إيجاد مساحة الدائرة مستعملًا القانون $A = \pi r^2$، والقطاع الدائري جزءٌ من الدائرة، وينحصر بين نصفَي قطرين وقوس من الدائرة.

والزاوية المركزيّة للقطاع الدائري زاويةٌ يقع رأسها عند مركز الدائرة، وضلعاها نصفا قطرين في الدائرة.

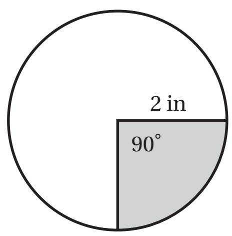
وتتناسب مساحة القطاع الدائري ذي الزاوية المركزيّة θ مع الجزء الذي تمثله θ من $360°$

أي أن:



$$\frac{\text{مساحة القطاع}}{\text{مساحة الدائرة}} = \frac{\theta}{360°}\text{، أو مساحة القطاع } = \frac{\theta}{360°}\pi r^2$$

مثال **أوجد مساحة القطاع الدائري في الشكل المجاور.**



$$A = \frac{\theta}{360°}\pi r^2$$

$$= \frac{90°}{360°}\pi(2)^2 \qquad r = 2 \quad \theta = 90°$$

$$= \frac{1}{4}(4\pi) = \pi$$

إذن مساحة القطاع الدائري تساوي $\pi \text{ in}^2$ أو 3.14 in^2 تقريبًا.

تمارين:

1) أوجد مساحة القطاع الدائري، إذا كان قياس زاويته المركزيّة $72°$، ونصف قطر الدائرة فيه 10 cm

2) أوجد مساحة القطاع الدائري، إذا كان قياس زاويته المركزيّة $60°$، ونصف قطر الدائرة فيه 5 in

3) إذا كانت مساحة قطاع دائري $15\pi \text{ cm}^2$، ونصف قطر الدائرة يساوي 5 cm، فأوجد قياس الزاوية المركزيّة للقطاع.

4) إذا كانت مساحة قطاعٍ دائريٍّ تساوي $\frac{1}{3}$ مساحة الدائرة، فأوجد قياس زاويته المركزية.

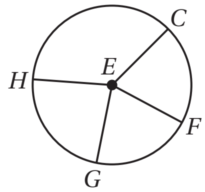
الاسم ________________________ التاريخ ____________

8-2 تدريبات إعادة التعليم

قياس الزوايا والأقواس

الزوايا والأقواس:

الزاوية المركزيّة زاوية يقع رأسها عند مركز الدائرة، وضلعاها نصفا قطرين في الدائرة، والزاوية المركزيّة تقسم الدائرة إلى قوسين؛ **قوس أكبر** و**قوس أصغر**.



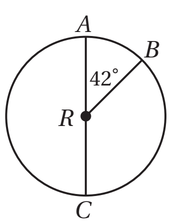
$\widehat{GF}$ قوس أصغر.
$\widehat{CHG}$ قوس أكبر.
$\angle GEF$ زاوية مركزية.

وهذه بعض خصائص الزوايا المركزيّة والأقواس:

- مجموع قياسات الزوايا المركزيّة غير المتداخلة في الدائرة يُساوي $360°$
  $m\angle HEC + m\angle CEF + m\angle FEG + m\angle GEH = 360°$.
- قياس القوس الأصغر أقل من $180°$،ويساوي قياس زاويته المركزيّة.
  $m\widehat{CF} = m\angle CEF$.
- قياس القوس الأكبر يساوي $360°$، مطروحًا منها قياس القوس الأصغر الذي له نفس الطرفين.
  $m\widehat{CGF} = 360° - m\widehat{CF}$
- قياس **نصف الدائرة** يساوي $180°$
- **القوسان المتطابقان** هما قوسان إذا وفقط إذا وقعا في الدائرة نفسها، أو في دائرتين متطابقتين، وكانت الزاويتان المركزيتان المناظرتان لهما متطابقتين.
  $\widehat{FG} \cong \widehat{CF}$ إذا وفقط إذا كانت $\angle FEG \cong \angle CEF$.
- قياس القوس المكوَّن من **قوسين متجاورين**، يساوي مجموع قياسَي هذين القوسين، وتسمّى هذه الخاصية (مسلّمة جمع الأقواس).
  $m\widehat{CF} + m\widehat{FG} = m\widehat{CG}$

مثال

إذا كان $\overline{AC}$ قطرًا في $\odot R$ الموضحة في الشكل المجاور ، فأوجد $m\widehat{AB}$ و $m\widehat{ACB}$.

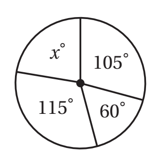


$\angle ARB$ زاوية مركزية و $m\angle ARB = 42°$، إذن $m\widehat{AB} = 42°$.
لذا فإن: $m\widehat{ACB} = 360° - 42° = 318°$

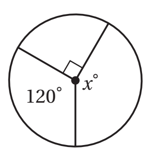
تمارين

أوجد قيمة x في السؤالين الآتيين:

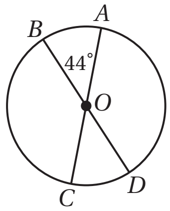
(1



(2



إذا كان $\overline{BD}$ وَ $\overline{AC}$ قطرين في $\odot O$، فحدّد إذا كان كلٌّ من الأقواس الآتية قوسًا أكبر أم قوسًا أصغر أم نصف دائرة، ثم أوجد قياسه:

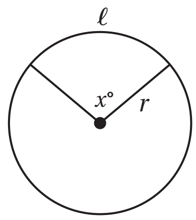


3) $\widehat{BA}$
4) $\widehat{BC}$
5) $\widehat{CD}$
6) $\widehat{ACB}$
7) $\widehat{BCD}$
8) $\widehat{AD}$

8-2 تدريبات إعادة التعليم (تتمة)

قياس الزوايا والأقواس

طول القوس:

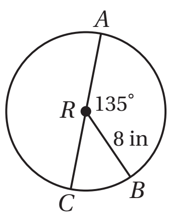


القوس جزء من الدائرة، وطوله جزء من محيطها.

يمكنك إيجاد **طول القوس** ℓ مستعملًا المعادلة الآتية:

$\ell = \frac{x°}{360°} \cdot 2\pi r$.

مثال **أوجد طول $\widehat{AB}$ الموضّح في الشكل المجاور، مقربًا إجابتك إلى أقرب جزء من مئة.**

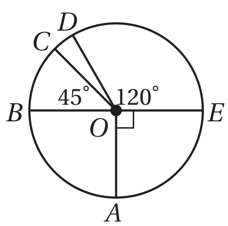


يمكنك إيجاد طول $\widehat{AB}$، مستعملًا المعادلة الآتية: $\ell = \frac{x°}{360°} \cdot 2\pi r$

$\ell = \frac{x°}{360°} \cdot 2\pi r$	معادلة طول القوس
$= \frac{135°}{360°} \cdot 2\pi(8)$	بالتعويض
≈ 18.85	باستعمال الآلة الحاسبة

تمارين

استعمل $\odot O$ الموضحة في الشكل المجاور؛ لإيجاد طول كلّ قوس ممّا يأتي، مقرّبًا إجابتك إلى أقرب جزء من مائة:



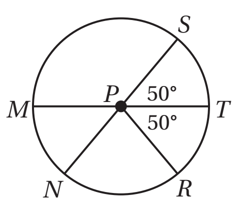
1) $\widehat{DE}$ ، إذا كان نصف القطر يساوي 2 m.

2) $\widehat{DEA}$ ، إذا كان القطر يساوي 7 in.

3) $\widehat{CB}$ ، إذا كان $BE = 24$ ft.

4) $\widehat{CBA}$ ، إذا كان $DO = 3$ mm .

استعمل $\odot P$ الموضحة في الشكل المجاور؛ لإيجاد طول كلِّ قوس ممّا يأتي، مقربًا إجابتك إلى أقرب جزء من مائة:



5) $\widehat{RT}$، إذا كان $MT = 7$ m.

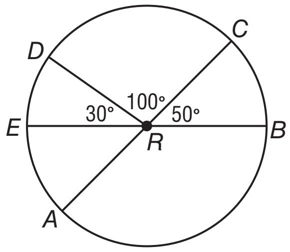
6) $\widehat{NR}$، إذا كان $PR = 13$ ft .

7) $\widehat{MST}$، إذا كان $MP = 2$ in.

8) $\widehat{MRS}$ ، إذا كان $NS = 10$ cm.

8-2 تدريبات المهارات

قياس الزوايا والأقواس



$\overline{AC}$ وَ $\overline{EB}$ قطران في $\odot R$ الموضحة في الشكل المجاور، حدّد ما إذا كان كلّ قوسٍ ممّا يأتي قوسًا أكبر أم قوسًا أصغر أم نصف دائرة، ثم أوجد قياسه:

1) $\overset{\frown}{EA}$

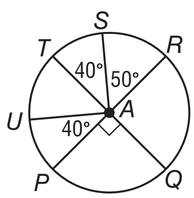
2) $\overset{\frown}{CB}$

3) $\overset{\frown}{DC}$

4) $\overset{\frown}{DEB}$

5) $\overset{\frown}{AB}$

6) $\overset{\frown}{CDA}$



$\overline{PR}$ و $\overline{QT}$ قطران في $\odot A$ الموضحة في الشكل المجاور؛ أوجد كلّ قياس ممّا يأتي:

7) $m\overset{\frown}{UPQ}$

8) $m\overset{\frown}{PQR}$

9) $m\overset{\frown}{UTS}$

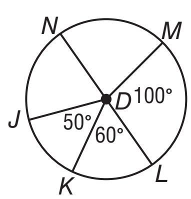
10) $m\overset{\frown}{RS}$

11) $m\overset{\frown}{RSU}$

12) $m\overset{\frown}{STP}$

13) $m\overset{\frown}{PQS}$

14) $m\overset{\frown}{PRU}$



استعمل $\odot D$ الموضحة في الشكل المجاور؛ لإيجاد طول كلّ قوس ممّا يأتي، مقربًا إجابتك إلى أقرب جزء من مائة:

15) $\overset{\frown}{LM}$ إذا كان نصف القطر يساوي 5 in.

16) $\overset{\frown}{MN}$ إذا كان القطر يساوي 3 m.

17) $\overset{\frown}{KL}$ إذا كان $JD = 7$ cm.

18) $\overset{\frown}{NJK}$ إذا كان $NL = 12$ ft.

19) $\overset{\frown}{KLM}$ إذا كان $DM = 9$ mm.

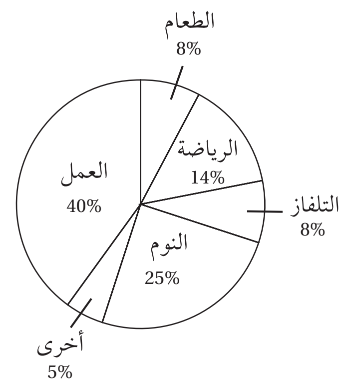
20) $\overset{\frown}{JK}$ إذا كان $KD = 15$ in.

الاسم ____________ التاريخ ____________

8-2 تدريبات حل المسألة

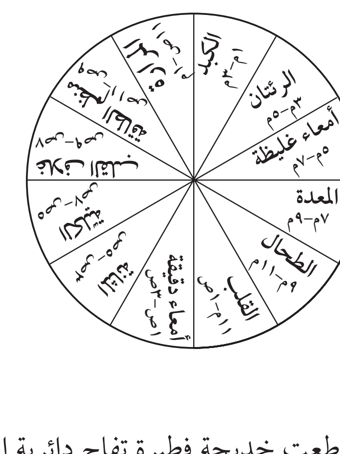
قياس الزوايا والأقواس

1) الأنشطة اليوميّة: التمثيل بالقطاعات الدائرية أدناه، يبيّن نتائج استطلاع حول أنشطة ومهام الفرد اليوميّة، أوجد قياس القوس المقابل للعمل؟ وما هما النشاطان اللذان يقابلان قوسين متطابقين؟



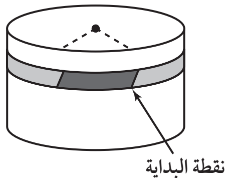
2) ساعات: يعتقد اليابانيُّون أن كلّ عضو من أعضاء الجسم المختلفة يكون أكثر نشاطًا في وقت معين خلال اليوم، ولتمثيل ذلك استعانوا بالساعة الصينية التي تعتمد على دائرة مقسمة إلى 12 قسمًا متساويًا برسم أنصاف أقطار فيها كما في الشكل أدناه، ما قياس كلٍّ من هذه الزوايا المركزية الاثنتي عشرة المتطابقة؟

ص: صباحًا
م: مساءً



3) فطائر: قطعت خديجة فطيرة تفاح دائرية الشكل إلى أربع قطع على طول 4 أنصاف أقطار، فكانت الزوايا المركزيّة للأقسام الأربعة هي: $(3x)°, (5x)°, (6x-10)°, (4x+10)°$، فما قياس كلٍّ من الزوايا المركزيّة الأربع؟

4) شريط: لفّت آمنة شريط تزيين طوله 60 in حول علبة هدية أسطوانية الشكل قطرها 15 in لفة واحدة، ثم تابعت آمنة لفّ الجزء المتبقّي من الشريط بعدما وصلت إلى نقطة البداية كما في الشكل أدناه، ما قياس الزاوية المركزيّة التي تكونت بين طرفَي الشريط؟ قرّب إجابتك إلى أقرب جزءٍ من عشرةٍ من الدرجة؟



5) إطارات الدراجة الهوائية: اشترى عمر إطارًا لدراجته الهوائية قطره يساوي 20 in.

a) إذا تدحرج الإطار على الأرض بحيث دار دورة كاملة، فما المسافة التي يقطعها الإطار؟ قرّب إجابتك إلى أقرب جزءٍ من مئةٍ من البوصة.

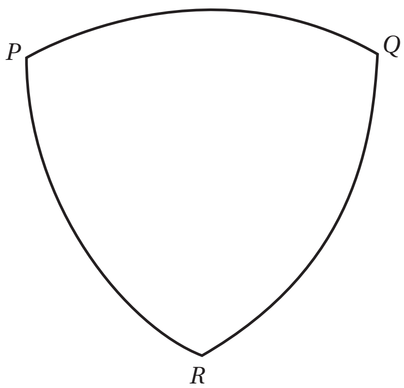
b) إذا تدحرج الإطار على الأرض بحيث دار °45، فما المسافة التي يقطعها؟ قرّب إجابتك إلى أقرب جزءٍ من مئة من البوصة.

c) إذا تدحرج الإطار على الأرض مسافة 10 in، فما قياس زاوية دورانه؟ قرّب إجابتك إلى أقرب جزء من مئة من الدرجة.

8-2 التدريبات الإثرائية

منحنيات ذات عرض ثابت:

تُعدّ الدائرة من المنحنيات ذات العرض الثابت؛ لأنه كيفما وضعت الدائرة، تبقى أكبر مسافة عبرها ثابتة دائمًا، ولكن الدائرة ليست الشكل الوحيد الذي له هذه الخاصية.
تأمل الشكل المجاور الذي يُسمّى **مثلث ريلوكس**، نسبة للعالم الألماني فرانس ريلوكس.



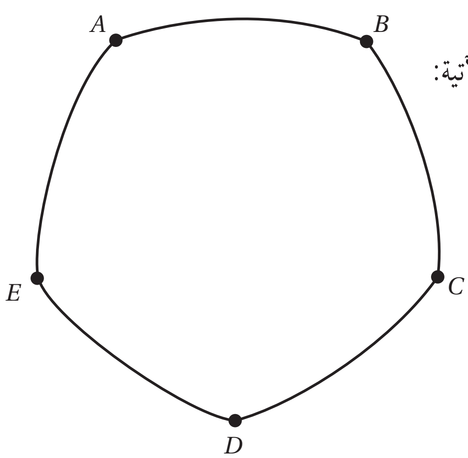
1) استعمل المسطرة لقياس المسافة من P إلى أيِّ نقطةٍ على الجهة المقابلة.

2) ما المسافة من Q إلى الجهة المقابلة؟

3) ما المسافة من R إلى الجهة المقابلة؟

يتألف مثلث ريلوكس من ثلاثة أقواس، ففي المثال السابق مركز $\widehat{PQ}$ هو R، ومركز $\widehat{QR}$ هو P، ومركز $\widehat{PR}$ هو Q.

4) انسخ مثلث ريلوكس أعلاه على قطعة من الورق ثم قُصّه، وارسم مربعًا طول ضلعه يساوي الطول الذي وجدته في السؤال 1، بيّن أنه بإمكانك تدوير المثلث داخل المربع، مع بقاء جوانبه ملامسةً لأضلاع المربع.



5) كوّن منحنًى آخر يكون ذا عرض ثابت، مستعملًا النقاط الخمس أدناه متّبعًا الخطوات الآتية:

الخطوة 1: ثبِّت رأس الفرجار عند النقطة D، وافتحه فتحة تساوي DA، وارسم قوسًا طرفاه هما النقطتان A وَ B.

الخطوة 2: ارسم قوسًا آخر من B إلى C مركزه E.

الخطوة 3: استمر في هذه العملية حتى ترسم خمسة أقواس.

تستعمل بعض الدول هذا النوع من الأشكال في تصميم قطع نقودها المعدنية،

والفائدة في ذلك تكمُن في سهولة تمييزها باللمس، ويمكن استعمالها في أجهزة البيع الآلية أيضًا؛ لأن عرضها ثابت.

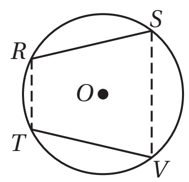
6) قِس عرض الشكل الذي رسمته في السؤال 5، وارسم مستقيمين متوازيين، المسافة بينهما تساوي العرض الذي وجدته، وانسخ الشكل ذا الجوانب الخمسة في قطعة من الورق وقصه، وبيّن أنه يتدحرج بسهولةٍ بين المستقيمين اللذين رسمتهما.

8-3 تدريبات إعادة التعليم
الأقواس والأوتار

الأقواس والأوتار:

تحدد النقاط على الدائرة الأقواس والأوتار، وهناك خصائص متعددة تتعلق بالنقاط على الدائرة.

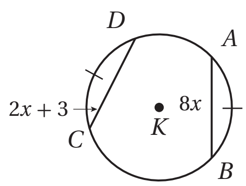
في الدائرة نفسها أو في الدائرتين المتطابقتين، يكون القوسان الأصغران متطابقين ، إذا وفقط إذا كان الوتران المناظران لهما متطابقين.



$\widehat{RS} \cong \widehat{TV}$ إذا وفقط إذا كان $\overline{RS} \cong \overline{TV}$.

مثال

إذا كان $\widehat{AB} \cong \widehat{CD}$ في $\odot K$ الموضحة في الشكل المجاور، فأوجد AB.



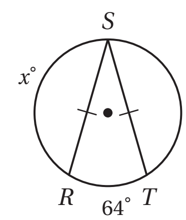
$\widehat{AB}$ و $\widehat{CD}$ قوسان متطابقان في دائرةٍ واحدةٍ؛ لذا فإن $\overline{AB} \cong \overline{CD}$.

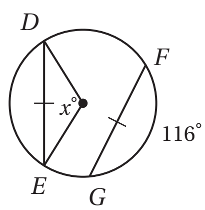
$CD = AB$	تعريف القطع المستقيمة المتطابقة
$2x + 3 = 8x$	بالتعويض
$x = \frac{1}{2}$	بالتبسيط

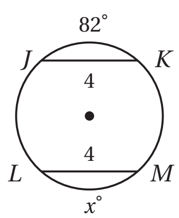
إذن $AB = 8\left(\frac{1}{2}\right) = 4$.

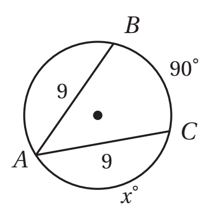
تمارين

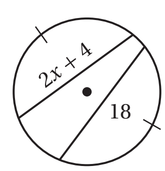
جبر: أوجد قيمة x في كلّ دائرة ممّا يأتي:

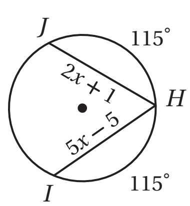
(1


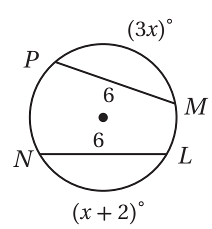
(2


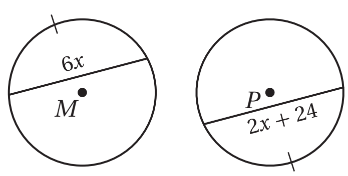
(3


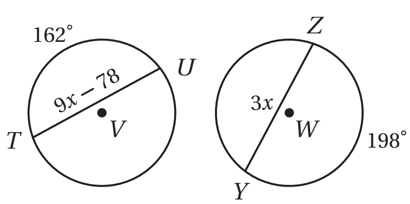
(4


(5


(6


(7


(8 $\odot M \cong \odot V$


(9 $\odot V \cong \odot W$


التاريخ ______ الاسم ______

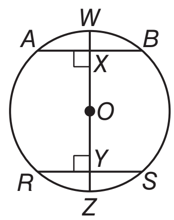
8-3 تدريبات إعادة التعليم (تتمة)

الأقواس والأوتار

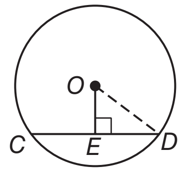
تنصيف الأقواس والأوتار:

إذا قسم مستقيم أو قطعة مستقيمة أو نصف مستقيم قوسًا إلى قوسين متطابقين؛ فإنه ينصِّف القوس.

8.3	إذا كان قطر (أو نصف قطر) الدائرة عموديًّا على وترٍ فيها، فإنه ينصف الوتر وينصّف قوسه أيضًا.	إذا كان: $\overline{WZ} \perp \overline{AB}$ ، فإن: $\overline{AX} \cong \overline{XB}$ و $\widehat{AW} \cong \widehat{BW}$.
8.4	العمود المنصف للوتر في الدائرة، هو قطر (أو نصف قطر) لها.	إذا كان: $OX = OY$، فإن: $\overline{AB} \cong \overline{RS}$
8.5	يتطابق الوتران في الدائرة نفسها أو في الدائرتين المتطابقتين، إذا وفقط إذا كان بُعداهما عن المركز متساويين.	إذا كان: $\overline{AB} \cong \overline{RS}$ ، فإن: $\overline{AB}$ و$\overline{RS}$ يبعدان المسافة نفسها عن النقطة O.



مثال في $\odot O$ الموضحة في الشكل المجاور: $\overline{CD} \perp \overline{OE}$, $OD = 15$ و$CD = 24$، أوجد OE.



القطر أو نصف القطر العمودي على وتر الدائرة ينصف الوتر، إذن ED يساوي نصف CD.

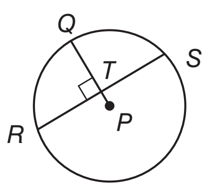
$$ED = \frac{1}{2}(24)$$
$$= 12$$

استعمل نظرية فيثاغورس لإيجاد OE في $\triangle OED$.

$OE^2 + ED^2 = OD^2$	نظرية فيثاغورس
$OE^2 + 12^2 = 15^2$	بالتعويض
$OE^2 + 144 = 225$	بالتبسيط
$OE^2 = 81$	بطرح 144 من الطرفين
$OE = 9$	بأخذ الجذر التربيعي الموجب لكلا الطرفين

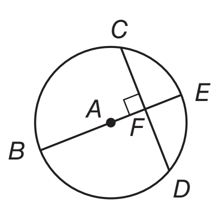
تمارين

في $\odot P$ الموضحة في الشكل المجاور، نصف القطر يساوي 13، و$RS = 24$، أوجد طول كلٍّ ممّا يأتي، مقربًا إجابتك إلى أقرب جزء من مائة.



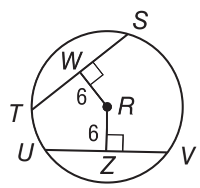
1) RT 2) PT 3) TQ

في $\odot A$ الموضحة في الشكل المجاور، القطر يساوي 12، و$CD = 8$، و$m\widehat{CD} = 90°$ ، أوجد قياس كلٍّ ممّا يأتي، مقربًا إجابتك إلى أقرب جزء من مائة.

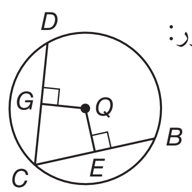


4) $m\widehat{DE}$ 5) FD 6) AF

7) في $\odot R$ الموضحة في الشكل المجاور، $TS = 21$ و$UV = 3x$.
ما قيمة x؟



8) في $\odot Q$ الموضحة في الشكل المجاور: $\overline{BC} \cong \overline{DC}$، و$GQ = x + 5$
و$EQ = 3x - 6$. ما قيمة x؟



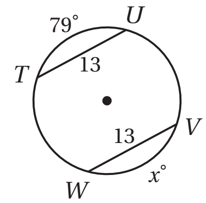
الاسم ______________________ التاريخ ____________

8-3 تدريبات المهارات

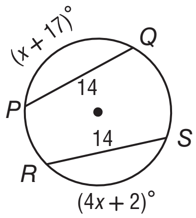
الأقواس والأوتار

جبر: أوجد قيمة x في كلّ دائرةٍ ممّا يأتي:

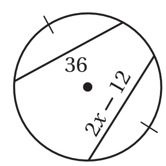
1)



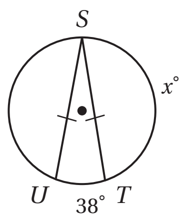
2)



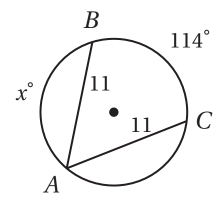
3)



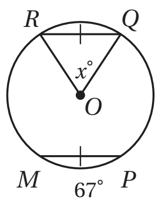
4)



5)

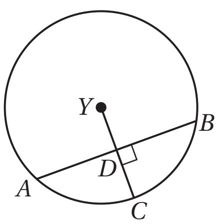


6)



نصف قطر $\odot Y$ الموضحة في الشكل المجاور، يساوي 34، و $AB = 60$, $m\widehat{AC} = 71°$.

أوجد قياس كلٍّ ممّا يأتي، مقربًا إجابتك إلى أقرب جزء من مائة.



7) $m\widehat{BC}$

8) $m\widehat{AB}$

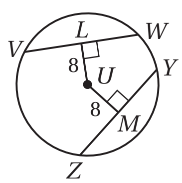
9) AD

10) BD

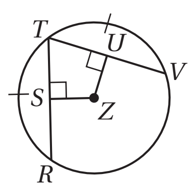
11) YD

12) DC

13) في $\odot U$ الموضحة في الشكل المجاور، $VW = 20$، و $YZ = 5x$، أوجد قيمة x.



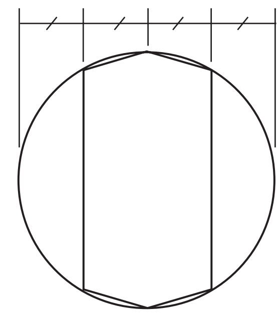
14) في $\odot Z$ الموضحة في الشكل المجاور، $\widehat{TR} \cong \widehat{TV}$, $ZS = x + 4$ و $UZ = 2x - 1$، أوجد قيمة x.



8-3 تدريبات حل المسألة

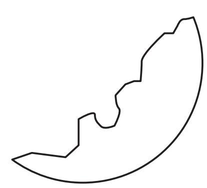
الأقواس والأوتار

1) مضلع سداسي: أُنشئَ مضلع سداسي بالطريقة الموضّحة في الشكل أدناه، كم طولًا مختلفًا للأوتار التي تشكِّل أضلاع هذا السداسي؟ وضِّح إجابتك.



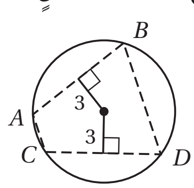
2) علامات مائية: تقوم شركة مجوهرات بطبع علامة مائية سرِّية على الشعار في وثائقها الرسمية كلّها؛ لتحديد ملكيَّة الحقوق ولأغراض أمنيّة، وهذه العلامة المائية هي وتر يبعد 0.7 cm عن مركز طوقٍ دائريٍّ نصف قطره 2.5 cm، ما طول هذا الوتر إلى أقرب جزءٍ من عشرةٍ؟

3) علم الآثار: أثناء القيام بحفريات أثرية عُثِرَ على قطعةٍ واحدةٍ فقط من طبق مكسور، استعمل صورة القطعة الفخاريّة أدناه في توضيح طريقة رسم الطبق بحجمه الأصلي عن طريق إنشاء الأوتار والأعمدة المنصّفة.



4) مراكز: أراد سعود أن يجد مركز دائرةٍ كبيرةٍ، فقام برسم ما يعتقد أنه قطر لهذه الدائرة، ثم وضع علامة على نقطةٍ منتصف هذه القطعة المستقيمة، وأعلن أنه وجد مركز الدائرة، فسأله معلّمه: كيف عرفت أن المستقيم الذي رسمته هو بالفعل قطر لهذه الدائرة وليس وترًا؟ فأدرك سعود أنه غير متأكد من صحة استنتاجه، فماذا يتعين عليه أن يعمل للتأكد من أن هذا المستقيم هو قطر للدائرة.

5) صناعة اللُّحف: تتَّبع رغد الخطوات الآتية لتكوين نمط للحاف. "في دائرة قطرها 10 in، فرسمت الوتر $\overline{AB}$ الذي يبعد 3 in عن مركز الدائرة ويعامد نصف القطر، ثم قصَّت القماش على طول الوتر". قامت رغد بإعادة هذه الخطوات على الجهة الأخرى من القطر للوتر $\overline{CD}$، ثم قصّت على طول الوترين $\overline{DB}$ و$\overline{AC}$ ، فحصلت في النهاية على أربع قطع منحنية وشكلٍ رباعيٍّ واحدٍ.



a) إذا اتبعت رغد التعليمات، هل تضمن أن يكون الشكل الرباعي مستطيلًا؟ فسّر إجابتك.

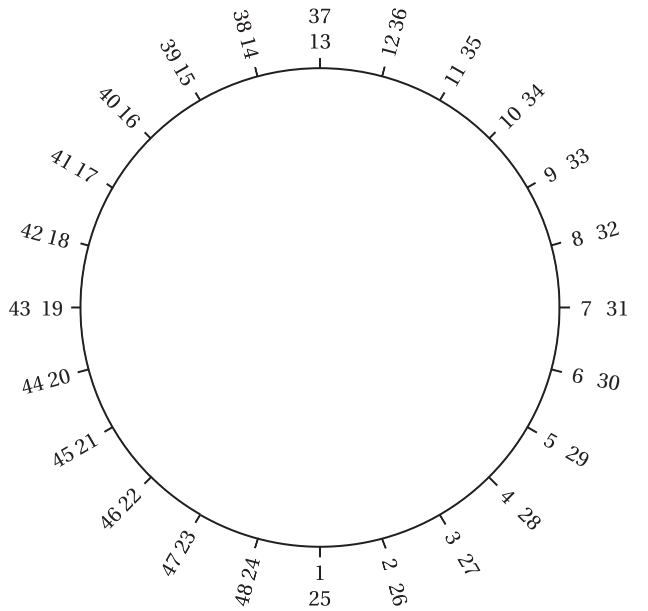
b) افترض أن الشكل الرباعي الناتج مستطيل، وأن قياس قوس إحدى القطع المنحنية يساوي °74، فما قياس أقواس القطع المنحنية الثلاث الأخرى؟

الاسم ________________________ التاريخ ____________

8-3 التدريبات الإثرائية

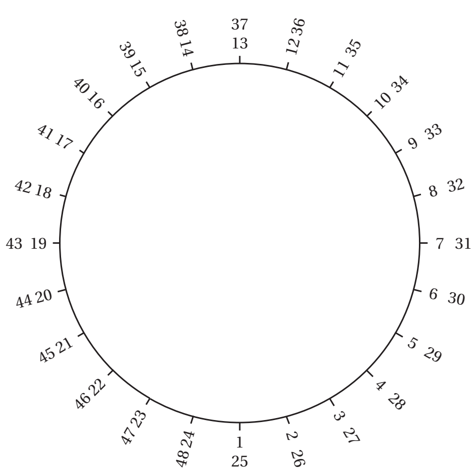
تكوين أنماط من أوتار الدائرة:

يمكننا الحصول على أنماط جميلة، إذا قمنا برسم أوتار تصل بين نقاط عُيّنت على الدائرة، المسافة بين كلّ نقطتين متتاليتين منها ثابتة. يوجد على الدائرة أدناه 24 نقطةً تقسم الدائرة إلى 24 قسماً متساويًا، وقد وُضعت الأرقام من 1 إلى 48 إلى جوار هذه النقاط، تأمَّل الشكل لترى كيف وُضعت هذه الأرقام.

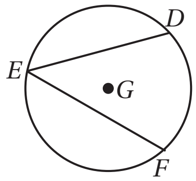


1) استعمل قلم رصاص ومسطرة لرسم أوتار تصل بين النقاط المرّقمة على النحو: 1 إلى 2، 2 إلى 4، 3 إلى 6، 4 إلى 8، وهكذا. استمر في عملية المضاعفة ورسمٍ الأوتار الممكنة جميعها. ما نوع النمط الذي حصلت عليه؟

2) استعمل الدائرة ذاتها بنقاطها وأرقامها، وجرّب استعمال أنماط مختلفة للتوصيل بين النقاط. يمكنك ضرب رقم النقطة في ثلاثة للحصول على رقم النقطة التي تصلها معها، أو إضافة رقم معينا إلى رقم النقطة للحصول على رقم النقطة التي تصل معها. احتفظ بالأنماط المميزة لعرضها في غرفة الصف.



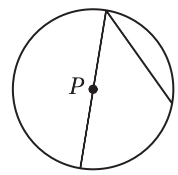
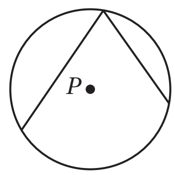
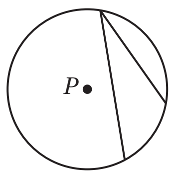
8-4 تدريبات إعادة التعليم
الزوايا المحيطية



الزوايا المحيطية:

الزاوية المحيطية زاوية يقع رأسها على الدائرة، ويحتوي ضلعاها على وترين في الدائرة، ففي $\odot G$، القوس الأصغر $\widehat{DF}$ هو **القوس المقابل** للزاوية المحيطية $\angle DEF$.

توجد ثلاث حالات للزاوية المحيطية في الدائرة.

الحالة الأولى	الحالة الثانية	الحالة الثالثة
		
يقع مركز الدائرة P على أحد ضلعَي الزاوية المحيطية.	**يقع مركز الدائرة P داخل الزاوية المحيطية.**	**يقع مركز الدائرة P خارج الزاوية المحيطية.**

والنظرية الآتية صحيحة لهذه الحالات الثلاث جميعها.

8.6	**نظرية الزاوية المحيطية**	قياس الزاوية المحيطية يساوي نصف قياس القوس المقابل لها.	في $\odot G$ أعلاه $m\angle DEF = \frac{1}{2} m\widehat{DF}$

إذا قابلت زاويتان محيطيّتان القوس نفسه أو قوسين متطابقين، فإن الزاويتين تكونان متطابقتين.

مثال في $\odot G$ أعلاه: $m\widehat{DF} = 90°$ ، أوجد $m\angle DEF$.

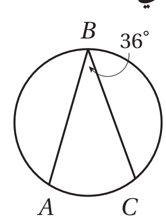
$\angle DEF$ زاوية محيطية؛ لذا فإن قياسها يساوي نصف قياس القوس المقابل لها.

$$m\angle DEF = \frac{1}{2} m\widehat{DF}$$
$$= \frac{1}{2}(90°) = 45°$$

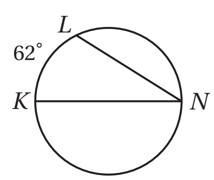
تمارين

أوجد كلّ قياس ممّا يأتي:

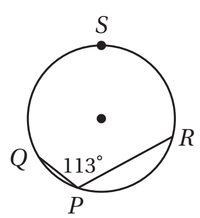
1) $m\widehat{AC}$



2) $m\angle N$



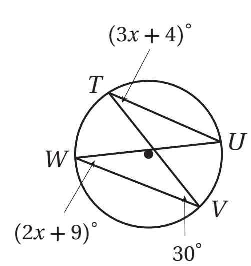
3) $m\widehat{QSR}$



جبر: أوجد كلّ قياس ممّا يأتي:

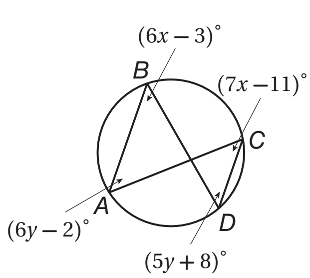
4) $m\angle U$

5) $m\angle T$



6) $m\angle A$

7) $m\angle C$

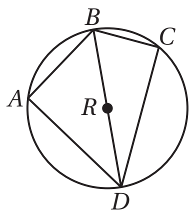


8-4 تدريبات إعادة التعليم (تتمة)

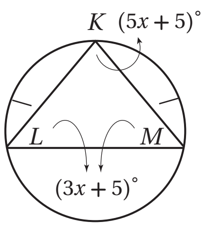
الزوايا المحيطية

زوايا المضلعات المُحاطة بدائرة:

المضلّع المحاط بدائرة: هو مضلع تقع رؤوسه كلُّها على الدائرة نفسها، والمضلّعات المُحاطة بدائرةٍ لها عدة خصائص منها:

8.8	تقابل الزاوية المحيطية في المثلث قطرًا أو نصف دائرةٍ، إذا وفقط إذا كانت هذه زاوية قائمة.	إذا كان $\widehat{BCD}$ نصف دائرة، فإن $m\angle BCD = 90°$، وإذا كان $m\angle C = 90°$، فإن $\widehat{BCD}$ نصف دائرة، ويكون $\overline{BD}$ قطرًا فيها.	
8.9	كلّ زاويتين متقابلتين في الشكل الرباعي المحاط بدائرةٍ متكاملتان.	في الشكل الرباعي $ABCD$ المحاط بدائرة $m\angle A + m\angle C = 180°$ و $m\angle ABC + m\angle ADC = 180°$	

مثال **أوجد $m\angle K$ في الشكل المجاور.**



$\widehat{KL} \cong \widehat{KM}$ إذن $KL = KM$، فيكون هذا المثلث متطابق الضلعين،

لذا فإن: $m\angle L = m\angle M = (3x + 5)°$.

$m\angle L + m\angle M + m\angle K = 180°$	نظرية مجموع قياسات زوايا المثلث
$(3x + 5)° + (3x + 5)° + (5x + 5)° = 180°$	بالتعويض
$11x + 15 = 180$	بالتبسيط
$11x = 165$	بطرح 15 من الطرفين
$x = 15$	بقسمة كلّ طرفٍ على 11

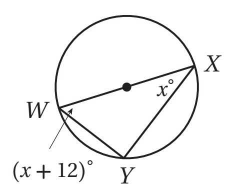
إذن: $m\angle K = (5 + 5(15))° = 80°$.

تمارين

جبر: أوجد كلّ قيمة أو قياس ممّا يأتي:

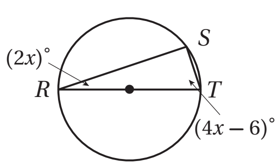
1) x

2) $m\angle W$



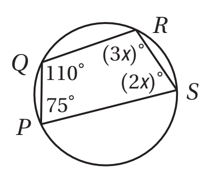
3) x

4) $m\angle T$



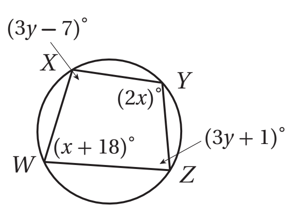
5) $m\angle R$

6) $m\angle S$



7) $m\angle W$

8) $m\angle X$



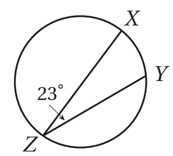
الاسم ________________ التاريخ ________

8-4 تدريبات المهارات

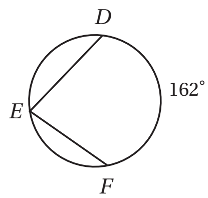
الزوايا المحيطية

أوجد كلّ قياسٍ ممّا يأتي:

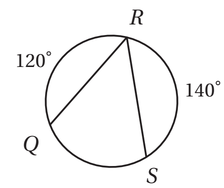
1) $m\widehat{XY}$



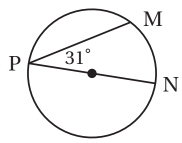
2) $m\angle E$



3) $m\angle R$



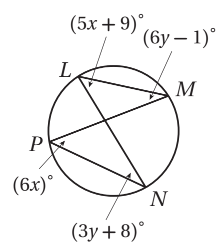
4) $m\widehat{MP}$



جبر: أوجد كلّ قياس ممّا يأتي:

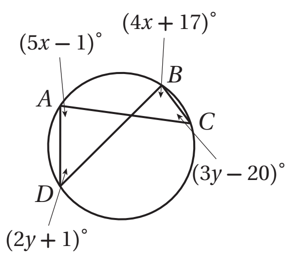
5) $m\angle N$

7) $m\angle L$



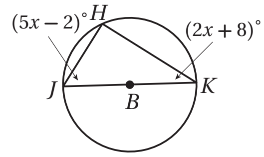
6) $m\angle C$

8) $m\angle A$



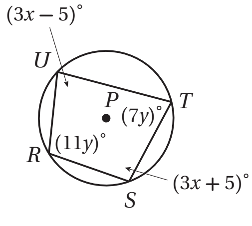
9) $m\angle J$

11) $m\angle K$



10) $m\angle S$

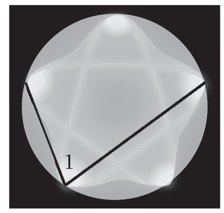
12) $m\angle R$



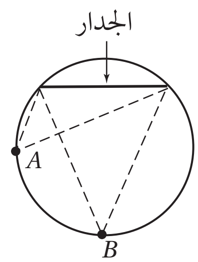
8-4 تدريبات حل المسألة

الزوايا المحيطية

1) سيرك: تُضاء حلبة السيرك الدائرية بخمسة مصابيح موضوعة على أبعاد متساوية أحدها عن الآخر حول الحلبة كما في الشكل أدناه، أوجد $m\angle 1$، ووضِّح إجابتك.

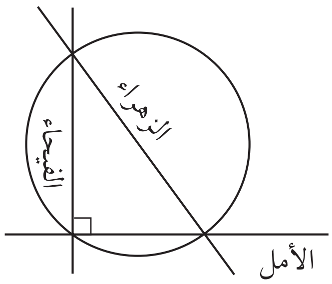


2) مجال الرؤية: يبيّن الشكل أدناه منظرًا علويًّا لشخصين يقفان أمام جدار مستطيلٍ عالٍ جدًّا، ويمثل الجدار وترًا في دائرة تمرُّ بموقعَي الشخصين، أيّ الشخصين حجب الجدار عنه قدرًا أكبر من مجال رؤيته الأفقية؟



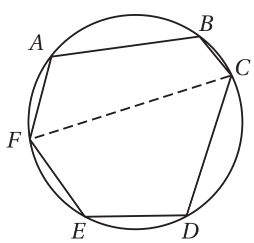
3) مُعيَن: يحاول عبد الله أن يرسم دائرةً تُحيط بمعينٍ ليس مربعًا، ولكنه يجد صعوبةً في ذلك، فهل تستطيع أن تساعده؟ فسّر إجابتك.

4) شوارع: في الشكل أدناه، البُعد بين نقطة تقاطع شارعَي الزهراء والفيحاء وتقاطع شارعي الزهراء والأمل، يساوي ثلاثة كيلومتراتٍ.



ما بُعدُ نقطة تقاطع شارعي الفيحاء والأمل عن نقطة منتصف القطعة المستقيمة التي تصل بين نقطتي تقاطع شارعَي الفيحاء والزهراء وتقاطع شارعي الأمل والزهراء؟ ووضِّح إجابتك.

5) المضلع السداسي المحاط بدائرة: ستبرهن أن مجموع قياسات الزوايا الثلاث الداخلية غير المتتالية في المضلع السداسي المحاط بدائرةٍ يساوي $360°$



a) ما العلاقة بين $\angle A$ و $\angle BCF$؟
وما العلاقة بين $\angle E$ و $\angle DCF$؟

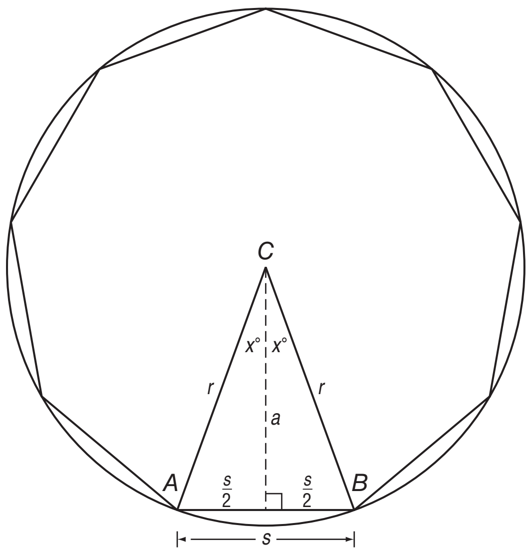
b) أثبت أن: $m\angle A + m\angle BCD + m\angle E = 360°$.

الاسم ________________ التاريخ ________

8-4 التدريبات الإثرائية

صيغ للمضلّعات المنتظمة:

افترض أن مضلّعًا منتظمًا عدد أضلاعه n محاط بدائرة نصف قطرها r، والشكل أدناه يبيّن أحد المثلثات المتطابقة الضلعين المتكونة من توصيل نهايتي أحد أضلاع المضلّع المنتظم بمركز الدائرة C، وفي هذا الشكل، s هي طول ضلع المضلّع المنتظم و a طول العمود النازل من C على $\overline{AB}$.



استعمل معلوماتك المتعلقة بالمثلثات والنسب المثلثية لحل المسائل الآتية:

1) أوجد صيغةً تعبّر عن x بدلالة عدد الأضلاع n.

2) أوجد صيغةً تعبّر عن s بدلالة n وr، مستعملًا النسب المثلثية.

3) أوجد صيغةً تعبّر عن a بدلالة n وr، مستعملًا النسب المثلثية.

4) أوجد صيغةً تعبّر عن محيط المضلّع المنتظم، بدلالة n وr.

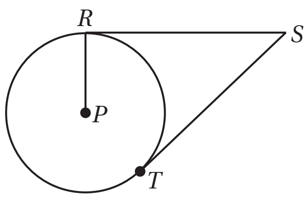
8-5 تدريبات إعادة التعليم

المماسات

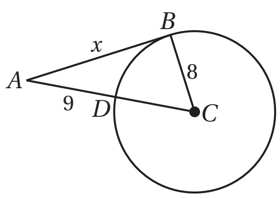
المماسات: مماس الدائرة

المماس هو مستقيم يقع في المستوى نفسه الذي تقع فيه الدائرة، ويقطعها في نقطةٍ واحدةٍ فقط، تسمّى **نقطة التماس**، وهنالك علاقات مهمة عدة تتعلق بالمماسات.

المماس المشترك مستقيم أو نصف مستقيم أو قطعة مستقيمة تمس دائرتين واقعتين في المستوى نفسه.

8.10	يكون المستقيم مماسًا للدائرة في المستوى نفسه، إذا وفقط إذا كان عموديًا على نصف القطر المار بنقطة التماس.	إذا كان $\overline{RP} \perp \overline{RS}$ ، فإن $\overline{RS}$ مماس لـ$\odot P$، وإذا كان $\overline{SR}$ مماسًا لـ$\odot P$، فإن $\overline{RS} \perp \overline{RP}$	
8.11	إذا رسمت قطعتان مستقيمتان مماستان لدائرة من نقطة خارجها، فإنهما متطابقتان.	إذا كان $\overline{ST}$ و $\overline{SR}$ مماسين لـ$\odot P$، فإن $\overline{SR} \cong \overline{ST}$.	

مثال $\overline{AB}$ **مماس لـ$\odot C$ عند B، أوجد قيمة x.**



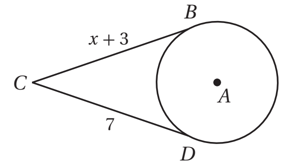
$\overline{AB}$ مماس لـ$\odot C$،وعليه فإن $\overline{AB}$ يعامد نصف القطر $\overline{BC}$. $\overline{CD}$ نصف قطر، إذن $CD = 8$ و$AC = 9 + 8 = 17$ ، وباستعمال نظرية فيثاغورس مع المثلث القائم ΔABC ينتج أن:

$(AB)^2 + (BC)^2 = (AC)^2$	نظرية فيثاغورس
$x^2 + 8^2 = 17^2$	بالتعويض
$x^2 + 64 = 289$	بالتبسيط
$x^2 = 225$	بطرح 64 من الطرفين
$x = 15$	بأخذ الجذر التربيعي الموجب للطرفين

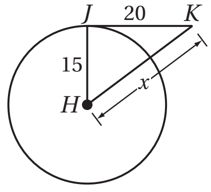
تمارين

أوجد قيمة x، مفترضًا أن القطع المستقيمة التي تبدو كأنها مماسات للدائرة هي مماسات فعلًا، مقرّبًا إجابتك إلى أقرب جزء من مئة إذا لزم ذلك:

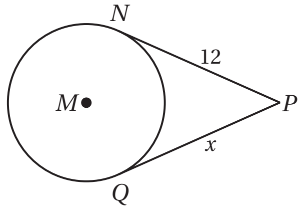
(1



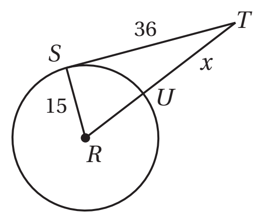
(2



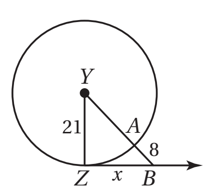
(3



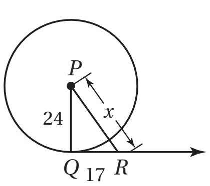
(4



(5



(6

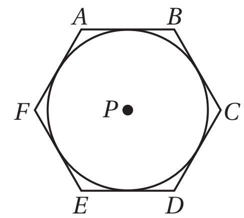


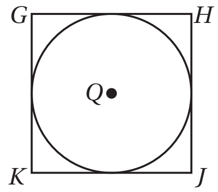
8-5 تدريبات إعادة التعليم (تتمة)

المماسات

المضلّعات المُحيطة بدائرة:

يكون المضلّع مُحيطًا بدائرة، إذا كانت جميع أضلاعه مماسات للدائرة.

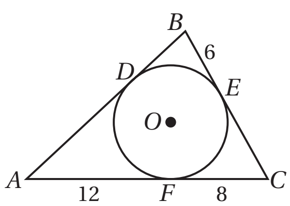




السداسي $ABCDEF$ محيط بـِ $\odot P$.
FA , EF, DE ,CD ,BC , AB مماسات لـِ $\odot P$.

المربع $GHJK$ محيط بـِ $\odot Q$.
KG, JK, JH , GH مماسات لـِ $\odot Q$.

مثال $\triangle ABC$ **الموضح في الشكل المجاور محيط بـِ** $\odot O$.



أوجد محيط $\triangle ABC$.

$\triangle ABC$ محيط بالدائرة $\odot O$، لذا فالنقاط D, E, F نقاط تماس.

إذن: $AD = AF, BE = BD, CF = CE$.

إذن محيط $\triangle ABC$ يساوي:

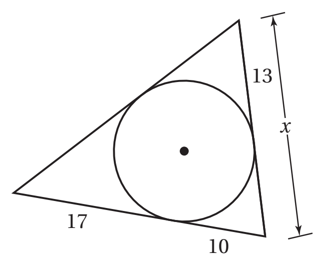
$AD + AF + BE + BD + CF + CE = 12 + 12 + 6 + 6 + 8 + 8 = 52$

المحيط يساوي 52 وحدةً.

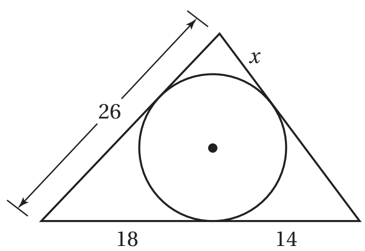
تمارين

إذا كان المضلع يحيط بالدائرة، فأوجد قيمة x في كلٍّ من الأشكال الآتية، ثم أوجد محيط المضلّع.

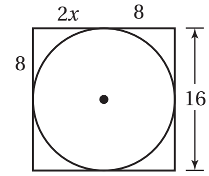
(1



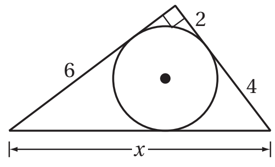
(2



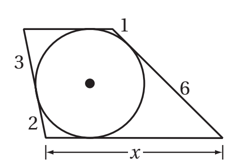
(3



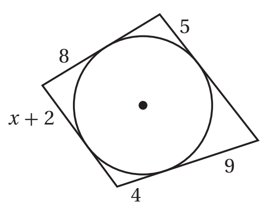
(4



(5



(6

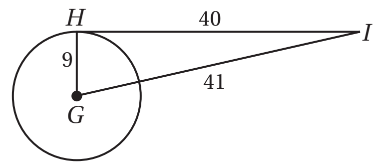


8-5 تدريبات المهارات

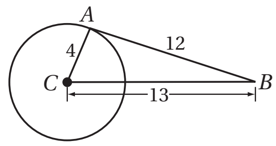
المماسات

حدّد ما إذا كانت القطعة المستقيمة في كلٍّ من السؤالين الآتيين مماسًّا للدائرة المعطاة أم لا، وبرّر إجابتك.

1) $\overline{HI}$

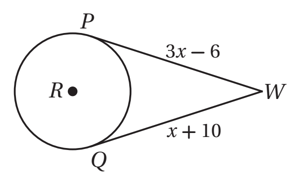


2) $\overline{AB}$

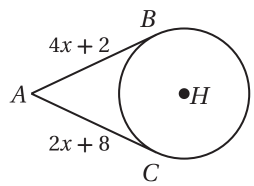


أوجد قيمة x في كلٍّ من الأسئلة الآتية، مفترضًا أن القطع المستقيمة التي تبدو كأنها مماسات للدائرة هي مماسات فعلًا، مقربًا إجابتك إلى أقرب جزء من عشرة، إذا لزم ذلك:

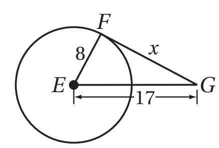
3)



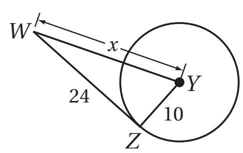
4)



5)

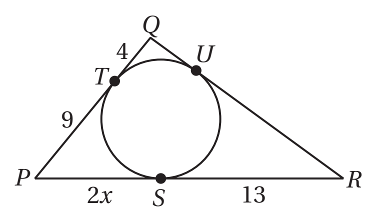


6)

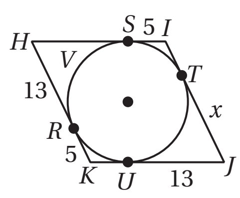


إذا كان المضلع يحيط بالدائرة، فأوجد قيمة x في كلٍّ من الشكلين الآتيين، ثم أوجد محيط المضلّع.

7)



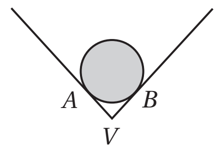
8)



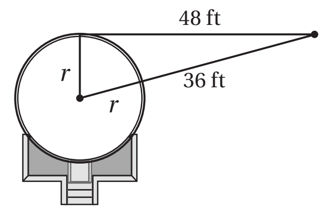
8-5 تدريبات حل المسألة

المماسات

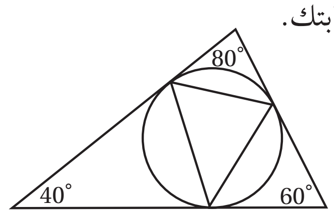
1) قنوات: الجزء السفلي من قناة أسمنتية يشبه شكل الحرف "V"، وأثناء سير ياسر بمحاذاة القناة، سقط منه أنبوب أسطواني الشكل في القناة التي كانت جافة حينها فلامس جانبَي القناة. ويظهر الشكل أدناه مقطعًا عرضيًا للأنبوب في أسفل القناة. قارن بين الطولين AV وBV، ووضّح إجابتك.



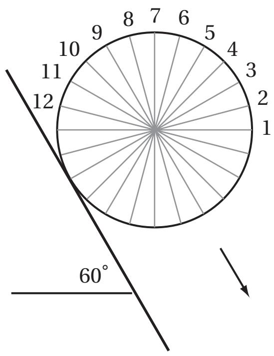
2) بركة سباحة: يقف حمد على مسافة 36 ft من حافة بركة دائرية، إذا كانت المسافة بين حمد ونقطة التماس على البركة 48 ft كما في الشكل أدناه، فما طول نصف قطر البركة؟



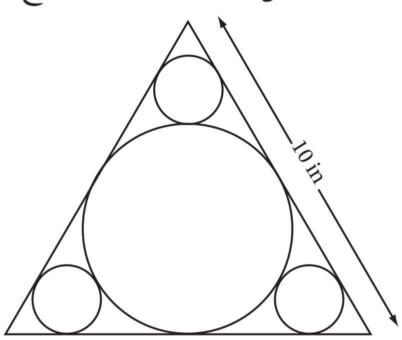
3) مثلثات: رُسمت دائرة داخل مثلث قياسات زواياه °80 ,°60 ,°40، إذا رُسم من كل نقطة من نقاط التماس مثلثًا محاطًا بدائرة، كما في الشكل أدناه، فما قياسات زوايا المثلث الداخلي؟ وضّح إجابتك.



4) دحرجة: يتدحرج إطار على سطح مائل، ودعامات الإطار المرقمة من 1 إلى 12 تمثل أقطارًا على أبعاد متساوية بعضها عن بعض، كما في الشكل أدناه. أيُّ دعامة ستكون عموديّة على السطح المائل، عندما تكون الدعامة رقم 2 رأسيّة؟ وضّح إجابتك.



5) تصميم: رسم محمود التصميم المبيّن أدناه، والمكوّن من دوائر مرسومة داخل مثلث متطابق الأضلاع.



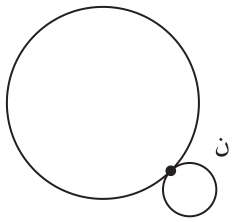
a) ما طول نصف قطر الدائرة الكبرى، مقربًا إلى أقرب جزء من مائة من البوصة؟ وضّح إجابتك.

b) ما أطوال أنصاف أقطار الدوائر الصغرى، مقربًا إلى أقرب جزء من مائة من البوصة؟ وضّح إجابتك.

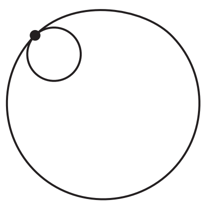
8-5 التدريبات الإثرائية

الدوائر المتماسّة:

تكون الدائرتان المرسومتان في المستوى نفسه متماستين إذا اشتركتا في نقطة واحدة فقط، والدائرتان المتماستان غير المشتركتين في نقاط داخلية تسميان دائرتين متماستين من الخارج، وإذا كانت الدائرتان المتماستان مشتركتين في نقاط داخلية فتسميان دائرتين متماستين من الداخل، وتكون ثلاثة دوائر أو أكثر متماسة، إذا كانت كلّ دائرتين منها متماستين.



دائرتان متماستان من الخارج



دائرتان متماستان من الداخل

1) ارسم أشكالًا تمثل كلّ الأوضاع المحتملة لثلاث دوائر متماسة.

2) ارسم أشكالًا تمثل كلّ الأوضاع المحتملة لأربع دوائر متماسة.

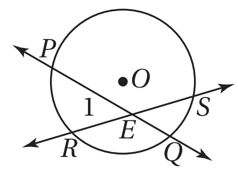
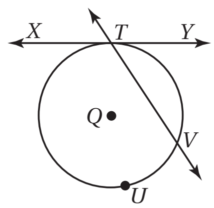
3) ارسم أشكالًا تمثل كلّ الأوضاع المحتملة لخمس دوائر متماسة.

8-6 تدريبات إعادة التعليم

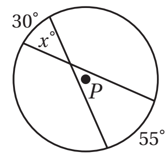
القاطع والمماس وقياسات الزوايا

التقاطع على الدائرة أو داخلها:

القاطع هو مستقيم يقطع الدائرة في نقطتين فقط، وترتبط قياسات الزوايا المتكونة من القاطع والمماس بالأقواس التي تقابلها.

8.12	إذا تقاطع قاطعان أو وتران داخل دائرة، فإن قياس الزاوية المتكونة من التقاطع يساوي نصف مجموع قياسَي القوس المقابل لهذه الزاوية، والقوس المقابل للزاوية التي تقابلها بالرأس.  $m\angle 1 = \frac{1}{2}(m\widehat{PR} + m\widehat{QS})$	8.13	إذا تقاطع مماس وقاطع عند نقطة التماس، فإن قياس كلّ زاوية متكونةٍ من التقاطع يساوي نصف قياس القوس المقابل لها.  $m\angle XTV = \frac{1}{2}m\widehat{TUV}$ $m\angle YTV = \frac{1}{2}m\widehat{TV}$

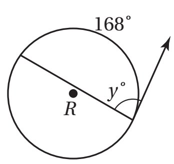
مثال 1 أوجد قيمة x في الشكل أدناه.



يتقاطع الوتران داخل الدائرة؛ لذا فإن قيمة x تساوي نصف مجموع قياسَي القوس المقابل لهذه الزاوية والقوس المقابل للزاوية المقابلة لها بالرأس.

$$x^\circ = \frac{1}{2}(30^\circ + 55^\circ)$$
$$= 42.5^\circ = \frac{1}{2}(85^\circ)$$

مثال 2 أوجد قيمة y في الشكل أدناه.



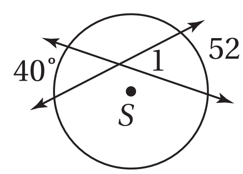
يتقاطع الوتر والمماس عند نقطة التماس؛ لذا فإن قياس الزاوية يساوي نصف قياس القوس المقابل لها.

$$y^\circ = \frac{1}{2}(168^\circ)$$
$$= 84^\circ$$

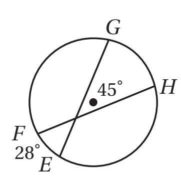
تمارين

أوجد كلًّا من القياسات الآتية:

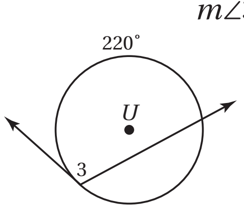
(1 $m\angle 1$



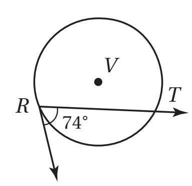
(2 $m\widehat{GH}$



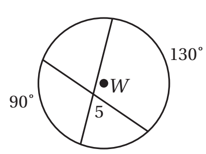
(3 $m\angle 3$



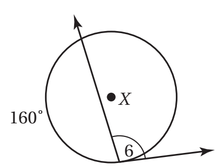
(4 $m\widehat{RT}$



(5 $m\angle 5$



(6 $m\angle 6$



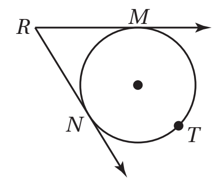
8-6 تدريبات إعادة التعليم (تتمة)

القاطع والمماس وقياسات الزوايا

التقاطع خارج الدائرة:

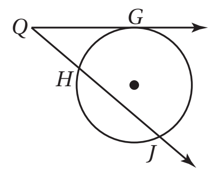
يمكن أن يتقاطع قاطعان أو قاطع ومماسٌّ أو مماسان خارج الدائرة، ويرتبط قياس الزاوية المتكوّنة بقياسَي القوسين المقابلين لها.

8.14	إذا تقاطع قاطعان، أو قاطع ومماس، أو مماسان خارج دائرةٍ، فإنّ قياس الزاوية المتكونة يساوي نصف الفرق الموجب بين قياسَي القوسين المقابلين لها.



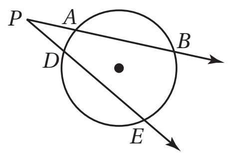
$\overrightarrow{RN}, \overrightarrow{RM}$ مماسان

$m\angle R = \frac{1}{2}(m\widehat{MTN} - m\widehat{MN})$



$\overrightarrow{QG}$ مماس و $\overrightarrow{QJ}$ قاطع

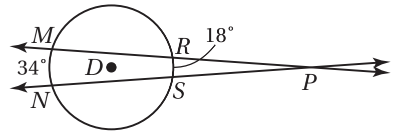
$m\angle Q = \frac{1}{2}(m\widehat{GJ} - m\widehat{GH})$



$\overrightarrow{PB}$ و $\overrightarrow{PE}$ قاطعان

$m\angle P = \frac{1}{2}(m\widehat{BE} - m\widehat{AD})$

مثال أوجد $m\angle MPN$ في الشكل المجاور.



تكونت $\angle MPN$ من تقاطع قاطعين خارج الدائرة.

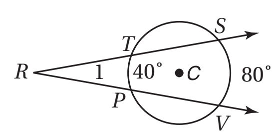
$$m\angle MPN = \frac{1}{2}(m\widehat{MN} - m\widehat{RS})$$
$$= \frac{1}{2}(34° - 18°)$$
$$= \frac{1}{2}(16°) = 8°$$

قياس $\angle MPN$ يساوي $8°$.

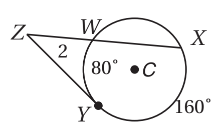
تمارين

أوجد كلًّا من القياسات الآتية:

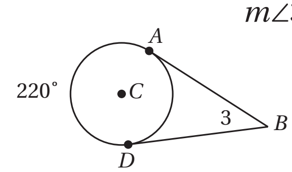
1) $m\angle 1$



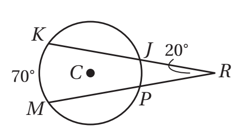
2) $m\angle 2$



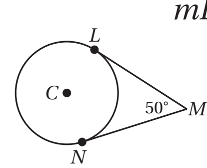
3) $m\angle 3$



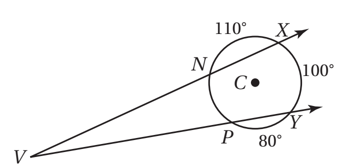
4) $m\widehat{JP}$



5) $m\widehat{LN}$



6) $m\angle V$

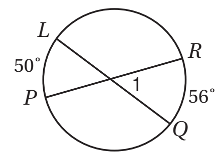


8-6 تدريبات المهارات

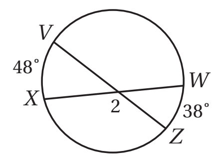
القاطع والمماس وقياسات الزوايا

أوجد كلًّا من القياسات الآتية:

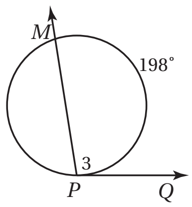
1) $m\angle 1$



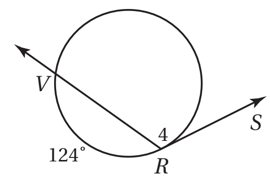
2) $m\angle 2$



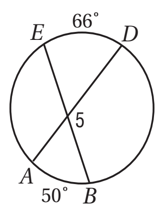
3) $m\angle 3$



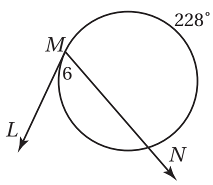
4) $m\angle 4$



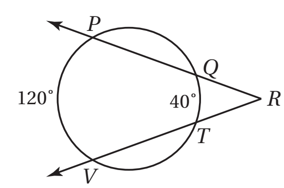
5) $m\angle 5$



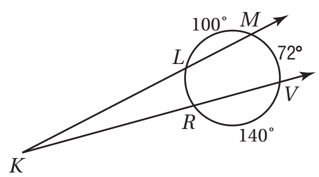
6) $m\angle 6$



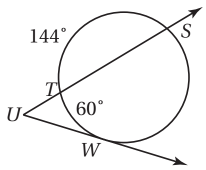
7) $m\angle R$



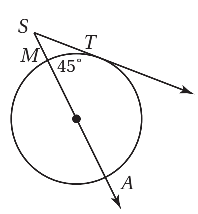
8) $m\angle K$



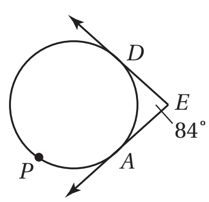
9) $m\angle U$



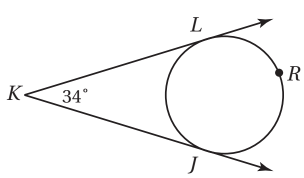
10) $m\angle S$



11) $m\widehat{DPA}$



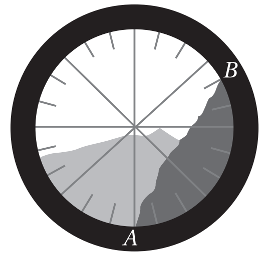
12) $m\widehat{LJ}$



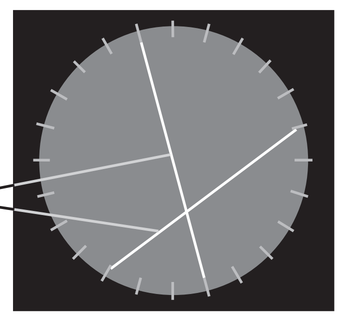
8-6 تدريبات حل المسألة

القاطع والمماس وقياسات الزوايا

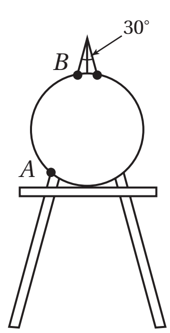
1) تلسكوب: نظر محمد من خلال تلسكوب إلى منطقة جبلية، والشكل أدناه يبيّن ما رآه محمد. مستعينًا بالشكل أدناه، ما القيمة التقريبية لقياس الزاوية التي يصنعها جانب الجبل الممتد من A إلى B مع الأفق؟



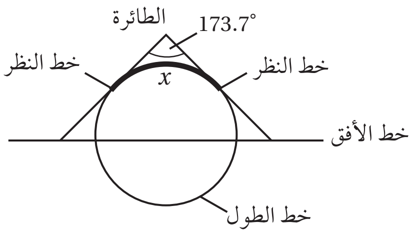
2) رادار: رصد رادار مسارَيْ طائرتين، فظهر المساران على الشاشة كما في الشكل أدناه، فما قياس الزاوية الحادة بين مسارَي الطائرتين؟



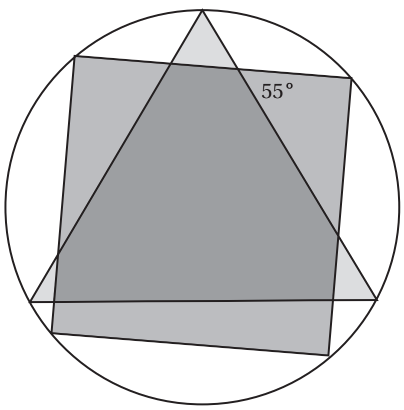
3) حامل اللوحة: يعمل فارس رسّامًا، فوضع لوحة رسم دائرية على حامل على شكل الحرف A، وثبّتها بدقة في وسط الحامل تمامًا، إذا كان قياس زاوية رأس الحامل °30 وقياس القوس BC يساوي 22، فما قياس القوس AB؟



4) طيران: عند الطيران على ارتفاع 5 أميالٍ، يصنع خطًّا النظر إلى الأفق في اتجاهَي الشمال والجنوب زاويةً قياسها °173.7تقريبًا، ما قياس الجزء الذي يمكننا رؤيته من ارتفاع 5 أميالٍ من خط الطول الواقع تحت الطائرة مباشرة؟



5) زجاج ملوّن: صمّم إبراهيم النافذة المبينة أدناه من الزجاج الملوّن، وقد استعمل في تصميمها مربعًا، ومثلثًا متطابق الأضلاع، محاطين بدائرة.



a) اكتب قياسات الزوايا الناتجة عن تقاطع أضلاع المثلث مع أضلاع المربع.

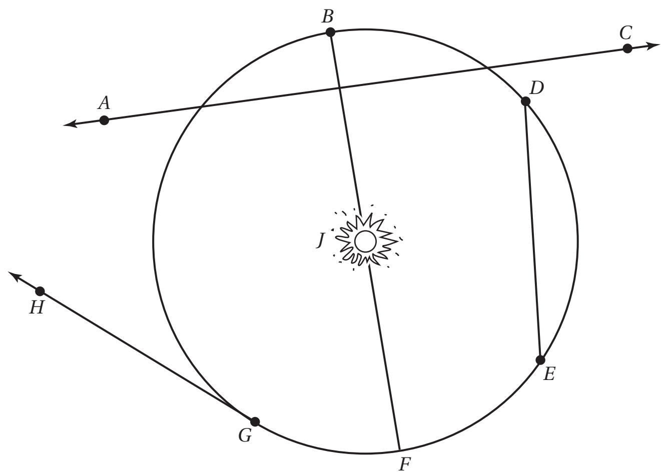
b) اكتب قياسات جميع الأقواس بالدرجات؟

الاسم ______________________________ التاريخ ______________

8-6 التدريبات الإثرائية

الأجسام التي تدور في مدارات:

تدور الأرض حول الشمس في مدار إهليلجي. وبرغم ذلك يُعَدُّ هذا المدار دائريًّا في أحيان كثيرة.



استعمل الشكل أعلاه الذي يمثل مدار الأرض حول الشمس؛ لتسمّي المستقيم أو القطعة المستقيمة لكل وصف ممّا يأتي، وحدّد ما إذا كان نصف قطر أم قطرًا أم وترًا أم مماسًّا أم قاطعًا لهذا المسار:

1) مسار كويكب.

2) المسافة بين موقع الأرض في يوليو وموقعها في أكتوبر.

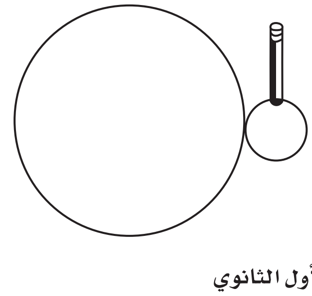
3) المسافة بين موقع الأرض في ديسمبر وموقعها في يونيو.

4) مسار صاروخ منطلق نحو زُحَل.

5) مسار شعاع الشمس.

6) إذا كان للكوكب قمر، فإن القمر يدور حول هذا الكوكب مثلما يدور الكوكب حول الشمس، ولرؤية مسار هذا القمر قصّ دائرتين من الورق المقوَّى، قطر إحداهما يساوي 4 in، وقطر الأخرى يساوي 1 in.

ألصق الدائرة الكبيرة على قطعة من الورق، ثم اثقب طرف الدائرة الصغيرة عند حافتها وأدخل رأس قلم رصاص في الثقب، ثم قم بدحرجة الدائرة الصغيرة حول الدائرة الكبيرة من الخارج، وسيرسم القلم مسار القمر حول الكوكب في أثناء ذلك. ويسمى هذا المدار الدويري، ولرؤية مسار الكوكب حول الشمس، اثقب الدائرة الصغيرة (تمثل هنا الكوكب) في مركزها، وأدخل فيه رأس القلم الرصاص، وقم بدحرجة الدائرة الصغيرة حول الكبيرة (تمثل الشمس)، وسيرسم القلم المسار المطلوب.

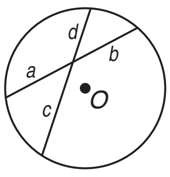


الاسم ________________ التاريخ ________

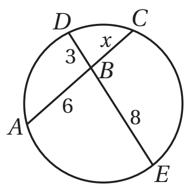
8-7 تدريبات إعادة التعليم

قطع مستقيمة خاصة في الدائرة

الأوتار المتقاطعة داخل الدائرة:

8.15	إذا تقاطع وتران في دائرة، فإن حاصل ضرب طولَي جزأَي الوتر الأول، يساوي حاصل ضرب طولَي جزأَي الوتر الثاني.	 $a \cdot b = c \cdot d$

مثال أوجد قيمة x مستعملًا الشكل المجاور.

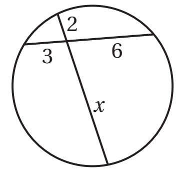


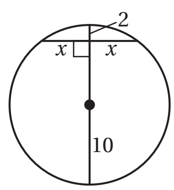
يتقاطع الوتران داخل دائرة. إذن،

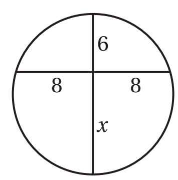
$AB \cdot BC = EB \cdot BD$	النظرية 8.15
$6 \cdot x = 8 \cdot 3$	بالتعويض
$6x = 24$	بالضرب
$x = 4$	بقسمة الطرفين على 6

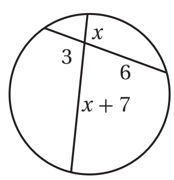
تمارين

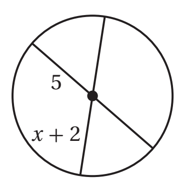
أوجد قيمة x في كلٍّ ممّا يأتي، مقرّبة إلى أقرب جزء من عشرة.

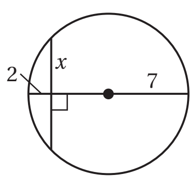
(1


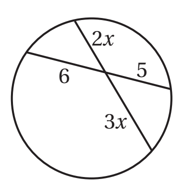
(2


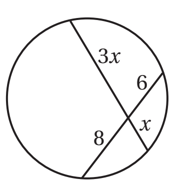
(3


(4


(5


(6


(7


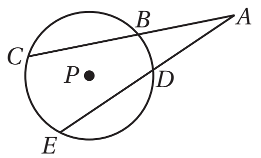
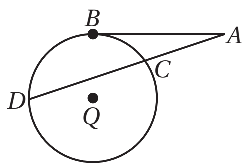
(8


8-7 تدريبات إعادة التعليم (تتمة)

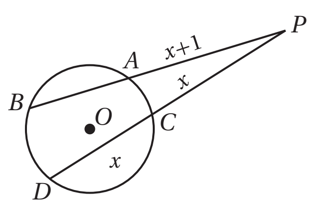
قطع مستقيمة خاصة في الدائرة

قطع مستقيمة تتقاطع خارج الدائرة:

توضّح النظريتان الآتيتان العلاقة بين أطوال أجزاء قاطعين أو قاطع ومماس، عندما يتقاطعان خارج الدائرة.

8.16	إذا رُسم قاطعان لدائرةٍ من نقطة خارجها، فإن حاصل ضرب طول القاطع الأول في طول الجزء الخارجي منه، يساوي حاصل ضرب طول القاطع الثاني في طول الجزء الخارجي منه.	$\overline{AC}$ و $\overline{AE}$ قاطعان للدائرة. $\overline{AB}$ و $\overline{AD}$ الجزءان الخارجيان من القاطعين. $AC \cdot AB = AE \cdot AD$	
8.17	إذا رُسم مماسٌّ وقاطع لدائرة من نقطة خارجها، فإن مربع طول المماس، يساوي حاصل ضرب طول القاطع في طول الجزء الخارجي منه.	$\overline{AB}$ مماس للدائرة، AD قاطع للدائرة. AC الجزء الخارجي من القاطع $\overline{AD}$. $AB^2 = AD \cdot AC$	

مثال 1 في الشكل المجاور، إذا علمت أن $PB = 9$ ، $PD = 12$، فما قيمة x ؟



$PB \cdot PA = PD \cdot PC$ النظرية 8.16

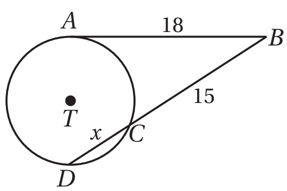
$9(x+1) = 12 \cdot x$ بالتعويض

$9x + 9 = 12x$ بالضرب

$9 = 3x$ بطرح 9 من كلا الطرفين

$3 = x$ بقسمة الطرفين على 3

مثال 2 $\overline{AB}$ مماس للدائرة في الشكل المجاور، أوجد قيمة x مقربًا إجابتك إلى أقرب عُشرٍ.



$\overline{AB}$ مماسٌّ، و $\overline{BD}$ قاطع، وجزء القاطع الخارجي هو $\overline{BC}$.

$AB^2 = BC \cdot BD$ النظرية 8.17

$18^2 = 15(15 + x)$ بالتعويض

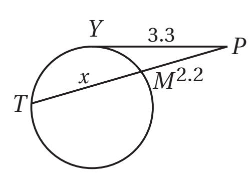
$324 = 225 + 15x$ بالضرب

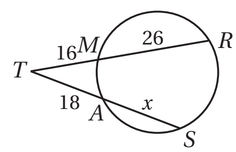
$99 = 15x$ بطرح 225 من الطرفين

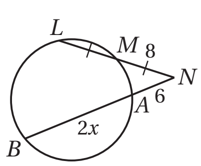
$6.6 = x$ بقسمة الطرفين على 15

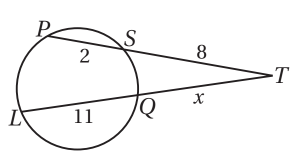
تمارين

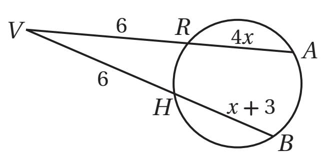
أوجد قيمة x في كلٍّ من الأشكال الآتية، مفترضًا أن القطع المستقيمة التي تبدو مماسات للدائرة هي مماسات فعلًا، وقرّب إجابتك إلى أقرب عُشرٍ.

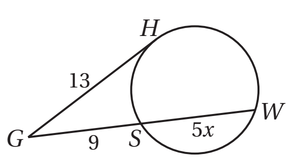
(1


(2


(3


(4


(5


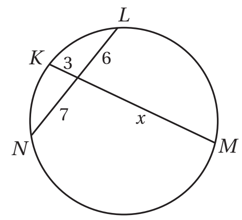
(6


8-7 تدريبات المهارات

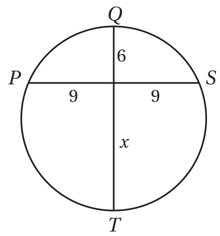
قطع مستقيمة خاصة في الدائرة

أوجد قيمة x في كلٍّ من الأشكال الآتية، مقربة إلى أقرب جزء من عشرة، مفترضًا أن القطع المستقيمة التي تبدو كأنها مماسات هي مماسات فعلًا.

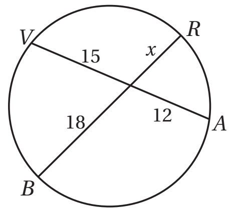
(1



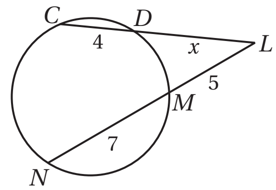
(2



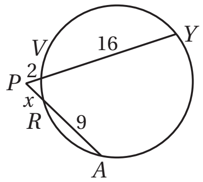
(3



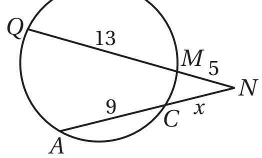
(4



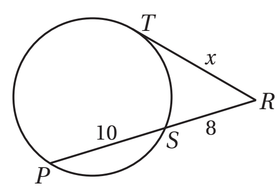
(5



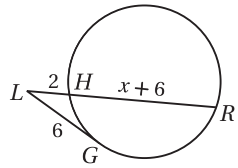
(6



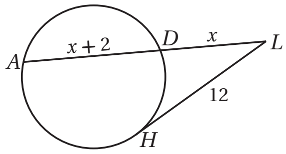
(7



(8



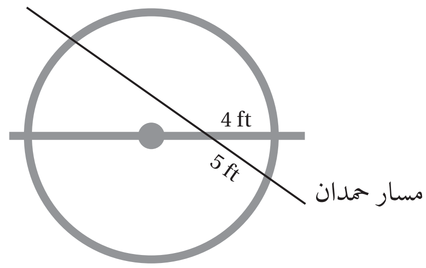
(9



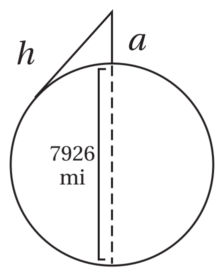
8-7 تدريبات حل المسألة

قطع مستقيمة خاصة في الدائرة

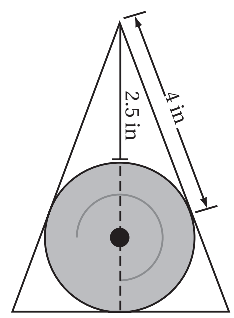
1) التزلج على الجليد: قام حمدان بالتزلج مارًّا خلال دائرة في حلبة التزلج، وكان مساره خلال الدائرة كما في الشكل أدناه، إذا علمت أن قطر الدائرة يساوي 15 ft، فما المسافة التي قطعها حمدان عبر هذه الدائرة أثناء تزلّجه؟



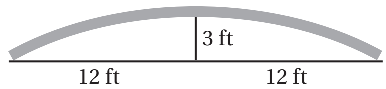
2) فلك: افترض أن الأرض كروية تمامًا وقطرها يساوي 7926 ميلًا، فما طول خط الأفق h من ارتفاع a ميلًا عن الأرض؟



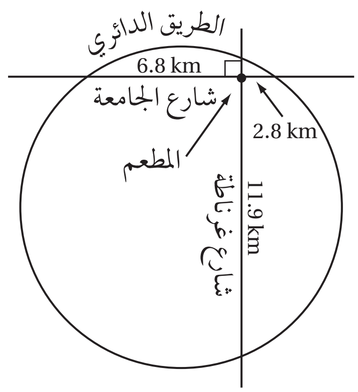
3) محور العجلة: يبين الشكل أدناه مقطعًا عرضيًّا لعجلة مثبتة بواسطة أنبوب معدني مثلث الشكل، يمتد كابح من رأس المثلث نحو العجلة، وعندما يبلغ مسافة 2.5 in يلامس محور العجلة، ما قطر المحور؟



4) علم الآثار: أزال علماء الآثار الأتربة عن حائط دائري، ثم أجروا بعض القياسات فكانت على الصورة الموضحة في الشكل أدناه. بناءً على هذه المعطيات، ما طول نصف قطر الدائرة؟



5) خدمة توصيل الطعام: يقع مطعم عند تقاطع شارع غرناطة مع شارع الجامعة في مدينة تحوي طريقًا سريعًا دائريًّا يمر حول ضواحي المدينة جميعها، طول نصف قطر الطريق الدائري 8 km، ويضع المطعم الخريطة المبينة أدناه على إعلانات يوزِّعها في المدينة.



a) كم يبعد المطعم عن تقاطع الطريق الدائري مع شارع غرناطة من جهة الشمال؟

b) إذا أنشأت طريقًا جديدًا على طول قطر الطريق الدائري، بحيث يمر بتقاطع شارع الجامعة مع شارع غرناطة، فاحسب المسافة الأقصر بين المطعم والطريق الدائري على هذا الطريق الجديد؟

الاسم ________________________ التاريخ ____________

8-7 التدريبات الإثرائية

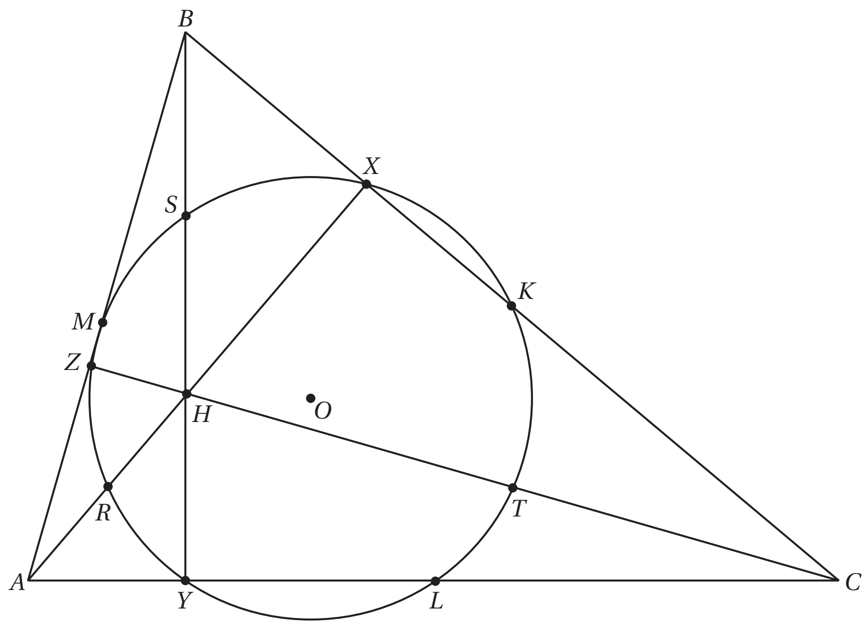
دائرة النقاط التسع:

يوضح الرسم أدناه حقيقةً مدهشةً حول المثلثات والدوائر. لأي ΔABC، توجد دائرة تحوي النقاط التسع الآتية جميعها:

(1) نقاط منتصفات أضلاع ΔABC وهي: M, L, K

(2) النقاط Z, Y, X، علمًا بأن $\overline{BY}$, $\overline{AX}$ و$\overline{CZ}$ ارتفاعات ΔABC.

(3) النقاط R, S, T ، وهي نقاط منتصفات القطع المستقيمة التي تصل رؤوس ΔABC بملتقى ارتفاعاته H.



1) ارسم في ورقة منفصلة ΔABC المنفرج الزاوية، ثم أنشئ مستعملًا المسطرة والفرجار دائرةً تمرُّ بنقاط منتصفات الأضلاع. راعِ أن يكون الإنشاء دقيقًا، هل تحتوي دائرتك على النقاط الست الأخرى التي وُصفت أعلاه؟

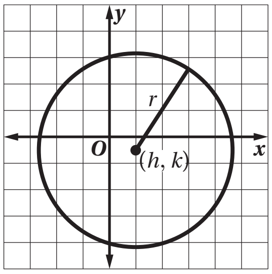
2) ارسم $\overline{RK}$, $\overline{SL}$ و $\overline{TM}$ في الشكل الذي أنشأته في السؤال 1، ماذا تلاحظ؟

8-8 تدريبات إعادة التعليم
معادلة الدائرة

معادلة الدائرة:

الدائرة هي المحل الهندسي للنقاط المستوية التي تبعد بُعدًا ثابتًا عن نقطةٍ معلومةٍ، ويمكنك استعمال تعريف الدائرة لكتابة معادلتها.

الصيغة القياسية لمعادلة الدائرة	معادلة الدائرة التي مركزها (h, k) ، وطول نصف قطرها r وحدة هي: $(x-h)^2+(y-k)^2=r^2$



مثال **اكتب معادلة الدائرة التي مركزها $(-1, 3)$ ونصف قطرها 6.**

استعمل المعادلة: $(x-h)^2+(y-k)^2=r^2$، وعوّض: $h=-1, k=3, r=6$

$(x-h)^2+(y-k)^2=r^2$ معادلة الدائرة

$[x-(-1)]^2+(y-3)^2=6^2$ بالتعويض

$(x+1)^2+(y-3)^2=36$ بالتبسيط

تمارين

اكتب معادلة الدائرة في كلٍّ من الحالات الآتية:

1) مركزها $(0, 0)$، ونصف قطرها 8.

2) مركزها $(-2, 3)$، ونصف قطرها 5.

3) مركزها $(2, -4)$، ونصف قطرها 1.

4) مركزها $(-1, -4)$، ونصف قطرها 2.

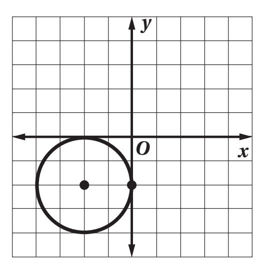
5) مركزها $(-2, -6)$، وقطرها 8.

6) مركزها نقطة الأصل، وقطرها 4.

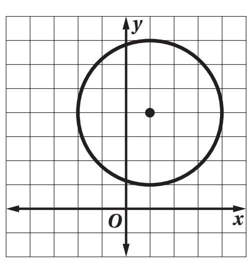
7) مركزها $(3, -4)$، وتمر بالنقطة $(-1, -4)$.

8) مركزها $(0, 3)$، وتمر بالنقطة $(2, 0)$.

9)



10)



8-8 تدريبات إعادة التعليم (تتمة)

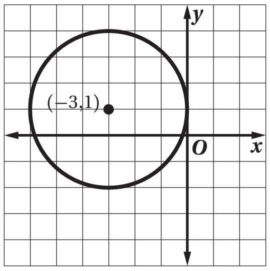
معادلة الدائرة

تمثيل الدوائر بيانيًا :

إذا أُعطيت معادلة دائرة، فإنه يمكنك تحليلها لإيجاد معلومات تساعدك على تمثيلها بيانيًا في المستوى الإحداثي.

مثال **أوجد مركز ونصف قطر الدائرة التي معادلتها: $(x+3)^2 + (y-1)^2 = 9$ ، ثم مثّلها بيانيًا.**

قارن كلّ مقدار جبري في المعادلةبنظيره في الصيغة القياسية؛ لإيجاد المركز (h, k) ونصف القطر r.



أعد كتابة معادلة الدائرة بالصيغة القياسية؛ لإيجاد المركز ونصف القطر بسهولة.

$$[x-(-3)]^2 + (y-1)^2 = 3^2$$

$$\uparrow \qquad\qquad \uparrow \quad \uparrow$$

$$(x-h)^2 + (y-k)^2 = r^2$$

لذا فإن: $h=-3, k=1, r=3$

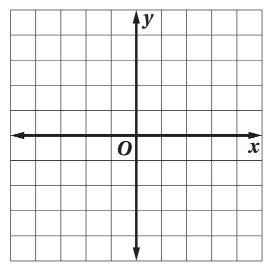
إذن مركز الدائرة هو $(-3, 1)$ ونصف قطرها 3 وحداتٍ.

ولتمثيلها عيّن المركز، وارسم الدائرة مستعملًا الفرجار بفتحة مقدارها 3 وحداتٍ من مربعات المستوى الإحداثي.

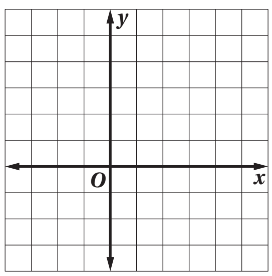
تمارين

أوجد مركز ونصف قطر الدائرة المعطاة معادلتها في كلٍّ ممّا يأتي، ثُم مثّلها بيانيًا:

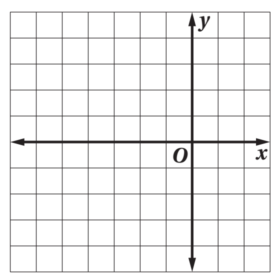
1) $x^2 + y^2 = 16$



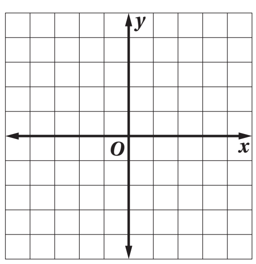
2) $(x-2)^2 + (y-1)^2 = 9$



3) $(x+2)^2 + y^2 = 16$

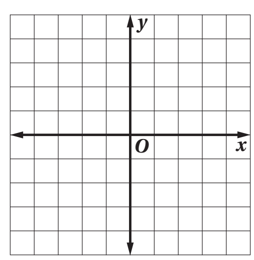


4) $x^2 + (y-1)^2 = 9$

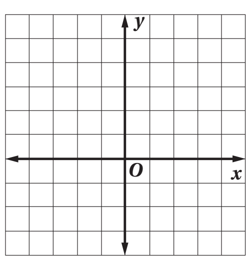


اكتب معادلة الدائرة المارة بالنقاط المعطاة في كلٍّ من السؤالين الآتيين ، ثم مثّلها بيانيًا:

5) $F(-2, 2), H(-1, 3), G(-1, 1)$



6) $R(-2,1), T(0,-1), S(-4,-1)$



الاسم ________________________ التاريخ ____________

8-8 تدريبات المهارات

معادلة الدائرة

اكتب معادلة الدائرة في الحالات الآتية:

1) مركزها نقطة الأصل، ونصف قطرها 6

2) مركزها (0,0)، ونصف قطرها 2.

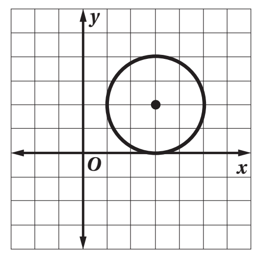
3) مركزها (4,3)، ونصف قطرها 9.

4) مركزها (7, 1)، وقطرها 24.

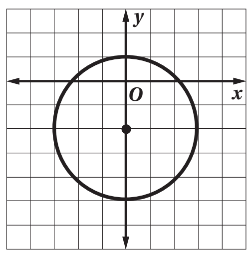
5) مركزها (1– ,4–)، وتمر بالنقطة (3 ,2–).

6) مركزها (2– ,5)، وتمر بالنقطة (0, 4)

7)

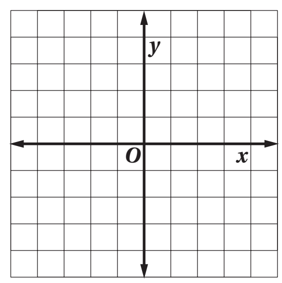


8)

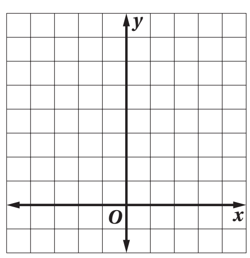


عيّن إحداثيَّي مركز الدائرة المعطاة معادلتها في كلٍّ من السؤالين الآتيين، ثم مثّلها بيانيًّا:

9) $x^2 + y^2 = 16$

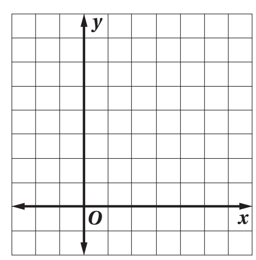


10) $(x - 1)^2 + (y - 4)^2 = 9$

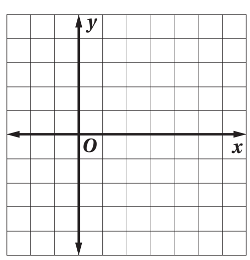


اكتب معادلة الدائرة المارة بالنقاط المعطاة في كلٍّ من السؤالين الآتيين، ثم مثّلها بيانيًّا:

11) $A(-2,3), B(1,0), C(4,3)$



12) $F(3,0), G(5, -2), H(1, -2)$

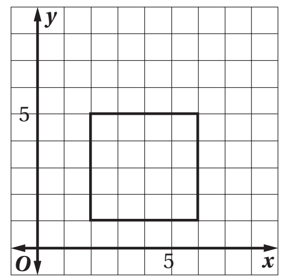


الاسم ________________ التاريخ ________

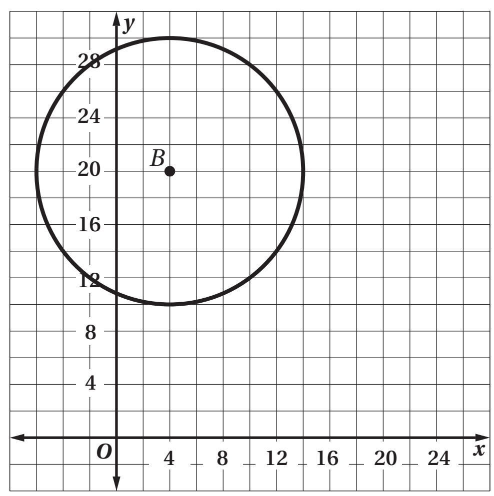
8-8 تدريبات حل المسألة

معادلة الدائرة

1) تصميم: يريد أحمد كتابة معادلة الدائرة المحاطة بالمربع الذي يظهر في الشكل أدناه، فما معادلة هذه الدائرة؟



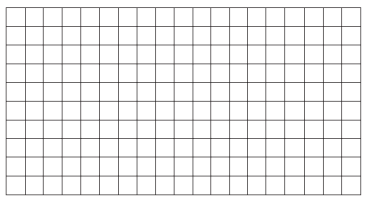
اتصالات: عند إجراء مكالمة باستعمال الجوال، فإن برج الاتصالات يتلقَّاها بحسب مدى استقبال دائريٍّ الشكل.



2) إذا كانت المعادلة: $(x-16)^2 + (y-10)^2 = 100$ ، تمثل موقع برج الاتصالات (A) ومدى استقباله، فصف موقع البرج ومدى استقباله، ثم مثّل معادلة موقعه بيانيًّا.

3) إذا تمَّ بناء برج آخر للاتصالات (B) بموقع ومدى استقبال موضح على الشكل أعلاه، فاكتب معادلةً تمثل موقع البرج (B) ومدى استقباله.

4) ورق جدران: يتكون تصميم لورق الجدران من دوائر يمكنك تمثيلها بالمعادلة :
$(x - a)^2 + (y - b)^2 = 4$، ارسم جزءًا من ورق الجدران في مستوًى إحداثيٍّ.



5) مخطط هندسي: رُسم مُخطط متنزه على ورق رسم بياني، ومُثّل محيط المتنزه بالمعادلة:
$(x - 3)^2 + (y - 7)^2 = 225$، إذا كانت كلّ وحدةٍ على المستوى البياني تمثل 10 ft، فما طول نصف قطر المتنزه الحقيقي؟

6) مسافة : يبعد منزل مروان مسافات متساوية عن المسجد والمركز الصحي ومدرسته، والجدول أدناه يبيّن إحداثيات هذه المواقع الثلاثة على خريطة إحداثية، حيث تمثل كلّ وحدة على الخريطة 1 m.

الموقع	الإحداثيات
المسجد	(−78, 202)
المركز الصحي	(111, 193)
المدرسة	(202 , −106)

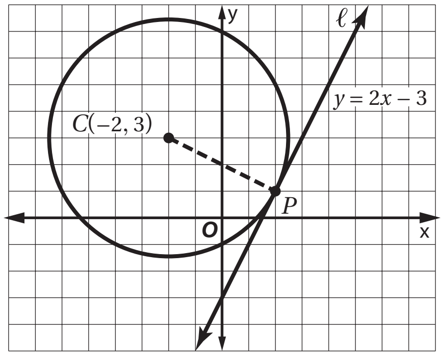
a) ما إحداثيات موقع منزل مروان؟ ارسم الدائرة على خريطة، وعيّن عليها المواقع الثلاثة والمنزل.

b) كم مترًا يبعد منزل مروان عن المواقع المذكورة؟

c) اكتب معادلة الدائرة التي تمر بالمسجد والمركز الصحي والمدرسة؟

الاسم ______________________ التاريخ ____________

8-8 التدريبات الإثرائية



معادلة الدائرة والمماس:

تذكّر أن الدائرة التي نصف قطرها r وإحداثيات مركزها (h,k)، هي التمثيل البياني للمعادلة: $(x-h)^2 + (y-k)^2 = r^2$، يمكنك استعمال هذه الفكرة وما تعرفه عن الدوائر والمماسات لإيجاد معادلة الدائرة، إذا عُلِم مركزها ومعادلة مستقيمٍ تمسُّه.

اتّبع الخطوات الآتية لإيجاد معادلة الدائرة التي مركزها $C(-2, 3)$، وتمسّ المستقيم ℓ الذي معادلته $y = 2x - 3$ ، مستعملًا الشكل أعلاه .

1) أوجد ميل المستقيم ℓ الذي معادلته $y = 2x - 3$.

2) إذا كانت $\odot C$ التي مركزها $C\ (-2,3)$ تمسّ المستقيم ℓ عند النقطة P، فما ميل نصف القطر $\overline{CP}$ ؟

3) اكتب معادلة المستقيم الذي يحوي $\overline{CP}$.

4) استعمل المعادلة التي حصلت عليها من السؤال 3، والمعادلة $y = 2x - 3$؛ لإيجاد نقطة تقاطع المستقيمين اللذين يمثلان هاتين المعادلتين . ما إحداثيات هذه النقطة؟

5) أوجد طول نصف القطر $\overline{CP}$.

6) استعمل إحداثيات المركز $C(-2,3)$، وإجابتك عن السؤال 5 لكتابة معادلة $\odot C$.

ملحق الإجابات

الاسم ________________ التاريخ ________

8-1 تدريبات إعادة التعليم

الدائرة ومحيطها

قطع مستقيمة في الدائرة:

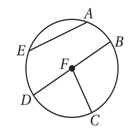
الدائرة هي المحل الهندسي لجميع النقاط في المستوى، بحيث تبعد بعدًا ثابتًا عن نقطةٍ معلومةٍ تسمّى **مركز الدائرة**.

للقطع المستقيمة التي تقطع الدائرة أسماء خاصة.

- القطعة المستقيمة التي يقع أحد طرفَيها على الدائرة والآخر عند مركز الدائرة، تسمّى **نصف قطر**.
- القطعة المستقيمة التي يقع طرفاها على الدائرة تسمّى **وترًا**.
- الوتر المار بمركز الدائرة يسمّى **قطرًا**، ويتكون من نصفَي قطرين يقعان على استقامةٍ واحدةٍ.

تكون العلاقات الآتية صحيحة في الدائرة التي نصف قطرها r وقطرها d:

$d = 2r$ ، $r = \frac{1}{2}d$ أو $r = \frac{d}{2}$



وتر: $\overline{BD}, \overline{AE}$

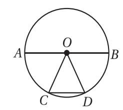
نصف قطر: $\overline{FD}, \overline{FC}, \overline{FB}$

قطر: $\overline{BD}$

مثال

a) **سمِّ الدائرة في الشكل المجاور.**

اسم هذه الدائرة $\odot O$



b) **عيّن أنصاف أقطار الدائرة.**

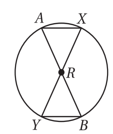
$\overline{AO}, \overline{BO}, \overline{CO}, \overline{DO}$ أنصاف أقطار في هذه الدائرة.

c) **عيّن أوتار الدائرة.**

$\overline{AB}, \overline{CD}$ وتران في هذه الدائرة.

تمارين

استعمل الشكل المجاور للإجابة عن الأسئلة 7 – 1.



1) سمِّ الدائرة.
$\odot R$

2) عيّن أنصاف أقطار الدائرة.
$\overline{RA}, \overline{RB}, \overline{RY}, \overline{RX}$

3) عيّن أوتار الدائرة.
$\overline{BY}, \overline{AX}, \overline{AB}, \overline{XY}$

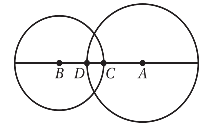
4) عيّن أقطار الدائرة.
$\overline{XY}$ و $\overline{AB}$

5) إذا كان $AB = 18$ mm، فأوجد AR.
9 mm

6) إذا كان $RY = 10$ in، فأوجد AR و AB.
$AR = 10$ in; $AB = 20$ in

7) هل $\overline{AB} \cong \overline{XY}$؟ فسّر إجابتك. **نعم؛ أقطار الدائرة الواحدة متطابقة كلها.**

8) قطر $\odot A$ يساوي 40 وحدةً، وقطر $\odot B$ يساوي 32 وحدةً، و AC يساوي 14 وحدةً، أوجد قياس كلٍّ من CD وَ BD.
$CD = 6, BD = 10$



الاسم ________________ التاريخ ________

8-1 تدريبات إعادة التعليم (تتمة)

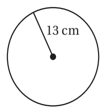
الدائرة ومحيطها

محيط الدائرة:

محيط الدائرة هو طول المنحنى المغلق الذي يمثل الدائرة ويرمز له بالرمز C.

محيط الدائرة	إذا كان محيط الدائرة يساوي C، وقطرها يساوي d، أو نصف قطرها يساوي r، فإنه يمكننا التعبير عن المحيط بالعلاقتين الآتيتين: $C = 2\pi r$ ، أو $C = \pi d$ ، حيث π عدد غير نسبي ويساوي 3.14 أو $\frac{22}{7}$ تقريبًا، يكون المضلّع **محاطًا بدائرةٍ** إذا وقعت رؤوسه جميعها على الدائرة، وتسمى هذه الدائرةُ **الدائرة الخارجية**.

مثال **أوجد محيط الدائرة المجاورة، مقربًا إجابتك إلى أقرب جزءٍ من مائةٍ.**



$C = 2\pi r$	صيغة محيط الدائرة
$= 2\pi(13)$	$r = 13$
$= 26\pi$	بالتبسيط
≈ 81.68	مستعملًا الآلة الحاسبة

محيط هذه الدائرة يساوي 26π cm أو 81.68 cm تقريبًا.

تمارين

أوجد قطر الدائرة ونصف قطرها إذا كان محيطُها كما هو مبيّن في الأسئلة 6–1، مقربًا إجابتك إلى أقرب جزءٍ من مائةٍ.

1) $C = 40$ in.
12.73 in, 6.37 in

2) $C = 256$ ft.
81.49 ft, 40.74 ft

3) $C = 15.62$ m.
4.97 m, 2.49 m

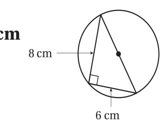
4) $C = 9$ cm.
2.86 cm, 1.43 cm

5) $C = 79.5$ yd.
25.31 yd, 12.65 yd

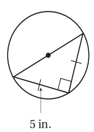
6) $C = 204.16$ m.
64.99 m, 32.49 m

أوجد القيمة الدقيقة لمحيط الدائرة في كلٍّ من مما يأتي:

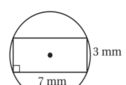
7) **10π cm**



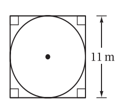
8) **$5\pi\sqrt{2}$ in**



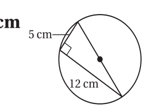
9) **$\pi\sqrt{58}$ mm**



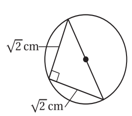
10) **11π m**



11) **13π cm**



12) **2π cm**

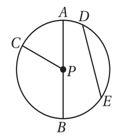


الاسم ______________ التاريخ ________

8-1 تدريبات المهارات

الدائرة ومحيطها

استعمل $\odot P$ في الشكل المجاور للإجابة عن الأسئلة 7 – 1.



1) سمِّ مركز الدائرة. **P**

2) عيِّن نصف قطر في الدائرة. **$\overline{PA}$ أو $\overline{PB}$ أو $\overline{PC}$**

3) عيِّن وترًا في الدائرة. **$\overline{AB}$ أو $\overline{DE}$**

4) عيِّن قطرًا في الدائرة. **$\overline{AB}$**

5) عيِّن نصف قطرٍ في الدائرة، لا يكون جزءًا من قطرٍ مرسومٍ فيها. **$\overline{PC}$**

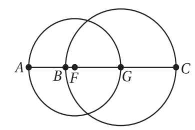
6) إذا كان قطر الدائرة يساوي 16 سم، فأوجد نصف قطرها. **8 cm**

7) إذا كان $PC = 11$ in ، فأوجد AB. **22 in**

إذا كان قطرا $\odot F$ و$\odot G$ هما 5 و6 وحداتٍ على الترتيب، فأوجد كلًّا من القياسين الآتيين:

8) BF **0.5 وحدة**

9) AB **2 وحدة**



أوجد قطر الدائرة ونصف قطرها المُعطَى محيطُها فيما يأتي، مقرِّبًا إجابتك إلى أقرب جزءٍ من مائةٍ:

10) $C = 36$ cm. **$d = 11.46$ cm؛ $r = 5.73$ cm**

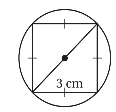
11) $C = 17.2$ ft. **$d = 5.47$ ft؛ $r = 3.74$ ft**

12) $C = 81.3$ cm. **$d = 25.88$ cm؛ $r = 12.94$ cm**

13) $C = 5$ yd. **$d = 1.59$ yd؛ $r = 0.80$ yd**

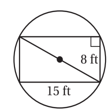
أوجد القيمة الدقيقة لمحيط كلّ دائرةٍ من الدائرتين الآتيتين:

14)



$3\pi\sqrt{2}$ cm

15)



17π ft

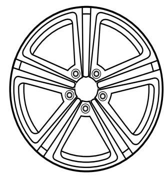
الاسم ______________ التاريخ ________

8-1 تدريبات حل المسألة

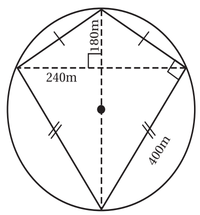
الدائرة ومحيطها

1) **عجلات:** يقوم سالم بتصميم إطارات سيارة، إذا كان قطر الإطار يساوي 18 in، وأراد أن يضع دعامات تمتد من مركز الإطار إلى حافته، فما طول كلٍّ من هذه الدعامات؟

9 in



2) **حدائق:** حديقة دائرية الشكل، صمّمت فيها الطرقات الرئيسة الموضحة في الشكل أدناه، أوجد محيط الحديقة مقربًا إجابتك إلى أقرب مترٍ.



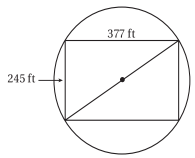
1758 m

3) **نقود:** وضعت ثلاث قطع نقود من فئة نصف الريال في صفٍّ واحدٍ كما في الشكل أدناه.

إذا كانت المسافة بين مركزَي القطعتين (الأولى والثالثة) تساوي 5.6 cm، فما نصف قطر قطعة النقود من فئة النصف ريال؟

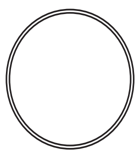
1.4 cm

4) **ساحة عامّة:** أُحيطت ساحة عامة مستطيلة الشكل بسياجٍ دائريٍّ، على أن يصل كلٌّ من قُطرَي المستطيل بين نقطتين، على السياج مرورًا بمركز الدائرة كما في الشكل أدناه، ما طول قطر السياج؟ قرِّب إجابتك إلى أقرب جزء من عشرة من القدم.



449.6 ft

5) **أطواق التمرين:** يريد حسّان أن يصنع طوقًا دائريًّا يدوِّره حول جسمه للتمرينات الرياضية، ومن أجل ذلك استعمل أنبوبًا طوله 2.5 m.



a) ما طول قطر الطوق الذي صنعه حسّان؟ قرِّب إجابتك إلى أقرب سنتمتر.

80 cm

b) ما طول نصف قطر الطوق الذي صنعه حسّان؟ قرِّب إجابتك إلى أقرب سنتمترٍ.

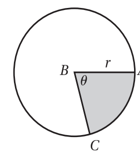
40 cm

الاسم ____________ التاريخ ____________

8-1 التدريبات الإثرائية

القطاع الدائري:

يمكنك إيجاد مساحة الدائرة مستعملًا القانون $A = \pi r^2$، والقطاع الدائري جزءٌ من الدائرة، وينحصر بين نصفَي قطرين وقوس من الدائرة.



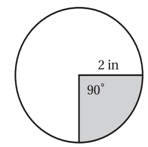
والزاوية المركزيّة للقطاع الدائري زاويةٌ يقع رأسها عند مركز الدائرة، وضلعاها نصفا قطرين في الدائرة.

وتتناسب مساحة القطاع الدائري ذي الزاوية المركزيّة θ مع الجزء الذي تمثله θ من $360°$

أي أن:

$$\frac{\text{مساحة القطاع}}{\text{مساحة الدائرة}} = \frac{\theta}{360°}\text{، أو مساحة القطاع } = \frac{\theta}{360°}\pi r^2$$

مثال **أوجد مساحة القطاع الدائري في الشكل المجاور.**



$$A = \frac{\theta}{360°}\pi r^2$$

$$= \frac{90°}{360°}\pi(2)^2 \qquad r = 2 \quad \theta = 90°$$

$$= \frac{1}{4}(4\pi) = \pi$$

إذن مساحة القطاع الدائري تساوي π in^2 أو 3.14 in^2 تقريبًا.

تمارين:

1) أوجد مساحة القطاع الدائري، إذا كان قياس زاويته المركزيّة $72°$، ونصف قطر الدائرة فيه 10 cm

20π cm²

2) أوجد مساحة القطاع الدائري، إذا كان قياس زاويته المركزيّة $60°$، ونصف قطر الدائرة فيه 5 in

$\frac{25}{6}\pi$ in²

3) إذا كانت مساحة قطاع دائري 15π cm²، ونصف قطر الدائرة يساوي 5 cm، فأوجد قياس الزاوية المركزيّة للقطاع.

216°

4) إذا كانت مساحة قطاعٍ دائريٍّ تساوي $\frac{1}{3}$ مساحة الدائرة، فأوجد قياس زاويته المركزية.

120°

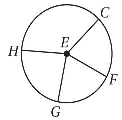
الاسم ____________ التاريخ ____________

8-2 تدريبات إعادة التعليم

قياس الزوايا والأقواس

الزوايا والأقواس:

الزاوية المركزيّة زاوية يقع رأسها عند مركز الدائرة، وضلعاها نصفا قطرين في الدائرة، والزاوية المركزيّة تقسم الدائرة إلى قوسين؛ **قوس أكبر** و**قوس أصغر**.

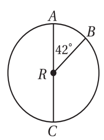


$\overset{\frown}{GF}$ قوس أصغر.
$\overset{\frown}{CHG}$ قوس أكبر.
$\angle GEF$ زاوية مركزية.

وهذه بعض خصائص الزوايا المركزيّة والأقواس:

- مجموع قياسات الزوايا المركزيّة غير المتداخلة في الدائرة يُساوي $360°$ — $m\angle HEC + m\angle CEF + m\angle FEG + m\angle GEH = 360°$.
- قياس القوس الأصغر أقل من $180°$،ويساوي قياس زاويته المركزيّة. — $m\overset{\frown}{CF} = m\angle CEF$.
- قياس القوس الأكبر يساوي $360°$، مطروحًا منها قياس القوس الأصغر الذي له نفس الطرفين. — $m\overset{\frown}{CGF} = 360° - m\overset{\frown}{CF}$
- قياس **نصف الدائرة** يساوي $180°$
- **القوسان المتطابقان** هما قوسان إذا وفقط إذا وقعا في الدائرة نفسها، أو في دائرتين متطابقتين، وكانت الزاويتان المركزيتان المناظرتان لهما متطابقتين. — $\overset{\frown}{FG} \cong \overset{\frown}{CF}$ إذا وفقط إذا كانت $\angle FEG \cong \angle CEF$.
- قياس القوس المكوَّن من **قوسين متجاورين**، يساوي مجموع قياسَي هذين القوسين، وتسمّى هذه الخاصية (مسلّمة جمع الأقواس). — $m\overset{\frown}{CF} + m\overset{\frown}{FG} = m\overset{\frown}{CG}$

مثال **إذا كان $\overline{AC}$ قطرًا في $\odot R$ الموضحة في الشكل المجاور، فأوجد $m\overset{\frown}{AB}$ و $m\overset{\frown}{ACB}$.**

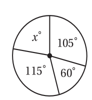


$\angle ARB$ زاوية مركزية و $m\angle ARB = 42°$، إذن $m\overset{\frown}{AB} = 42°$.

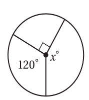
لذا فإن: $m\overset{\frown}{ACB} = 360° - 42° = 318°$

تمارين

أوجد قيمة x في السؤالين الآتيين:

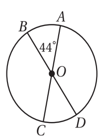
1) 

80°

2) 

150°

إذا كان $\overline{BD}$ وَ $\overline{AC}$ قطرين في $\odot O$، فحدّد إذا كان كلٌّ من الأقواس الآتية قوسًا أكبر أم قوسًا أصغر أم نصف دائرة، ثم أوجد قياسه:



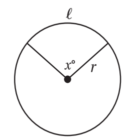
3) $\overset{\frown}{BA}$	**قوس أصغر؛ 44°**	4) $\overset{\frown}{BC}$	**قوس أصغر؛ 136°**
5) $\overset{\frown}{CD}$	**قوس أصغر؛ 44°**	6) $\overset{\frown}{ACB}$	**قوس أكبر؛ 316°**
7) $\overset{\frown}{BCD}$	**نصف دائرة؛ 180°**	8) $\overset{\frown}{AD}$	**قوس أصغر؛ 136°**

الاسم ____________ التاريخ ________

8-2 تدريبات إعادة التعليم (تتمة)

قياس الزوايا والأقواس

طول القوس:

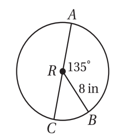


القوس جزء من الدائرة، وطوله جزء من محيطها.

يمكنك إيجاد **طول القوس** ℓ مستعملًا المعادلة الآتية:

$\ell = \frac{x°}{360°} \cdot 2\pi r$.

مثال أوجد طول $\overset{\frown}{AB}$ الموضّح في الشكل المجاور، مقربًا إجابتك إلى أقرب جزء من مئة.

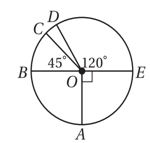


يمكنك إيجاد طول $\overset{\frown}{AB}$، مستعملًا المعادلة الآتية: $\ell = \frac{x°}{360°} \cdot 2\pi r$

$\ell = \frac{x°}{360°} \cdot 2\pi r$	معادلة طول القوس
$= \frac{135°}{360°} \cdot 2\pi(8)$	بالتعويض
≈ 18.85	باستعمال الآلة الحاسبة

تمارين

استعمل $\odot O$ الموضحة في الشكل المجاور؛ لإيجاد طول كلّ قوس ممّا يأتي، مقرّبًا إجابتك إلى أقرب جزء من مائة:



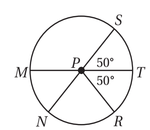
1) $\overset{\frown}{DE}$، إذا كان نصف القطر يساوي 2 m. **4.19 m**

2) $\overset{\frown}{DEA}$، إذا كان القطر يساوي 7 in. **12.83 in**

3) $\overset{\frown}{CB}$، إذا كان $BE = 24$ ft. **9.42 ft**

4) $\overset{\frown}{CBA}$، إذا كان $DO = 3$ mm. **7.07 mm**

استعمل $\odot P$ الموضحة في الشكل المجاور؛ لإيجاد طول كلّ قوس ممّا يأتي، مقرّبًا إجابتك إلى أقرب جزء من مائة:



5) $\overset{\frown}{RT}$، إذا كان $MT = 7$ m. **3.05 m**

6) $\overset{\frown}{NR}$، إذا كان $PR = 13$ ft. **8.15 ft**

7) $\overset{\frown}{MST}$، إذا كان $MP = 2$ in. **6.28 in**

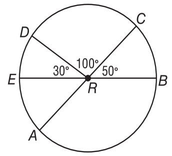
8) $\overset{\frown}{MRS}$، إذا كان $NS = 10$ cm. **20.07 cm**

الاسم ____________ التاريخ ________

8-2 تدريبات المهارات

قياس الزوايا والأقواس

$\overline{AC}$ وَ $\overline{EB}$ قطران في $\odot R$ الموضحة في الشكل المجاور، حدّد ما إذا كان كلّ قوسٍ ممّا يأتي قوسًا أكبر أم قوسًا أصغر أم نصف دائرة، ثم أوجد قياسه:



1) $\overset{\frown}{EA}$ **قوس أصغر؛ 50°**

2) $\overset{\frown}{CB}$ **قوس أصغر؛ 50°**

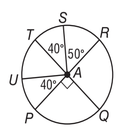
3) $\overset{\frown}{DC}$ **قوس أصغر؛ 100°**

4) $\overset{\frown}{DEB}$ **قوس أكبر؛ 210°**

5) $\overset{\frown}{AB}$ **قوس أصغر؛ 130°**

6) $\overset{\frown}{CDA}$ **نصف دائرة؛ 180°**

$\overline{PR}$ و $\overline{QT}$ قطران في $\odot A$ الموضحة في الشكل المجاور؛ أوجد كلّ قياس ممّا يأتي:



7) $m\overset{\frown}{UPQ}$ **130°**

8) $m\overset{\frown}{PQR}$ **180°**

9) $m\overset{\frown}{UTS}$ **90°**

10) $m\overset{\frown}{RS}$ **50°**

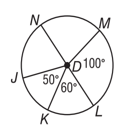
11) $m\overset{\frown}{RSU}$ **140°**

12) $m\overset{\frown}{STP}$ **130°**

13) $m\overset{\frown}{PQS}$ **230°**

14) $m\overset{\frown}{PRU}$ **320°**

استعمل $\odot D$ الموضحة في الشكل المجاور؛ لإيجاد طول كلّ قوس ممّا يأتي، مقرّبًا إجابتك إلى أقرب جزء من مائة:



15) $\overset{\frown}{LM}$ إذا كان نصف القطر يساوي 5 in. **8.73 in**

16) $\overset{\frown}{MN}$ إذا كان القطر يساوي 3 m. **2.09 m**

17) $\overset{\frown}{KL}$ إذا كان $JD = 7$ cm. **7.33 cm**

18) $\overset{\frown}{NJK}$ إذا كان $NL = 12$ ft. **12.57 ft**

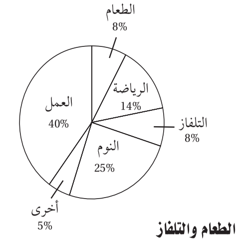
19) $\overset{\frown}{KLM}$ إذا كان $DM = 9$ mm. **25.13 mm**

20) $\overset{\frown}{JK}$ إذا كان $KD = 15$ in. **13.09 in**

الاسم ____________ التاريخ ________

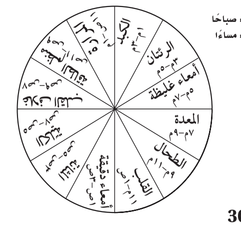
8-2 تدريبات حل المسألة
قياس الزوايا والأقواس

1) **الأنشطة اليوميّة:** التمثيل بالقطاعات الدائرية أدناه، يبيّن نتائج استطلاع حول أنشطة ومهام الفرد اليوميّة، أوجد قياس القوس المقابل للعمل؟ وما هما النشاطان اللذان يقابلان قوسين متطابقين؟



144°، الطعام والتلفاز

2) **ساعات:** يعتقد اليابانيُّون أن كلّ عضو من أعضاء الجسم المختلفة يكون أكثر نشاطًا في وقت معين خلال اليوم، ولتمثيل ذلك استعانوا بالساعة الصينية التي تعتمد على دائرة مقسمة إلى 12 قسمًا متساويًا برسم أنصاف أقطار فيها كما في الشكل أدناه، ما قياس كلٍّ من هذه الزوايا المركزية الاثنتي عشرة المتطابقة؟

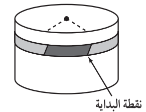


30°

3) **فطائر:** قطعت خديجة فطيرة تفاح دائرية الشكل إلى أربع قطع على طول 4 أنصاف أقطار، فكانت الزوايا المركزيّة للأقسام الأربعة هي: $(3x)°, (5x)°, (6x-10)°, (4x+10)°$، فما قياس كلٍّ من الزوايا المركزيّة الأربع؟

60°, 100°, 110°, 90°

4) **شريط:** لفّت آمنة شريط تزيين طوله 60 in حول علبة هدية أسطوانية الشكل قطرها 15 in لفة واحدة، ثم تابعت آمنة لفّ الجزء المتبقّي من الشريط بعدما وصلت إلى نقطة البداية كما في الشكل أدناه، ما قياس الزاوية المركزيّة التي تكونت بين طرفَي الشريط؟ قرّب إجابتك إلى أقرب جزء من عشرةٍ من الدرجة؟ **98.4°**



5) **إطارات الدراجة الهوائية:** اشترى عمر إطارًا لدراجته الهوائية قطره يساوي 20 in.

a) إذا تدحرج الإطار على الأرض بحيث دار دورة كاملة، فما المسافة التي يقطعها الإطار؟ قرّب إجابتك إلى أقرب جزءٍ من مئةٍ من البوصة.

62.83 in

b) إذا تدحرج الإطار على الأرض بحيث دار 45°، فما المسافة التي يقطعها؟ قرّب إجابتك إلى أقرب جزءٍ من مئة من البوصة.

7.85 in

c) إذا تدحرج الإطار على الأرض مسافة 10 in، فما قياس زاوية دورانه؟ قرّب إجابتك إلى أقرب جزء من مئة من الدرجة.

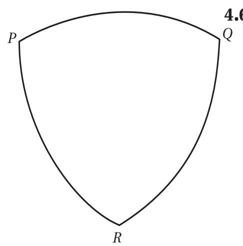
57.30°

الاسم ____________ التاريخ ________

8-2 التدريبات الإثرائية

منحنيات ذات عرض ثابت:

تُعدّ الدائرة من المنحنيات ذات العرض الثابت؛ لأنه كيفما وضعت الدائرة، تبقى أكبر مسافة عبرها ثابتة دائمًا، ولكن الدائرة ليست الشكل الوحيد الذي له هذه الخاصية.
تأمل الشكل المجاور الذي يُسمّى **مثلث ريلوكس**، نسبة للعالم الألماني فرانس ريلوكس.



1) استعمل المسطرة لقياس المسافة من P إلى أيّ نقطةٍ على الجهة المقابلة. **4.6 cm**

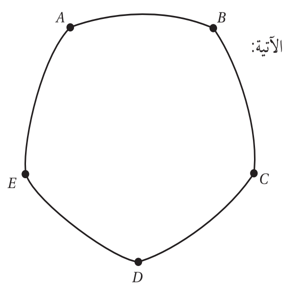
2) ما المسافة من Q إلى الجهة المقابلة؟ **4.3 cm**

3) ما المسافة من R إلى الجهة المقابلة؟ **4.3 cm**

يتألف مثلث ريلوكس من ثلاثة أقواس، ففي المثال السابق مركز $\widehat{PQ}$ هو R، ومركز $\widehat{QR}$ هو P، ومركز $\widehat{PR}$ هو Q.

4) انسخ مثلث ريلوكس أعلاه على قطعة من الورق ثم قُصّه، وارسم مربعًا طول ضلعه يساوي الطول الذي وجدته في السؤال 1، بيّن أنه بإمكانك تدوير المثلث داخل المربع، مع بقاء جوانبه ملامسةً لأضلاع المربع.
انظر عمل الطلاب

5) كوّن منحنًى آخر يكون ذا عرض ثابت، مستعملًا النقاط الخمس أدناه متّبعًا الخطوات الآتية:



الخطوة 1: ثبّت رأس الفرجار عند النقطة D، وافتحه فتحة تساوي DA، وارسم قوسًا طرفاه هما النقطتان A وَ B.

الخطوة 2: ارسم قوسًا آخر من B إلى C مركزه E.

الخطوة 3: استمر في هذه العملية حتى ترسم خمسة أقواس.
انظر عمل الطلاب

تستعمل بعض الدول هذا النوع من الأشكال في تصميم قطع نقودها المعدنية،

والفائدة في ذلك تكمُن في سهولة تمييزها باللمس، ويمكن استعمالها في أجهزة البيع الآلية أيضًا؛ لأن عرضها ثابت.

6) قِس عرض الشكل الذي رسمته في السؤال 5، وارسم مستقيمين متوازيين، المسافة بينهما تساوي العرض الذي وجدته، وانسخ الشكل ذا الجوانب الخمسة في قطعة من الورق وقصه، وبيّن أنه يتدحرج بسهولةٍ بين المستقيمين اللذين رسمتهما.
انظر عمل الطلاب

الاسم ________ التاريخ ________

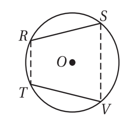
8-3 تدريبات إعادة التعليم

الأقواس والأوتار

الأقواس والأوتار:

تحدد النقاط على الدائرة الأقواس والأوتار، وهناك خصائص متعددة تتعلق بالنقاط على الدائرة.

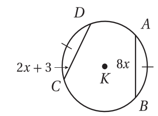
في الدائرة نفسها أو في الدائرتين المتطابقتين، يكون القوسان الأصغران متطابقين، إذا وفقط إذا كان الوتران المناظران لهما متطابقين.



$\widehat{RS} \cong \widehat{TV}$ إذا وفقط إذا كان $\overline{RS} \cong \overline{TV}$.

مثال

إذا كان $\widehat{AB} \cong \widehat{CD}$ في $\odot K$ الموضحة في الشكل المجاور، فأوجد AB.



$\widehat{AB}$ و $\widehat{CD}$ قوسان متطابقان في دائرةٍ واحدةٍ؛ لذا فإن $\overline{CD} \cong \overline{AB}$.

$CD = AB$ تعريف القطع المستقيمة المتطابقة

$2x + 3 = 8x$ بالتعويض

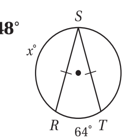
$x = \frac{1}{2}$ بالتبسيط

إذن $AB = 8\left(\frac{1}{2}\right) = 4$.

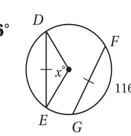
تمارين

جبر: أوجد قيمة x في كلّ دائرة ممّا يأتي:

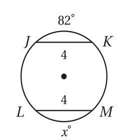
1) $148°$



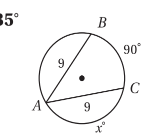
2) $116°$



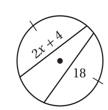
3) $82°$



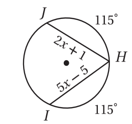
4) $135°$



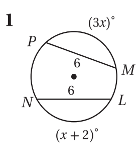
5) 7



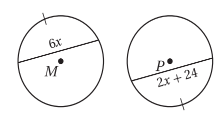
6) 2



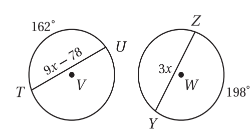
7) 1



8) $\odot M \cong \odot V$ 6



9) $\odot V \cong \odot W$ 13



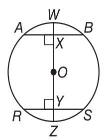
الاسم ________ التاريخ ________

8-3 تدريبات إعادة التعليم (تتمة)

الأقواس والأوتار

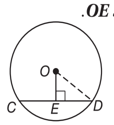
تنصيف الأقواس والأوتار:

إذا قسم مستقيم أو قطعة مستقيمة أو نصف مستقيم قوسًا إلى قوسين متطابقين؛ فإنه ينصّف القوس.

8.3	إذا كان قطر (أو نصف قطر) الدائرة عموديًّا على وترٍ فيها، فإنه ينصف الوتر وينصّف قوسه أيضًا.	إذا كان: $\overline{WZ} \perp \overline{AB}$، فإن: $\overline{AX} \cong \overline{XB}$ و $\widehat{AW} \cong \widehat{BW}$.	
8.4	العمود المنصف للوتر في الدائرة، هو قطر (أو نصف قطر) لها.	إذا كان: $OX = OY$، فإن: $\overline{AB} \cong \overline{RS}$	
8.5	يتطابق الوتران في الدائرة نفسها أو في الدائرتين المتطابقتين، إذا وفقط إذا كان بُعداهما عن المركز متساويين.	إذا كان: $\overline{AB} \cong \overline{RS}$، فإن: $\overline{AB}$ و $\overline{RS}$ يبعدان المسافة نفسها عن النقطة O.	

مثال

في $\odot O$ الموضحة في الشكل المجاور: $\overline{CD} \perp \overline{OE}$, $OD = 15$ و $CD = 24$، أوجد OE.



القطر أو نصف القطر العمودي على وتر الدائرة ينصف الوتر، إذن ED يساوي نصف CD.

$ED = \frac{1}{2}(24)$

$= 12$

استعمل نظرية فيثاغورس لإيجاد OE في $\triangle OED$.

$OE^2 + ED^2 = OD^2$ نظرية فيثاغورس

$OE^2 + 12^2 = 15^2$ بالتعويض

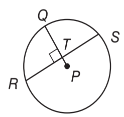
$OE^2 + 144 = 225$ بالتبسيط

$OE^2 = 81$ بطرح 144 من الطرفين

$OE = 9$ بأخذ الجذر التربيعي الموجب لكلا الطرفين

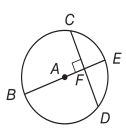
تمارين

في $\odot P$ الموضحة في الشكل المجاور، نصف القطر يساوي 13، و $RS = 24$، أوجد طول كلٍّ ممّا يأتي، مقربًا إجابتك إلى أقرب جزء من مائة.



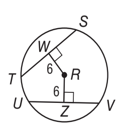
1) RT 12 2) PT 5 3) TQ 8

في $\odot A$ الموضحة في الشكل المجاور، القطر يساوي 12، و $CD = 8$، و $m\widehat{CD} = 90°$ ، أوجد قياس كلٍّ ممّا يأتي، مقربًا إجابتك إلى أقرب جزء من مائة.



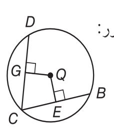
4) $m\widehat{DE}$ 45° 5) FD 4 6) AF 4.47

7) في $\odot R$ الموضحة في الشكل المجاور، $TS = 21$ و $UV = 3x$. ما قيمة x؟ 7



8) في $\odot Q$ الموضحة في الشكل المجاور: $GQ = x + 5$ ، $\overline{BC} \cong \overline{DC}$ و $EQ = 3x - 6$. ما قيمة x؟

5.5



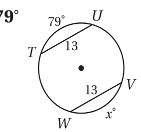
الاسم ________ التاريخ ________

8-3 تدريبات المهارات

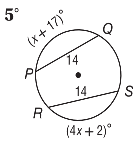
الأقواس والأوتار

جبر: أوجد قيمة x في كلّ دائرةٍ ممّا يأتي:

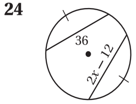
1) **79°**



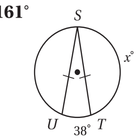
2) **5°**



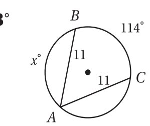
3) **24**



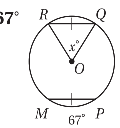
4) **161°**



5) **123°**

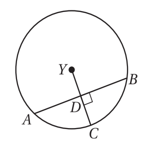


6) **67°**



نصف قطر $\odot Y$ الموضحة في الشكل المجاور، يساوي 34، و $AB = 60$ ، $m\widehat{AC} = 71°$.

أوجد قياس كلٍّ ممّا يأتي، مقربًا إجابتك إلى أقرب جزء من مائة.



7) $m\widehat{BC}$ **71°**

8) $m\widehat{AB}$ **142°**

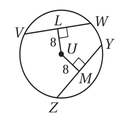
9) AD **30**

10) BD **30**

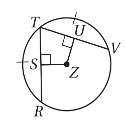
11) YD **16**

12) DC **18**

13) في $\odot U$ الموضحة في الشكل المجاور، $VW = 20$ ، و $YZ = 5x$، أوجد قيمة x. **4**



14) في $\odot Z$ الموضحة في الشكل المجاور، $\widehat{TR} \cong \widehat{TV}$ ، $ZS = x + 4$ و $UZ = 2x - 1$، أوجد قيمة x. **5**



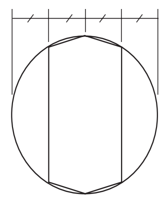
الاسم ________ التاريخ ________

8-3 تدريبات حل المسألة

الأقواس والأوتار

1) **مضلع سداسي:** أنشئ مضلع سداسي بالطريقة الموضّحة في الشكل أدناه، كم طولًا مختلفًا للأوتار التي تشكّل أضلاع هذا السداسي؟ وضّح إجابتك.

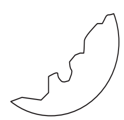
2؛ لأن الدائرة فيها قوسان مختلفان يقابلان هذين الوترين.

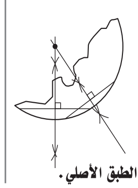


2) **علامات مائية:** تقوم شركة مجوهرات بطبع علامة مائية سرِّية على الشعار في وثائقها الرسمية كلّها؛ لتحديد ملكيَّة الحقوق ولأغراض أمنيَّة، وهذه العلامة المائية هي وتر يبعد 0.7 cm عن مركز طوقٍ دائريٍّ نصف قطره 2.5 cm، ما طول هذا الوتر إلى أقرب جزء من عشرة؟

4.8 cm

3) **علم الآثار:** أثناء القيام بحفريات أثرية عُثِرَ على قطعةٍ واحدةٍ فقط من طبق مكسور، استعمل صورة القطعة الفخاريّة أدناه في توضيح طريقة رسم الطبق بحجمه الأصلي عن طريق إنشاء الأوتار والأعمدة المنصّفة.



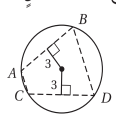


ارسم وترين على القوس، ثم أنشئ العمود المنصّف لكلٍ منهما. سيلتقي العمودان المنصفان في مركز الدائرة الأصلية، ثم استعمل الفرجار ونصف القطر في رسم الدائرة التي تمثل الطبق الأصلي.

4) **مراكز:** أراد سعود أن يجد مركز دائرةٍ كبيرةٍ، فقام برسم ما يعتقد أنه قطر لهذه الدائرة، ثم وضع علامة على نقطةٍ منتصف هذه القطعة المستقيمة، وأعلن أنه وجد مركز الدائرة، فسأله معلّمه: كيف عرفت أن المستقيم الذي رسمته هو بالفعل قطر لهذه الدائرة وليس وترًا؟ فأدرك سعود أنه غير متأكد من صحة استنتاجه، فماذا يتعين عليه أن يعمل للتأكد من أن هذا المستقيم هو قطر للدائرة.

يستطيع نعيم أن يرسم مستقيمًا عموديًا على المستقيم الذي رسمه، على أن يمر بالنقطة التي وضع علامة عندها، فإذا كانت نقطة منتصف القطعة الأولى هي نفسها نقطة منتصف القطعة الثانية، فإنه يثبت أن القطعة قطر للدائرة.

5) **صناعة اللُّحف:** تتَّبع رغد الخطوات الآتية لتكوين نمط للحاف. "في دائرة قطرها 10 in، فرسمت الوتر $\overline{AB}$ الذي يبعد 3 in عن مركز الدائرة ويعامد نصف القطر، ثم قصّت القماش على طول الوتر". قامت رغد بإعادة هذه الخطوات على الجهة الأخرى من القطر للوتر $\overline{CD}$، ثم قصّت على طول الوترين $\overline{DB}$ و$\overline{AC}$ ، فحصلت في النهاية على أربع قطع منحنية وشكلٍ رباعيٍّ واحدٍ.



a) إذا اتبعت رغد التعليمات، هل تضمن أن يكون الشكل الرباعي مستطيلًا؟ فسّر إجابتك.

لا؛ لأن الطريقة تُنتج الوترين المتطابقين $\overline{AB}$ و $\overline{CD}$ ، ولكنهما ليسا متوازيين بالضرورة.

b) افترض أن الشكل الرباعي الناتج مستطيل، وأن قياس قوس إحدى القطع المنحنية يساوي 74°، فما قياس أقواس القطع المنحنية الثلاث الأخرى؟

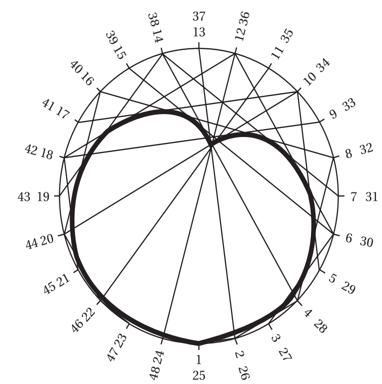
106°, 106°, 74°

الاسم________ التاريخ________

8-3 التدريبات الإثرائية

تكوين أنماط من أوتار الدائرة:

يمكننا الحصول على أنماط جميلة، إذا قمنا برسم أوتار تصل بين نقاط عُيِّنت على الدائرة، المسافة بين كلّ نقطتين متتاليتين منها ثابتة. يوجد على الدائرة أدناه 24 نقطةً تقسم الدائرة إلى 24 قسماً متساوياً، وقد وُضعت الأرقام من 1 إلى 48 إلى جوار هذه النقاط، تأمَّل الشكل لترى كيف وُضعت هذه الأرقام.



1) استعمل قلم رصاص ومسطرة لرسم أوتار تصل بين النقاط المرّقمة على النحو: 1 إلى 2، 2 إلى 4، 3 إلى 6، 4 إلى 8، وهكذا. استمر في عملية المضاعفة ورسمِ الأوتار الممكنة جميعها. ما نوع النمط الذي حصلت عليه؟

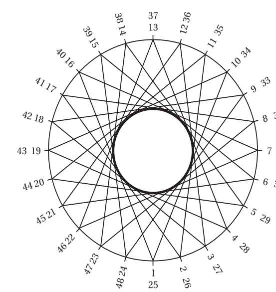
انظر الشكل أعلاه. يكون النمط الناتج على شكل قلب.

2) استعمل الدائرة ذاتها بنقاطها وأرقامها، وجرّب استعمال أنماط مختلفة للتوصيل بين النقاط. يمكنك ضرب رقم النقطة في ثلاثة للحصول على رقم النقطة التي تصلها معها، أو إضافة رقم معينا إلى رقم النقطة للحصول على رقم النقطة التي تصل معها. احتفظ بالأنماط المميزة لعرضها في غرفة الصف.

انظر إجابات الطلاب.

إجابة ممكنة:

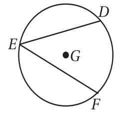
استعمل قلم رصاص ومسطرة لرسم أوتار تصل بين النقاط المرقمة على النحو: 1 إلى 10، 2 إلى 11، 3 إلى 12، 4 إلى 13، 5 إلى 14، 6 إلى 15 وهكذا استمر في الاضافة. فيكون النمط الناتج دائرة كما في الشكل المجاور



الاسم________ التاريخ________

8-4 تدريبات إعادة التعليم

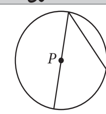
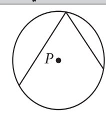
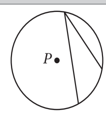
الزوايا المحيطية



الزوايا المحيطية:

الزاوية المحيطية زاوية يقع رأسها على الدائرة، ويحتوي ضلعاها على وترين في الدائرة، ففي $\odot G$، القوس الأصغر $\widehat{DF}$ هو **القوس المقابل** للزاوية المحيطية $\angle DEF$.

توجد ثلاث حالات للزاوية المحيطية في الدائرة.

الحالة الأولى	الحالة الثانية	الحالة الثالثة
		
يقع مركز الدائرة P على أحد ضلعَي الزاوية المحيطية.	**يقع مركز الدائرة P داخل الزاوية المحيطية.**	**يقع مركز الدائرة P خارج الزاوية المحيطية.**

والنظرية الآتية صحيحة لهذه الحالات الثلاث جميعها.

8.6	**نظرية الزاوية المحيطية**	قياس الزاوية المحيطية يساوي نصف قياس القوس المقابل لها.	في $\odot G$ أعلاه $m\angle DEF = \frac{1}{2} m\,\widehat{DF}$

إذا قابلت زاويتان محيطيّتان القوس نفسه أو قوسين متطابقين، فإن الزاويتين تكونان متطابقتين.

مثال **في $\odot G$ أعلاه: $m\,\widehat{DF} = 90°$ ، أوجد $m\angle DEF$.**

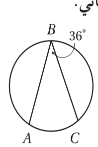
$\angle DEF$ زاوية محيطية؛ لذا فإن قياسها يساوي نصف قياس القوس المقابل لها.

$$m\angle DEF = \frac{1}{2} m\,\widehat{DF}$$
$$= \frac{1}{2}(90°) = 45°$$

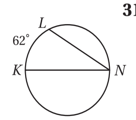
تمارين

أوجد كلّ قياس ممّا يأتي:

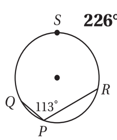
1) $m\widehat{AC}$ **72°**



2) $m\angle N$ **31°**



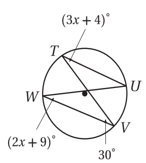
3) $m\widehat{QSR}$ **226°**



جبر: أوجد كلّ قياس ممّا يأتي:

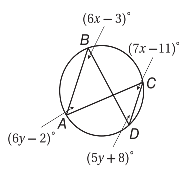
4) $m\angle U$ **30°**

5) $m\angle T$ **19°**



6) $m\angle A$ **58°**

7) $m\angle C$ **45°**



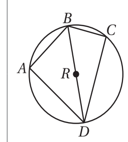
الاسم ________________ التاريخ ________

8-4 تدريبات إعادة التعليم (تتمة)

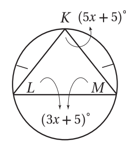
الزوايا المحيطية

زوايا المضلعات المُحاطة بدائرة:

المضلّع المحاط بدائرة: هو مضلع تقع رؤوسه كلُّها على الدائرة نفسها، والمضلّعات المُحاطة بدائرةٍ لها عدة خصائص منها:

8.8	تقابل الزاوية المحيطية في المثلث قطرًا أو نصف دائرةٍ، إذا وفقط إذا كانت هذه زاوية قائمة.	إذا كان $\widehat{BCD}$ نصف دائرة، فإن $m\angle BCD = 90°$، وإذا كان $m\angle C = 90°$، فإن $\widehat{BCD}$ نصف دائرة، ويكون $\overline{BD}$ قطرًا فيها.	
8.9	كلّ زاويتين متقابلتين في الشكل الرباعي المحاط بدائرةٍ متكاملتان.	في الشكل الرباعي $ABCD$ المحاط بدائرة $m\angle A + m\angle C = 180°$ و $m\angle ABC + m\angle ADC = 180°$	

مثال أوجد $m\angle K$ في الشكل المجاور.



$\widehat{KL} \cong \widehat{KM}$ إذن $KL = KM$، فيكون هذا المثلث متطابق الضلعين،

لذا فإن: $m\angle L = m\angle M = (3x + 5)°$.

$m\angle L + m\angle M + m\angle K = 180°$	نظرية مجموع قياسات زوايا المثلث
$(3x+5)° + (3x+5)° + (5x+5)° = 180°$	بالتعويض
$11x + 15 = 180$	بالتبسيط
$11x = 165$	بطرح 15 من الطرفين
$x = 15$	بقسمة كلّ طرف على 11

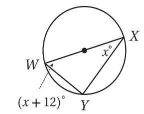
إذن: $m\angle K = (5 + 5(15))° = 80°$.

تمارين

جبر: أوجد كلّ قيمة أو قياس ممّا يأتي:

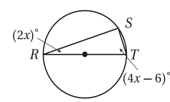
1) x **39°**

2) $m\angle W$ **51°**



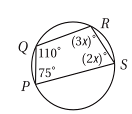
3) x **16**

4) $m\angle T$ **58°**



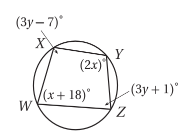
5) $m\angle R$ **105°**

6) $m\angle S$ **70°**



7) $m\angle W$ **72°**

8) $m\angle X$ **86°**



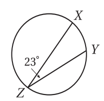
الاسم ________________ التاريخ ________

8-4 تدريبات المهارات

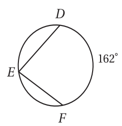
الزوايا المحيطية

أوجد كلّ قياسٍ ممّا يأتي:

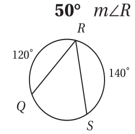
1) $m\widehat{XY}$ **46°**



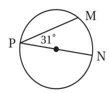
2) $m\angle E$ **81°**



3) $m\angle R$ **50°**



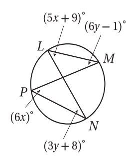
4) $m\widehat{MP}$ **118°**



جبر: أوجد كلّ قياس ممّا يأتي:

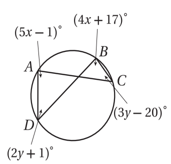
5) $m\angle N$ **17°**

7) $m\angle L$ **54°**



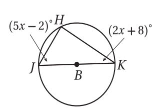
6) $m\angle C$ **43°**

8) $m\angle A$ **89°**



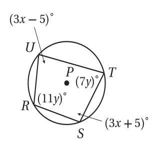
9) $m\angle J$ **58°**

11) $m\angle K$ **32°**



10) $m\angle S$ **95°**

12) $m\angle R$ **110°**

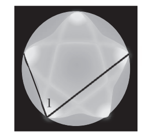


الاسم ________________ التاريخ ____________

8-4 تدريبات حل المسألة

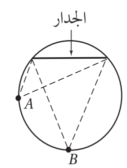
الزوايا المحيطية

1) **سيرك:** تُضاء حلبة السيرك الدائرية بخمسة مصابيح موضوعة على أبعاد متساوية أحدها عن الآخر حول الحلبة كما في الشكل أدناه، أوجد $m\angle 1$، ووضِّح إجابتك.



$72°$: لأن الدائرة قسمت إلى خمسة أقواس زاوية كلٍّ منها $\frac{360°}{5} = 72°$ ، $\angle 1$ زاوية محيطية تقابل قوسين من الأقواس الخمسة قياس كلٍّ منهما $72°$؛ أي أن: $m\angle 1 = 72°$

2) **مجال الرؤية:** يبيّن الشكل أدناه منظرًا علويًّا لشخصين يقفان أمام جدار مستطيلٍ عالٍ جدًّا، ويمثل الجدار وترًا في دائرة تمرُّ بموقعَي الشخصين، أيّ الشخصين حجب الجدار عنه قدرًا أكبر من مجال رؤيته الأفقية؟

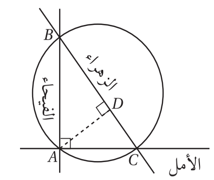


لا أحد: كلاهما متساويان في مقدار مجال الرؤية المحجوبة عنهما، فكلاهما يقفان عند زاويتين محيطتين على نفس القوس، وبالتالي تكونان متساويتين.

3) **مُعيَّن:** يحاول عبد الله أن يرسم دائرةً تُحيط بمعينٍ ليس مربعًا، ولكنه يجد صعوبةً في ذلك، فهل تستطيع أن تساعده؟ فسّر إجابتك.

لا؛ لأنه من المستحيل عمل ذلك؛ لأن الزوايا المتقابلة في المعيّن تكون متطابقة، فإذا كان المعيّن محاطًا بدائرة، فإن مجموع قياسَي كل زاويتين متقابلتين يساوي $180°$، وهذا يحتّم أن تكون كلّ واحدة من زواياه $90°$، والمعين ذو الزوايا القائمة يكون مربعًا.

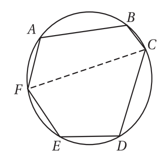
4) **شوارع:** في الشكل أدناه، البُعد بين نقطة تقاطع شارعَي الزهراء والفيحاء وتقاطع شارعي الزهراء والأمل، يساوي ثلاثة كيلومتراتٍ.



ما بُعدُ نقطة تقاطع شارعي الفيحاء والأمل عن نقطة منتصف القطعة المستقيمة التي تصل بين نقطتي تقاطع شارعَي الفيحاء والزهراء وتقاطع شارعي الأمل والزهراء؟ ووضِّح إجابتك.

$1.5\,km$ ؛ بما أن $\angle A$ قائمة، فإن $\angle BDC$ زاوية مستقيمة، إذن $\angle BDC$ زاوية مركزية في الدائرة التي مركزها D،
أي أن $\overline{AD} = \overline{BD}$
إذن $AD = 1.5\,km$

5) **المضلع السداسي المحاط بدائرة:** ستبرهن أن مجموع قياسات الزوايا الثلاث الداخلية غير المتتالية في المضلع السداسي المحاط بدائرة يساوي $360°$



a) ما العلاقة بين $\angle A$ و $\angle BCF$؟ **متكاملتان**
وما العلاقة بين $\angle E$ و $\angle DCF$؟ **متكاملتان**

b) أثبت أن: $m\angle A + m\angle BCD + m\angle E = 360°$.

$= m\angle A + m\angle BCD + m\angle E$

$= m\angle A + (m\angle BCF + m\angle DCF) + m\angle E$

$= (m\angle A + m\angle BCF) + (m\angle DCF + m\angle E)$

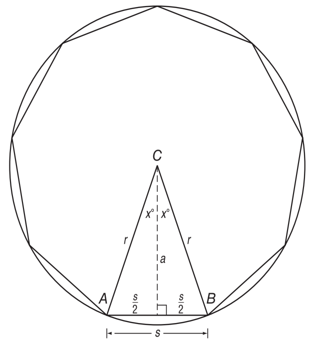
$= 180° + 180° = 360°$

الاسم ________________ التاريخ ____________

8-4 التدريبات الإثرائية

صيغ للمضلَّعات المنتظمة:

افترض أن مضلّعًا منتظمًا عدد أضلاعه n محاط بدائرة نصف قطرها r، والشكل أدناه يبيّن أحد المثلثات المتطابقة الضلعين المتكونة من توصيل نهايتي أحد أضلاع المضلّع المنتظم بمركز الدائرة C، وفي هذا الشكل، s هي طول ضلع المضلّع المنتظم و a طول العمود النازل من C على $\overline{AB}$.



استعمل معلوماتك المتعلقة بالمثلثات والنسب المثلثية لحل المسائل الآتية:

1) أوجد صيغةً تعبّر عن x بدلالة عدد الأضلاع n.

$$x = \left(\frac{180}{n}\right)°$$

2) أوجد صيغةً تعبّر عن s بدلالة n و r، مستعملًا النسب المثلثية.

$$s = 2r\sin\left(\frac{180}{n}\right)°$$

3) أوجد صيغةً تعبّر عن a بدلالة n و r، مستعملًا النسب المثلثية.

$$a = r\cos\left(\frac{180}{n}\right)°$$

4) أوجد صيغةً تعبّر عن محيط المضلّع المنتظم، بدلالة n و r.

$$P = 2nr\sin\left(\frac{180}{n}\right)°$$

الاسم ______________ التاريخ ______________

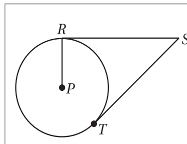
8-5 تدريبات إعادة التعليم

المماسات

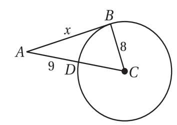
المماسات: مماس الدائرة

المماس هو مستقيم يقع في المستوى نفسه الذي تقع فيه الدائرة، ويقطعها في نقطةٍ واحدةٍ فقط، تسمّى **نقطة التماس**، وهنالك علاقات مهمة عدة تتعلق بالمماسات.

المماس المشترك مستقيم أو نصف مستقيم أو قطعة مستقيمة تمس دائرتين واقعتين في المستوى نفسه.

8.10	يكون المستقيم مماسًّا للدائرة في المستوى نفسه، إذا وفقط إذا كان عموديًّا على نصف القطر المار بنقطة التماس.	إذا كان $\overline{RP} \perp \overline{RS}$ ، فإن $\overline{RS}$ مماس لـ$\odot P$، وإذا كان $\overline{SR}$ مماسًّا لـ$\odot P$، فإن $\overline{RS} \perp \overline{RP}$	
8.11	إذا رسمت قطعتان مستقيمتان مماستان لدائرة من نقطة خارجها، فإنهما متطابقتان.	إذا كان $\overline{ST}$ و $\overline{SR}$ مماسين لـ$\odot P$، فإن $\overline{SR} \cong \overline{ST}$.	

مثال $\overline{AB}$ مماس لـ$\odot C$ عند B، أوجد قيمة x.



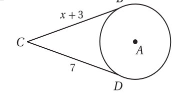
$\overline{AB}$ مماس لـ$\odot C$،وعليه فإن $\overline{AB}$ يعامد نصف القطر $\overline{BC}$. $\overline{CD}$ نصف قطر، إذن $CD = 8$ و$AC = 9 + 8 = 17$، وباستعمال نظرية فيثاغورس مع المثلث القائم ΔABC ينتج أن:

$(AB)^2 + (BC)^2 = (AC)^2$	نظرية فيثاغورس
$x^2 + 8^2 = 17^2$	بالتعويض
$x^2 + 64 = 289$	بالتبسيط
$x^2 = 225$	بطرح 64 من الطرفين
$x = 15$	بأخذ الجذر التربيعي الموجب للطرفين

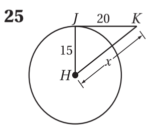
تمارين

أوجد قيمة x، مفترضًا أن القطع المستقيمة التي تبدو كأنها مماسات للدائرة هي مماسات فعلًا، مقرّبًا إجابتك إلى أقرب جزء من مئة إذا لزم ذلك:

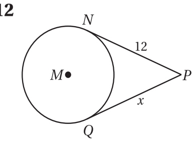
1) **4**



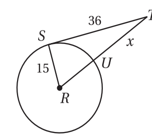
2) **25**



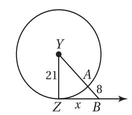
3) **12**



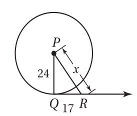
4) **39**



5) **20**



6) **$\sqrt{865} \approx 29.41$**



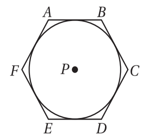
الاسم ______________ التاريخ ______________

8-5 تدريبات إعادة التعليم (تتمة)

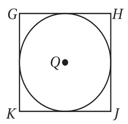
المماسات

المضلّعات المُحيطة بدائرة:

يكون المضلّع مُحيطًا بدائرة، إذا كانت جميع أضلاعه مماسات للدائرة.

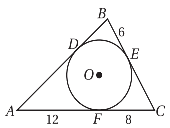


السداسي $ABCDEF$ محيط بـ$\odot P$.
FA , EF, DE ,CD ,BC , AB مماسات لـ$\odot P$.



المربع $GHJK$ محيط بـ$\odot Q$.
KG, JK, JH , GH مماسات لـ$\odot Q$.

مثال ΔABC الموضح في الشكل المجاور محيط بـ$\odot O$.



أوجد محيط ΔABC.

ΔABC محيط بالدائرة $\odot O$، لذا فالنقاط D, E, F نقاط تماس.

إذن: $AD = AF, BE = BD, CF = CE$.

إذن محيط ΔABC يساوي:

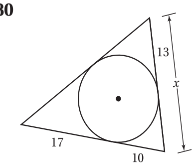
$AD + AF + BE + BD + CF + CE = 12 + 12 + 6 + 6 + 8 + 8 = 52$

المحيط يساوي 52 وحدةً.

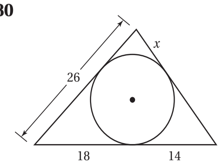
تمارين

إذا كان المضلع يحيط بالدائرة، فأوجد قيمة x في كلٍّ من الأشكال الآتية، ثم أوجد محيط المضلّع.

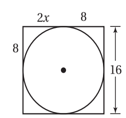
1) **23; 80**



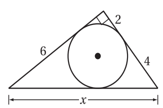
2) **8; 80**



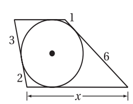
3) **4; 64**



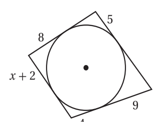
4) **10; 24**



5) **8; 24**



6) **6; 52**



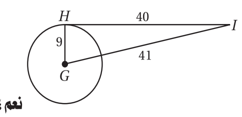
الاسم ________ التاريخ ________

8-5 تدريبات المهارات

المماسات

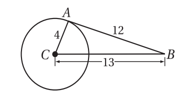
حدّد ما إذا كانت القطعة المستقيمة في كلٍّ من السؤالين الآتيين مماسًّا للدائرة المعطاة أم لا، وبرّر إجابتك.

1) $\overline{HI}$



نعم؛ $9^2 + 40^2 = 41^2$

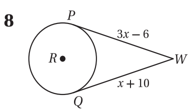
2) $\overline{AB}$



لا؛ $4^2 + 12^2 \neq 13^2$

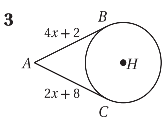
أوجد قيمة x في كلٍّ من الأسئلة الآتية، مفترضًا أن القطع المستقيمة التي تبدو كأنها مماسات للدائرة هي مماسات فعلًا، مقربًا إجابتك إلى أقرب جزء من عشرة، إذا لزم ذلك:

3)



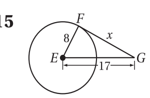
8

4)



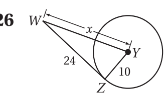
3

5)



15

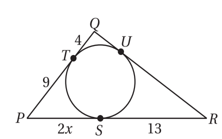
6)



26

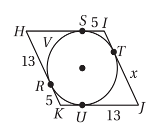
إذا كان المضلع يحيط بالدائرة، فأوجد قيمة x في كلٍّ من الشكلين الآتيين، ثم أوجد محيط المضلّع.

7)



$x = 4.5$ ؛ المحيط $= 52$ وحدة

8)



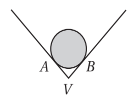
$x = 13$ ؛ المحيط $= 72$ وحدة

الاسم ________ التاريخ ________

8-5 تدريبات حل المسألة

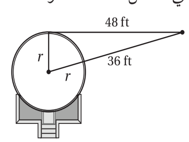
المماسات

1) **قنوات:** الجزء السفلي من قناة أسمنتية يشبه شكل الحرف "V"، وأثناء سير ياسر بمحاذاة القناة، سقط منه أنبوب أسطواني الشكل في القناة التي كانت جافة حينها فلامس جانبَي القناة. ويظهر الشكل أدناه مقطعًا عرضيًا للأنبوب في أسفل القناة. قارن بين الطولين AV وBV، ووضّح إجابتك.



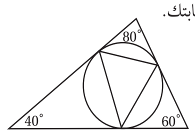
متساويان؛ لأن المماسان المرسومان من نقطة خارج الدائرة متطابقان.

2) **بركة سباحة:** يقف حمد على مسافة 36 ft من حافة بركة دائرية، إذا كانت المسافة بين حمد ونقطة التماس على البركة 48 ft كما في الشكل أدناه، فما طول نصف قطر البركة؟



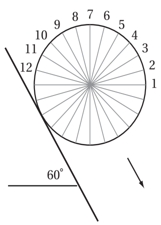
14 ft

3) **مثلثات:** رُسمت دائرة داخل مثلث قياسات زواياه °80، °60، °40، إذا رُسم من كل نقطة من نقاط التماس مثلثًا محاطًا بدائرة، كما في الشكل أدناه، فما قياسات زوايا المثلث الداخلي؟ وضّح إجابتك.



بما أن كل مماسين مرسومين من نقطة خارج دائرة متطابقان، إذن سينتج ثلاثة مثلثات، كلٌّ منها متطابق الضلعين سيُحيطون بالمثلث الداخلي، وباستعمال خصائص زوايا المثلث المتطابق الضلعين، ينتج أن قياسات زوايا المثلث الداخلي هي: °70، °60، °50

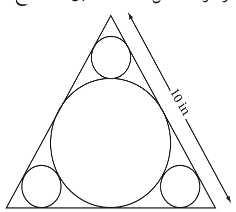
4) **دحرجة:** يتدحرج إطار على سطح مائل، ودعامات الإطار المرقمة من 1 إلى 12 تمثل أقطارًا على أبعاد متساوية بعضها عن بعض، كما في الشكل أدناه. أيُّ دعامة ستكون عموديّة على السطح المائل، عندما تكون الدعامة رقم 2 رأسيّة؟ وضّح إجابتك.



الدعامة رقم 10؛ لأنه لاحظ من الشكل أن الدعامة الرأسية هي الدعامة رقم 7، والدعامة على السطح المائل هي الدعامة رقم 3 بالدوران في اتجاه عقارب الساعة.

الدعامة الرأسية	7	8	9	10	11	12	1	2
الدعامة على السطح المائل	3	4	5	6	7	8	9	10

5) **تصميم:** رسم محمود التصميم المبيّن أدناه، والمكوّن من دوائر مرسومة داخل مثلث متطابق الأضلاع.



a) ما طول نصف قطر الدائرة الكبرى، مقربًا إلى أقرب جزء من مائة من البوصة؟ وضّح إجابتك.

2.89 in

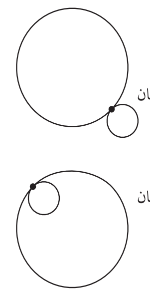
b) ما أطوال أنصاف أقطار الدوائر الصغرى، مقربًا إلى أقرب جزء من مائة من البوصة؟ وضّح إجابتك.

0.96 in

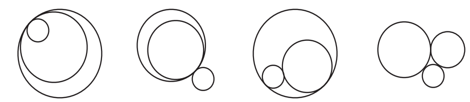
8-5 التدريبات الإثرائية

الدوائر المتماسّة:

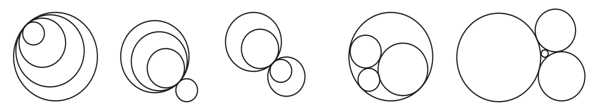
تكون الدائرتان المرسومتان في المستوى نفسه متماستين إذا اشتركتا في نقطة واحدة فقط، والدائرتان المتماستان غير المشتركتين في نقاط داخلية تسميان دائرتين متماستين من الخارج، وإذا كانت الدائرتان المتماستان مشتركتين في نقاط داخلية فتسميان دائرتين متماستين من الداخل، وتكون ثلاثة دوائر أو أكثر متماسة، إذا كانت كلّ دائرتين منها متماستين.



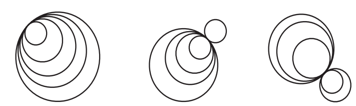
1) ارسم أشكالًا تمثل كلّ الأوضاع المحتملة لثلاث دوائر متماسة.



2) ارسم أشكالًا تمثل كلّ الأوضاع المحتملة لأربع دوائر متماسة.



3) ارسم أشكالًا تمثل كلّ الأوضاع المحتملة لخمس دوائر متماسة.

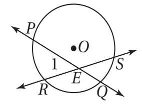
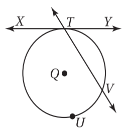


8-6 تدريبات إعادة التعليم

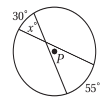
القاطع والمماس وقياسات الزوايا

التقاطع على الدائرة أو داخلها:

القاطع هو مستقيم يقطع الدائرة في نقطتين فقط، وترتبط قياسات الزوايا المتكونة من القاطع والمماس بالأقواس التي تقابلها.

8.12	إذا تقاطع قاطعان أو وتران داخل دائرة، فإن قياس الزاوية المتكونة من التقاطع يساوي نصف مجموع قياسَي القوس المقابل لهذه الزاوية، والقوس المقابل للزاوية التي تقابلها بالرأس.  $m\angle 1 = \frac{1}{2}(m\widehat{PR} + m\widehat{QS})$	8.13	إذا تقاطع مماس وقاطع عند نقطة التماس، فإن قياس كلّ زاوية متكونة من التقاطع يساوي نصف قياس القوس المقابل لها.  $m\angle XTV = \frac{1}{2} m\widehat{TUV}$ $m\angle YTV = \frac{1}{2} m\widehat{TV}$

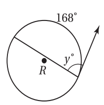
مثال 1 أوجد قيمة x في الشكل أدناه.



يتقاطع الوتران داخل الدائرة؛ لذا فإن قيمة x تساوي نصف مجموع قياسَي القوس المقابل لهذه الزاوية والقوس المقابل للزاوية المقابلة لها بالرأس.

$$x^\circ = \frac{1}{2}(30^\circ + 55^\circ)$$
$$= 42.5^\circ = \frac{1}{2}(85^\circ)$$

مثال 2 أوجد قيمة y في الشكل أدناه.



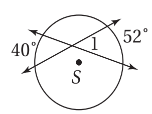
يتقاطع الوتر والمماس عند نقطة التماس؛ لذا فإن قياس الزاوية يساوي نصف قياس القوس المقابل لها.

$$y^\circ = \frac{1}{2}(168^\circ)$$
$$= 84^\circ$$

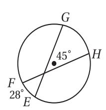
تمارين

أوجد كلًّا من القياسات الآتية:

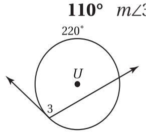
1) $m\angle 1$ **46°**



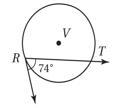
2) $m\widehat{GH}$ **62°**



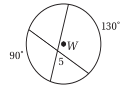
3) $m\angle 3$ **110°**



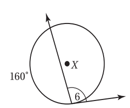
4) $m\widehat{RT}$ **148°**



5) $m\angle 5$ **70°**



6) $m\angle 6$ **100°**

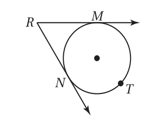
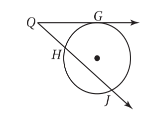
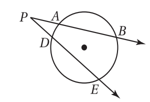


8-6 تدريبات إعادة التعليم (تتمة)

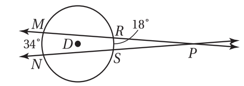
القاطع والمماس وقياسات الزوايا

التقاطع خارج الدائرة:

يمكن أن يتقاطع قاطعان أو قاطع ومماسٌ أو مماسان خارج الدائرة، ويرتبط قياس الزاوية المتكوّنة بقياسَي القوسين المقابلين لها.

8.14	إذا تقاطع قاطعان، أو قاطع ومماس، أو مماسان خارج دائرةٍ، فإنّ قياس الزاوية المتكونة يساوي نصف الفرق الموجب بين قياسَي القوسين المقابلين لها.		
	 مماسان $\overrightarrow{RN}, \overrightarrow{RM}$	 $\overrightarrow{QG}$ مماس و $\overrightarrow{QJ}$ قاطع	 $\overrightarrow{PB}$ و $\overrightarrow{PE}$ قاطعان
	$m\angle R = \frac{1}{2}(m\widehat{MTN} - m\widehat{MN})$	$m\angle Q = \frac{1}{2}(m\widehat{GJ} - m\widehat{GH})$	$m\angle P = \frac{1}{2}(m\widehat{BE} - m\widehat{AD})$

مثال أوجد $m\angle MPN$ في الشكل المجاور.



تكونت $\angle MPN$ من تقاطع قاطعين خارج الدائرة.

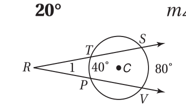
$$m\angle MPN = \frac{1}{2}(m\widehat{MN} - m\widehat{RS})$$
$$= \frac{1}{2}(34° - 18°)$$
$$= \frac{1}{2}(16°) = 8°$$

قياس $\angle MPN$ يساوي $8°$.

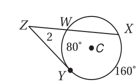
تمارين

أوجد كلًّا من القياسات الآتية:

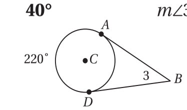
1) $m\angle 1$ **20°**



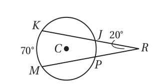
2) $m\angle 2$ **40°**



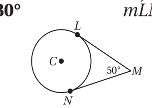
3) $m\angle 3$ **40°**



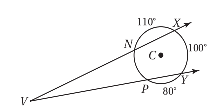
4) $m\widehat{JP}$ **30°**



5) $m\widehat{LN}$ **130°**



6) $m\angle V$ **15°**

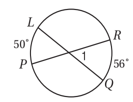


8-6 تدريبات المهارات

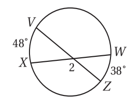
القاطع والمماس وقياسات الزوايا

أوجد كلًّا من القياسات الآتية:

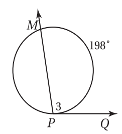
1) $m\angle 1$ **53°**



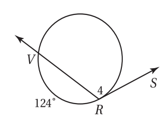
2) $m\angle 2$ **137°**



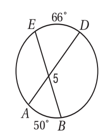
3) $m\angle 3$ **99°**



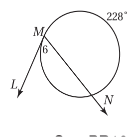
4) $m\angle 4$ **118°**



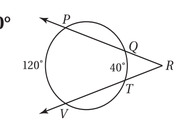
5) $m\angle 5$ **122°**



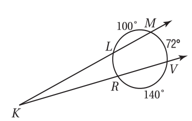
6) $m\angle 6$ **66°**



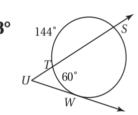
7) $m\angle R$ **40°**



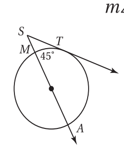
8) $m\angle K$ **12°**



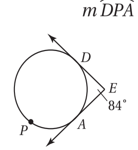
9) $m\angle U$ **48°**



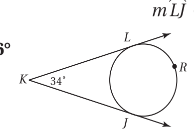
10) $m\angle S$ **45°**



11) $m\widehat{DPA}$ **264°**



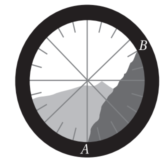
12) $m\widehat{LJ}$ **146°**



8-6 تدريبات حل المسألة

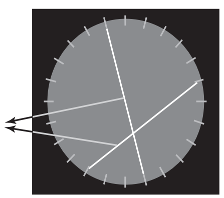
القاطع والمماس وقياسات الزوايا

1) تلسكوب: نظر محمد من خلال تلسكوب إلى منطقة جبلية، والشكل أدناه يبيّن ما رآه محمد. مستعينًا بالشكل أدناه، ما القيمة التقريبية لقياس الزاوية التي يصنعها جانب الجبل الممتد من A إلى B مع الأفق؟



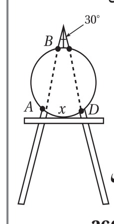
60°

2) رادار: رصد رادار مسارَيْ طائرتين، فظهر المساران على الشاشة كما في الشكل أدناه، فما قياس الزاوية الحادة بين مسارَي الطائرتين؟



67.5°

3) حامل اللوحة: يعمل فارس رسّامًا، فوضع لوحة رسم دائرية على حامل على شكل الحرف A، وثبّتها بدقة في وسط الحامل تمامًا، إذا كان قياس زاوية رأس الحامل 30° وقياس القوس BC يساوي 22°، فما قياس القوس AB؟



مدّ ضلعي رأس الحامل بحيث تقطع الدائرة عند النقطتين A و D، وبما أن القاطعين تقاطعا خارج الدائرة يكون

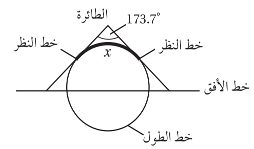
$$30° = \frac{1}{2}(x° - 22°)$$

$$60° = x° - 22$$

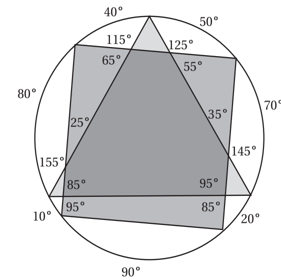
أو $x = 82°$، وبما أن الدائرة في وسط الحامل تمامًا فإن $m\widehat{AB}$ يساوي $m\widehat{CD}$

أي أن $m\widehat{AB} = \dfrac{360° - (82° + 22°)}{2} = 128°$

4) طيران: عند الطيران على ارتفاع 5 أميال، يصنع خطًا النظر إلى الأفق في اتجاهَي الشمال والجنوب زاويةً قياسها 173.7° تقريبًا، ما قياس الجزء الذي يمكننا رؤيته من ارتفاع 5 أميال من خط الطول الواقع تحت الطائرة مباشرة؟ **6.3°**



5) زجاج ملون: صمّم إبراهيم النافذة المبينة أدناه من الزجاج الملوّن، وقد استعمل في تصميمها مربعًا، ومثلثًا متطابق الأضلاع، محاطين بدائرة.



a) اكتب قياسات الزوايا الناتجة عن تقاطع أضلاع المثلث مع أضلاع المربع.

انظر الشكل

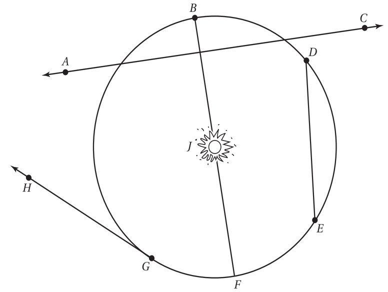
b) اكتب قياسات جميع الأقواس بالدرجات؟

انظر الشكل

8-6 التدريبات الإثرائية

الأجسام التي تدور في مدارات:

تدور الأرض حول الشمس في مدار إهليلجي. وبرغم ذلك يُعَدُّ هذا المدار دائريًّا في أحيان كثيرة.



استعمل الشكل أعلاه الذي يمثل مدار الأرض حول الشمس؛ لتسمّي المستقيم أو القطعة المستقيمة لكل وصف ممّا يأتي، وحدّد ما إذا كان نصف قطر أم قطرًا أم وترًا أم مماسًّا أم قاطعًا لهذا المسار:

1) مسار كويكب. $\overleftrightarrow{AC}$ **؛ قاطع**

2) المسافة بين موقع الأرض في يوليو وموقعها في أكتوبر. $\overline{DE}$ **؛ وتر**

3) المسافة بين موقع الأرض في ديسمبر وموقعها في يونيو. $\overline{BF}$ **؛ قطر**

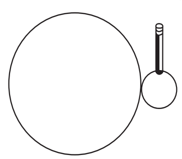
4) مسار صاروخ منطلق نحو زُحَل. $\overrightarrow{GH}$ **؛ مماس**

5) مسار شعاع الشمس. $\overline{JF}$ **؛** $\overline{JB}$ **نصف قطر**

6) إذا كان للكوكب قمر، فإن القمر يدور حول هذا الكوكب مثلما يدور الكوكب حول الشمس، ولرؤية مسار هذا القمر قصّ دائرتين من الورق المقوَّى، قطر إحداهما يساوي 4 in، وقطر الأخرى يساوي 1 in.

ألصق الدائرة الكبيرة على قطعة من الورق، ثم اثقب طرف الدائرة الصغيرة عند حافتها وأدخل رأس قلم رصاص في الثقب، ثم قم بدحرجة الدائرة الصغيرة حول الدائرة الكبيرة من الخارج، وسيرسم القلم مسار القمر حول الكوكب في أثناء ذلك. ويسمى هذا المدار الدويري، ولرؤية مسار الكوكب حول الشمس، اثقب الدائرة الصغيرة (تمثل هنا الكوكب) في مركزها، وأدخل فيه رأس القلم الرصاص، وقم بدحرجة الدائرة الصغيرة حول الكبيرة (تمثل الشمس)، وسيرسم القلم المسار المطلوب.

انظر إجابات الطلاب

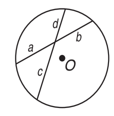


الاسم ____________ التاريخ ________

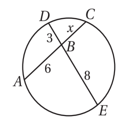
8-7 تدريبات إعادة التعليم

قطع مستقيمة خاصة في الدائرة

الأوتار المتقاطعة داخل الدائرة:

8.15	إذا تقاطع وتران في دائرة، فإن حاصل ضرب طولَي جزأَي الوتر الأول، يساوي حاصل ضرب طولَي جزأَي الوتر الثاني.	 $a \cdot b = c \cdot d$

مثال أوجد قيمة x مستعملًا الشكل المجاور.



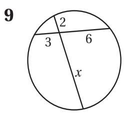
يتقاطع الوتران داخل دائرة. إذن،

$AB \cdot BC = EB \cdot BD$	النظرية 8.15
$6 \cdot x = 8 \cdot 3$	بالتعويض
$6x = 24$	بالضرب
$x = 4$	بقسمة الطرفين على 6

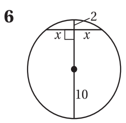
تمارين

أوجد قيمة x في كلٍّ ممّا يأتي، مقرّبة إلى أقرب جزء من عشرة.

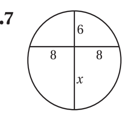
1) **9**



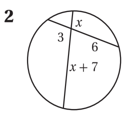
2) **6**



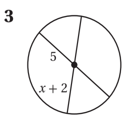
3) **10.7**



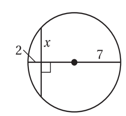
4) **2**



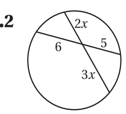
5) **3**



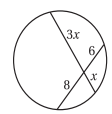
6) **4.9**



7) **2.2**



8) **4**



الصف: الأول الثانوي | 36 | الفصل 8: الدائرة

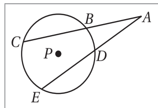
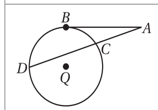
الاسم ____________ التاريخ ________

8-7 تدريبات إعادة التعليم (تتمة)

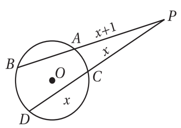
قطع مستقيمة خاصة في الدائرة

قطع مستقيمة تتقاطع خارج الدائرة:

توضّح النظريتان الآتيتان العلاقة بين أطوال أجزاء قاطعين أو قاطع ومماس، عندما يتقاطعان خارج الدائرة.

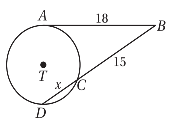
8.16	إذا رُسم قاطعان لدائرةٍ من نقطة خارجها، فإن حاصل ضرب طول القاطع الأول في طول الجزء الخارجي منه، يساوي حاصل ضرب طول القاطع الثاني في طول الجزء الخارجي منه.	$\overline{AC}$ و $\overline{AE}$ قاطعان للدائرة. $\overline{AB}$ و $\overline{AD}$ الجزءان الخارجيان من القاطعين. $AC \cdot AB = AE \cdot AD$	
8.17	إذا رُسم مماسٌّ وقاطع لدائرة من نقطة خارجها، فإن مربع طول المماس، يساوي حاصل ضرب طول القاطع في طول الجزء الخارجي منه.	$\overline{AB}$ مماس للدائرة، AD قاطع للدائرة. AC الجزء الخارجي من القاطع $\overline{AD}$. $AB^2 = AD \cdot AC$	

مثال 1 في الشكل المجاور، إذا علمت أن $PB = 9$ ، $PD = 12$، فما قيمة x ؟



$PB \cdot PA = PD \cdot PC$	النظرية 8.16
$9(x+1) = 12 \cdot x$	بالتعويض
$9x + 9 = 12x$	بالضرب
$9 = 3x$	بطرح 9 من كلا الطرفين
$3 = x$	بقسمة الطرفين على 3

مثال 2 $\overline{AB}$ مماس للدائرة في الشكل المجاور، أوجد قيمة x مقربًا إجابتك إلى أقرب عُشرٍ.



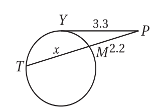
$\overline{AB}$ مماسٌّ، و $\overline{BD}$ قاطع، وجزء القاطع الخارجي هو $\overline{BC}$.

$AB^2 = BC \cdot BD$	النظرية 8.17
$18^2 = 15(15 + x)$	بالتعويض
$324 = 225 + 15x$	بالضرب
$99 = 15x$	بطرح 225 من الطرفين
$6.6 = x$	بقسمة الطرفين على 15

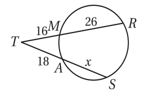
تمارين

أوجد قيمة x في كلٍّ من الأشكال الآتية، مفترضًا أن القطع المستقيمة التي تبدو مماسات للدائرة هي مماسات فعلًا، وقرّب إجابتك إلى أقرب عُشرٍ.

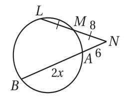
1) **2.8**



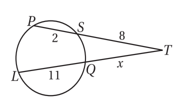
2) **19.3**



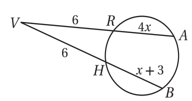
3) **7.7**



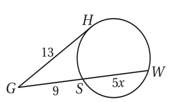
4) **5**



5) **1**



6) **2**



الصف: الأول الثانوي | 37 | الفصل 8: الدائرة

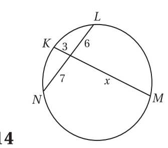
الاسم ______________ التاريخ ______________

8-7 تدريبات المهارات

قطع مستقيمة خاصة في الدائرة

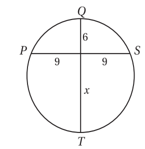
أوجد قيمة x في كلٍّ من الأشكال الآتية، مقربة إلى أقرب جزء من عشرة، مفترضًا أن القطع المستقيمة التي تبدو كأنها مماسات هي مماسات فعلًا.

1)



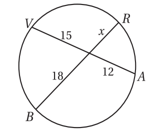
14

2)



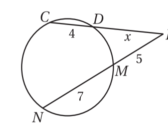
13.5

3)



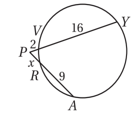
10

4)



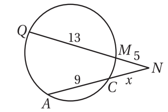
6

5)



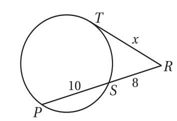
3

6)



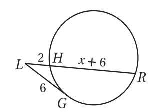
6

7)



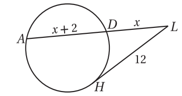
12

8)



10

9)



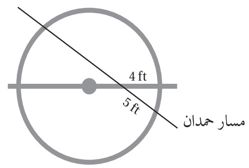
8

الاسم ______________ التاريخ ______________

8-7 تدريبات حل المسألة

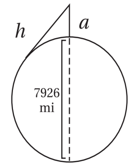
قطع مستقيمة خاصة في الدائرة

1) التزلج على الجليد: قام حمدان بالتزلج مارًّا خلال دائرة في حلبة التزلج، وكان مساره خلال الدائرة كما في الشكل أدناه، إذا علمت أن قطر الدائرة يساوي 15 ft، فما المسافة التي قطعها حمدان عبر هذه الدائرة أثناء تزلُّجه؟



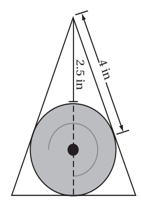
13.8 ft

2) فلك: افترض أن الأرض كروية تمامًا وقطرها يساوي 7926 ميلًا، فما طول خط الأفق h من ارتفاع a ميلًا عن الأرض؟



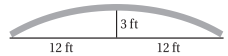
$$h = \sqrt{a(a + 7926)}$$

3) محور العجلة: يبين الشكل أدناه مقطعًا عرضيًّا لعجلة مثبتة بواسطة أنبوب معدني مثلث الشكل، يمتد كابح من رأس المثلث نحو العجلة، وعندما يبلغ مسافة 2.5 in يلامس محور العجلة، ما قطر المحور؟



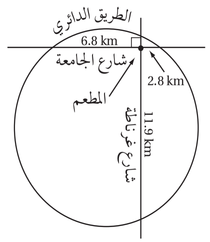
3.9 in

4) علم الآثار: أزال علماء الآثار الأتربة عن حائط دائري، ثم أجروا بعض القياسات فكانت على الصورة الموضحة في الشكل أدناه. بناءً على هذه المعطيات، ما طول نصف قطر الدائرة؟



25.5 ft

5) خدمة توصيل الطعام: يقع مطعم عند تقاطع شارع غرناطة مع شارع الجامعة في مدينة تحوي طريقًا سريعًا دائريًّا يمر حول ضواحي المدينة جميعها، طول نصف قطر الطريق الدائري 8 km، ويضع المطعم الخريطة المبينة أدناه على إعلانات يوزِّعها في المدينة.



a) كم يبعد المطعم عن تقاطع الطريق الدائري مع شارع غرناطة من جهة الشمال؟

1.6 km

b) إذا أنشأت طريقًا جديدًا على طول قطر الطريق الدائري، بحيث يمر بتقاطع شارع الجامعة مع شارع غرناطة، فاحسب المسافة الأقصر بين المطعم والطريق الدائري على هذا الطريق الجديد؟

1.29 km تقريبًا

الاسم ____________ التاريخ ________

8-7 التدريبات الإثرائية

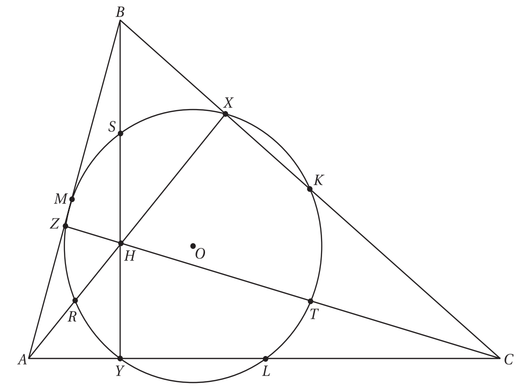
دائرة النقاط التسع:

يوضح الرسم أدناه حقيقةً مدهشةً حول المثلثات والدوائر. لأي ΔABC، توجد دائرة تحوي النقاط التسع الآتية جميعها:

(1) نقاط منتصفات أضلاع ΔABC وهي: M, L, K

(2) النقاط Z, Y, X، علمًا بأن $\overline{AX}, \overline{BY}$ و$\overline{CZ}$ ارتفاعات ΔABC.

(3) النقاط R, S, T، وهي نقاط منتصفات القطع المستقيمة التي تصل رؤوس ΔABC بملتقى ارتفاعاته H.



1) ارسم في ورقة منفصلة ΔABC المنفرج الزاوية، ثم أنشئ مستعملًا المسطرة والفرجار دائرةً تمرُّ بنقاط منتصفات الأضلاع. راعِ أن يكون الإنشاء دقيقًا، هل تحتوي دائرتك على النقاط الست الأخرى التي وُصفت أعلاه؟

نعم؛ انظر رسومات الطلاب

2) ارسم $\overline{RK}$، $\overline{SL}$ و $\overline{TM}$ في الشكل الذي أنشأته في السؤال 1، ماذا تلاحظ؟

تتلاقى هذه القطع المستقيمة الثلاث عند مركز دائرة النقاط التسع.

الاسم ____________ التاريخ ________

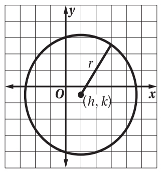
8-8 تدريبات إعادة التعليم

معادلة الدائرة

معادلة الدائرة:

الدائرة هي المحل الهندسي للنقاط المستوية التي تبعد بُعدًا ثابتًا عن نقطةٍ معلومةٍ، ويمكنك استعمال تعريف الدائرة لكتابة معادلتها.

الصيغة القياسية لمعادلة الدائرة	معادلة الدائرة التي مركزها (h, k)، وطول نصف قطرها r وحدة هي: $(x-h)^2+(y-k)^2=r^2$



مثال **اكتب معادلة الدائرة التي مركزها $(-1, 3)$ ونصف قطرها 6.**

استعمل المعادلة: $(x-h)^2+(y-k)^2=r^2$، وعوّض: $h=-1, k=3, r=6$

$(x-h)^2+(y-k)^2=r^2$ معادلة الدائرة

$[x-(-1)]^2+(y-3)^2=6^2$ بالتعويض

$(x+1)^2+(y-3)^2=36$ بالتبسيط

تمارين

اكتب معادلة الدائرة في كلٍّ من الحالات الآتية:

1) مركزها $(0, 0)$، ونصف قطرها 8.
$\mathbf{x^2+y^2=64}$

2) مركزها $(-2, 3)$، ونصف قطرها 5.
$\mathbf{(x+2)^2+(y-3)^2=25}$

3) مركزها $(2, -4)$، ونصف قطرها 1.
$\mathbf{(x-2)^2+(y+4)^2=1}$

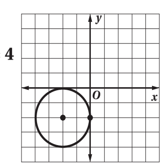
4) مركزها $(-4, -1)$، ونصف قطرها 2.
$\mathbf{(x+1)^2+(y+4)^2=4}$

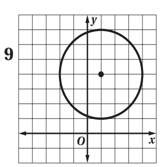
5) مركزها $(-2, -6)$، وقطرها 8.
$\mathbf{(x+2)^2+(y+6)^2=16}$

6) مركزها نقطة الأصل، وقطرها 4.
$\mathbf{x^2+y^2=4}$

7) مركزها $(3, -4)$، وتمر بالنقطة $(-1, -4)$.
$\mathbf{(x-3)^2+(y+4)^2=16}$

8) مركزها $(0, 3)$، وتمر بالنقطة $(2, 0)$.
$\mathbf{x^2+(y-3)^2=13}$

9)

$\mathbf{(x+2)^2+(y+2)^2=4}$

10)

$\mathbf{(x-1)^2+(y-4)^2=9}$

الاسم ________ التاريخ ________

8-8 تدريبات إعادة التعليم (تتمة)

معادلة الدائرة

تمثيل الدوائر بيانيًا:

إذا أُعطيت معادلة دائرة، فإنه يمكنك تحليلها لإيجاد معلومات تساعدك على تمثيلها بيانيًا في المستوى الإحداثي.

مثال أوجد مركز ونصف قطر الدائرة التي معادلتها: $(x+3)^2+(y-1)^2=9$ ، ثم مثّلها بيانيًا.

قارن كلّ مقدار جبري في المعادلةبنظيره في الصيغة القياسية؛ لإيجاد المركز (h, k) ونصف القطر r.

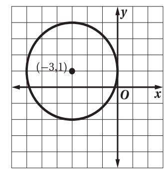
أعد كتابة معادلة الدائرة بالصيغة القياسية؛ لإيجاد المركز ونصف القطر بسهولة.

$$[x-(-3)]^2+(y-1)^2=3^2$$

$$\uparrow \quad \uparrow \quad \uparrow$$

$$(x-h)^2+(y-k)^2=r^2$$

لذا فإن: $h=-3, k=1, r=3$



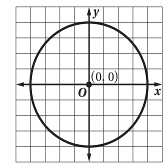
إذن مركز الدائرة هو $(-3, 1)$ ونصف قطرها 3 وحداتٍ.

ولتمثيلها عيّن المركز، وارسم الدائرة مستعملًا الفرجار بفتحة مقدارها 3 وحداتٍ من مربعات المستوى الإحداثي.

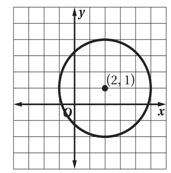
تمارين

أوجد مركز ونصف قطر الدائرة المعطاة معادلتها في كلٍّ ممّا يأتي، ثُم مثِّلها بيانيًا:

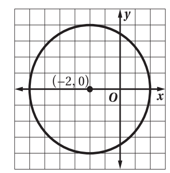
1) $x^2+y^2=16$ **$(0,0)$; $r=4$**



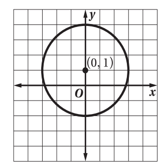
2) $(x-2)^2+(y-1)^2=9$ **$(2, 1)$; $r=3$**



3) $(x+2)^2+y^2=16$ **$(-2, 0)$; $r=4$**

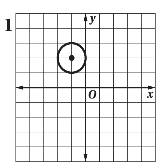


4) $x^2+(y-1)^2=9$ **$(0, 1)$; $r=3$**

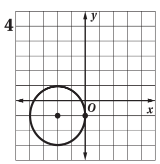


اكتب معادلة الدائرة المارة بالنقاط المعطاة في كلٍّ من السؤالين الآتيين ، ثم مثّلها بيانيًا:

5) $F(-2, 2), H(-1, 3), G(-1, 1)$ **$(x+1)^2+(y-2)^2=1$**



6) $R(-2,1), T(0,-1), S(-4,-1)$ **$(x+2)^2+(y+1)^2=4$**



الاسم ________ التاريخ ________

8-8 تدريبات المهارات

معادلة الدائرة

اكتب معادلة الدائرة في الحالات الآتية:

1) مركزها نقطة الأصل، ونصف قطرها 6

$x^2+y^2=36$

2) مركزها $(0,0)$، ونصف قطرها 2.

$x^2+y^2=4$

3) مركزها $(4,3)$، ونصف قطرها 9.

$(x-4)^2+(y-3)^2=81$

4) مركزها $(7, 1)$، وقطرها 24.

$(x-7)^2+(y-1)^2=144$

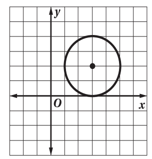
5) مركزها $(-1, -4)$، وتمر بالنقطة $(-2, 3)$.

$(x+4)^2+(y+1)^2=20$

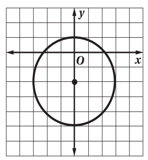
6) مركزها $(-2, 5)$، وتمر بالنقطة $(4, 0)$

$(x-5)^2+(y+2)^2=5$

7) **$(x-3)^2+(y-2)^2=4$**

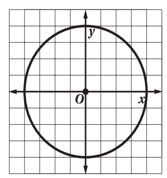


8) **$x^2+(y+2)^2=9$**

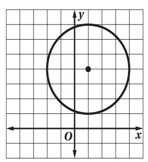


عيّن إحداثيّي مركز الدائرة المعطاة معادلتها في كلٍّ من السؤالين الآتيين، ثم مثّلها بيانيًا:

9) $x^2+y^2=16$ **$(0,0)$; $r=4$**

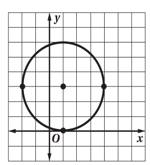


10) $(x-1)^2+(y-4)^2=9$ **$(1,4)$; $r=3$**

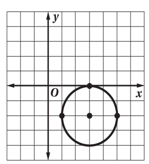


اكتب معادلة الدائرة المارة بالنقاط المعطاة في كلٍّ من السؤالين الآتيين، ثم مثّلها بيانيًا:

11) $A(-2,3), B(1,0), C(4,3)$ **$(x-1)^2+(y-3)^2=9$**



12) $F(3,0), G(5, -2), H(1, -2)$ **$(x-3)^2+(y+2)^2=4$**

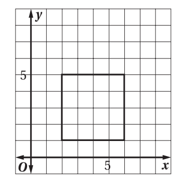


الاسم ______ التاريخ ______

8-8 تدريبات حل المسألة

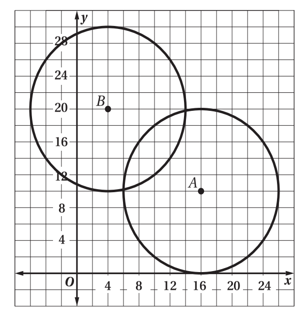
معادلة الدائرة

1) **تصميم:** يريد أحمد كتابة معادلة الدائرة المحاطة بالمربع الذي يظهر في الشكل أدناه، فما معادلة هذه الدائرة؟



$\mathbf{(x-4)^2+(y-3)^2=4}$

اتصالات: عند إجراء مكالمة باستعمال الجوال، فإن برج الاتصالات يتلقاها بحسب مدى استقبال دائريّ الشكل.



2) إذا كانت المعادلة: $(x-16)^2+(y-10)^2=100$ ، تمثل موقع برج الاتصالات (A) ومدى استقباله، فصف موقع البرج ومدى استقباله، ثم مثّل معادلة موقعه بيانيًا.

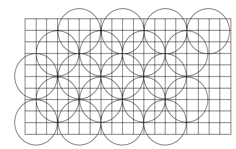
يقع البرج عند النقطة (16, 10)، ومدى استقباله 10 وحدات.

3) إذا تمّ بناء برج آخر للاتصالات (B) بموقع ومدى استقبال موضح على الشكل أعلاه، فاكتب معادلةً تمثل موقع البرج (B) ومدى استقباله.

$\mathbf{(x-4)^2+(y-20)^2=100}$

4) **ورق جدران:** يتكون تصميم لورق الجدران من دوائر يمكنك تمثيلها بالمعادلة: $(x-a)^2+(y-b)^2=4$، ارسم جزءًا من ورق الجدران في مستوًى إحداثيٍّ.

إجابة ممكنة:

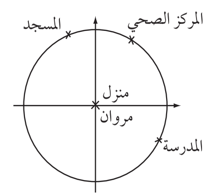


5) **مخطط هندسي:** رُسم مُخطط متنزه على ورق رسم بياني، ومُثّل محيط المتنزه بالمعادلة: $(x-3)^2+(y-7)^2=225$، إذا كانت كلّ وحدةٍ على المستوى البياني تمثل 10 ft، فما طول نصف قطر المتنزه الحقيقي؟ **150 ft**

6) **مسافة:** يبعد منزل مروان مسافات متساوية عن المسجد والمركز الصحي ومدرسته، والجدول أدناه يبيّن إحداثيات هذه المواقع الثلاثة على خريطة إحداثية، حيث تمثل كلّ وحدة على الخريطة 1 m.

الموقع	الإحداثيات
المسجد	(−78, 202)
المركز الصحي	(111, 193)
المدرسة	(202 , −106)

a) ما إحداثيات موقع منزل مروان؟ ارسم الدائرة على خريطة، وعيّن عليها المواقع الثلاثة والمنزل. **(7, −2)**



b) كم مترًا يبعد منزل مروان عن المواقع المذكورة؟ **221 m**

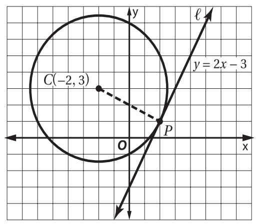
c) اكتب معادلة الدائرة التي تمر بالمسجد والمركز الصحي والمدرسة؟ $\mathbf{(x-7)^2+(y+2)^2=221^2}$

الاسم ______ التاريخ ______

8-8 التدريبات الإثرائية

معادلة الدائرة والمماس:

تذكّر أن الدائرة التي نصف قطرها r وإحداثيات مركزها (h,k)، هي التمثيل البياني للمعادلة: $(x-h)^2+(y-k)^2=r^2$، يمكنك استعمال هذه الفكرة وما تعرفه عن الدوائر والمماسات لإيجاد معادلة الدائرة، إذا عُلِم مركزها ومعادلة مستقيمٍ تمسّه.



اتّبع الخطوات الآتية لإيجاد معادلة الدائرة التي مركزها $C(-2, 3)$، وتمسّ المستقيم ℓ الذي معادلته $y = 2x - 3$ ، مستعملًا الشكل أعلاه .

1) أوجد ميل المستقيم ℓ الذي معادلته $y = 2x - 3$.

2

2) إذا كانت $\odot C$ التي مركزها $C(-2,3)$ تمسّ المستقيم ℓ عند النقطة P، فما ميل نصف القطر $\overline{CP}$ ؟

$\mathbf{-\frac{1}{2}}$

3) اكتب معادلة المستقيم الذي يحوي $\overline{CP}$.

$\mathbf{y=-\frac{1}{2}x+2}$

4) استعمل المعادلة التي حصلت عليها من السؤال 3، والمعادلة $y = 2x - 3$؛ لإيجاد نقطة تقاطع المستقيمين اللذين يمثلان هاتين المعادلتين . ما إحداثيات هذه النقطة؟

$\mathbf{P; (2,1)}$

5) أوجد طول نصف القطر $\overline{CP}$.

$\mathbf{\sqrt{20}=2\sqrt{5}}$

6) استعمل إحداثيات المركز $C(-2,3)$، وإجابتك عن السؤال 5 لكتابة معادلة $\odot C$.

$\mathbf{(x+2)^2+(y-3)^2=20}$