وزارة التربية والتعليم
Ministry of Education
المملكة العربية السعودية

الرياضيات

للصف الثاني الثانوي

مصادر المعلم للأنشطة الصفية

الفصل الثامن: حساب المثلثات

العبيكان
Obekan
McGraw Hill Education
يوزع مجانًا ولا يباع
١٤٣٤ هـ - ٢٠١٣ م

الرياضيات ـ الصف الثاني الثانوي

مصادر المعلم للأنشطة الصفية

أعدَّ النسخة العربية: شركة العبيكان للأبحاث والتطوير

Glencoe Mathematics © 2010

CHAPTER RESOURCE MASTERS

Algabra 2

www.obeikaneducation.com

McGraw Hill Education

العبيكان Obeikan

Arabic Edition is published by Obeikan under agreement with
The McGraw-Hill Companies, Inc. © 2008.

الطبعة العربية: مجموعة العبيكان للاستثمار
وفقًا لاتفاقيتها مع شركة ماجروهل© ٢٠٠٨م/ ١٤٢٩هـ.

بِسْمِ اللّٰهِ الرَّحْمٰنِ الرَّحِيمِ

المقدمة

عزيزي المعلم / عزيزتي المعلمة

يسرنا أن نقدم هذه المجموعة من التدريبات المساندة، التي تراعي الفروق الفردية بين الطلاب. حيث نطمح أن يساعدك التنوع في هذه التدريبات على الوصول إلى جميع الطلاب في الصف، مهما تباينت مستوياتهم التحصيلية.

وقد تم تخصيص صفحتين لتدريبات إعادة التعليم و صفحة واحدة لكل من التدريبات الأخرى لكل درسٍ من دروس كتاب الطالب، حيث يمكنك أن تكلف الطلاب حل صفحة التدريبات المقابلة لكل درس حسب مستوى كل منهم؛ سواء داخل الصف أم في المنزل. وليست هذه التدريبات بديلًا عن كتاب التمارين، ولكنها مساندة ومكملة له.

وهذه التدريبات هي:

تدريبات إعادة التعليم

تركِّز هذه التدريبات على محتوى الدروس في كتاب الطالب، وتقدمه بأسلوب تدريسي ومعالجة يختلفان عن كتابي الطالب والتمارين. وهي موجّهة إلى الطلاب ذوي المستوى دون المتوسط.

تدريبات المهارات

تركِّز هذه التدريبات على المهارات الحسابية الموجودة في الدرس . فتقدم تدريبات إضافية على مهارات الدرس وبعض المسائل التي تركز على تلك المهارات، وهي موجّهة إلى الطلاب ذوي المستوى المتوسط.

تدريبات حل المسألة

تأتي هذه التدريبات انطلاقًا من اهتمام هذه المناهج بحلّ المسألة، حيث تم تخصيصها لتقديم تدريبات إضافية على حل المسألة ترتبط بكل درس من دروس كتاب الطالب. وهي موجهة إلى جميع الطلاب على اختلاف مستوياتهم التحصيلية.

التدريبات الإثرائية

تساعد هذه التدريبات الإثرائية على التوسع في مفاهيم الدرس، كما تؤدي إلى توسيع مدارك الطلاب حول تعلُّم الرياضيات بشكل عام. وهذه التدريبات موجهة إلى الطلاب ذوي المستوى ضمن المتوسط وفوق المتوسط.

الفهرس

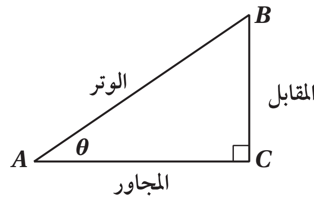
الاسم: ________________________ التاريخ: ____________

8-1 تدريبات إعادة التعليم

الدوال المثلثية في المثلثات القائمة الزاوية

الدوال المثلثية للزوايا الحادة : يُعرَّفُ **حساب المثلثات** بأنه دراسة العلاقة بين زوايا المثلث القائم الزاوية وأضلاعه. **والدالة المثلثية** تعرَّف من **النسبة المثلثية** بين طولَي ضلعين في المثلث القائم الزاوية.

الدوال المثلثية في المثلثات القائمة الزاوية



إذا كانت θ تمثل قياس زاوية حادة في مثلث قائم الزاوية، فإن الدوال المثلثية الست تعرَّف بدلالة الوتر والضلع المقابل والضلع المجاور كما يأتي:

$\cos\theta$ (جيب تمام θ) $= \dfrac{\text{المجاور}}{\text{الوتر}}$ $\sin\theta$ (جيب θ) $= \dfrac{\text{المقابل}}{\text{الوتر}}$

$\cot\theta$ (ظل تمام θ) $= \dfrac{\text{المجاور}}{\text{المقابل}}$ $\tan\theta$ (ظل θ) $= \dfrac{\text{المقابل}}{\text{المجاور}}$

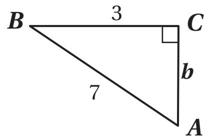
$\csc\theta$ (قاطع تمام θ) $= \dfrac{\text{الوتر}}{\text{المقابل}}$ $\sec\theta$ (قاطع θ) $= \dfrac{\text{الوتر}}{\text{المجاور}}$

مثال

ABC **مثلث قائم الزاوية فيه** $\boldsymbol{\cos B = \frac{3}{7}}$ **، أوجد قيمة** $\boldsymbol{\tan B}$.

الخطوة 1: ارسم مثلثًا قائم الزاوية، وسمِّ إحدى زواياه الحادة B، وضع العدد 3 طولًا للضلع المجاور والعدد 7 طولًا للوتر.

الخطوة 2: استعمل نظرية فيثاغورس لإيجاد قيمة b .



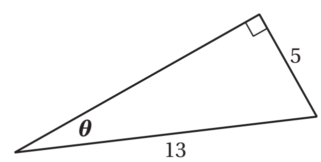
$a^2+b^2=c^2$	نظرية فيثاغورس
$3^2+b^2=7^2$	$a=3$ و $c=7$
$9+b^2=49$	بالتبسيط
$b^2=40$	بطرح 9 من الطرفين
$b=\sqrt{40}=2\sqrt{10}$	بأخذ الجذر التربيعي للطرفين.

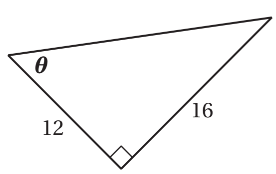
الخطوة 3: أوجد $\tan B$

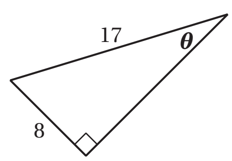
$\tan B = \dfrac{\text{المقابل}}{\text{المجاور}}$	دالة الظل
$\tan B = \dfrac{2\sqrt{10}}{3}$	بالتعويض عن المقابل بِـ $2\sqrt{10}$ وعن المجاور بِـ 3

تمارين:

أوجد قيم الدوال المثلثية الست للزاوية $\boldsymbol{\theta}$ في كلٍّ مما يأتي:

(1


(2


(3


ABC **مثلث قائم الزاوية في** $\boldsymbol{C}$

4) إذا كان $\tan A = \dfrac{7}{12}$، فأوجد $\cos A$.

5) إذا كان $\cos A = \dfrac{1}{2}$، فأوجد $\tan A$.

8-1 تدريبات إعادة التعليم

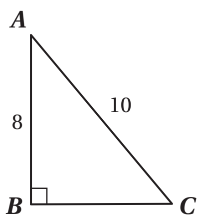
(تتمة)

الدوال المثلثية في المثلثات القائمة الزاوية

استعمال الدوال المثلثية : يمكنك استعمال الدوال المثلثية، لإيجاد أطوال الأضلاع وقياسات الزوايا المجهولة في مثلث قائم الزاوية، ويمكن إيجاد قياسات الزوايا باستعمال معكوس الجيب، ومعكوس جيب التمام، ومعكوس الظل.

مثال **أوجد قياس $\angle C$، مقرّبًا الإجابة إلى أقرب جزء من عشرة.**

بما أنك تعرف طول الضلع المقابل للزاوية C وطول الوتر؛ لذا استعمل دالة الجيب.



$\sin C = \frac{\text{المقابل}}{\text{الوتر}}$ دالة الجيب

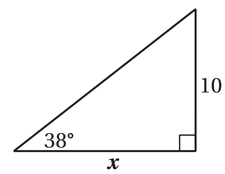
$\sin C = \frac{8}{10}$ بالتعويض عن المقابل بـ 8، وعن الوتر بـ 10.

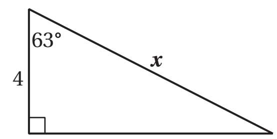
$\sin^{-1} \frac{8}{10} = m\angle C$ معكوس الجيب

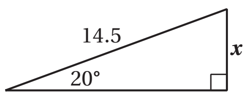
$53.1^\circ \approx m\angle C$ باستخدام الآلة الحاسبة

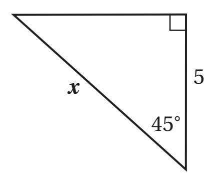
تمارين

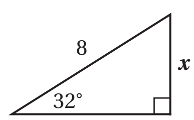
استعمل دالةً مثلثيةً لإيجاد قيمة x في كلٍّ مما يأتي. قرِّب إلى أقرب جزء من عشرة:

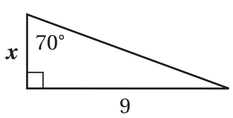
(1


(2


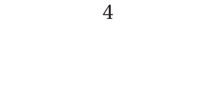
(3


(4


(5


(6


أوجد قيمة x، قرِّب إلى أقرب جزء من عشرة.

(7


(8

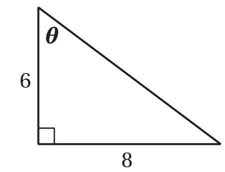
(9

8-1 تدريبات المهارات

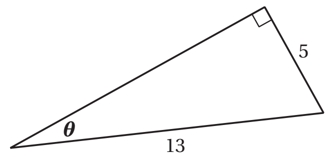
الدوال المثلثية في المثلثات القائمة الزاوية

أوجد قيم الدوال المثلثية الست للزاوية θ في كلٍّ مما يأتي:

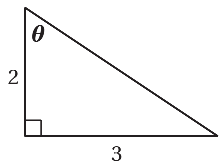
1)



2)



3)



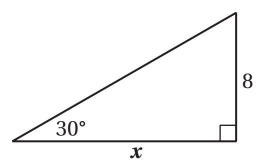
معتبرًا A زاوية حادة في مثلث قائم الزاوية:

4) إذا كان $\tan A = 3$ ، فأوجد $\sin A$.

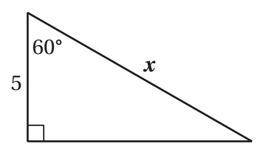
5) إذا كان $\sin A = \frac{1}{16}$ ، فأوجد $\cos A$.

استعمل دالةً مثلثيةً لإيجاد قيمة x في كلٍّ مما يأتي. قرِّب إلى أقرب جزء من عشرة:

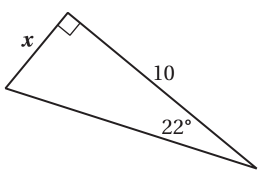
6)



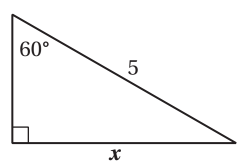
7)



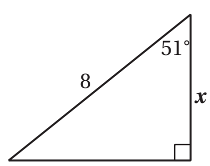
8)



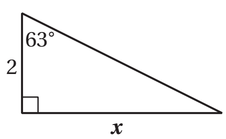
9)



10)

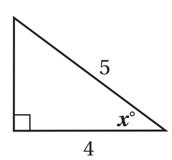


11)

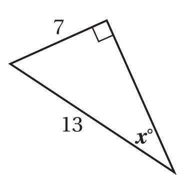


أوجد قيمة x. قرِّب إلى أقرب جزء من عشرة:

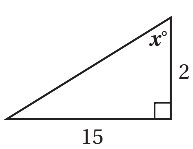
12)



13)



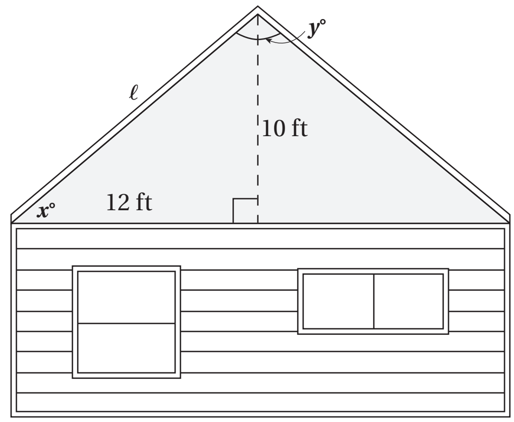
14)



8-1 تدريبات حل المسألة

الدوال المثلثية في المثلثات القائمة الزاوية

1) أسقف المنازل: بُني سقف منزل بمَيَلانٍ قدره $\frac{10}{12}$؛ بمعنى أن السقف يرتفع 10 ft مقابل كل 12 ft أفقيًّا. والشكل أدناه يعطي صورة جانبية للمنزل.



ما قياس الزاوية x عند قاعدة السقف؟

a) ما قياس الزاوية y عند قمة السقف؟

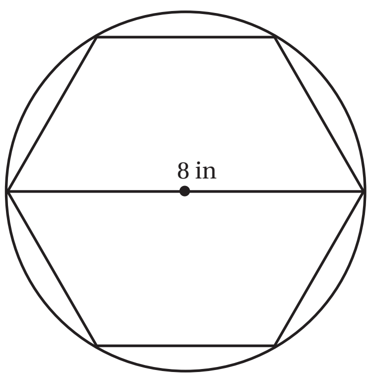
b) ما طول حافة السقف l؟

c) إذا كان طول المنزل 26 ft، فما المساحة الكلية للسقف؟

2) بنايات: وقف أحمد على بُعد 150 ft من قاعدة بناية، وقاس الزاوية المحصورة بين الخط الواصل من قمة البناية إلى عينه، والخط الأفقي المار بعينه فكانت $84°$، إذا كان ارتفاع عينه عن الأرض 5 ft فما ارتفاع البناية؟

3) مخطط بناء: قطعة أرض على شكل مثلث قائم الزاوية. أظهر مخطط لقطعة الأرض أن قياسات زوايا المثلث هي $40°$ ، $50°$ و $90°$، إذا كان طول وتر قطعة الأرض 30 m، فما أطوال الضلعين الآخرين لقطعة الأرض؟

4) هندسة: رُسم شكل سداسي منتظم داخل دائرة طول قطرها 8 in كما في الشكل.

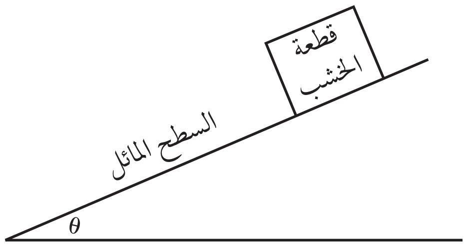


a) ما محيط الشكل السداسي؟

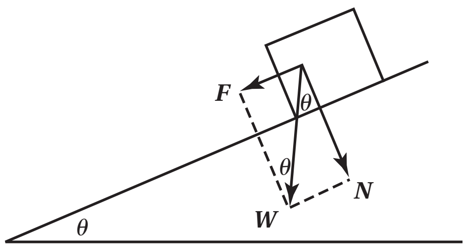
b) ما مساحة الشكل السداسي؟

8-1 التدريبات الإثرائية

زاوية الاحتكاك



إذا وضعت قطعة من الخشب على سطحٍ مائلٍ كما في الشكل المجاور، وكانت الزاوية بين السطح المائل والأرض الأفقية θ صغيرة جدًّا، فإن قطعة الخشب لن تتحرك من مكانها. وإذا ازداد قياس الزاوية θ، فإن قطعة الخشب سوف تتغلب على قوة الاحتكاك، وتتحرك منزلقةً علَى السطح المائل.



تسمى الزاوية θ عند لحظة بدء حركة قطعة الخشب زاوية الاحتكاك، وتعتمد زاوية الاحتكاك في السطوح المائلة الملساء على نوع المواد المصنوع منها السطح المائل والقطعة الخشبية. في حين أن الزاوية لا تعتمد على مساحة سطح التلامس بين القطعة والسطح المائل، ولا تعتمد أيضًا على كتلة القطعة. يبيِّن الشكل المجاور المتجهات التي تُستعمل في حساب معامل الاحتكاك، ويتغير هذا المعامل مع تغير المواد ويرمز إليه بالرمز μ.

لتكن كتلة القطعة W، وقوة الاحتكاك F، ورد الفعل N. فإن

$$F = W\sin\theta, \qquad N = W\cos\theta$$

$$F = \mu N \qquad \mu = \frac{\sin\theta}{\cos\theta} = \tan\theta$$

نوع المادة	معامل الاحتكاك μ
خشب على أرضية خشبية.	0.5
خشب على أرضية خرسانية.	0.5
إطار مطاطي على أرضية أسفلتية جافة.	1.0
إطار مطاطي على أرضية أسفلتية مبللة.	0.7

حُلّ كلًّا ممَّا يأتي:

1) بُني ممرٌّ خشبيٌّ مائل لنقل عربات خشبية إلى مخزن أحد المتاجر. ما قياس الزاوية التي يجب أن تكون بين الممرِّ والأرض الأفقية، حتى تتمكن العربات الخشبية من الانزلاق على الممرِّ بسرعةٍ ثابتةٍ؟

2) هل يمكن أن تنزلق قطعةٌ خشبيةٌ كتلتها 100 kg على أرضيةٍ خرسانيةٍ تميل بزاوية 20°؟ وضّح إجابتك.

3) إذا أبدلت القطعة الخشبية في التمرين 2 بقطعةٍ كتلتها 300 kg، فهل تتغير إجابتك؟ ولماذا؟

4) سيارة إطاراتها من المطاط، تقف على أرضية أسفلتية جافة. إذا انزلقت على الطريق من دون دفع، فما زاوية ميلان الطريق؟

5) هل تختلف إجابة التمرين 4 إذا بدأ المطر في النزول؟ فسِّر إجابتك.

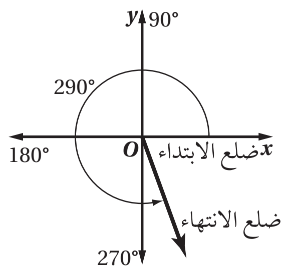
8-2 تدريبات إعادة التعليم

الزوايا وقياساتها

الزوايا المرسومة في الوضع القياسي: تُحدد الزاوية بنصفَي مستقيمين، ويُعطَى قياس الزاوية في الوضع القياسي بمقدار واتجاه الدوران من ضلع الابتداء (الضلع الذي ينطبق على المحور x) إلى ضلع الانتهاء، ويكون القياس موجبًا إذا كان الدوران عكس اتجاه عقارب الساعة، وسالبًا إذا كان الدوران في اتجاه دوران عقارب الساعة. والزوايا التي في الوضع القياسي ولها ضلع الانتهاء نفسه، تسمى زوايا مشتركة في ضلع الانتهاء.

مثال 1 **ارسم زاوية قياسها $290°$ في الوضع القياسي:**

يمثل محور y السالب دورانًا موجبًا بقياس $270°$. ولرسم زاوية قياسها $290°$، أدر ضلع الانتهاء $20°$ زيادة في الاتجاه المعاكس لدوران عقارب الساعة.



مثال 2 **أوجد زاويتين إحداهما بقياسٍ موجبٍ والأخرى بقياسٍ سالبٍ، ومشتركتين في ضلع الانتهاء مع الزاوية المعطاة في كل مما يأتي:**

a) $250°$

زاوية بقياس موجب : $250° + 360° = 610°$ بإضافة $360°$

زاوية بقياس سالب : $250° - 360° = -110°$ بطرح $360°$

b) $-140°$

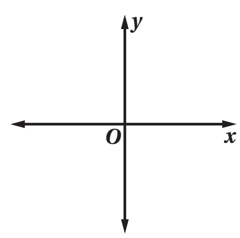
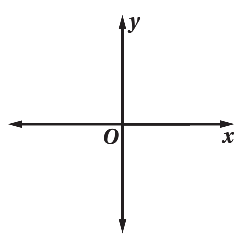
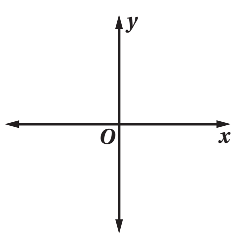
زاوية بقياس موجب : $-140° + 360° = 220°$ بإضافة $360°$

زاوية بقياس سالب : $-140° - 360° = -500°$ بطرح $360°$

تمارين

ارسم الزوايا المُعطى قياسها في كلٍّ ممَّا يأتي في الوضع القياسي:

1) $160°$ **2)** $280°$ **3)** $400°$

أوجد زاويتين إحداهما بقياس موجب والأخرى بقياس سالب، ومشتركتين في ضلع الانتهاء مع الزاوية المعطاة في كلٍّ مما يأتي:

4) $65°$ **5)** $-75°$ **6)** $230°$ **7)** $420°$

الاسم: ________________________ التاريخ: ____________

8-2 تدريبات إعادة التعليم

(تتمة)

الزوايا وقياساتها

التحويل من القياس بالدرجات إلى القياس بالراديان والعكس: يمكن أن تقاس الزوايا **بالدرجات** أو **بالراديان**، وهما وحدتان مرتبطتان بطول القوس. والراديان الواحد هو قياس زاوية θ في الوضع القياسي، يقطع ضلع الانتهاء لها قوسٌ من الدائرة طوله يساوي طول نصف قطر الدائرة، ويرتبط القياسان من خلال المعادلتين: $2\pi\ \text{rad} = 360^\circ$ و $\pi\ \text{rad} = 180^\circ$.

القياس بالراديان والدرجات	للتحويل من القياس بالراديان إلى القياس بالدرجات، اضرب قياس الزاوية بالراديان في $\dfrac{180^\circ}{\pi\ \text{rad}}$ للتحويل من القياس بالدرجات إلى القياس بالراديان، اضرب قياس الزاوية بالدرجات في $\dfrac{\pi\ \text{rad}}{180^\circ}$
طول القوس	طول القوس من الدائرة s المقابل لزاويةٍ مركزيةٍ قياسها θ بالراديان يساوي حاصل ضرب نصف القطر r في θ ؛ أي $s = r\theta$.

مثال 1 **حوّل قياس الزاوية المكتوبة بالدرجات إلى الراديان، والمكتوبة بالراديان إلى الدرجات:**

a) 45°

$$45^\circ = 45^\circ \cdot \frac{\pi\ \text{rad}}{180^\circ} = \frac{\pi}{4}\ \text{rad}$$

b) $\frac{5\pi}{3}$ rad

$$\frac{5\pi}{3} = \frac{5\pi}{3} \cdot \frac{180^\circ}{\pi} = 300^\circ$$

مثال 2 **دائرة طول نصف قطرها 5 cm، رُسمت فيها زاوية مركزية قياسها 135°. ما طول القوس المقابل لهذه الزاوية؟**

أوجد قياس الزاوية المركزية بالراديان.

$$135^\circ = 135^\circ \cdot \frac{\pi\ \text{rad}}{180^\circ} = \frac{3\pi}{4}$$

استعمل العلاقة بين طول نصف القطر وقياس الزاوية المركزية؛ لإيجاد طول القوس.

$s = r\theta$	صيغة طول القوس
$= 5 \cdot \frac{3\pi}{4}$	بالتعويض عن r بـ 5 وعن θ بـ $\frac{3\pi}{4}$
≈ 11.78	باستعمال الآلة الحاسبة

تمارين

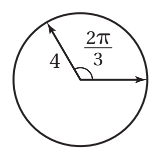
حوّل قياس الزاوية المكتوبة بالدرجات إلى الراديان، والمكتوبة بالراديان إلى الدرجات:

1) 140° 2) -260° 3) $-\frac{3\pi}{5}$

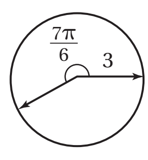
4) -75° 5) $\frac{7\pi}{6}$ 6) 380°

أوجد طول القوس المقابل للزاوية المركزية المعطى قياسها في كلٍّ من الدوائر الآتية. قرِّب إلى أقرب جزء من عشرة:

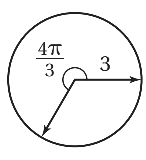
7)



8)



9)



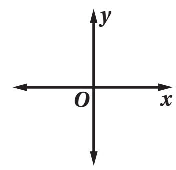
الاسم: ________________ التاريخ: ________

8-2 تدريبات المهارات

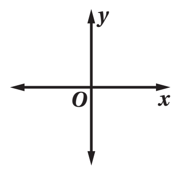
الزوايا وقياساتها

ارسم كلًّا من الزوايا المعطى قياسها في الوضع القياسي:

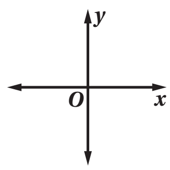
1) 185°



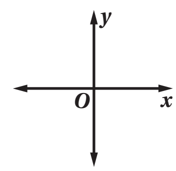
2) 810°



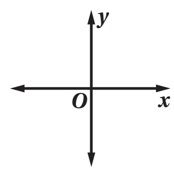
3) 390°



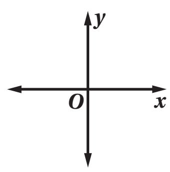
4) 495°



5) -50°



6) -420°



أوجد زاويتين إحداهما بقياسٍ موجبٍ، والأخرى بقياسٍ سالبٍ، مشتركتين في ضلع الانتهاء مع الزاوية المعطاة فيما يأتي:

7) 45°

8) 60°

9) 370°

10) -90°

11) $\frac{2\pi}{3}$

12) $\frac{5\pi}{2}$

13) $\frac{\pi}{6}$

14) $-\frac{3\pi}{4}$

حوّل قياس الزاوية المكتوبة بالدرجات إلى الراديان، والمكتوبة بالراديان إلى الدرجات:

15) 130°

16) 720°

17) 210°

18) 90°

19) -30°

20) -270°

21) $\frac{\pi}{3}$

22) $\frac{5\pi}{6}$

23) $\frac{2\pi}{3}$

24) $\frac{5\pi}{4}$

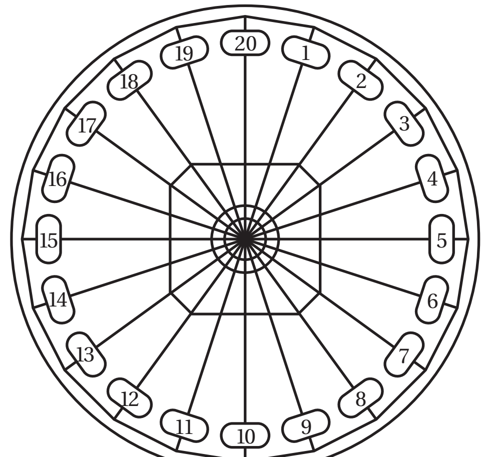
25) $\frac{-3\pi}{4}$

26) $-\frac{7\pi}{6}$

8-2 تدريبات حل المسألة

الزوايا وقياساتها

1) **مدينة الألعاب:** عجلة دوَّارة تحتوي على 20 مقعدًا مرقمة بالأعداد من 1 إلى 20 على التوالي، وتكمل هذه العجلة دورةً واحدةً حول مركزها كل 40 ثانيةً.



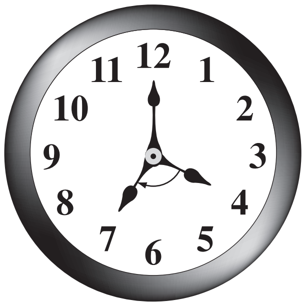
a) إذا كانت المقاعد على مسافات متساوية، فما قياس الزاوية المركزية التي يكوّنها المقعدان 1 و 8 بالدرجات؟

b) ما سرعة العجلة الدوّارة بالدورات في الدقيقة؟

c) ما سرعة العجلة الدوّارة بالراديان في الدقيقة؟

d) ركب طفل العجلة الدوّارة مدة 6 دقائق، فما قياس الزاوية التي دارها الطفل بالراديان؟

2) **زمن:** ما قياس الزاوية التي يكوّنها عقرب الساعات، عندما يدور من الساعة 4 مساءً، وحتى السابعة مساءً بالدرجات وبالراديان؟ وما طول القوس الذي يرسمه العقرب في هذا الزمن إذا كان طوله 6 in؟



3) **زمن:** ما قياس الزاوية التي يكوّنها عقرب الدقائق عندما يدور من الساعة 4 مساءً إلى الساعة 7 مساءً بالدرجات وبالراديان؟

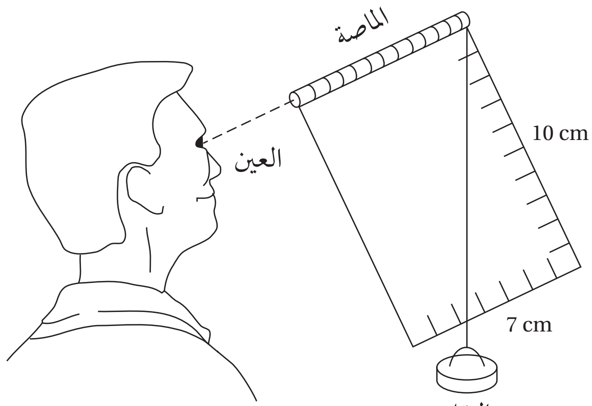
4) **كواكب:** تدور الأرض دورةً كاملةً حول محورها في 24 ساعة. ما الزمن الذي تستغرقه لتدور 150°؟ ويدور نبتون دورةً كاملةً حول محوره في 16 ساعةً؛ فما الزمن الذي يستغرقه ليدور 150°؟

8-2 التدريبات الإثرائية

صناعة الآلة ذات الربع واستعمالها

الآلة ذات الربع عبارة عن جهاز، ويمكن استعمالها لقياس ارتفاع الجسم. وتحتاج صناعة هذه الآلة إلى قطعة ورقيَّةٍ مقوَّاة مستطيلة الشكل، بُعداها $7\,cm \times 10\,cm$، وماصة عصير، ولاصق شفاف، وخيط طوله $20\,cm$، وثقل صغير يمكن ربطه بالخيط.

درِّج حافتين من حوافِّ الورقة بمسافات كلٌّ منها $1\,cm$ كما في الشكل أدناه، ثم ألصق الماصة بمحاذاة الحافة القصيرة للورقة، واربط الثقل بأحد طرفَي الخيط، وثبِّت طرف الخيط الآخر بركن الورقة العلوي كما في الشكل.



عند استعمال الآلة ذات الربع لقياس ارتفاع جسمٍ معيَّن، يجب قياس المسافة الأفقية بين قاعدة الجسم ومكان وقوف الشخص الذي يستعمل الآلة.

انظر إلى قمة الجسم الذي تريد قياس ارتفاعه من خلال الماصة، ولاحظ نقطة تقاطع الخيط الذي يعلق فيه الثقل مع التدريج الموجود عند الحافة القصيرة للورقة كما في الشكل، واستعمل المثلثات المتشابهة لإيجاد ارتفاع الجسم.

1) ارسم شكلًا لتوضيح كيفية استعمال المثلثات المتشابهة، وآلة ذات الربع لإيجاد ارتفاع جسم طويل.

استعمل آلة ذات الربع التي صنعتها لإيجاد ارتفاع كلٍّ ممَّا يأتي:

2) سارية العلم في مدرستك.

3) شجرة في حديقة مدرستك.

4) أعلى نقطة في واجهة بناء مدرستك.

5) عمود المرمى في ملعب كرة القدم.

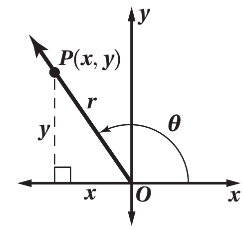
6) عمود كرة السلة.

8-3 تدريبات إعادة التعليم

الدوال المثلثية للزوايا

الدوال المثلثية للزوايا

الدوال المثلثية للزاوية θ في الوضع القياسي



لتكن θ زاويةً مرسومةً في الوضع القياسي، ولتكن النقطة $P(x, y)$ تقع على ضلع الانتهاء لها. باستعمال نظرية فيثاغورس، يمكن إيجاد قيمة r التي تمثل البعد بين نقطة الأصل والنقطة P.

$r = \sqrt{x^2 + y^2}$. فتكون الدوال المثلثية الست للزاوية θ معرفة كما يأتي:

$\sin\theta = \frac{y}{r}$ $\quad\cos\theta = \frac{x}{r}$ $\quad\tan\theta = \frac{y}{x}, x \neq 0$

$\csc\theta = \frac{r}{y}, y \neq 0$ $\quad\sec\theta = \frac{r}{x}, x \neq 0$ $\quad\cot\theta = \frac{x}{y}, y \neq 0$

مثال **إذا كان ضلع الانتهاء للزاوية θ المرسومة في الوضع القياسي يمر بالنقطة $(-5, 5\sqrt{2})$. فأوجد قيم الدوال المثلثية الست للزاوية θ..**

$r = \sqrt{x^2 + y^2}$ نظرية فيثاغورس

$= \sqrt{(-5)^2 + (5\sqrt{2})^2}$ $\quad x = -5, y = 5\sqrt{2}$

$= \sqrt{75} = 5\sqrt{3}$

استعمل قيم: $x = -5, y = 5\sqrt{2}$, $r = 5\sqrt{3}$، لكتابة قيم الدوال المثلثية الست.

$$\sin\theta = \frac{y}{r} = \frac{5\sqrt{2}}{5\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{6}}{3} \qquad \cos\theta = \frac{x}{r} = \frac{-5}{5\sqrt{3}} = -\frac{\sqrt{3}}{3} \qquad \tan\theta = \frac{y}{x} = \frac{5\sqrt{2}}{-5} = -\sqrt{2}$$

$$\csc\theta = \frac{r}{y} = \frac{5\sqrt{3}}{5\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{6}}{2} \qquad \sec\theta = \frac{r}{x} = \frac{5\sqrt{3}}{-5} = -\sqrt{3} \qquad \cot\theta = \frac{x}{y} = \frac{-5}{5\sqrt{2}} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

تمارين

أوجد قيم الدوال المثلثية الست للزاوية θ علمًا بأن ضلع الانتهاء للزاوية θ يمر بالنقطة المعطاة في كلٍّ مما يأتي:

1) $(8,4)$ **2)** $(4,4)$

3) $(0,4)$ **4)** $(6,2)$

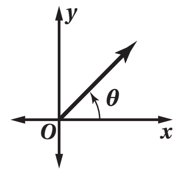
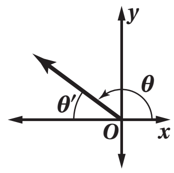
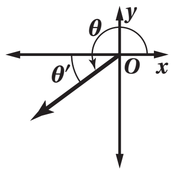
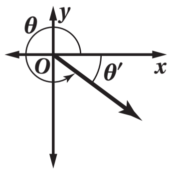
الاسم: ______________________ التاريخ: ____________

8-3 تدريبات إعادة التعليم

(تتمة)

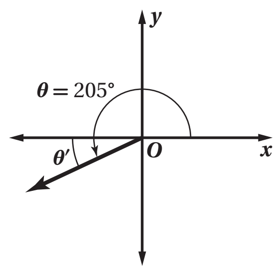
الدوال المثلثية للزوايا

الدوال المثلثية باستعمال الزوايا المرجعية : إذا كانت θ زاوية غير ربعية، ومرسومة في الوضع القياسي، فإن زاويتها المرجعية θ' هي الزاوية الحادة المحصورة بين ضلع انتهاء θ والمحور x.

	الربع الأول	الربع الثاني	الربع الثالث	الربع الرابع
قاعدة الزاوية المرجعية	 $\theta' = \theta$	 $\theta' = 180° - \theta$ $(\theta' = \pi - \theta)$	 $\theta' = \theta - 180°$ $(\theta' = \theta - \pi)$	 $\theta' = 360° - \theta$ $(\theta' = 2\pi - \theta)$

مثال 1 **ارسم زاوية قياسها $205°$ في الوقع القياسي، ثم أوجد زاويتها المرجعية.**

بما أن ضلع الانتهاء للزاوية يقع في الربع الثالث، فإن الزاوية المرجعية θ' هي: $205° - 180° = 25°$.



مثال 2 **استعمل زاويةً مرجعيةً لإيجاد القيمة الدقيقة لـ $\cos \frac{3\pi}{4}$.**

بما أن ضلع الانتهاء للزاوية $\frac{3\pi}{4}$ يقع في الربع الثاني، فإن الزاوية المرجعية θ' هي:

$$\pi - \frac{3\pi}{4} = \frac{\pi}{4}$$

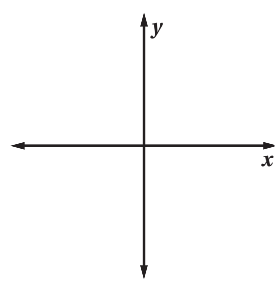
دالة جيب التمام في الربع الثاني سالبةٌ؛

إذن: $\cos \frac{3\pi}{4} = -\cos \frac{\pi}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$

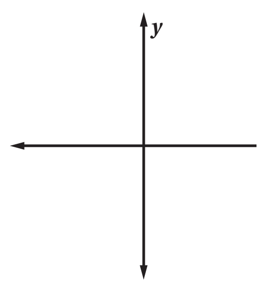
تمارين

ارسم كل زاوية مما يأتي في الوضع القياسي، ثم أوجد زاويتها المرجعية:

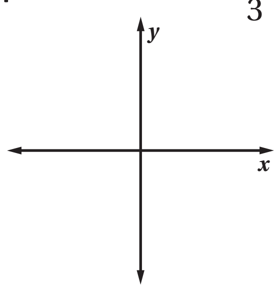
1) $155°$



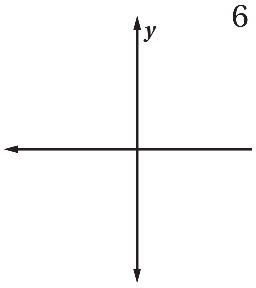
2) $230°$



3) $\frac{4\pi}{3}$



4) $-\frac{\pi}{6}$



أوجد القيمة الدقيقة لكل دالة مثلثية فيما يأتي:

5) $\tan 330°$

6) $\cos \frac{11\pi}{4}$

7) $\cot 30°$

8) $\csc \frac{\pi}{4}$

الاسم: ________________ التاريخ: ____________

8-3 تدريبات المهارات

الدوال المثلثية للزوايا

إذا كان ضلع الانتهاء للزاوية θ المرسومة في الوضع القياسي، يمرُّ بالنقطة المعطاة، فأوجد القيم الدقيقة للدوال المثلثية الست للزاوية θ في كلٍّ مما يأتي:

1) $(5,12)$

2) $(3,4)$

3) $(8,-15)$

4) $(-4,3)$

5) $(-9,-40)$

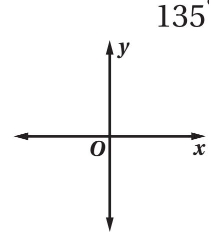
6) $(1,2)$

7) $(3,-9)$

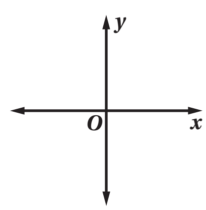
8) $(-8,12)$

ارسم كل زاوية مما يأتي في الوضع القياسي، ثم أوجد زاويتها المرجعية:

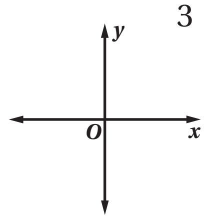
9) 135°



10) 200°



11) $\frac{5\pi}{3}$



أوجد القيمة الدقيقة لكل دالةٍ مثلثيةٍ مما يأتي:

12) $\sin 150^{\circ}$

13) $\cos 270^{\circ}$

14) $\cot 135^{\circ}$

15) $\tan(-30^{\circ})$

16) $\tan\frac{\pi}{4}$

17) $\cos\frac{4\pi}{3}$

18) $\cot(-\pi)$

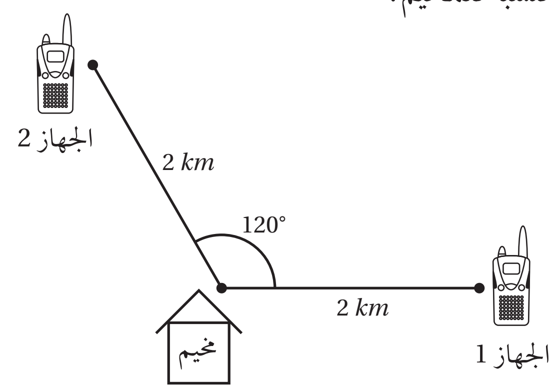
19) $\sin\left(-\frac{3\pi}{4}\right)$

الاسم: ________________ التاريخ: ________

8-3 تدريبات حل المسألة

الدوال المثلثية للزوايا

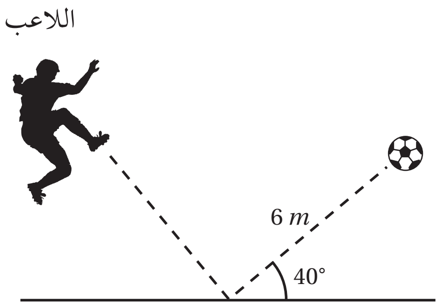
1) **أجهزة لاسلكية:** جهازا إرسال واستقبال لاسلكيان، يبعد كلٌّ منهما 2 km عن مخيم. وقياس الزاوية المحصورة بين الخطين الواصلَين من الجهازين إلى المخيم 120°. إذا كانت النقطة (2,0) تمثل موقع الجهاز الأول بالنسبة للمخيم، فما النقطة التي تمثل موقع الجهاز الثاني بالنسبة للمخيم؟



2) **ساعات:** إذا كان بندول ساعة حائط يتحرك ذهابًا وإيابًا على قوسٍ دائريَّةٍ، علمًا بأن قياس الزاوية التي يصنعها البندول يُعبَّر عنه بالعلاقة $\theta = 0.3\, cos\left(\frac{\pi}{2} + 5t\right)$، حيث t: الزمن بالثواني. أوجد قياسات الزوايا بالراديان المقابلة لقيم t: $0, 0.5, 1, 1.5, 2, 2.5, 3$.

3) **عجلة دوّارة:** ركب وليد عجلةً دوّارةً، نصف قطرها 60 m، وارتفاع أخفض عربةٍ عن الأرض فيها 5 m. إذا تحرَّكت العجلة عندما كان وليد في أخفض عربة، ودار بزاوية مقدارها 210.5°، ثم توقفت العجلة. فكم كان ارتفاع عربة وليدٍ عن الأرض عندما توقفت؟

4) **كرة قدم:** ركل لاعب كرة قدم الكرة في اتجاه حائطٍ، فارتدت الكرة عنه بزاويةٍ قياسها 40°. ما بُعد الكرة عن الحائط عندما قطعت 6 m في مسار ارتدادها؟



5) **طائرة ورقية:** المعادلة: $R = \frac{V_0^2\, sin2\theta}{32} + 15cos\theta$ تُعبّر عن المسافة التي تقطعها طائرة ورقية عند قذفها بسرعة ابتدائية V_0 قدم/ثانية بزاوية قياسها θ مع الأرض.

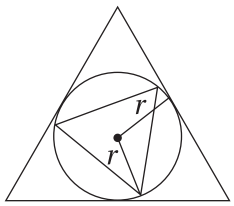
a) إذا قُذفت الطائرة بسرعة ابتدائية مقدارها 15 قدمًا/ثانية بزاوية قياسها 25°، فما المسافة التي ستقطعها؟

b) قُذفت طائرتان ورقيتان بسرعة ابتدائية قدرها 10 أقدام / ثانية لكلٍّ منهما، إحداهما بزاوية قياسها 15° والأخرى بزاوية قياسها 45°. فأيّتُهما ستقطع مسافة أكبر من الأخرى؟

8-3 التدريبات الإثرائية

مساحات المضلعات والدوائر

المضلع المنتظم هو مضلعٌ أطوال أضلاعه متساوية، وقياسات زواياه متساوية، ويمكن رسم المضلع المنتظم داخل دائرة ويمكن رسم دائرة بداخلة. ويمكن استعمال الصيغتين الآتيتين لحساب مساحة المضلع المنتظم الذي عدد أضلاعه (n)، والمرسوم داخل دائرة نصف قطرها (r) أو خارجها:



مساحة المضلع المرسوم داخل الدائرة: $A_I = \frac{nr^2}{2} \times \sin \frac{360^\circ}{n}$

مساحة المضلع المرسوم خارج الدائرة: $A_c = nr^2 \times \tan \frac{180^\circ}{n}$

استعمل الآلة الحاسبة لإكمال الجدول التالي بالنسبة لدائرة الوحدة (الدائرة التي طول نصف قطرها وحدة واحدة).

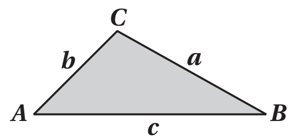
	عدد الأضلاع	مساحة المضلع الداخلي	مساحة الدائرة مطروحًا منها مساحة المضلع الداخلي	مساحة المضلع الخارجي	مساحة المضلع الخارجي مطروحًا منها مساحة الدائرة
(1	3	1.2990381	1.8425545	5.1961524	2.054597
(2	4				
(3	8				
(4	12				
(5	20				
(6	24				
(7	28				
(8	32				
(9	1000				

(10 ما العدد الذي تقترب منه مساحة كلٍّ من المضلع الداخلي والمضلع الخارجي؟

8-4 تدريبات إعادة التعليم

قانون الجيوب

إيجاد مساحة مثلث: مساحة المثلث تساوي نصف حاصل ضرب طولَي أيِّ ضلعين فيه في جيب الزاوية المحصورة بينهما.

مساحة المثلث	$A = \frac{1}{2}bc \sin A$ $A = \frac{1}{2}ac \sin B$ $A = \frac{1}{2}ab \sin C$ 

مثال **أوجد مساحة $\Delta\, ABC$ مقربة إلى أقرب جزء من عشرة.**

في $\Delta\, ABC$، $a=10, b=14, C=40^\circ$

$A=\frac{1}{2}\, a\, b \sin C$ صيغة مساحة المثلث

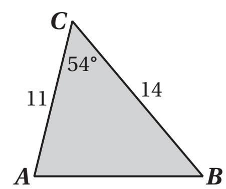
$=\frac{1}{2}(10)(14) \sin 40^\circ$ بالتعويض

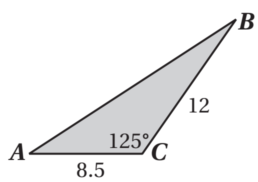
≈ 44.9951 بالتبسيط

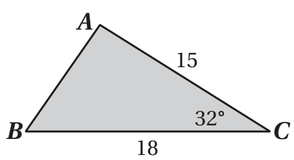
مساحة المثلث تساوي 45 وحدةً مربعةً تقريبًا.

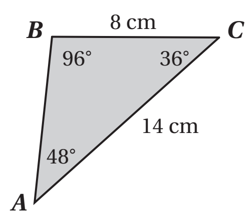
تمارين

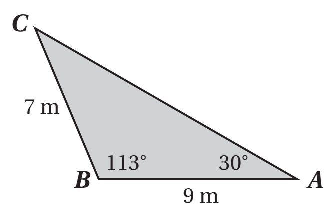
أوجد مساحة كلٍّ من المثلثات الآتية مقربًا إلى أقرب جزء من عشرة.

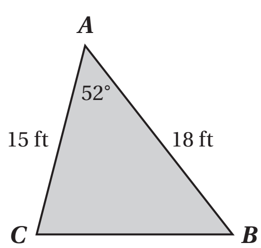
(1 

(2 

(3 

(4 

(5 

(6 

(7 $A = 20^\circ, b = 7\ cm, c = 4\ cm$

(8 $C=55^\circ, a=10\ m, b=15\ m$

(9 $B=42^\circ, a=3\ ft, c=9\ ft$

(10 $A=53^\circ, b=13\ in, c=15\ in$

(11 $C = 85^\circ, a = 12\ cm, b = 8\ cm$

الاسم: ______________ التاريخ: ______________

8-4 تدريبات إعادة التعليم

(تتمة)

قانون الجيوب

استعمال قانون الجيوب لحل المثلثات: يمكن استعمال قانون الجيوب لحلِّ أيِّ مثلثٍ، إذا عُلم فيه قياس زاويتين وطول الضلع المقابل لإحداهما، أو إذا عُلم طولا ضلعين فيه، وقياس الزاوية المقابلة لأحدهما.

قانون الجيوب	$\frac{\sin A}{a} = \frac{\sin B}{b} = \frac{\sin C}{c}$

<table>
<tr><td rowspan="2">المثلثات الممكن حلها بمعرفة طولي ضلعين وقياس الزاوية المقابلة لأحدهما.</td><td colspan="2">افرض أن قيمة كل من A, a, b للمثلث ABC معطاة.</td></tr>
<tr><td>إذا كانت A حادة فإن:
$a<b \sin A$ ⇐ لا يوجد حل
$a=b \sin A$ ⇐ يوجد حل واحد
$b>a>b \sin A$ ⇐ يوجد حلان
$a>b$ ⇐ يوجد حل واحد</td><td>إذا كانت A قائمة أو منفرجة فإن
$a\leq b$ ⇐ لا يوجد حل
$a>b$ ⇐ يوجد حل واحد</td></tr>
</table>

مثال حدد ما إذا كان للمثلث ABC حل واحد أم حلان أم ليس له حل، وأوجد الحلول مقربًا أطوال الأضلاع إلى أقرب جزءٍ من عشرةٍ، وقياسات الزوايا إلى أقرب درجة:

a) $A=48^\circ$, $a=11$, $b=16$

بما أن A حادة، أوجد قيمة $b \sin A$ وقارنها مع قيمة a.

$b \sin A=16 \sin 48^\circ \approx 11.89$ ، وبما أن $11<11.89$، فإنه لا يوجد حل للمثلث.

b) $A=34^\circ, a=6, b=8$

بما أن A حادة، أوجد قيمة $b \sin A$ وقارنها مع قيمة a؛ $b \sin A=8 \sin 34^\circ \approx 4.47$ ، وبما أن $8>6>4.47$، فإنه يوجد للمثلث حلان:

الحالة1: $\angle B$ حادة

استعمل قانون الجيوب لإيجاد B.

$$\frac{\sin B}{8}=\frac{\sin 34^\circ}{6}$$

$$\sin B\approx 0.7456$$

$$B\approx 48^\circ$$

قياس الزاوية C يساوي $180-(34^\circ+48^\circ)= 98^\circ$ تقريبًا،

استعمل قانون الجيوب مرةً أخرى لإيجاد قيمة c.

$$\frac{\sin 98^\circ}{c}\approx\frac{\sin 34^\circ}{6}$$

$$c\approx\frac{6 \sin 98^\circ}{\sin 34^\circ}$$

$$c\approx 10.6$$

الحالة2: $\angle B$ منفرجة

لإيجاد قيمة B يتعين إيجاد الزاوية المنفرجة التي جيبها 0.7456 وذلك بطرح 48° من 180°، إذن $B\approx 132^\circ$

قياس الزاوية C يساوي $180-(34+132)$، أي 14° تقريبًا.

استعمل قانون الجيوب لإيجاد قيمة c.

$$\frac{\sin 14^\circ}{c}\approx\frac{\sin 34^\circ}{6}$$

$$c\approx\frac{6 \sin 14^\circ}{\sin 34^\circ}$$

$$c\approx 2.6$$

تمارين

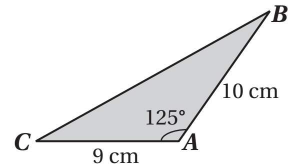
حدِّد ما إذا كان للمثلث ABC حل واحد أم حلان أم ليس له حل، وأوجد الحلول مقربًا أطوال الأضلاع إلى أقرب جزء من عشرة، وقياسات الزوايا إلى أقرب درجة.

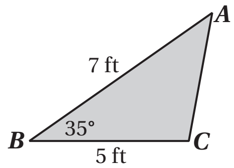
1) $A= 50^\circ, a =34, b =40$ 2) $A=24^\circ, a= 3, b =8$ 3) $A=125^\circ, a=22, b = 15$

8-4 تدريبات المهارات

قانون الجيوب

أوجد مساحة ΔABC إلى أقرب جزء من عشرة.

(1


(2


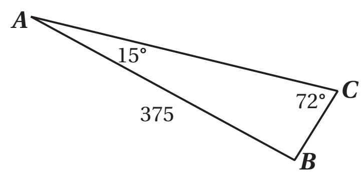
(3 $A = 35^\circ, b = 3 \text{ ft}, c = 7 \text{ ft}$

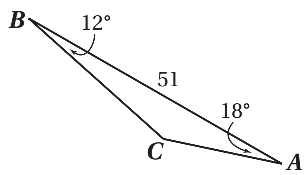
(4 $C = 148^\circ, a = 10 \text{ cm}, b = 7 \text{ cm}$

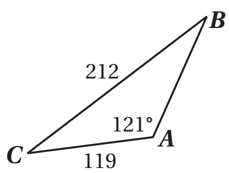
(5 $C = 22^\circ, a = 14 \text{ m}, b = 8\text{m}$

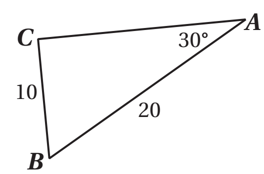
(6 $B = 93^\circ, c = 18 \text{ mi}, a = 42 \text{ mi}$

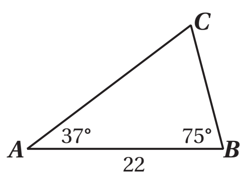
حُلّ كلًّا من المثلثات الآتية، وقرّب الأطوال إلى أقرب جزء من عشرة، وقياسات الزوايا إلى أقرب درجة:

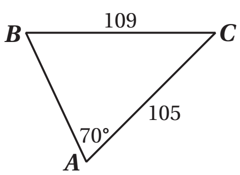
(7


(8


(9


(10


(11


(12


حدِّد ما إذا كان لكل مثلث مما يأتي حل واحد أم حلان أم ليس له حل، وأوجد الحلول مقربًا أطوال الأضلاع إلى أقرب جزءٍ من عشرةٍ، وقياسات الزوايا إلى أقرب درجة:

(13 $A = 30^\circ, a = 1, b = 4$

(14 $A = 30^\circ, a = 2, b = 4$

(15 $A = 30^\circ, a = 3, b = 4$

(16 $A = 38^\circ, a = 10, b = 9$

(17 $A = 78^\circ, a = 8, b = 5$

(18 $A = 133^\circ, a = 9, b = 7$

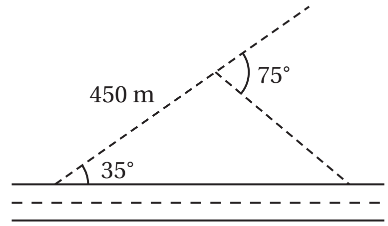
(19 $A = 127^\circ, a = 2, b = 6$

(20 $A = 109^\circ, a = 24, b = 13$

8-4 تدريبات حل المسألة

قانون الجيوب

1) **مشي:** يسير نواف في طريق مستقيم، فقرَّر أن يسير في ممرٍّ يصنع زاويةً قياسها $35°$ مع الطريق المستقيم، وبعد أن سار مسافة $450\ m$، استدار بزاويةٍ قياسها $75°$ درجةً عائدًا إلى الطريق المستقيم.

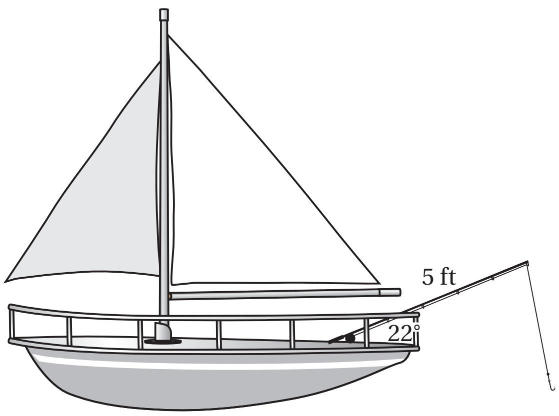


a) ما المسافة التي يتعيَّن أن يقطعها نوافٌ على هذا المسار ليعود إلى الطريق؟

b) كم سيكون بُعد علي عن نقطة الانطلاق عندما يعود إلى الطريق؟

2) **تسلق الصخور:** لاحظ أحد متسلِّقي الجبال في لحظةٍ معينةٍ أثناء تسلُّقه جدارًا صخريًّا أنه يستطيع رؤية قمة وقاع جبل مقابل له. ووجد أن زاوية انخفاض قاع الجبل $36°$ وزاوية ارتفاع قمة الجبل $42°$. إذا كان ارتفاع ذلك الجبل $2000\ ft$، وقاعدته على مستوى سطح البحر، فما ارتفاع المتسلِّق عن مستوى سطح البحر إلى أقرب قدمٍ؟

3) **صيد الأسماك:** وُضِعت عصا صنارة صيد سمك على سطح قاربٍ مرتكزةً على حافَّته بزاوية قياسها $22°$ مع سطح القارب. فإذا كان طول العصا $5\ ft$، وطول الخيط المعلقة به الصنارة $3\ ft$ من حافة العصا، وكانت حركة القارب تُسبب حركة للصنارة ذهابًا وإيابًا، فأوجد قياس الزاوية التي يجب أن يصنعها الخيط مع العصا، حتى تكون الصنارة على مستوى سطح القارب.



4) **كاميرات مراقبة:** وُضعت كاميرات مراقبة على سطح مبنى على بُعد مسافة معيَّنةٍ عن طريقٍ مستقيم. وكانت الكاميرات تدور عكس اتجاه عقارب الساعة بسرعة ثابتة تبلغ دورة واحدة في الدقيقة. وفي لحظة معينة كانت الكاميرا في مواجهة نقطة على الطريق، وتبعد عن الكاميرا $20\ m$. وبعد أربع ثوان كانت الكاميرا تواجه نقطة على بُعد $10\ m$ من النقطة الأولى على الطريق.

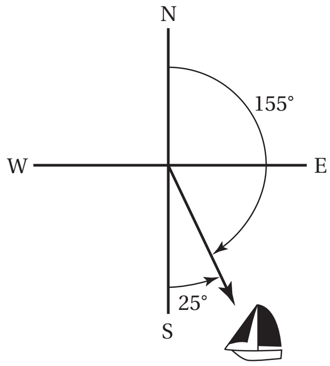
a) ما قياس الزاوية التي دارتها الكاميرا في 4 ثوانٍ؟

b) ما المسافة بين الكاميرا والطريق إلى أقرب جزءٍ من عشرةٍ من المتر؟

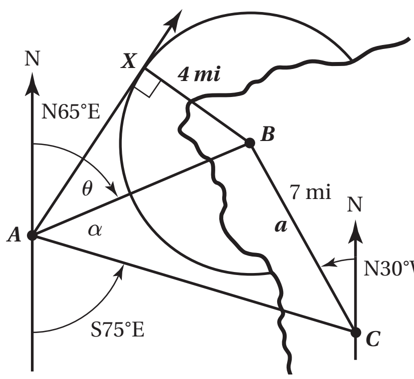
8-4 التدريبات الإثرائية

الملاحة

زاوية اتجاه القارب هي الزاوية التي يصنعها خط سيره مع اتجاه الشمال، ويمكن قياسها مع أي اتجاه من الاتجاهات الجغرافية الأربعة. وفي الشكل المجاور زاوية اتجاه القارب هي 155°، ويمكن القول بأن زاوية اتجاه القارب هي 25° شرق الجنوب.



مثال **يمكن رؤية المنارة B باتجاه $65°$ شرق الشمال ومئذنة مسجد C باتجاه $75°$ شرق الجنوب أيضًا من القارب A الذي في عرض البحر. وبناءً على الخريطة، فإن B تبعد 7 mi عن C باتجاه $30°$ غرب الشمال، وحتى لا يقترب القارب A من الشاطئ، أوجد الاتجاه الذي يجب أن يسير فيه، على أن يسير على بُعد 4 mi من B.**



في ΔABC:

$$\angle\alpha = 180^\circ - 65^\circ - 75^\circ = 40^\circ$$

$$\angle C = 180^\circ - 30^\circ - (180^\circ - 75^\circ)$$

$$= 45^\circ$$

$$a = 7\ (mi)$$

باستعمال قانون الجيوب

$$AB = \frac{a \sin C}{\sin \alpha} = \frac{7(\sin 45^\circ)}{\sin 40^\circ} = 7.7\ (mi)$$

نصف المستقيم الذي يحدد الاتجاه الصحيح للقارب A هو مماسٌّ عند النقطة X لدائرة مركزها B ونصف قطرها BX=4 mi؛ إذن ΔABX قائم الزاوية، و $\sin\theta = \frac{BX}{AB} = \frac{4}{7.7} \approx 0.519$. وعليه تكون $\angle\theta = 31.3^\circ$. اتجاه A هو $65^\circ - 31.3^\circ = 33.7^\circ$ شرق الشمال.

تمارين:

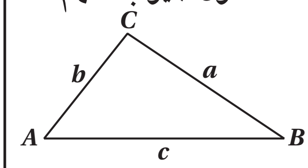
1) افترض أن المنارة B في المثال السابق موجهة في اتجاه 30° غرب الجنوب نحو السفينة P إلى الشمال من النقطة C. أوجد الاتجاه الذي تتخذه P لتمرَّ على بُعد 4 mi من النقطة B.

2) تمكَّن الراصد في المنارة –خلال الضباب– من تحديد قاربٍ على بُعد 18 mi يسير باتجاه الشاطئ، وكان اتجاه المنارة في تلك اللحظة بالنسبة للقارب 80° شرق الجنوب. فما الاتجاه الذي سيحدِّده الراصد للقارب، ليصل إلى نقطةٍ على الشاطئ تبعد 4 أميالٍ جنوب المنارة؟

8-5 تدريبات إعادة التعليم

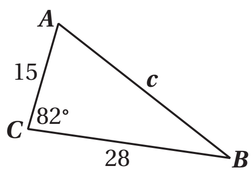
قانون جيوب التمام

استعمال قانون جيوب التمام لحل المثلثات

قانون جيوب التمام	إذا كانت أضلاع ΔABC التي أطوالها a , b , c تقابل الزوايا ذات القياسات $A , B ,$ C على الترتيب، فإن العلاقات الآتية تكون صحيحة:
	$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A$ $b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cos B$ $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos C$

يمكنك استعمال قانون جيوب التمام لحل المثلث، إذا عُلم طولا ضلعين فيه، وقياس الزاوية المحصورة بينهما، أو إذا عُلمت أطوال أضلاعه الثلاثة.

مثال **حل ΔABC مقربًا طول الضلع إلى أقرب جزء من عشرة وقياسي الزاويتين إلى أقرب درجةٍ.**



المثلث معلوم فيه طولا ضلعين وقياس الزاوية المحصورة بينهما.

استعمل قانون جيوب التمام لإيجاد قيمة c

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos C$$

$$c^2 = 28^2 + 15^2 - 2(28)(15)\cos 82^\circ$$

$$c^2 \approx 892.09$$

$$c \approx 29.9$$

يمكنك الآن استعمال قانون الجيوب لإيجاد قياس الزاوية A.

$$\frac{\sin A}{a} = \frac{\sin C}{c}$$

$$\frac{\sin A}{28} \approx \frac{\sin 82^\circ}{29.9}$$

$$\sin A \approx 0.9273$$

$$A \approx 68^\circ$$

قياس الزاوية B تقريبًا: $180 - (82 + 68) = 30$.

تمارين

حُلّ كلًّا من المثلثات الآتية مقربًا أطوال الأضلاع إلى أقرب جزء من عشرة، وقياسات الزوايا إلى أقرب درجةٍ:

(1 $a=14, c = 20, B= 38^\circ$

(2 $A=60^\circ, c= 17, b =12$

(3 $a=4, b=6, c=3$

(4 $A=103^\circ, b = 31, c=52$

(5 $a=15 , b=26=c=132^\circ$

(6 $a=31,b=52,c=43$

الاسم: ________________ التاريخ: ________

8-5 تدريبات إعادة التعليم

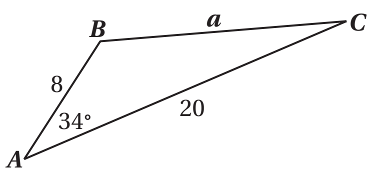
(تتمة)

قانون جيوب التمام

اختيار الطريقة المناسبة لحل المثلثات.

	المعطيات	ابدأ الحل باستعمال
حل مثلث	قياسا زاويتين وطول أي ضلع.	قانون الجيوب
	طولا ضلعين وقياس الزاوية المقابلة لأحدهما.	قانون الجيوب
	طولا ضلعين وقياس الزاوية المحصورة بينهما.	قانون جيوب التمام
	أطوال الأضلاع الثلاثة.	قانون جيوب التمام

مثال **حدد القانون (الجيوب أم جيوب التمام) الذي يجب بدء استعماله حل المثلث، ثم حل المثلث.**



لما كان معلومًا من المثلث طولا ضلعين وقياس الزاوية المحصورة بينهما، فإنه يتعين عليك أن تبدأ الحل باستعمال قانون جيوب التمام.

$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A$ قانون جيوب التمام

$a^2 = 20^2 + 8^2 - 2(20)(8)\cos 34^\circ$ $A = 34^\circ, b=20, c=8,$

$a^2 \approx 198.71$ باستعمال الآلة الحاسبة للتبسيط

$a \approx 14.1$ باستعمال الآلة الحاسبة للتبسيط

استعمل قانون الجيوب لإيجاد B.

$\frac{\sin B}{b} = \frac{\sin A}{a}$ قانون الجيوب

$\sin B \approx \frac{20\sin 34^\circ}{14.1}$ $A = 34^\circ, a \approx 14.1, b = 20,$

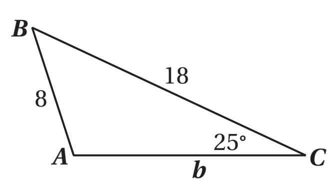
$B \approx 128^\circ$ باستعمال الدالة $\sin^{-1}$

إذن قياس الزاوية C تقريبًا $18^\circ = (34+128) - 180$.

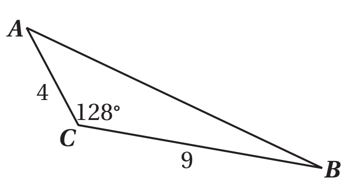
تمارين

حدد القانون (الجيوب أم جيوب التمام) الذي يجب بدء استعماله حل المثلث في كل مما يأتي، ثم حُلّ المثلث.

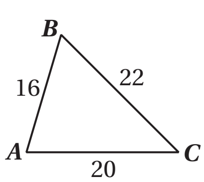
(1



(2



(3



(4 $A = 58^\circ, a = 12, b = 8$

(5 $a = 28, b = 35, c = 20$

(6 $A = 82^\circ, B = 44^\circ, b = 11$

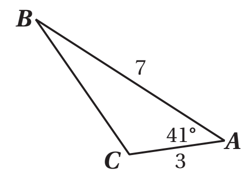
الاسم: ________________ التاريخ: ________

8-5 تدريبات المهارات

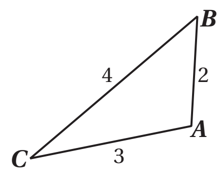
قانون جيوب التمام

حُل كلًّا من المثلثات الآتية، مقرّبًا الأطوال إلى أقرب جزء من عشرة، وقياسات الزوايا إلى أقرب درجة:

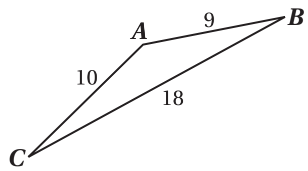
(1



(2



(3

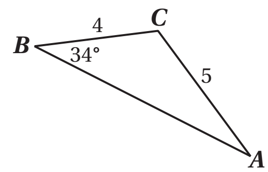


(4 $C=71^{\circ}, a=3, b=4$

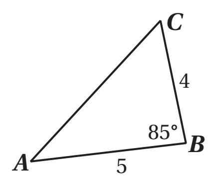
(5 $C = 35^{\circ}, a = 5, b = 8$

حدد القانون (الجيوب أم جيوب التمام) الذي يتعين بدء استعماله لحل المثلث في كل مما يأتي، ثم حُلّ المثلث.

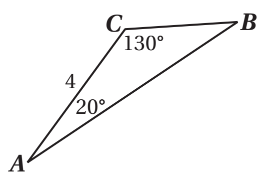
(6



(7



(8



(9 $A = 11^{\circ}, C = 27^{\circ}, c = 50$

(10 $B = 47^{\circ}, a = 20, c = 24$

(11 $A = 71^{\circ}, C = 62^{\circ}, a = 20$

(12 $a = 5, b = 12, c = 13$

(13 $A = 51^{\circ}, b = 7, c = 10$

(14 $a = 13, A = 41^{\circ}, B = 75^{\circ}$

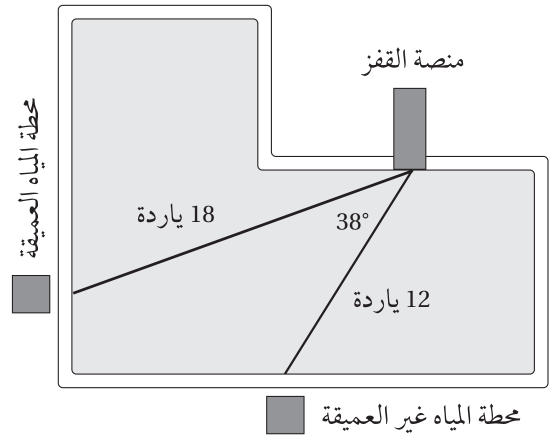
(15 $B = 125^{\circ}, a = 8, b = 14$

(16 $a = 5, b = 6, c = 7$

8-5 تدريبات حل المسألة

قانون جيوب التمام

1) **بركة سباحة:** يمثل الشكل أدناه بركة سباحة، وبجانبها محطتا إنقاذ واحدة من جهة المياه العميقة، والأخرى من جهة المياه غير العميقة. والمسافة بين كل من المحطتين ومنصة القفز كما في الشكل.



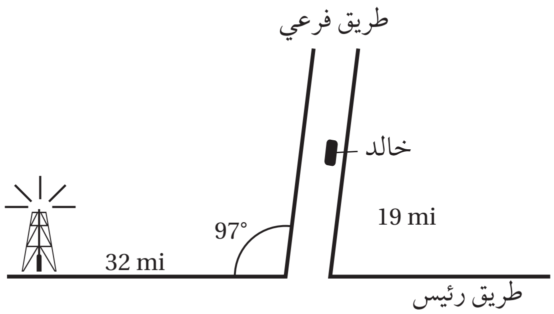
a) إذا تبادل المنقذان أماكنهما سباحة، فما المسافة التي يقطعها أحدهما للانتقال من محطة المياه العميقة إلى محطة المياه غير العميقة؟

b) إذا كان المنقذ عند محطة المياه العميقة مواجهًا تمامًا لقاعدة المنصة، فما قياس الزاوية التي يجب أن يستديرها ليواجه محطة المياه غير العميقة؟

2) مخيم للكشافة له بوابتان A و B المسافة بينهما $80\ m$. يقع مكتب مدير المخيم عند النقطة O على بعد $95\ m$ من A وعلى بعد $115\ m$ من B. ما قياس الزاوية AOB؟

3) **دراجات:** تحرك طفلان بدراجتيهما من نقطة A في مسارين مستقيمين، قياس الزاوية بينهما $15°$. فإذا قطع الطفل الأول مسافة $5\ m$، والثاني $7\ m$، فما المسافة بينهما في تلك اللحظة؟

4) **تقنية:** مع خالد جهاز اتصال لاسلكي يمكنه استعماله إذا كان في مدى لا يزيد على $40\ mi$ عن برج البث. إذا قاد خالد سيارته مسافة $32\ mi$ من برج البث على طريق رئيس ثم سار في طريق فرعية مسافة $19\ mi$ آخر كما في الشكل أدناه.



a) هل يستطيع خالد استعمال الجهاز من هذا المكان؟ وضح إجابتك.

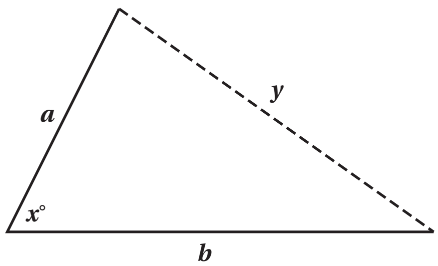
b) إذا كان خالد في مدى البث عند هذه النقطة، فكم المسافة التي يجب أن يسيرها على الطريق الفرعي ليخرج من مدى البث؟ وإذا كان خارج مدى البث، فما المسافة التي يجب أن يسيرها عائدًا ليكون في مدى البث.

الاسم: ____________ التاريخ: ____________

8-5 التدريبات الإثرائية

قانون جيوب التمام ونظرية فيثاغورس

يحمل قانون جيوب التمام الكثير من الشبه مع نظرية فيثاغورس. ووفقًا لقانون جيوب التمام إذا كان a و b طولي ضلعين في مثلث وقياس الزاوية بينهما هو $x°$ فإن طول الضلع الثالث y يمكن الحصول عليه باستعمال المعادلة $y^2=a^2+b^2-2ab\cos x°$.



أجب عن الأسئلة الآتية لتوضيح العلاقة بين قانون جيوب التمام ونظرية فيثاغورس:

1) ما القيمة التي تصلها $\cos x°$ إذا صغرت قيمة $x°$ بدرجة كبيرة؟

2) إذا كانت $x°$ قريبة جدًا من الصفر ثم بدأت بالزيادة، فما القيمة التي تقترب منها $\cos x°$ كلما اقتربت $x°$ من $90°$؟

3) إذا كانت قيمة $x°$ تساوي $90°$ فما قيمة $\cos x°$؟ وكيف تصبح المعادلة $y^2=a^2+b^2-2ab\cos x°$ في هذه الحالة؟

4) ما الذي يحصل لقيمة $\cos x°$ إذا بدأت قيمة $x°$ في الزيادة من $90°$ إلى $180°$؟

5) ليكن $a=7$ و $b=19$ ، فاستعمل الحاسبة البيانية لتمثيل الدالة الناتجة عن حل المعادلة $y^2=7^2+19^2-2(7)(19)\cos x$ بالنسبةِ لـ y.

a) ما مدى قيم $x°$ من وجهة نظر هندسية؟

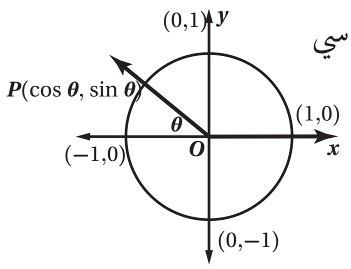
b) ارسم المنحنى باستعمال ميزة *TRACE* في الحاسبة البيانية. ما القيم العظمى والصغرى للدالة؟

c) كيف ترتبط القيمتان 7 و 19 بإجابة فرع **b**؟ وهل يمكن فعلًا الحصول على القيمتين العظمى والصغرى في فرع **b** هندسيًا؟

8-6 تدريبات إعادة التعليم

الدوال الدائرية

الدوال الدائرية

تعريف الجيب وجيب التمام	إذا قطع ضلع الانتهاء للزاوية θ المرسومة في الوضع القياسي دائرة الوحدة في النقطة $p(x,y)$ فإن $\cos\theta = x$, $\sin\theta = y$. لذا يمكن كتابة إحداثيات النقطة P على الصورة $P(\cos\theta, \sin\theta)$. 

مثال **إذا كان ضلع الانتهاء للزاوية θ المرسومة في الوضع القياسي يقطع دائرة الوحدة عند النقطة $P(-\frac{5}{6}, \frac{\sqrt{11}}{6})$ ، فأوجد كلًّا من $\cos\theta , \sin\theta$.**

$P(-\frac{5}{6}, \frac{\sqrt{11}}{6})$ إذن $\cos\theta = -\frac{5}{6}$, $\sin\theta = \frac{\sqrt{11}}{6}$

تمارين

إذا كان ضلع الانتهاء للزاوية θ المرسومة في الوضع القياسي يقطع دائرة الوحدة في النقطة المعطاة، فأوجد قيمة كل من $\cos\theta, \sin\theta$:

1) $P\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}\right)$

2) $P(0, -1)$

3) $P\left(-\frac{2}{3}, \frac{\sqrt{5}}{3}\right)$

4) $P\left(-\frac{4}{5}, -\frac{\sqrt{3}}{5}\right)$

5) $P\left(\frac{1}{6}, -\frac{\sqrt{35}}{6}\right)$

6) $P\left(\frac{\sqrt{7}}{4}, \frac{3}{4}\right)$

7) P تقع على ضلع الانتهاء للزاوية $\theta = 45^\circ$.

8) P تقع على ضلع الانتهاء للزاوية $\theta = 120^\circ$.

9) P تقع على ضلع الانتهاء للزاوية $\theta = 240^\circ$.

10) P تقع على ضلع الانتهاء للزاوية $\theta = 330^\circ$.

8-6 تدريبات إعادة التعليم

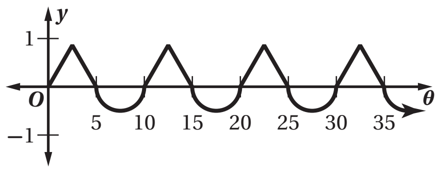
(تتمة)

الدوال الدائرية

الدوال الدورية :

الدالة الدورية هي دالة تتكرر قيمة y فيها على فترات منتظمة. وعندما يكتمل النمط بصورة تامة تتكوَّن **دورة**، والطول الأفقي لهذه الدورة يسمى **طول الدورة**. ودالتا الجيب وجيب التمام دالتان دوريتان طول دورة كل منهما 360° أو 2π rad.

مثال 1 **أوجد طول دورة الدالة**



بما أن النمط يتكرر كل 10 وحدات، فإن طول الدورة يساوي 10.

مثال 2 **أوجد القيمة الدقيقة لكل دالة مما يأتي:**

a) $\boldsymbol{sin\ 855^\circ}$

$$sin\ 855^\circ = sin\ (135^\circ + 720^\circ)$$
$$= sin\ 135^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

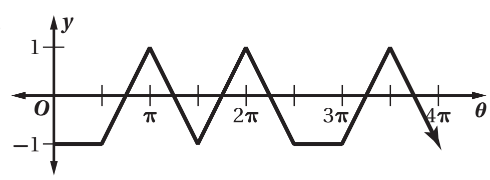
b) $\boldsymbol{cos\left(\frac{31\pi}{6}\right)}$

$$cos\left(\frac{31\pi}{6}\right) = cos\left(\frac{7\pi}{6} + 4\pi\right)$$
$$= cos\frac{7\pi}{6} = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

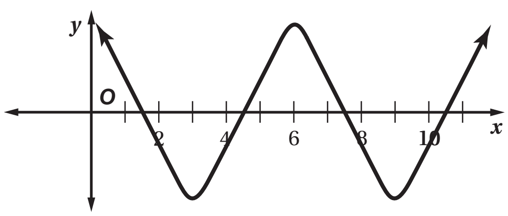
تمارين

أوجد طول الدورة لكل من الدالتين الآتيتين:

1)



2)



أوجد القيمة الدقيقة لكل دالة مما يأتي:

3) $sin\ (-510^\circ)$

4) $sin\ 495^\circ$

5) $cos\left(-\frac{5\pi}{2}\right)$

6) $sin\left(\frac{5\pi}{3}\right)$

7) $cos\left(\frac{11\pi}{4}\right)$

8) $sin\left(-\frac{3\pi}{4}\right)$

8-6 تدريبات المهارات

الدوال الدائرية

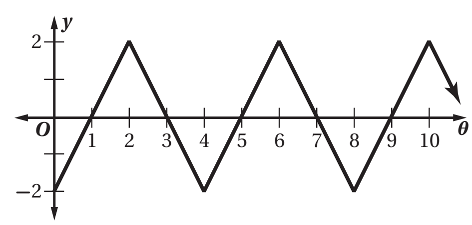
إذا كان ضلع الانتهاء للزاوية θ المرسومة في الوضع القياسي يقطع دائرة الوحدة في النقطة P فأوجد $\cos\theta$ و $\sin\theta$ في كل مما يأتي:

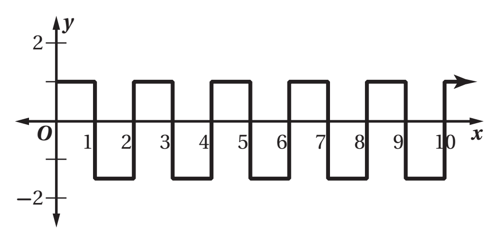
1) $P\left(\frac{3}{5}, \frac{4}{5}\right)$
2) $P\left(\frac{5}{13}, -\frac{12}{13}\right)$
3) $P\left(-\frac{9}{41}, -\frac{40}{41}\right)$
4) $P(0, 1)$
5) $P(-1, 0)$
6) $P\left(\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$

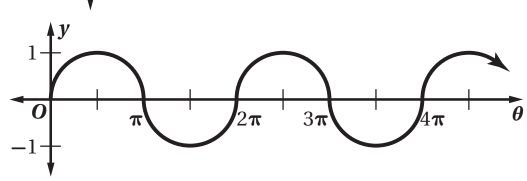
أوجد القيمة الدقيقة لكل دالة مما يأتي:

7) $\cos 45^\circ$
8) $\sin 210^\circ$
9) $\sin 330^\circ$
10) $\cos 330^\circ$
11) $\cos(-60^\circ)$
12) $\sin(-390^\circ)$
13) $\sin 5\pi$
14) $\cos 3\pi$
15) $\sin \frac{5\pi}{2}$
16) $\sin \frac{7\pi}{3}$
17) $\cos\left(-\frac{7\pi}{3}\right)$
18) $\cos\left(-\frac{5\pi}{6}\right)$

أوجد طول الدورة لكل من الدوال الآتية:

19)


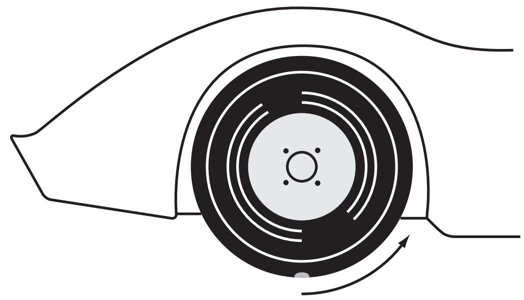
20)


21)


8-6 تدريبات حل المسألة

الدوال الدائرية

1) **إطارات:** وضعت نقطة ملونة على حافة إطار سيارة. ومع حركة السيارة بدأ ارتفاع النقطة عن سطح الأرض يتغير بحسب العلاقة $h=-8cost+8$ حيث t الزمن بالثواني، h ارتفاع النقطة بالبوصات.



a) ما أقصى ارتفاع عن سطح الطريق تصله النقطة؟

b) ما أدنى ارتفاع عن سطح الأرض تصله هذه النقطة؟

c) ما عدد دورات الإطار في الثانية؟

d) ما المسافة التي تقطعها النقطة في 30 ثانية؟ وفي ساعة؟

2) **هندسة:** درجة الحرارة الشهرية (بالفهرنهايت) في إحدى المدن يُعبَّر عنها بالعلاقة $T=42+30\ sin\left(\frac{\pi}{6}t\right)$ حيث t بالشهور.

a) ما أعلى درجة حرارة شهرية في هذه المدينة؟

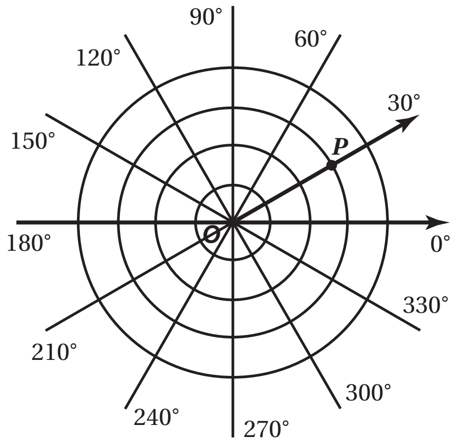
b) ما الشهر الذي تحصل فيه على هذه الدرجة؟

c) ما أدنى درجة حرارة شهرية في المدينة؟

d) ما الشهر الذي تحصل فيه على هذه الدرجة؟

8-6 التدريبات الإثرائية

الإحداثيات القطبية



ارسم زاوية في الوضع القياسي رأسها عند نقطة O تسمى القطب. وضلع الابتداء لها على محور أفقي يسمى المحور القطبي. النقطة P الواقعة على ضلع انتهاء الزاوية تُكتب باستعمال الإحداثيات القطبية $P(r,\theta)$ ، حيث r: المسافة المتجهة من O إلى P، و θ قياس الزاوية. ويمكن رسم المنحنيات في هذا النظام باستعمال ورقة رسم الإحداثيات القطبية التي تظهر في الشكل المجاور.

الإحداثيات القطبية لنقطة ليست وحيدة، فعلى سبيل المثال $(3,30^\circ)$ تمثل النقطة P وكذلك النقطة $(3,390^\circ)$، ويمكن تسمية النقطة P أيضًا $(-3,210^\circ)$ فهل تعلم لماذا؟

إحداثيا القطب هما $(0,\theta)$ ، حيث θ تمثل قياس أي زاوية.

مثال **مثّل الدالة $r=\cos\theta$، بيانيًّا، وذلك بتكوين جدول لعدد مناسب من قيم θ و r ، وتمثيله على ورقة إحداثيات قطبية.**

θ	0°	30°	60°	90°	120°	150°	180°
r	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1

بما أن دورة دالة جيب التمام هي 180° ، فإن قيم r المقابلة لقيم $\theta > 180^\circ$ هي تكرار لقيم r المقابلة لقيم $0 < 180^\circ$.

مثّل كلًّا من الدوال الآتية، بتكوين جدول قيم مناسب، وتمثيله على ورقة إحداثيات قطبية:

(1 $r = 4$ **(2** $r = 3\sin\theta$

(3 $r = 3\cos 2\theta$ **(4** $r = 2(1 + \cos\theta)$

الاسم: ______________________ التاريخ: ____________

8-7 تدريبات إعادة التعليم

تمثيل الدوال المثلثية بيانيًا

دوال الجيب، جيب التمام، والظل: يمكنك تمثيل الدوال المثلثية بيانيًا في المستوى الإحداثي. أمّا الدوال الدورية فلها أنماط متكررة أو دورات، والطول الأفقي لكل دورة يسمى طول الدورة. **وسعة** منحنى كل من دالة الجيب ودالة جيب التمام تساوي نصف الفرق بين القيمة العظمى والقيمة الصغرى لكل دالة منهما. وتوجد خطوط تقارب لمنحنى دالة الظل.

	الدالة الأم	$y=\sin\theta$	$y=\cos\theta$	$y=\tan\theta$
دوال الجيب، وجيب التمام، والظل	المجال	مجموعة الأعداد الحقيقية	مجموعة الأعداد الحقيقية	$\{\theta \mid \theta \neq 90^\circ + 180\,n,\ n \in Z\}$
	المدى	$\{y \mid -1 \le y \le 1\}$	$\{y \mid -1 \le y \le 1\}$	مجموعة الأعداد الحقيقية
	السعة	1	1	غير معرفة
	طول الدورة	360°	360°	180°

مثال أوجد السعة وطول الدورة لكل من الدوال الآتية، ثم مثّل الدالة بيانيًا:

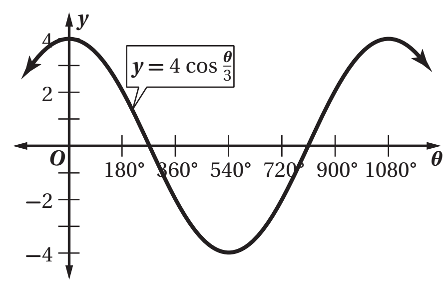
a) $y = 4\cos\frac{\theta}{3}$

السعة: $|a| = |4|$ ، إذن السعة $= 4$.

طول الدورة:

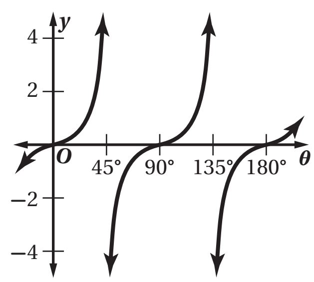
$1080^\circ = \frac{360^\circ}{\left|\frac{1}{3}\right|}$ إذن طول الدورة $= 1080^\circ$

استعمل كلًّا من السعة وطول الدورة لتمثيل الدالة بيانيًا.



b) $y = -\frac{1}{2}\tan 2\theta$

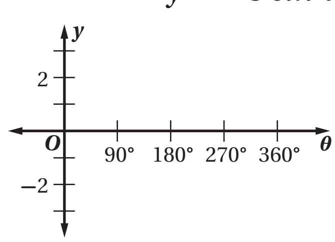
ليس لهذه الدالة سعة (السعة غير معرفة)، وطول الدورة 90°.



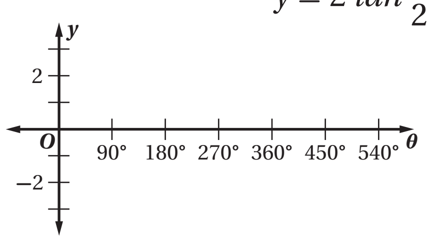
تمارين

أوجد السعة وطول الدورة لكلٍّ من الدالتين الآتيتين، ثم مثّلهما بيانيًا:

1) $y = -3\sin\theta$



2) $y = 2\tan\frac{\theta}{2}$



8-7 تدريبات إعادة التعليم

(تتمة)

تمثيل الدوال المثلثية بيانيًّا

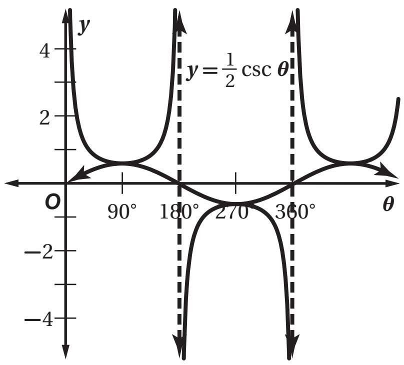
منحنيات الدوال المثلثية الأخرى: ترتبط منحنيات الدوال المثلثية: القاطع، وقاطع التمام، وظل التمام بمنحنيات الدوال المثلثية: جيب التمام، والجيب، والظل.

	الدالة الأم	$y=csc\ \theta$	$y= sec\ \theta$	$y= cot\ \theta$
دوال القاطع، وقاطع التمام، وظل التمام	المجال	$\{\theta:\theta\neq 180n,\ n\in Z\}$	$\{\theta:\theta\neq 90+180\ n,\ n\in Z\}$	$\{\theta:\theta\neq 180\ n,\ n\in Z\}$
	المدى	$\{y \mid 1\le y \vee y\le -1\}$	$\{y \mid 1\le y \vee y\le -1\}$	مجموعة الأعداد الحقيقية
	السعة	غير معرفة	غير معرفة	غير معرفة
	طول الدورة	360°	360°	180°

مثال أوجد طول دورة الدالة $y=\frac{1}{2}csc\ \theta$ ، ثم مثّلها بيانيًّا.

لما كان $csc\ \theta$ مقلوب $sin\ \theta$ فإن للدالتين طول الدورة نفسه، وخطوط التقارب الرأسية تحصل عند: $\theta=0$, $\theta=180^\circ$, $\theta=360^\circ$.

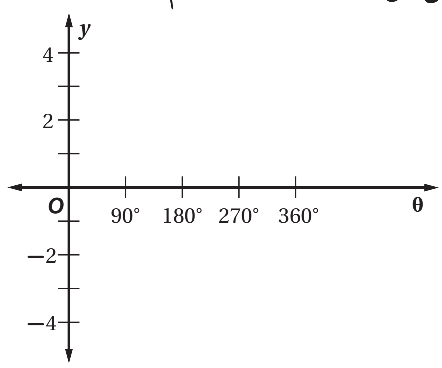
ارسم منحنى الدالة $y=\frac{1}{2}\ sin\ \theta$ ، ثم استعمله لرسم منحنى الدالة $y=\frac{1}{2}csc\ \theta$.



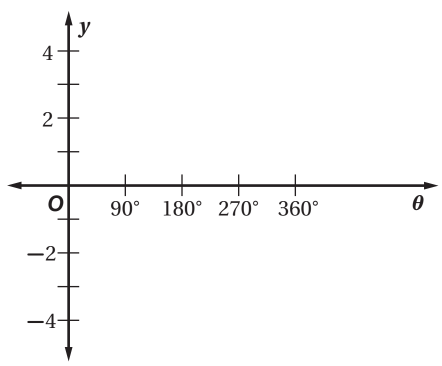
تمارين

أوجد طول الدورة لكل من الدالتين الآتيتين، ثم مثّلهما بيانيًّا:

1) $y=cot\ 2\theta$



2) $y=sec\ 3\theta$

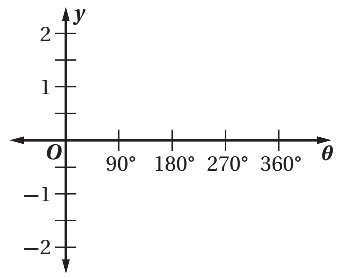


8-7 تدريبات المهارات

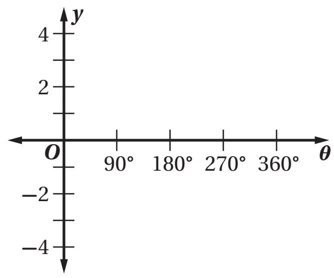
تمثيل الدوال المثلثية بيانيًّا

أوجد السعة وطول الدورة لكل من الدوال الآتية، ثم مثّل الدالة بيانيًّا:

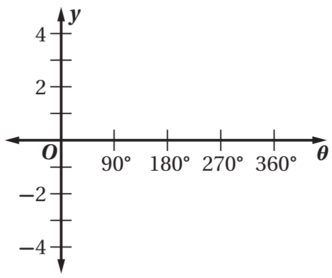
(1 $y = 2\cos\theta$



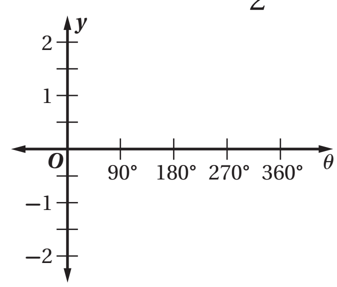
(2 $y = 4\sin\theta$



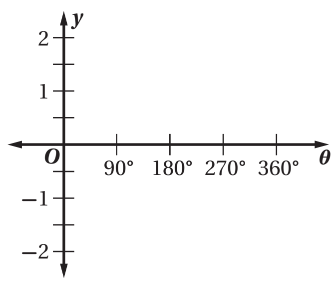
(3 $y = 2\sec\theta$



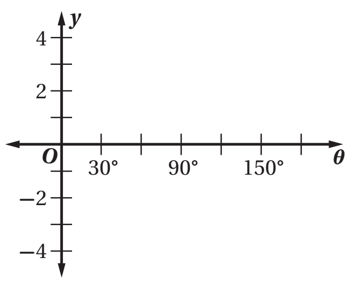
(4 $y = \frac{1}{2}\tan\theta$



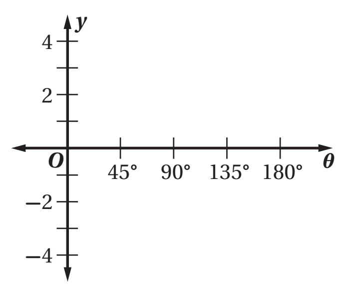
(5 $y = \sin 3\theta$



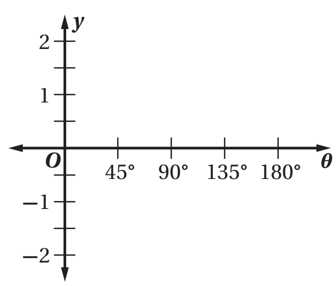
(6 $y = \csc 3\theta$



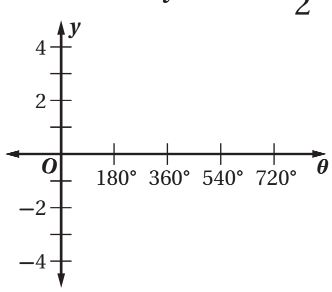
(7 $y = \tan 2\theta$



(8 $y = \cos 2\theta$



(9 $y = 4\sin\frac{1}{2}\theta$



8-7 تدريبات حل المسألة

تمثيل الدوال المثلثية بيانيًا

1) **فيزياء:** يبين الجدول الآتي الدوال التي تمثِّل أنماط موجات ألوان الضوء المختلفة الصادرة من مصدر ضوئي معين، حيث y ارتفاع الموجة بالنانومتر، و t الطول من بداية الموجة بالنانومتر.

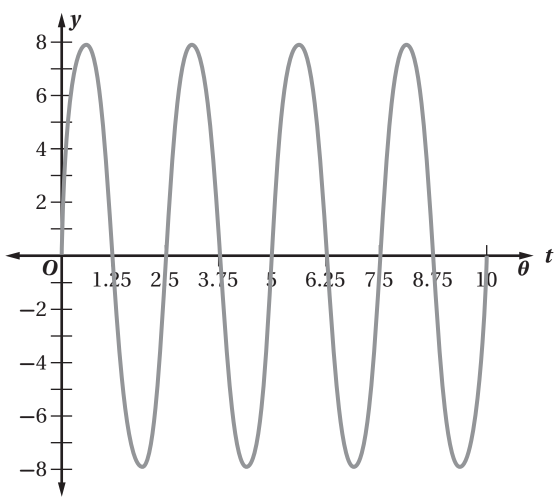
اللون	الدالة
أحمر	$y = 300\ sin\left(\frac{\pi}{350}t\right)$
برتقالي	$y = 125\ sin\left(\frac{\pi}{305}t\right)$
أصفر	$y = 460\ sin\left(\frac{\pi}{290}t\right)$
أخضر	$y = 200\ sin\left(\frac{\pi}{260}t\right)$
أزرق	$y = 40\ sin\left(\frac{\pi}{235}t\right)$
بنفسجي	$y = 80\ sin\left(\frac{\pi}{210}t\right)$

a) ما سعة وطول دورة الدالة التي تمثِّل موجات اللون الأخضر؟

b) تتناسب شدة موجة الضوء طرديًّا مع سعة الموجة. فأيّ الألوان له أكبر شدة موجة؟

c) يعتمد لون الضوء على طول دورة الموجة، فأيّ الألوان له أقصر طول دورة؟ وأيها له أكبر طول دورة؟

2) **سباحة:** يمكن تمثيل موقع ذراع سباح خلال السباحة بالنسبة لسطح الماء بالشكل أدناه، حيث y تمثل ارتفاع الذراع من سطح الماء بالبوصات و t الزمن بالثواني من بدء السباحة. فما الدالة التي تمثل هذا الوضع؟



3) **بيئة:** يمكن تمثيل كثافة أوراق الشجر في إحدى الغابات بالدالة $y=20 + 15sin\left(\frac{\pi}{6}(t-3)\right)$، حيث y: عدد أوراق الشجر في القدم المربعة الواحدة و t: عدد الأشهر بعد شهر يناير.

a) أوجد طول دورة هذه الدالة؟ وما الذي تمثِّله هذه الدورة؟

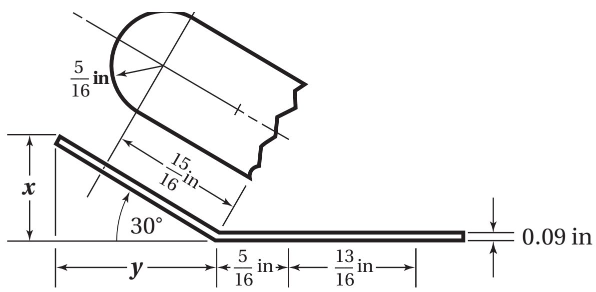
b) ما أكبر قيمة لكثافة الأوراق في هذه الغابة؟ وفي أي شهر يكون ذلك؟

8-7 التدريبات الإثرائية

مخططات هندسية

يتطلب تنفيذ المخططات الهندسية القدرة على اختيار الدوال المثلثية والخصائص الهندسية واستعمالها. فرؤوس الأشكال الهندسية ليس لها أسماء في هذه المخططات. لذا يتعين اختيار المعلومات ذات العلاقة، واستعمال الدوال المناسبة لإيجاد القياسات المجهولة.

مثال **أوجد القياسين المجهولين في المخطط المجاور.**



x و y هما ساقا مثلث قائم الزاوية

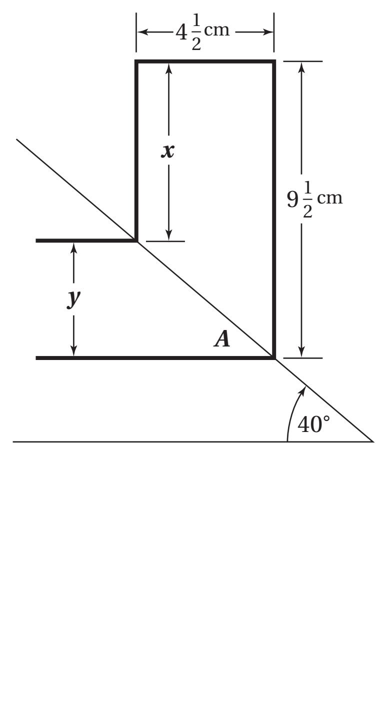
طول الوتر هو $\frac{15}{16}\text{ in} + \frac{5}{16}\text{ in} = \frac{20}{16}\text{ in}$

$\frac{x}{\frac{20}{16}} = sin\ 30^\circ$ $\quad\quad$ $\frac{y}{\frac{20}{16}} = cos\ 30^\circ$

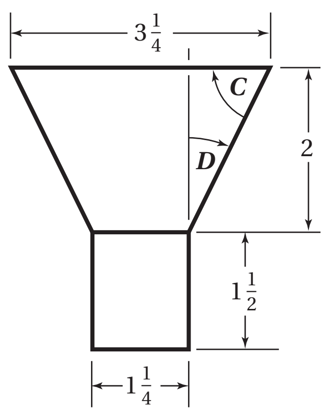
$x = 0.63\text{ in}$ $\quad\quad$ $y = 1.08\text{ in}$

أوجد القياسات المجهولة في كل من المخططات الآتية:

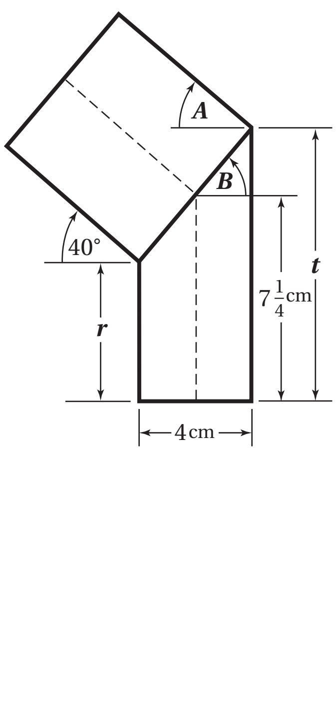
(1



(2



(3



8-8 تدريبات إعادة التعليم

الدوال المثلثية العكسية

معكوس الدالة المثلثية : إذا عُلمت قيمة دالة مثلثية لزاوية ما، فإنك تستطيع استعمال معكوس الدالة لإيجاد قياس الزاوية. وإذا حدّدت مجال الدالة، بحيث يكون المعكوس دالة فإن القيم ضمن هذا المجال المحدد تسمى **القيم الأساسية**.

القيم الأساسية للجيب وجيب التمام والظل	$y=Sin\ x$ إذا وفقط إذا $y=sin\ x$ ، $-\frac{\pi}{2} \le x \le \frac{\pi}{2}$. $y= Cos\ x$ إذا وفقط إذا $y=cos\ x$ ، $0\le x\le \pi$. $y=Tan\ x$ إذا وفقط إذا $y=tan\ x$ ، $\frac{-\pi}{2} \le x\le \frac{\pi}{2}$.
معكوس الجيب وجيب التمام والظل	إذا كان $y=Sin\ x$، فإن معكوس دالة الجيب يعرف على النحو الآتي: $y=Sin^{-1}x$ أو $y=Arcsin\ x$ إذا كان $y=Cos\ x$، فإن معكوس دالة جيب التمام يعرف على النحو الآتي: $y=Cos^{-1}\ x$ أو $y=Arc\ cos\ x$ إذا كان $y=Tan\ x$ ، فإن معكوس دالة الظل يعرف على النحو الآتي: $y=Tan^{-1}x$ أو $y=Arctan\ x$.

مثال 1

أوجد قيمة $Sin^{-1} \frac{\sqrt{3}}{2}$ ، واكتب قياس الزاوية بالدرجات وبالراديان.

أوجد الزاوية θ التي جيبها $\frac{\sqrt{3}}{2}$ وتقع في الفترة $\frac{-\pi}{2} \le \theta \le \frac{\pi}{2}$ باستعمال دائرة الوحدة.

النقطة التي تقع على دائرة الوحدة وإحداثيها الصادي $\frac{\sqrt{3}}{2}$ هي $\frac{\pi}{3}$ أو 60°،

لذا فإن $sin^{-1}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{\pi}{3} = 60^\circ$

مثال 2

أوجد قيمة $tan\left(Sin^{-1} \frac{1}{2}\right)$ إلى أقرب جزء من مئة.

لتكن $\theta= Sin^{-1}\ \frac{1}{2}$، فإن $Sin\ \theta=\frac{1}{2}$ و $\frac{-\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2}$. القيمة $\theta=\frac{\pi}{6}$ تحقق الشرطين معًا.

$tan\frac{\pi}{6}=\frac{\sqrt{3}}{3}$ لذا $tan\left(Sin^{-1}\ \frac{1}{2}\right) = \frac{\sqrt{3}}{3}$.

تمارين

أوجد قيمة كل مما يأتي بالدرجات، وبالراديان:

1) $Cos^{-1}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$
2) $Sin^{-1}\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$
3) $Arccos\left(-\frac{1}{2}\right)$
4) $Arctan\sqrt{3}$
5) $Arccos\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$
6) $Tan^{-1}(-1)$

أوجد قيمة كل مما يأتي، مقربًا الإجابة إلى أقرب جزء من مئة:

7) $cos\left[Sin^{-1}\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\right]$
8) $tan\left[Arcsin\left(-\frac{5}{7}\right)\right]$
9) $sin\left(Tan^{-1}\frac{5}{12}\right)$
10) $Cos\left[Arcsin\left(-0.7\right)\right]$
11) $cos\left(Arctan\ 5\right)$
12) $sin\left(Cos^{-1}\ 0.3\right)$

8-8 تدريبات إعادة التعليم

(تتمة)

الدوال المثلثية العكسية

حُلّ المعادلات باستعمال الدوال العكسية : يمكنك إعادة كتابة المعادلات المثلثية؛ لإيجاد قياس زاوية ما.

مثال **حُلّ المعادلة $Sin\theta=-0.25$ مقرّبًا الناتج إلى أقرب جزء من عشرة.**

جيب زاويةٍ ما هو -0.25، ويمكن إعادة كتابة هذا على النحو الآتي: $\theta=Arc\ sin(-0.25)$.

استعمل الآلة الحاسبة لإيجاد الحل.

استعمل المفاتيح: SHIFT SIN^{-1} (–) 0.25) = -14.47751219

لذا فإن $\theta\approx-14.5^{\circ}$.

تمارين

حُلَّ كلًّا من المعادلات الآتية، مقربًا الناتج إلى أقرب جزء من عشرة:

(1 $Sin\,\theta=0.8$ **(2** $Tan\,\theta=4.5$

(3 $Cos\,\theta=0.5$ **(4** $Cos\,\theta=-0.95$

(5 $Sin\,\theta=-0.1$ **(6** $Tan\,\theta=-1$

(7 $Cos\,\theta=0.52$ **(8** $Cos\,\theta=-0.2$

(9 $Sin\,\theta=0.35$ **(10** $Tan\,\theta=8$

8-8 تدريبات المهارات

الدوال المثلثية العكسية

أوجد قيمة كل مما يأتي بالدرجات وبالراديان:

1) $Sin^{-1}\frac{\sqrt{2}}{2}$

2) $Cos^{-1}\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$

3) $Tan^{-1}\sqrt{3}$

4) $Arctan\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\right)$

5) $Arccos\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$

6) $Arcsin\ 1$

أوجد قيمة كلٍّ مما يأتي، مقربًا الناتج إلى أقرب جزء من مئة:

7) $sin\ (Cos^{-1}\ 1)$

8) $sin\left(Sin^{-1}\frac{1}{2}\right)$

9) $tan\left(Arcsin\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$

10) $cos\ (Tan^{-1}\ 3)$

11) $sin\ [Arctan\ (-1)]$

12) $sin\left[Arccos\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\right]$

حُلّ كلًّا من المعادلات الآتية، مقربًا الناتج إلى أقرب جزء من عشرة:

13) $cos\ \theta = 0.25$

14) $sin\ \theta = -0.57$

15) $tan\ \theta = 5$

16) $cos\ \theta = 0.11$

17) $sin\ \theta = 0.9$

18) $tan\ \theta = -11.35$

$sin\ \theta = 1$

$tan\ \theta = -0.01$

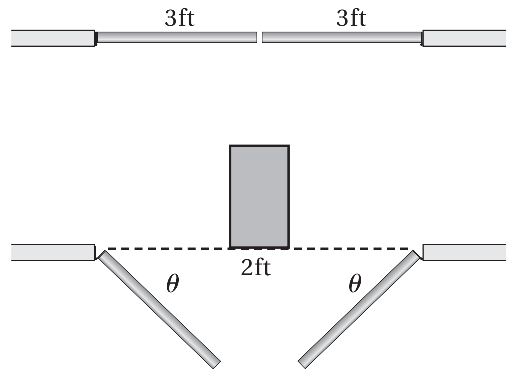
$cos\ \theta = -0.36$

$tan\ \theta = -\ 16.6$

8-8 تدريبات حل المسألة

الدوال المثلثية العكسية

1) أبواب: مخرج مطبخ أحد المطاعم له زوج من الأبواب المتأرجحة التي تلتقي في منتصف المخرج. وكل باب منهما عرضه 3 ft. ويريد عامل مطعم أن ينقل عربة أطباق عرضها قدمان من المطبخ إلى غرفة الطعام.

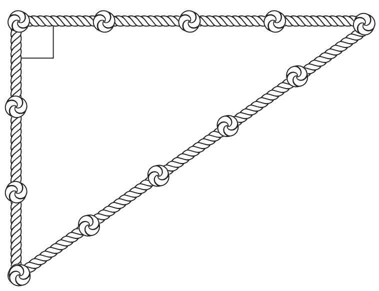


a) ما أصغر زاوية θ يجب أن يفتح بها كلا البابين حتى تخرج العربة؟

b) إذا كان من الممكن فتح باب واحد فقط، فما أصغر زاوية θ يمكن أن يفتح بها الباب بحيث تخرج العربة؟

c) إذا استبدل زوج الأبواب المتأرجحة بباب واحد مفرد، عرضه مساوٍ لعرض المخرج، فما أصغر زاوية θ يتعين أن يُفتح بها الباب، بحيث تخرج العربة؟

2) مساحة الأراضي: من المعروف منذ القدم أن المثلث الذي أطوال أضلاعه 5 , 4 , 3 وحدات هو مثلث قائم الزاوية، لذا استعمل مسَّاحو الأراضي حبالًا بعُقد عند كل وحدة طول لضمان أن يكون المثلث قائم الزاوية. ويستعمل مثل هذا الحبل لتكوين مثلث على الأرض على أن يكون في إحدى ساقيه ثلاث عقد، وفي الساق الثانية أربع عقد. وهذا يضمن أن المثلث المتكون مثلث قائم الزاوية.



ما قياسات الزوايا في المثلث المتشكل بهذه الطريقة إلى أقرب درجة؟

3) سفر: يقود عبد الله دراجته إلى بيت صديقه خالد. ويستطيع أن يقود على الشوارع التي تتجه شمال – جنوب أو شرق – غرب فقط.

a) قاد عبد الله 2 km شرقًا و 4 km جنوبًا إلى بيت خالد. فإذا استطاع عبد الله أن يقود مباشرة بخط مستقيم من بيته إلى بيت خالد، فبأي اتجاه سيقود دراجته؟

b) بعد ذلك، قاد عبد الله دراجته 3 km غربًا و 1 km شمالًا ليصل إلى البقالة. فما الاتجاه الذي سيقود به عبد الله لو تمكّن أن يقود دراجته في مسار مستقيم مباشرة من بيت خالد إلى البقالة؟

8-8 التدريبات الإثرائية

قانون سنل (Snell's Law)

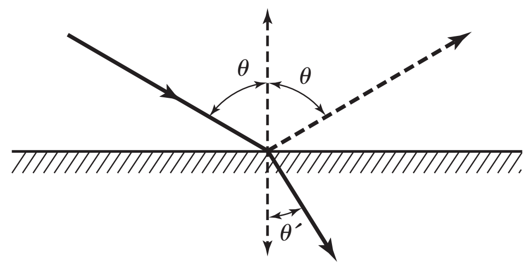
يصف قانون سنل ما يحدث للشعاع الضوئي عندما ينتقل من الهواء إلى الماء أو أي مادة أخرى؛ إذ يصنع شعاع الضوء زاوية سقوط مقدارها θ مع السطح كما في الشكل أدناه، حيث ينعكس جزء من الشعاع بزاوية θ، وينكسر الجزء الآخر عندما ينفذ إلى الماء أو أي مادة أخرى صانعًا زاوية θ'.

زاوية السقوط تساوي زاوية الانعكاس.

يعطي قانون سنل العلاقة بين زاوية السقوط وزاوية الانكسار.

$sin\ \theta = k\ sin\ \theta'$، حيث k هو ثابت يسمى معامل الانكسار.

المادة	k
الماء	1.33
الكحول الإيثيلي	1.36
الملح الصخري والكوارتز	1.54
الزجاج	1.46–1.96
الماس	2.42



استعمل قانون سنل لحل المسائل التالية، مقرّبًا قياس الزوايا بالدرجات إلى أقرب منزلة عشرية:

1) إذا كان قياس زاوية سقوط شعاع ضوئي على سطح نافذة 45°، وكان k=1.6، فما قياس زاوية الانكسار؟

2) إذا سقط شعاع ضوئي على سطح الماء بزاوية 50°، فما قياس زاوية الانكسار؟

3) ينكسر شعاع ضوئي داخل بلورة كوارتز بزاوية انكسار 24°، فما زاوية السقوط؟

4) قيست زوايا السقوط والانكسار في وسطٍ ما في خمسِ محاولات. والقياسات جميعها موضحة في الجدول، وواحدة منها خطأ، هل هذه المادة زجاج أم كوارتز أم ماس؟

θ	15°	30°	40°	60°	80°
θ'	9.7°	16.1°	21.2°	28.6°	33.2°

5) إذا كانت زاوية سقوط شعاع ضوئي على سطح الكحول الإيثيلي 60°، فما زاوية الانكسار لهذا الشعاع؟

ملحق الإجابات

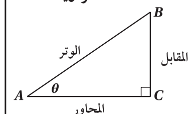
الاسم: ____________ التاريخ: ____________

8-1 تدريبات إعادة التعليم

الدوال المثلثية في المثلثات القائمة الزاوية

الدوال المثلثية للزوايا الحادة: يُعرَّفُ **حساب المثلثات** بأنه دراسة العلاقة بين زوايا المثلث القائم الزاوية وأضلاعه. **والدالة المثلثية** تعرَّف من النسبة المثلثية بين طولَي ضلعين في المثلث القائم الزاوية.

الدوال المثلثية في المثلثات القائمة الزاوية



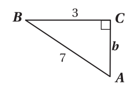
إذا كانت θ تمثل قياس زاوية حادة في مثلث قائم الزاوية، فإن الدوال المثلثية الست تعرَّف بدلالة الوتر والضلع المقابل والضلع المجاور كما يأتي:

$\cos\theta$ (جيب تمام θ) $= \frac{\text{المجاور}}{\text{الوتر}}$	$\sin\theta$ (جيب θ) $= \frac{\text{المقابل}}{\text{الوتر}}$
$\cot\theta$ (ظل تمام θ) $= \frac{\text{المجاور}}{\text{المقابل}}$	$\tan\theta$ (ظل θ) $= \frac{\text{المقابل}}{\text{المجاور}}$
$\csc\theta$ (قاطع تمام θ) $= \frac{\text{الوتر}}{\text{المقابل}}$	$\sec\theta$ (قاطع θ) $= \frac{\text{الوتر}}{\text{المجاور}}$

مثال ABC **مثلث قائم الزاوية فيه** $\cos B = \frac{3}{7}$ **، أوجد قيمة** $\tan B$.

الخطوة 1: ارسم مثلثًا قائم الزاوية، وسمِّ إحدى زواياه الحادة B، وضع العدد 3 طولًا للضلع المجاور والعدد 7 طولًا للوتر.

الخطوة 2: استعمل نظرية فيثاغورس لإيجاد قيمة b .



$a^2+b^2=c^2$ نظرية فيثاغورس

$3^2+b^2=7^2$ $a=3$ و $c=7$

$9+b^2=49$ بالتبسيط

$b^2=40$ بطرح 9 من الطرفين

$b=\sqrt{40}=2\sqrt{10}$ بأخذ الجذر التربيعي للطرفين.

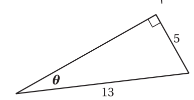
الخطوة 3: أوجد $\tan B$

$\tan B = \frac{\text{المقابل}}{\text{المجاور}}$ دالة الظل

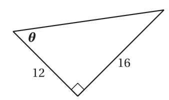
$\tan B = \frac{2\sqrt{10}}{3}$ بالتعويض عن المقابل بـ $2\sqrt{10}$ وعن المجاور بـ 3

تمارين:

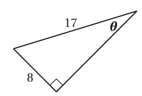
أوجد قيم الدوال المثلثية الست للزاوية θ في كلٍّ مما يأتي:

1) 

$\sin\theta=\frac{5}{13}; \cos\theta=\frac{12}{13};$
$\tan\theta=\frac{5}{12}; \csc\theta=\frac{13}{5};$
$\sec\theta=\frac{13}{12}; \cot\theta=\frac{12}{5};$

2) 

$\sin\theta=\frac{4}{5}; \cos\theta=\frac{3}{5};$
$\tan\theta=\frac{4}{3}; \csc\theta=\frac{5}{4};$
$\sec\theta=\frac{5}{3}; \cot\theta=\frac{3}{4};$

3) 

$\sin\theta=\frac{8}{17}; \cos\theta=\frac{15}{17};$
$\tan\theta=\frac{8}{15}; \csc\theta=\frac{17}{8};$
$\sec\theta=\frac{17}{15}; \cot\theta=\frac{15}{8};$

ABC مثلث قائم الزاوية في C

4) إذا كان $\tan A=\frac{7}{12}$، فأوجد $\cos A$. **≈0.864**

5) إذا كان $\cos A=\frac{1}{2}$، فأوجد $\tan A$. **≈1.732**

الاسم: ____________ التاريخ: ____________

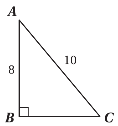
8-1 تدريبات إعادة التعليم (تتمة)

الدوال المثلثية في المثلثات القائمة الزاوية

استعمال الدوال المثلثية: يمكنك استعمال الدوال المثلثية، لإيجاد أطوال الأضلاع وقياسات الزوايا المجهولة في مثلث قائم الزاوية، ويمكن إيجاد قياسات الزوايا باستعمال معكوس الجيب، ومعكوس جيب التمام، ومعكوس الظل.

مثال أوجد قياس $\angle C$**، مقرِّبًا الإجابة إلى أقرب جزء من عشرة.**

بما أنك تعرف طول الضلع المقابل للزاوية C وطول الوتر؛ لذا استعمل دالة الجيب.



$\sin C = \frac{\text{المقابل}}{\text{الوتر}}$ دالة الجيب

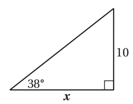
$\sin C = \frac{8}{10}$ بالتعويض عن المقابل بـ 8، وعن الوتر بـ 10.

$\sin^{-1}\frac{8}{10} = m\angle C^\circ$ معكوس الجيب

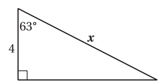
$53.1^\circ \approx m\angle C$ باستخدام الآلة الحاسبة

تمارين

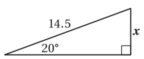
استعمل دالةً مثلثيةً لإيجاد قيمة x في كلٍّ مما يأتي. قرِّب إلى أقرب جزء من عشرة:

1) 

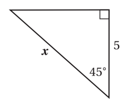
$\tan 38^\circ = \frac{10}{x}$ **;12.8**

2) 

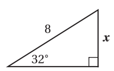
$\cos 63^\circ = \frac{4}{x}$ **;8.8**

3) 

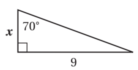
$\sin 20^\circ = \frac{x}{14.5}$ **;5.0**

4) 

$\cos 45^\circ = \frac{5}{x}$ **;7.1**

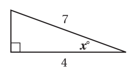
5) 

$\sin 32^\circ = \frac{x}{8}$ **;4.2**

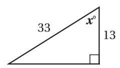
6) 

$\tan 70^\circ = \frac{9}{x}$ **;3.3**

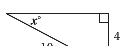
أوجد قيمة x، قرِّب إلى أقرب جزء من عشرة.

7) 

55.2

8) 

66.8

9) 

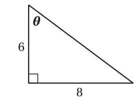
23.6

الاسم: ____________ التاريخ: ________

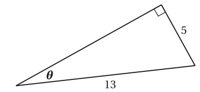
8-1 تدريبات المهارات

الدوال المثلثية في المثلثات القائمة الزاوية

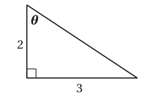
أوجد قيم الدوال المثلثية الست للزاوية θ في كلٍّ مما يأتي:

1) 

$\sin\theta=\frac{4}{5}$; $\cos\theta=\frac{3}{5}$; $\tan\theta=\frac{4}{3}$; $\csc\theta=\frac{5}{4}$; $\sec\theta=\frac{5}{3}$; $\cot\theta=\frac{3}{4}$;

2) 

$\sin\theta=\frac{5}{13}$; $\cos\theta=\frac{12}{13}$; $\tan\theta=\frac{5}{12}$; $\csc\theta=\frac{13}{5}$; $\sec\theta=\frac{13}{12}$; $\cot\theta=\frac{12}{5}$;

3) 

$\sin\theta=\frac{3\sqrt{13}}{13}$; $\cos\theta=\frac{2\sqrt{13}}{13}$; $\tan\theta=\frac{3}{2}$; $\csc\theta=\frac{\sqrt{13}}{3}$; $\sec\theta=\frac{\sqrt{13}}{2}$; $\cot\theta=\frac{2}{3}$;

معتبرًا A زاوية حادة في مثلث قائم الزاوية:

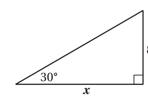
4) إذا كان $\tan A=3$ ، فأوجد $\sin A$.

0.949

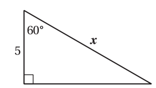
5) إذا كان $\sin A=\frac{1}{16}$ ، فأوجد $\cos A$.

0.998

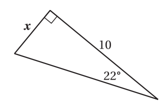
استعمل دالةً مثلثيةً لإيجاد قيمة x في كلٍّ مما يأتي. قرِّب إلى أقرب جزء من عشرة:

6) 

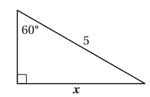
$\tan 30^\circ=\frac{8}{x}, \approx 13.9$

7) 

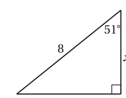
$\cos 60^\circ=\frac{5}{x}, x=10$

8) 

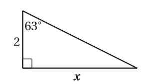
$\tan 22^\circ=\frac{x}{10}, x\approx 4.0$

9) 

$\sin 60^\circ=\frac{x}{5}; x\approx 4.3$

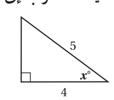
10) 

$\cos 51^\circ=\frac{x}{8}, x\approx 5$

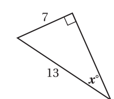
11) 

$\tan 63^\circ=\frac{x}{2}; x\approx 3.9$

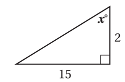
أوجد قيمة x. قرِّب إلى أقرب جزء من عشرة:

12) 

$x^\circ \approx 36.9$

13) 

$x^\circ \approx 32.6$

14) 

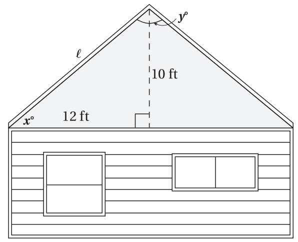
$x^\circ \approx 82.4$

الاسم: ____________ التاريخ: ________

8-1 تدريبات حل المسألة

الدوال المثلثية في المثلثات القائمة الزاوية

1) **أسقف المنازل:** بُني سقف منزل بمَيَلانٍ قدره $\frac{10}{12}$؛ بمعنى أن السقف يرتفع 10 ft مقابل كل 12 ft أفقيًا. والشكل أدناه يعطي صورة جانبية للمنزل.



ما قياس الزاوية x عند قاعدة السقف؟

≈ 39.8°

a) ما قياس الزاوية y عند قمة السقف؟

≈ 100.4°

b) ما طول حافة السقف l؟

≈ 15.6 ft

c) إذا كان طول المنزل 26 ft، فما المساحة الكلية للسقف؟

≈ 812.3 ft²

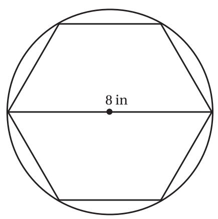
2) **بنايات:** وقف أحمد على بُعد 150 ft من قاعدة بناية، وقاس الزاوية المحصورة بين الخط الواصل من قمة البناية إلى عينه، والخط الأفقي المار بعينه فكانت 84°. إذا كان ارتفاع عينه عن الأرض 5 ft فما ارتفاع البناية؟

≈ 1432 ft

3) **مخطط بناء:** قطعة أرض على شكل مثلث قائم الزاوية. أظهر مخطط لقطعة الأرض أن قياسات زوايا المثلث هي 40°، 50° و 90°، إذا كان طول وتر قطعة الأرض 30 m، فما أطوال الضلعين الآخرين لقطعة الأرض؟

≈ 23.0 m و ≈ 19.3 m

4) **هندسة:** رُسم شكل سداسي منتظم داخل دائرة طول قطرها 8 in كما في الشكل.



a) ما محيط الشكل السداسي؟

24 in

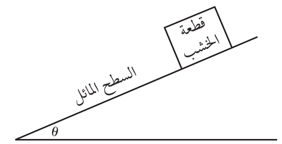
b) ما مساحة الشكل السداسي؟

≈ 41.6 in²

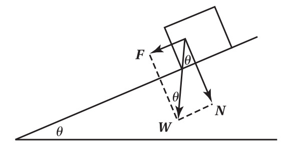
8-1 التدريبات الإثرائية

زاوية الاحتكاك

إذا وضعت قطعة من الخشب على سطحٍ مائلٍ كما في الشكل المجاور، وكانت الزاوية بين السطح المائل والأرض الأفقية θ صغيرة جدًّا، فإن قطعة الخشب لن تتحرك من مكانها. وإذا ازداد قياس الزاوية θ، فإن قطعة الخشب سوف تتغلب على قوة الاحتكاك، وتتحرك منزلقةً علَى السطح المائل.



تسمى الزاوية θ عند لحظة بدء حركة قطعة الخشب زاوية الاحتكاك، وتعتمد زاوية الاحتكاك في السطوح المائلة الملساء على نوع المواد المصنوع منها السطح المائل والقطعة الخشبية. في حين أن الزاوية لا تعتمد على مساحة سطح التلامس بين القطعة والسطح المائل، ولا تعتمد أيضًا على كتلة القطعة. يبيِّن الشكل المجاور المتجهات التي تُستعمل في حساب معامل الاحتكاك، ويتغير هذا المعامل مع تغير المواد ويرمز إليه بالرمز μ.



لتكن كتلة القطعة W، وقوة الاحتكاك F، ورد الفعل N. فإن

$F = W\sin\theta,\quad N = W\cos\theta$

$F = \mu N \quad \mu = \dfrac{\sin\theta}{\cos\theta} = \tan\theta$

نوع المادة	معامل الاحتكاك μ
خشب على أرضية خشبية.	0.5
خشب على أرضية خرسانية.	0.5
إطار مطاطي على أرضية أسفلتية جافة.	1.0
إطار مطاطي على أرضية أسفلتية مبللة.	0.7

حُلّ كلًّا مما يأتي:

1) بُني ممرٌّ خشبيٌّ مائل لنقل عربات خشبية إلى مخزن أحد المتاجر. ما قياس الزاوية التي يجب أن تكون بين الممرِّ والأرض الأفقية، حتى تتمكن العربات الخشبية من الانزلاق على الممرِّ بسرعةٍ ثابتةٍ؟

$\approx 26.6°$

2) هل يمكن أن تنزلق قطعةٌ خشبيةٌ كتلتها 100 kg على أرضيةٍ خرسانيةٍ تميل بزاوية $20°$؟ وضّح إجابتك.

لا ؛ يتعين أن تكون الزاوية $26.6°$ على الأقل .

3) إذا أبدلت القطعة الخشبية في التمرين 2 بقطعةٍ كتلتها 300 kg، فهل تتغير إجابتك؟ ولماذا؟

لا ؛ الوزن لا يؤثر في الزاوية.

4) سيارة إطاراتها من المطاط، تقف على أرضية أسفلتية جافة. إذا انزلقت على الطريق من دون دفع، فما زاوية ميلان الطريق؟

$45°$ على الأقل .

5) هل تختلف إجابة التمرين 4 إذا بدأ المطر في النزول؟ فسِّر إجابتك.

نعم ؛ يتعين أن تكون زاوية ميلان الطريق $35°$ تقريبًا لكي تنزلق إطارات السيارة .

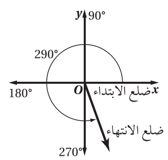
8-2 تدريبات إعادة التعليم

الزوايا وقياساتها

الزوايا المرسومة في الوضع القياسي: تُحدد الزاوية بنصفَي مستقيمين، ويُعطَى قياس الزاوية في الوضع القياسي بمقدار واتجاه الدوران من ضلع الابتداء (الضلع الذي ينطبق على المحور x) إلى ضلع الانتهاء، ويكون القياس موجبًا إذا كان الدوران عكس اتجاه عقارب الساعة، وسالبًا إذا كان الدوران في اتجاه دوران عقارب الساعة. والزوايا التي في الوضع القياسي ولها ضلع الانتهاء نفسه، تسمى زوايا مشتركة في ضلع الانتهاء.

مثال 1 ارسم زاوية قياسها $290°$ في الوضع القياسي:

يمثل محور y السالب دورانًا موجبًا بقياس $270°$. ولرسم زاوية قياسها $290°$، أدر ضلع الانتهاء $20°$ زيادة في الاتجاه المعاكس لدوران عقارب الساعة.



مثال 2 أوجد زاويتين إحداهما بقياسٍ موجبٍ والأخرى بقياسٍ سالبٍ، ومشتركتين في ضلع الانتهاء مع الزاوية المعطاة في كل مما يأتي:

a) $250°$

زاوية بقياس موجب : $250°+360°=610°$ بإضافة $360°$

زاوية بقياس سالب : $250°-360°=-110°$ بطرح $360°$

b) $-140°$

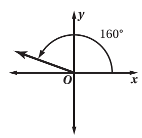
زاوية بقياس موجب : $-140°+360°=220°$ بإضافة $360°$

زاوية بقياس سالب : $-140°-360°=-500°$ بطرح $360°$

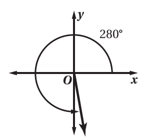
تمارين

ارسم الزوايا المُعطى قياسها في كلٍّ مما يأتي في الوضع القياسي:

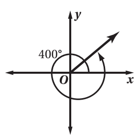
1) $160°$



2) $280°$



3) $400°$



أوجد زاويتين إحداهما بقياس موجب والأخرى بقياس سالب، ومشتركتين في ضلع الانتهاء مع الزاوية المعطاة في كلٍّ مما يأتي:

4) $65°$ **$425°, -295°$**

5) $-75°$ **$285°, -435°$**

6) $230°$ **$590°, -130°$**

7) $420°$ **$60°, -300°$**

8-2 تدريبات إعادة التعليم

(تتمة)

الزوايا وقياساتها

التحويل من القياس بالدرجات إلى القياس بالراديان والعكس: يمكن أن تقاس الزوايا **بالدرجات** أو **بالراديان**، وهما وحدتان مرتبطتان بطول القوس. والراديان الواحد هو قياس زاوية θ في الوضع القياسي، يقطع ضلع الانتهاء لها قوسٌ من الدائرة طوله يساوي طول نصف قطر الدائرة، ويرتبط القياسان من خلال المعادلتين: $2\pi\,\text{rad} = 360^\circ$ و $\pi\,\text{rad} = 180^\circ$.

القياس بالراديان والدرجات	للتحويل من القياس بالراديان إلى القياس بالدرجات، اضرب قياس الزاوية بالراديان في $\frac{180^\circ}{\pi\,\text{rad}}$ للتحويل من القياس بالدرجات إلى القياس بالراديان، اضرب قياس الزاوية بالدرجات في $\frac{\pi\,\text{rad}}{180^\circ}$
طول القوس	طول القوس من الدائرة s المقابل لزاويةٍ مركزيةٍ قياسها θ بالراديان يساوي حاصل ضرب نصف القطر r في θ؛ أي $s = r\theta$.

مثال 1 حوّل قياس الزاوية المكتوبة بالدرجات إلى الراديان، والمكتوبة بالراديان إلى الدرجات:

a) 45°

$$45^\circ = 45^\circ \cdot \frac{\pi\,\text{rad}}{180^\circ} = \frac{\pi}{4}\,\text{rad}$$

b) $\frac{5\pi}{3}\,\text{rad}$

$$\frac{5\pi}{3} = \frac{5\pi}{3} \cdot \frac{180^\circ}{\pi} = 300^\circ$$

مثال 2 دائرة طول نصف قطرها 5 cm، رُسمت فيها زاوية مركزية قياسها 135°. ما طول القوس المقابل لهذه الزاوية؟

أوجد قياس الزاوية المركزية بالراديان.

$$135^\circ = 135^\circ \cdot \frac{\pi\,\text{rad}}{180^\circ} = \frac{3\pi}{4}$$

استعمل العلاقة بين طول نصف القطر وقياس الزاوية المركزية؛ لإيجاد طول القوس.

$s = r\theta$	صيغة طول القوس
$= 5 \cdot \frac{3\pi}{4}$	بالتعويض عن r بـ 5 وعن θ بـ $\frac{3\pi}{4}$
≈ 11.78	باستعمال الآلة الحاسبة

تمارين

حوّل قياس الزاوية المكتوبة بالدرجات إلى الراديان، والمكتوبة بالراديان إلى الدرجات:

1) 140° $\mathbf{\frac{7\pi}{9}}$

2) -260° $\mathbf{-\frac{13\pi}{9}}$

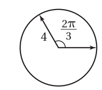
3) $-\frac{3\pi}{5}$ $\mathbf{-108^\circ}$

4) -75° $\mathbf{-\frac{5\pi}{12}}$

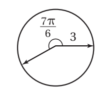
5) $\frac{7\pi}{6}$ $\mathbf{210^\circ}$

6) 380° $\mathbf{\frac{19\pi}{9}}$

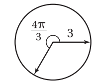
أوجد طول القوس المقابل للزاوية المركزية المعطى قياسها في كلٍّ من الدوائر الآتية. قرِّب إلى أقرب جزء من عشرة:

7)


8.4 وحدات

8)


11.0 وحدة

9)


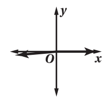
12.6 وحدة

8-2 تدريبات المهارات

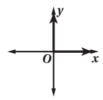
الزوايا وقياساتها

ارسم كلًّا من الزوايا المعطى قياسها في الوضع القياسي:

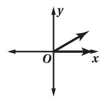
1) 185°



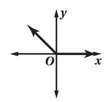
2) 810°



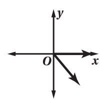
3) 390°



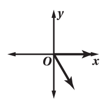
4) 495°



5) -50°



6) -420°



أوجد زاويتين إحداهما بقياسٍ موجبٍ، والأخرى بقياسٍ سالبٍ، مشتركتين في ضلع الانتهاء مع الزاوية المعطاة فيما يأتي:

7) 45° $\mathbf{405^\circ, -315^\circ}$

8) 60° $\mathbf{420^\circ, -300^\circ}$

9) 370° $\mathbf{10^\circ, -350^\circ}$

10) -90° $\mathbf{270^\circ, -450^\circ}$

11) $\frac{2\pi}{3}$ $\mathbf{\frac{8\pi}{3}, -\frac{4\pi}{3}}$

12) $\frac{5\pi}{2}$ $\mathbf{\frac{9\pi}{2}, -\frac{3\pi}{2}}$

13) $\frac{\pi}{6}$ $\mathbf{\frac{13\pi}{6}, -\frac{11\pi}{6}}$

14) $-\frac{3\pi}{4}$ $\mathbf{\frac{5\pi}{4}, -\frac{11\pi}{4}}$

حوّل قياس الزاوية المكتوبة بالدرجات إلى الراديان، والمكتوبة بالراديان إلى الدرجات:

15) 130° $\mathbf{\frac{13\pi}{18}}$

16) 720° $\mathbf{4\pi}$

17) 210° $\mathbf{\frac{7\pi}{6}}$

18) 90° $\mathbf{\frac{\pi}{2}}$

19) -30° $\mathbf{-\frac{\pi}{6}}$

20) -270° $\mathbf{-\frac{3\pi}{2}}$

21) $\frac{\pi}{3}$ $\mathbf{60^\circ}$

22) $\frac{5\pi}{6}$ $\mathbf{150^\circ}$

23) $\frac{2\pi}{3}$ $\mathbf{120^\circ}$

24) $\frac{5\pi}{4}$ $\mathbf{225^\circ}$

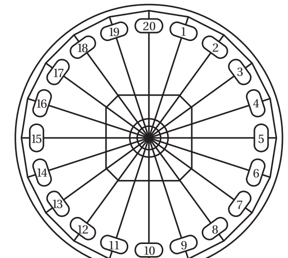
25) $\frac{-3\pi}{4}$ $\mathbf{-135^\circ}$

26) $-\frac{7\pi}{6}$ $\mathbf{-210^\circ}$

8-2 تدريبات حل المسألة

الزوايا وقياساتها

1) **مدينة الألعاب،** عجلة دوَّارة تحتوي على 20 مقعدًا مرقمة بالأعداد من 1 إلى 20 على التوالي، وتكمل هذه العجلة دورةً واحدةً حول مركزها كل 40 ثانيةً.



a) إذا كانت المقاعد على مسافات متساوية، فما قياس الزاوية المركزية التي يكوّنها المقعدان 1 و 8 بالدرجات؟

126°

b) ما سرعة العجلة الدوّارة بالدورات في الدقيقة؟

1.5 دورة في الدقيقة

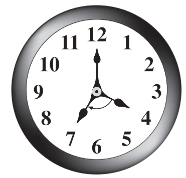
c) ما سرعة العجلة الدوّارة بالراديان في الدقيقة؟

3π rad في الدقيقة

d) ركب طفل العجلة الدوّارة مدة 6 دقائق، فما قياس الزاوية التي دارها الطفل بالراديان؟

18π rad

2) **زمن،** ما قياس الزاوية التي يكوّنها عقرب الساعات، عندما يدور من الساعة 4 مساءً، وحتى السابعة مساءً بالدرجات وبالراديان؟ وما طول القوس الذي يرسمه العقرب في هذا الزمن إذا كان طوله 6 in؟



90°، $\frac{\pi}{2}$ rad ؛ 9.4 in

3) **زمن،** ما قياس الزاوية التي يكوّنها عقرب الدقائق عندما يدور من الساعة 4 مساءً إلى الساعة 7 مساءً بالدرجات وبالراديان؟

5400° ؛ 30π rad

4) **كواكب،** تدور الأرض دورةً كاملةً حول محورها في 24 ساعة. ما الزمن الذي تستغرقه لتدور 150°؟ ويدور نبتون دورةً كاملةً حول محوره في 16 ساعةً؛ فما الزمن الذي يستغرقه ليدور 150°؟

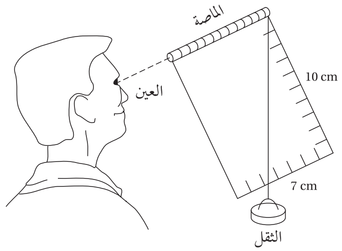
10 ساعات؛ $6\frac{2}{3}$ ساعات

8-2 التدريبات الإثرائية

صناعة الآلة ذات الربع واستعمالها

الآلة ذات الربع عبارة عن جهاز، ويمكن استعمالها لقياس ارتفاع الجسم. وتحتاج صناعة هذه الآلة إلى قطعة ورقيَّةٍ مقوَّاة مستطيلة الشكل، بُعداها 7 cm×10 cm، وماصة عصير، ولاصق شفاف، وخيط طوله 20 cm، وثقل صغير يمكن ربطه بالخيط.

درِّج حافتين من حوافِّ الورقة بمسافات كلٌّ منها 1 *cm* كما في الشكل أدناه، ثم ألصق الماصة بمحاذاة الحافة القصيرة للورقة، واربط الثقل بأحد طرفَي الخيط، وثبِّت طرف الخيط الآخر بركن الورقة العلوي كما في الشكل.



عند استعمال الآلة ذات الربع لقياس ارتفاع جسمٍ معيَّن، يجب قياس المسافة الأفقية بين قاعدة الجسم ومكان وقوف الشخص الذي يستعمل الآلة.

انظر إلى قمة الجسم الذي تريد قياس ارتفاعه من خلال الماصة، ولاحظ نقطة تقاطع الخيط الذي يعلق فيه الثقل مع التدريج الموجود عند الحافة القصيرة للورقة كما في الشكل، واستعمل المثلثات المتشابهة لإيجاد ارتفاع الجسم.

1) ارسم شكلًا لتوضيح كيفية استعمال المثلثات المتشابهة، وآلة ذات الربع لإيجاد ارتفاع جسم طويل.

انظر أعمال الطلاب

استعمل آلة ذات الربع التي صنعتها لإيجاد ارتفاع كلٍّ ممَّا يأتي:

2) سارية العلم في مدرستك.

انظر أعمال الطلاب

3) شجرة في حديقة مدرستك.

انظر أعمال الطلاب

4) أعلى نقطة في واجهة بناء مدرستك.

انظر أعمال الطلاب

5) عمود المرمى في ملعب كرة القدم.

انظر أعمال الطلاب

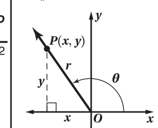
6) عمود كرة السلة.

انظر أعمال الطلاب

8-3 تدريبات إعادة التعليم

الدوال المثلثية للزوايا

الدوال المثلثية للزوايا

الدوال المثلثية للزاوية θ في الوضع القياسي 	لتكن θ زاويةً مرسومةً في الوضع القياسي، ولتكن النقطة $P(x, y)$ تقع على ضلع الانتهاء لها. باستعمال نظرية فيثاغورس، يمكن إيجاد قيمة r التي تمثل البعد بين نقطة الأصل والنقطة P. $r=\sqrt{x^2+y^2}$. فتكون الدوال المثلثية الست للزاوية θ معرفة كما يأتي: $\sin\theta=\frac{y}{r}$ $\cos\theta=\frac{x}{r}$ $\tan\theta=\frac{y}{x}, x\neq0$ $\csc\theta=\frac{r}{y}, y\neq0$ $\sec\theta=\frac{r}{x}, x\neq0$ $\cot\theta=\frac{x}{y}, y\neq0$

مثال

إذا كان ضلع الانتهاء للزاوية θ المرسومة في الوضع القياسي يمر بالنقطة $(-5, 5\sqrt{2})$. فأوجد قيم الدوال المثلثية الست للزاوية θ..

$r=\sqrt{x^2+y^2}$ نظرية فيثاغورس

$=\sqrt{(-5)^2+(5\sqrt{2})^2}$ $x=-5, y=5\sqrt{2}$

$=\sqrt{75}=5\sqrt{3}$

استعمل قيم: $x=-5, y=5\sqrt{2}$ ، $r=5\sqrt{3}$، لكتابة قيم الدوال المثلثية الست.

$\sin\theta=\frac{y}{r}=\frac{5\sqrt{2}}{5\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{6}}{3}$ $\cos\theta=\frac{x}{r}=\frac{-5}{5\sqrt{3}}=-\frac{\sqrt{3}}{3}$ $\tan\theta=\frac{y}{x}=\frac{5\sqrt{2}}{-5}=-\sqrt{2}$

$\csc\theta=\frac{r}{y}=\frac{5\sqrt{3}}{5\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{6}}{2}$ $\sec\theta=\frac{r}{x}=\frac{5\sqrt{3}}{-5}=-\sqrt{3}$ $\cot\theta=\frac{x}{y}=\frac{-5}{5\sqrt{2}}=-\frac{\sqrt{2}}{2}$

تمارين

أوجد قيم الدوال المثلثية الست للزاوية θ علمًا بأن ضلع الانتهاء للزاوية θ يمر بالنقطة المعطاة في كلٍّ مما يأتي:

1) $(8,4)$

$\sin\theta=\frac{\sqrt{5}}{5}, \cos\theta=\frac{2\sqrt{5}}{5}$

$\tan\theta=\frac{1}{2}, \csc\theta=\sqrt{5}$

$\sec\theta=\frac{\sqrt{5}}{2}, \cot\theta=2$

2) $(4,4)$

$\sin\theta=\frac{\sqrt{2}}{2}, \cos\theta=\frac{\sqrt{2}}{2},$

$\tan\theta=1, \csc\theta=\sqrt{2},$

$\sec\theta=\sqrt{2}, \cot\theta=1$

3) $(0,4)$

$\sin\theta=1, \cos\theta=0$

(غير معرفة)$\tan\theta$, $\csc\theta=1$

(غير معرفة)$\sec\theta$, $\cot\theta=0$

4) $(6,2)$

$\sin\theta=\frac{\sqrt{10}}{10}, \cos\theta=\frac{3\sqrt{10}}{10}$

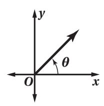
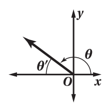
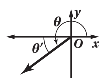
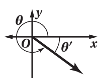
$\tan\theta=\frac{1}{3}, \csc\theta=\sqrt{10}$

$\sec\theta=\frac{\sqrt{10}}{3}=, \cot\theta=3$

8-3 تدريبات إعادة التعليم (تتمة)

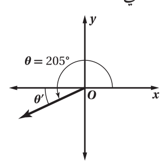
الدوال المثلثية للزوايا

الدوال المثلثية باستعمال الزوايا المرجعية: إذا كانت θ زاوية غير ربعية، ومرسومة في الوضع القياسي، فإن زاويتها المرجعية θ' هي الزاوية الحادة المحصورة بين ضلع انتهاء θ والمحور x.

قاعدة الزاوية المرجعية	الربع الأول	الربع الثاني	الربع الثالث	الربع الرابع
	 $\theta'=\theta$	 $\theta'=180°-\theta$ $(\theta'=\pi-\theta)$	 $\theta'=\theta-180°$ $(\theta'=\theta-\pi)$	 $\theta'=360°-\theta$ $(\theta'=2\pi-\theta)$

مثال 1 **ارسم زاوية قياسها $205°$ في الوقع القياسي، ثم أوجد زاويتها المرجعية.**

بما أن ضلع الانتهاء للزاوية يقع في الربع الثالث، فإن الزاوية المرجعية θ' هي: $205°-180°=25°$.



مثال 2 **استعمل زاويةً مرجعيةً لإيجاد القيمة الدقيقة لـ $\cos\frac{3\pi}{4}$.**

بما أن ضلع الانتهاء للزاوية $\frac{3\pi}{4}$ يقع في الربع الثاني، فإن الزاوية المرجعية θ' هي:

$\pi-\frac{3\pi}{4}=\frac{\pi}{4}$

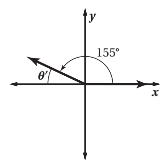
دالة جيب التمام في الربع الثاني سالبةٌ؛

إذن: $\cos\frac{3\pi}{4}=-\cos\frac{\pi}{4}=-\frac{\sqrt{2}}{2}$

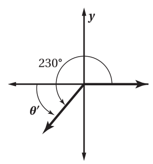
تمارين

ارسم كل زاوية مما يأتي في الوضع القياسي، ثم أوجد زاويتها المرجعية:

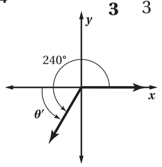
1) $155°$ $\mathbf{25°}$



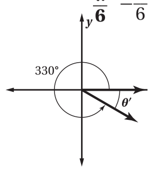
2) $230°$ $\mathbf{50°}$



3) $\frac{4\pi}{3}$ $\mathbf{\frac{\pi}{3}}$



4) $-\frac{\pi}{6}$ $\mathbf{\frac{\pi}{6}}$



أوجد القيمة الدقيقة لكل دالة مثلثية فيما يأتي:

5) $\tan 330°$ $\quad -\frac{\sqrt{3}}{3}$

6) $\cos\frac{11\pi}{4}$ $\quad -\frac{\sqrt{2}}{2}$

7) $\cot 30°$ $\quad \sqrt{3}$

8) $\csc\frac{\pi}{4}$ $\quad \sqrt{2}$

الاسم: ________ التاريخ: ________

8-3 تدريبات المهارات

الدوال المثلثية للزوايا

إذا كان ضلع الانتهاء للزاوية θ المرسومة في الوضع القياسي، يمرُّ بالنقطة المعطاة، فأوجد القيم الدقيقة للدوال المثلثية الست للزاوية θ في كلٍّ مما يأتي:

1) $(5,12)$

$\sin\theta = \frac{12}{13}, \cos\theta = \frac{5}{13}, \tan\theta = \frac{12}{5},$
$\csc\theta = \frac{13}{12}, \sec\theta = \frac{13}{5}, \cot\theta = \frac{5}{12}$

2) $(3,4)$

$\sin\theta = \frac{4}{5}, \cos\theta = \frac{3}{5}, \tan\theta = \frac{4}{3},$
$\csc\theta = \frac{5}{4}, \sec\theta = \frac{5}{3}, \cot\theta = \frac{3}{4}$

3) $(8,-15)$

$\sin\theta = -\frac{15}{17}, \cos\theta = \frac{8}{17}, \tan\theta = -\frac{15}{8},$
$\csc\theta = -\frac{17}{15}, \sec\theta = \frac{17}{8}, \cot\theta = -\frac{8}{15}$

4) $(-4,3)$

$\sin\theta = \frac{3}{5}, \cos\theta = -\frac{4}{5}, \tan\theta = -\frac{3}{4},$
$\csc\theta = \frac{5}{3}, \sec\theta = -\frac{5}{4}, \cot\theta = -\frac{4}{3}$

5) $(-9,-40)$

$\sin\theta = -\frac{40}{41}, \cos\theta = -\frac{9}{41}, \tan\theta = \frac{40}{9},$
$\csc\theta = -\frac{41}{40}, \sec\theta = -\frac{41}{9}, \cot\theta = \frac{9}{40}$

6) $(1,2)$

$\sin\theta = \frac{2\sqrt{5}}{5}, \cos\theta = \frac{\sqrt{5}}{5}, \tan\theta = 2,$
$\csc\theta = \frac{\sqrt{5}}{2}, \sec\theta = \sqrt{5}, \cot\theta = \frac{1}{2}$

7) $(3,-9)$

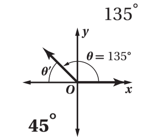
$\sin\theta = -\frac{3\sqrt{10}}{10}, \cos\theta = \frac{\sqrt{10}}{10}, \tan\theta = -3,$
$\csc\theta = -\frac{\sqrt{10}}{3}, \sec\theta = \frac{\sqrt{10}}{1}, \cot\theta = -\frac{1}{3}$

8) $(-8,12)$

$\sin\theta = \frac{3\sqrt{13}}{13}, \cos\theta = -\frac{2\sqrt{13}}{13}, \tan\theta = -\frac{3}{2},$
$\csc\theta = \frac{\sqrt{13}}{3}, \sec\theta = -\frac{\sqrt{13}}{2}, \cot\theta = -\frac{2}{3}$

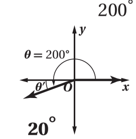
ارسم كل زاوية مما يأتي في الوضع القياسي، ثم أوجد زاويتها المرجعية:

9) 135°



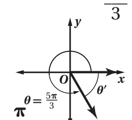
45°

10) 200°



20°

11) $\frac{5\pi}{3}$



$\frac{\pi}{3}$

أوجد القيمة الدقيقة لكل دالةٍ مثلثيةٍ مما يأتي:

12) $\sin 150^\circ$

$\frac{1}{2}$

13) $\cos 270^\circ$

0

14) $\cot 135^\circ$

-1

15) $\tan(-30^\circ)$

$-\frac{\sqrt{3}}{3}$

16) $\tan\frac{\pi}{4}$

1

17) $\cos\frac{4\pi}{3}$

$-\frac{1}{2}$

18) $\cot(-\pi)$

غير معرفة

19) $\sin\left(-\frac{3\pi}{4}\right)$

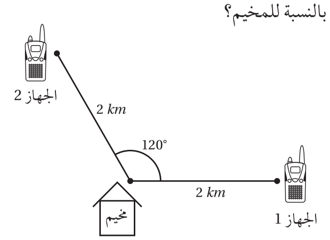
$-\frac{\sqrt{2}}{2}$

الاسم: ________ التاريخ: ________

8-3 تدريبات حل المسألة

الدوال المثلثية للزوايا

1) **أجهزة لاسلكية:** جهازا إرسال واستقبال لاسلكيان، يبعد كلٌّ منهما 2 km عن مخيم. وقياس الزاوية المحصورة بين الخطين الواصلَين من الجهازين إلى المخيم 120°. إذا كانت النقطة $(2,0)$ تمثل موقع الجهاز الأول بالنسبة للمخيم، فما النقطة التي تمثل موقع الجهاز الثاني بالنسبة للمخيم؟



$(-1, \sqrt{3})$

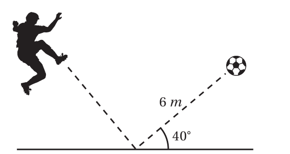
2) **ساعات:** إذا كان بندول ساعة حائط يتحرك ذهابًا وإيابًا على قوسٍ دائريَّةٍ، علمًا بأن قياس الزاوية التي يصنعها البندول يُعبَّر عنه بالعلاقة $\theta = 0.3\cos\left(\frac{\pi}{2} + 5t\right)$، حيث t: الزمن بالثواني. أوجد قياسات الزوايا بالراديان المقابلة لقيم t: $0, 0.5, 1, 1.5, 2, 2.5, 3$.

0, −0.18, 0.28, −0.28, 0.16, 0.02, −0.20

3) **عجلة دوارة:** ركب وليد عجلةً دوّارةً، نصف قطرها 60 m، وارتفاع أخفض عربةٍ عن الأرض فيها 5 m. إذا تحرَّكت العجلة عندما كان وليد في أخفض عربة، ودار بزاوية مقدارها 210.5°، ثم توقفت العجلة. فكم كان ارتفاع عربة وليدٍ عن الأرض عندما توقفت؟

60.8 m

4) **كرة قدم:** ركل لاعب كرة قدم الكرة في اتجاه حائطٍ، فارتدت الكرة عنه بزاويةٍ قياسها 40°. ما بُعد الكرة عن الحائط عندما قطعت 6 m في مسار ارتدادها؟



3.9 m

5) **طائرة ورقية:** المعادلة: $R = \frac{V_0^2 \sin 2\theta}{32} + 15\cos\theta$ تُعبِّر عن المسافة التي تقطعها طائرة ورقية عند قذفها بسرعة ابتدائية V_0 قدم/ثانية بزاوية قياسها θ مع الأرض.

a) إذا قُذفت الطائرة بسرعة ابتدائية مقدارها 15 قدمًا/ثانية بزاوية قياسها 25°، فما المسافة التي ستقطعها؟

19 ft

b) قُذفت طائرتان ورقيتان بسرعة ابتدائية قدرها 10 أقدام / ثانية لكلٍّ منهما، إحداهما بزاوية قياسها 15° والأخرى بزاوية قياسها 45°. فأيّتُهما ستقطع مسافة أكبر من الأخرى؟

الطائرة التي قُذفت بزاوية قياسها 15°.

الاسم: ________ التاريخ: ________

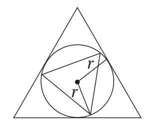
8-3 التدريبات الإثرائية

مساحات المضلعات والدوائر

المضلع المنتظم هو مضلعٌ أطوال أضلاعه متساوية، وقياسات زواياه متساوية، ويمكن رسم المضلع المنتظم داخل دائرة ويمكن رسم دائرة بداخله. ويمكن استعمال الصيغتين الآتيتين لحساب مساحة المضلع المنتظم الذي عدد أضلاعه (n)، والمرسوم داخل دائرة نصف قطرها (r) أو خارجها:

مساحة المضلع المرسوم داخل الدائرة: $A_I = \frac{nr^2}{2} \times \sin \frac{360^\circ}{n}$

مساحة المضلع المرسوم خارج الدائرة: $A_c = nr^2 \times \tan \frac{180^\circ}{n}$



استعمل الآلة الحاسبة لإكمال الجدول التالي بالنسبة لدائرة الوحدة (الدائرة التي طول نصف قطرها وحدة واحدة).

	عدد الأضلاع	مساحة المضلع الداخلي	مساحة الدائرة مطروحًا منها مساحة المضلع الداخلي	مساحة المضلع الخارجي	مساحة المضلع الخارجي مطروحًا منها مساحة الدائرة
(1	3	1.2990381	1.8425545	5.1961524	2.054597
(2	4	**2**	**1.1415927**	**4**	**0.8584073**
(3	8	**2.8284271**	**0.3131655**	**3.3137085**	**0.1721158**
(4	12	**3**	**0.1415926**	**3.2153903**	**0.0737977**
(5	20	**3.0901699**	**0.0514227**	**3.1676888**	**0.0260961**
(6	24	**3.1058285**	**0.0357641**	**3.1596599**	**0.0180672**
(7	28	**3.1152931**	**0.0262996**	**3.1548423**	**0.0132496**
(8	32	**3.1214452**	**0.0201475**	**3.1517249**	**0.0101322**
(9	1000	**3.1415720**	**0.0000206**	**3.1416030**	**0.0000103**

(10 ما العدد الذي تقترب منه مساحة كلٍّ من المضلع الداخلي والمضلع الخارجي؟

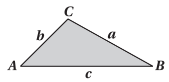
π

الاسم: ________ التاريخ: ________

8-4 تدريبات إعادة التعليم

قانون الجيوب

إيجاد مساحة مثلث: مساحة المثلث تساوي نصف حاصل ضرب طولَي أيِّ ضلعين فيه في جيب الزاوية المحصورة بينهما.

مساحة المثلث	$A = \frac{1}{2} bc \sin A$ $A = \frac{1}{2} ac \sin B$ $A = \frac{1}{2} ab \sin C$	

مثال أوجد مساحة ΔABC مقربة إلى أقرب جزء من عشرة.

في ΔABC، $a=10, b=14, C=40^\circ$

$A = \frac{1}{2} ab \sin C$ صيغة مساحة المثلث

$= \frac{1}{2}(10)(14) \sin 40^\circ$ بالتعويض

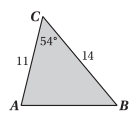
≈ 44.9951 بالتبسيط

مساحة المثلث تساوي 45 وحدةً مربعةً تقريبًا.

تمارين

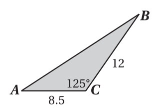
أوجد مساحة كلٍّ من المثلثات الآتية مقربًا إلى أقرب جزء من عشرة.

(1



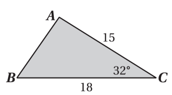
62.3 وحدة مربعة

(2



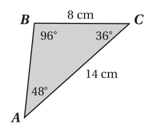
41.8 وحدة مربعة

(3



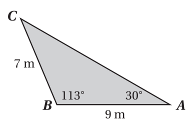
71.5 وحدة مربعة

(4



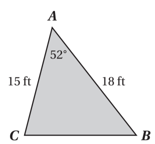
32.9 cm²

(5



29.0 m²

(6



106.4 ft²

(7 $A = 20^\circ, b = 7\ cm, c = 4\ cm$ **$4.8\ cm^2$**

(8 $C = 55^\circ, a = 10\ m, b = 15\ m$ **$61.4\ m^2$**

(9 $B = 42^\circ, a = 3\ ft, c = 9\ ft$ **$9\ ft^2$**

(10 $A = 53^\circ, b = 13\ in, c = 15\ in$ **$77.9\ in^2$**

(11 $C = 85^\circ, a = 12\ cm, b = 8\ cm$ **$47.8\ cm^2$**

الاسم: ______ التاريخ: ______

8-4 تدريبات إعادة التعليم

(تتمة)

قانون الجيوب

استعمال قانون الجيوب لحل المثلثات: يمكن استعمال قانون الجيوب لحَلِّ أيِّ مثلثٍ، إذا عُلم فيه قياس زاويتين وطول الضلع المقابل لإحداهما، أو إذا عُلم طولا ضلعين فيه، وقياس الزاوية المقابلة لأحدهما.

قانون الجيوب	$\frac{\sin A}{a}=\frac{\sin B}{b}=\frac{\sin C}{c}$

المثلثات الممكن حلها بمعرفة طولي ضلعين وقياس الزاوية المقابلة لأحدهما.	افرض أن قيمة كل من A, a, b للمثلث ABC معطاة.
	إذا كانت A حادة فإن: $a<b\sin A \Leftarrow$ لا يوجد حل؛ $a=b\sin A \Leftarrow$ يوجد حل واحد؛ $b>a>b\sin A \Leftarrow$ يوجد حلان؛ $a>b \Leftarrow$ يوجد حل واحد
	إذا كانت A قائمة أو منفرجة فإن: $a\le b \Leftarrow$ لا يوجد حل؛ $a>b \Leftarrow$ يوجد حل واحد

مثال حدد ما إذا كان للمثلث ABC حل واحد أم حلان أم ليس له حل، وأوجد الحلول مقربًا أطوال الأضلاع إلى أقرب جزءٍ من عشرةٍ، وقياسات الزوايا إلى أقرب درجة:

a) $A=48^\circ$, $a=11$, $b=16$

بما أن A حادة، أوجد قيمة $b\sin A$ وقارنها مع قيمة a.

$b\sin A=16\sin 48^\circ\approx 11.89$ ، وبما أن $11<11.89$، فإنه لا يوجد حل للمثلث.

b) $A=34^\circ, a=6, b=8$

بما أن A حادة، أوجد قيمة $b\sin A$ وقارنها مع قيمة a؛ $b\sin A=8\sin 34^\circ\approx 4.47$ ، وبما أن $8>6>4.47$، فإنه يوجد للمثلث حلان:

الحالة1: $\angle B$ حادة

استعمل قانون الجيوب لإيجاد B.

$\frac{\sin B}{8}=\frac{\sin 34^\circ}{6}$

$\sin B\approx 0.7456$

$B\approx 48^\circ$

قياس الزاوية C يساوي $98^\circ=(48^\circ+34^\circ)-180$ تقريبًا.

استعمل قانون الجيوب مرةً أخرى لإيجاد قيمة c.

$\frac{\sin 98^\circ}{c}\approx\frac{\sin 34^\circ}{6}$

$c\approx\frac{6\sin 98^\circ}{\sin 34^\circ}$

$c\approx 10.6$

الحالة2: $\angle B$ منفرجة

لإيجاد قيمة B يتعين إيجاد الزاوية المنفرجة التي جيبها 0.7456 وذلك بطرح 48° من 180°، إذن $B\approx 132^\circ$

قياس الزاوية C يساوي $(132+34)-180$، أي 14° تقريبًا.

استعمل قانون الجيوب لإيجاد قيمة c.

$\frac{\sin 14^\circ}{c}\approx\frac{\sin 34^\circ}{6}$

$c\approx\frac{6\sin 14^\circ}{\sin 34^\circ}$

$c\approx 2.6$

تمارين

حدِّد ما إذا كان للمثلث ABC حل واحد أم حلان أم ليس له حل، وأوجد الحلول مقربًا أطوال الأضلاع إلى أقرب جزء من عشرة، وقياسات الزوايا إلى أقرب درجة.

1) $A=50^\circ, a=34, b=40$

يوجد حلان. $B\approx 64^\circ, C\approx 66^\circ, c\approx 40.4$; $B\approx 116^\circ, C\approx 14^\circ, c\approx 11.0$

2) $A=24^\circ, a=3, b=8$

لا يوجد حل.

3) $A=125^\circ, a=22, b=15$

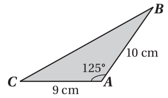
يوجد حل واحد. $B\approx 34^\circ, C\approx 21^\circ, c\approx 9.6^\circ$

الاسم: ______ التاريخ: ______

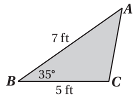
8-4 تدريبات المهارات

قانون الجيوب

أوجد مساحة ΔABC إلى أقرب جزء من عشرة.

1) 

36.9 cm²

2) 

10.0 ft²

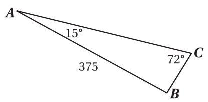
3) $A=35^\circ, b=3\text{ ft}, c=7\text{ ft}$ **6.0 ft²**

4) $C=148^\circ, a=10\text{ cm}, b=7\text{ cm}$ **18.5 cm²**

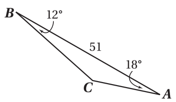
5) $C=22^\circ, a=14\text{ m}, b=8\text{m}$ **21.0 m²**

6) $B=93^\circ, c=18\text{ mi}, a=42\text{ mi}$ **377.5 mi²**

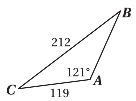
حُلّ كلًّا من المثلثات الآتية، وقرّب الأطوال إلى أقرب جزء من عشرة، وقياسات الزوايا إلى أقرب درجة:

7) 

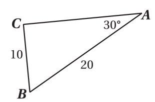
$B=93^\circ, a\approx 102.1$, $b\approx 393.8$

8) 

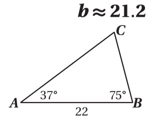
$C=150^\circ, a\approx 31.5$, $b\approx 21.2$

9) 

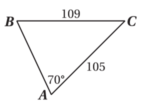
$B\approx 29^\circ, C\approx 30^\circ$, $c\approx 123.6$

10) 

$B=60^\circ, C=90^\circ$, $b\approx 17.3$

11) 

$C=68^\circ, a=14.3^\circ$, $b\approx 22.9$

12) 

$B=65^\circ, C=45^\circ$, $c\approx 82.2$

حدِّد ما إذا كان لكل مثلث مما يأتي حل واحد أم حلان أم ليس له حل، وأوجد الحلول مقربًا أطوال الأضلاع إلى أقرب جزءٍ من عشرةٍ، وقياسات الزوايا إلى أقرب درجة:

13) $A=30^\circ, a=1, b=4$ — **لا يوجد حل.**

14) $A=30^\circ, a=2, b=4$ — **يوجد حل واحد؛** $B=90^\circ, C=60^\circ, c\approx 3.5$

15) $A=30^\circ, a=3, b=4$ — **يوجد حلان؛** $B\approx 42^\circ, C\approx 108^\circ, c\approx 5.7$; $B\approx 138^\circ, C\approx 12^\circ, c\approx 1.2$

16) $A=38^\circ, a=10, b=9$ — **يوجد حل واحد؛** $B\approx 34^\circ, C\approx 108^\circ, c\approx 15.4$

17) $A=78^\circ, a=8, b=5$ — **يوجد حل واحد؛** $B\approx 38^\circ, C\approx 64^\circ, c\approx 7.4$

18) $A=133^\circ, a=9, b=7$ — **يوجد حل واحد؛** $B\approx 35^\circ, C=12^\circ, c\approx 2.6$

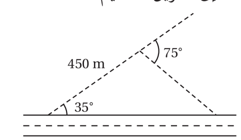
19) $A=127^\circ, a=2, b=6$ — **لا يوجد حل.**

20) $A=109^\circ, a=24, b=13$ — **يوجد حل واحد؛** $B\approx 31^\circ, C=40^\circ, c\approx 16.4$

8-4 تدريبات حل المسألة

قانون الجيوب

1) **مشي:** يسير نواف في طريق مستقيم، فقرَّر أن يسير في ممرٍّ يصنع زاويةً قياسها 35° مع الطريق المستقيم، وبعد أن سار مسافة 450 m، استدار بزاويةٍ قياسها 75° درجةً عائدًا إلى الطريق المستقيم.

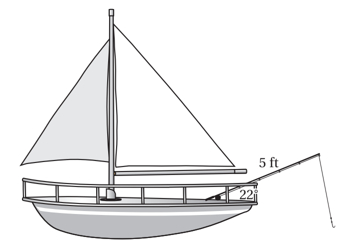


a) ما المسافة التي يتعيَّن أن يقطعها نوافٌ على هذا المسار ليعود إلى الطريق؟
402 m

b) كم سيكون بُعد علي عن نقطة الانطلاق عندما يعود إلى الطريق؟
676 m

2) **تسلق الصخور:** لاحظ أحد متسلِّقي الجبال في لحظةٍ معينةٍ أثناء تسلُّقه جدارًا صخريًّا أنه يستطيع رؤية قمة وقاع جبل مقابل له. ووجد أن زاوية انخفاض قاع الجبل 36° وزاوية ارتفاع قمة الجبل 42°. إذا كان ارتفاع ذلك الجبل 2000 ft، وقاعدته على مستوى سطح البحر، فما ارتفاع المتسلِّق عن مستوى سطح البحر إلى أقرب قدمٍ؟
893 ft

3) **صيد الأسماك:** وُضِعت عصا صنارة صيد سمك على سطح قاربٍ مرتكزةً على حافَّته بزاوية قياسها 22° مع سطح القارب. فإذا كان طول العصا 5 ft، وطول الخيط المعلقة به الصنارة 3 ft من حافة العصا، وكانت حركة القارب تُسبب حركة للصنارة ذهابًا وإيابًا، فأوجد قياس الزاوية التي يجب أن يصنعها الخيط مع العصا، حتى تكون الصنارة على مستوى سطح القارب.
16.6° أو 119.4°



4) **كاميرات مراقبة:** وُضعت كاميرات مراقبة على سطح مبنى على بُعد مسافة معيَّنةٍ عن طريقٍ مستقيم. وكانت الكاميرات تدور عكس اتجاه عقارب الساعة بسرعة ثابتة تبلغ دورة واحدة في الدقيقة. وفي لحظة معينة كانت الكاميرا في مواجهة نقطة على الطريق، وتبعد عن الكاميرا 20 m. وبعد أربع ثوان كانت الكاميرا تواجه نقطة على بُعد 10 m من النقطة الأولى على الطريق.

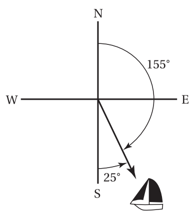
a) ما قياس الزاوية التي دارتها الكاميرا في 4 ثوانٍ؟
24°

b) ما المسافة بين الكاميرا والطريق إلى أقرب جزءٍ من عشرةٍ من المتر؟
19.6 m

8-4 التدريبات الإثرائية

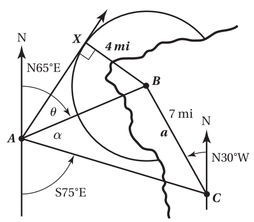
الملاحة

زاوية اتجاه القارب هي الزاوية التي يصنعها خط سيره مع اتجاه الشمال، ويمكن قياسها مع أي اتجاه من الاتجاهات الجغرافية الأربعة. وفي الشكل المجاور زاوية اتجاه القارب هي 155°، ويمكن القول بأن زاوية اتجاه القارب هي 25° شرق الجنوب.



مثال

يمكن رؤية المنارة B باتجاه 65° شرق الشمال ومئذنة مسجد C باتجاه 75° شرق الجنوب أيضًا من القارب A الذي في عرض البحر. وبناءً على الخريطة، فإن B تبعد 7 mi عن C باتجاه 30° غرب الشمال، وحتى لا يقترب القارب A من الشاطئ، أوجد الاتجاه الذي يجب أن يسير فيه، على أن يسير على بُعد 4 mi من B.



في ΔABC:

$\angle\alpha = 180^\circ - 65^\circ - 75^\circ = 40^\circ$

$\angle C = 180^\circ - 30^\circ - (180^\circ - 75^\circ)$

$= 45^\circ$

$a = 7\ (mi)$

باستعمال قانون الجيوب

$$AB = \frac{a \sin C}{\sin \alpha} = \frac{7(\sin 45^\circ)}{\sin 40^\circ} = 7.7\ (mi)$$

نصف المستقيم الذي يحدد الاتجاه الصحيح للقارب A هو مماسٌّ عند النقطة X لدائرة مركزها B ونصف قطرها $BX=4$ mi؛ إذن ΔABX قائم الزاوية، و $\sin\theta = \frac{BX}{AB} = \frac{4}{7.7} \approx 0.519$. وعليه تكون $\angle\theta = 31.3^\circ$. اتجاه A هو $65^\circ - 31.3^\circ = 33.7^\circ$ شرق الشمال.

تمارين:

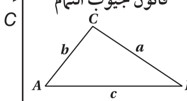
1) افترض أن المنارة B في المثال السابق موجهة في اتجاه 30° غرب الجنوب نحو السفينة P إلى الشمال من النقطة C. أوجد الاتجاه الذي تتخذه P لتمرَّ على بُعد 4 mi من النقطة B.
64.6° غرب الجنوب

2) تمكَّن الراصد في المنارة –خلال الضباب– من تحديد قاربٍ على بُعد 18 mi يسير باتجاه الشاطئ، وكان اتجاه المنارة في تلك اللحظة بالنسبة للقارب 80° شرق الجنوب. فما الاتجاه الذي سيحدِّده الراصد للقارب، ليصل إلى نقطةٍ على الشاطئ تبعد 4 أميالٍ جنوب المنارة؟
87.2° شرق الجنوب

8-5 تدريبات إعادة التعليم

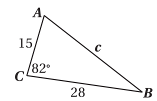
قانون جيوب التمام

استعمال قانون جيوب التمام لحل المثلثات

قانون جيوب التمام 	إذا كانت أضلاع $\triangle ABC$ التي أطوالها a , b , c تقابل الزوايا ذات القياسات A , B , C على الترتيب، فإن العلاقات الآتية تكون صحيحة: $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A$ $b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cos B$ $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos C$

يمكنك استعمال قانون جيوب التمام لحل المثلث، إذا عُلم طولا ضلعين فيه، وقياس الزاوية المحصورة بينهما، أو إذا عُلمت أطوال أضلاعه الثلاثة.

مثال حل $\triangle ABC$ مقربًا طول الضلع إلى أقرب جزء من عشرة وقياسي الزاويتين إلى أقرب درجة.



المثلث معلوم فيه طولا ضلعين وقياس الزاوية المحصورة بينهما.

استعمل قانون جيوب التمام لإيجاد قيمة c

$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos C$

$c^2 = 28^2 + 15^2 - 2(28)(15) \cos 82^\circ$

$c^2 \approx 892.09$

$c \approx 29.9$

يمكنك الآن استعمال قانون الجيوب لإيجاد قياس الزاوية A.

$\frac{\sin A}{a} = \frac{\sin C}{c}$

$\frac{\sin A}{28} \approx \frac{\sin 82^\circ}{29.9}$

$\sin A \approx 0.9273$

$A \approx 68^\circ$

قياس الزاوية B تقريبًا: $180 - (82 + 68) = 30$.

تمارين

حُلّ كلًا من المثلثات الآتية مقربًا أطوال الأضلاع إلى أقرب جزء من عشرة، وقياسات الزوايا إلى أقرب درجة:

1) $a=14, c=20, B=38^\circ$

$b \approx 12.4, A \approx 44^\circ, C \approx 98^\circ$

2) $A=60^\circ, c=17, b=12$

$a \approx 15.1, B \approx 43^\circ, C \approx 77^\circ$

3) $a=4, b=6, c=3$

$A \approx 36^\circ, B \approx 118^\circ, C \approx 26^\circ$

4) $A=103^\circ, b=31, c=52$

$a \approx 66, B \approx 27^\circ, C \approx 50^\circ$

5) $a=15 , b=26=c=132^\circ$

$c \approx 38, A \approx 17^\circ, B \approx 31^\circ$

6) $a=31, b=52, c=43$

$A \approx 36^\circ, B \approx 88^\circ, C \approx 56^\circ$

8-5 تدريبات إعادة التعليم

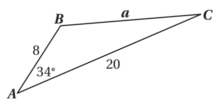
قانون جيوب التمام

(تتمة)

اختيار الطريقة المناسبة لحل المثلثات.

	المعطيات	ابدأ الحل باستعمال
حل مثلث	قياسا زاويتين وطول أي ضلع.	قانون الجيوب
	طولا ضلعين وقياس الزاوية المقابلة لأحدهما.	قانون الجيوب
	طولا ضلعين وقياس الزاوية المحصورة بينهما.	قانون جيوب التمام
	أطوال الأضلاع الثلاثة.	قانون جيوب التمام

مثال حدد القانون (الجيوب أم جيوب التمام) الذي يجب بدء استعماله حل المثلث، ثم حل المثلث.



لما كان معلومًا من المثلث طولا ضلعين وقياس الزاوية المحصورة بينهما، فإنه يتعين عليك أن تبدأ الحل باستعمال قانون جيوب التمام.

$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A$ قانون جيوب التمام

$a^2 = 20^2 + 8^2 - 2(20)(8) \cos 34^\circ$ $A=34^\circ, b=20, c=8,$

$a^2 \approx 198.71$ باستعمال الآلة الحاسبة للتبسيط

$a \approx 14.1$ باستعمال الآلة الحاسبة للتبسيط

استعمل قانون الجيوب لإيجاد B.

$\frac{\sin B}{b} = \frac{\sin A}{a}$ قانون الجيوب

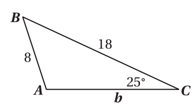
$\sin B \approx \frac{20 \sin 34^\circ}{14.1}$ $A = 34^\circ, a \approx 14.1, b = 20,$

$B \approx 128^\circ$ باستعمال الدالة $\sin^{-1}$

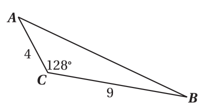
إذن قياس الزاوية C تقريبًا $18^\circ = (34+128) - 180$.

تمارين

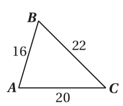
حدد القانون (الجيوب أم جيوب التمام) الذي يجب بدء استعماله حل المثلث في كل مما يأتي، ثم حُلّ المثلث.

1) 

قانون الجيوب؛
$A \approx 108^\circ, B \approx 47^\circ, b \approx 13.8$

2) 

قانون جيوب التمام؛
$c \approx 11.9, B \approx 15^\circ, A \approx 37^\circ$

3) 

قانون جيوب التمام؛
$A \approx 74^\circ, B \approx 61^\circ, C \approx 45^\circ$

4) $A = 58^\circ, a = 12, b = 8$

قانون الجيوب؛
$B \approx 37^\circ, C \approx 85^\circ, c \approx 14.1$

5) $a = 28, b = 35, c = 20$

قانون جيوب التمام؛
$A \approx 35^\circ, B \approx 92^\circ, C \approx 35^\circ$

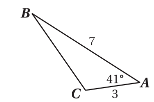
6) $A = 82^\circ, B = 44^\circ, b = 11$

قانون الجيوب؛
$C \approx 54^\circ, a \approx 15.7^\circ, c \approx 12.8^\circ$

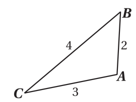
8-5 تدريبات المهارات

قانون جيوب التمام

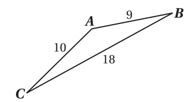
حُل كلًّا من المثلثات الآتية، مقرّبًا الأطوال إلى أقرب جزء من عشرة، وقياسات الزوايا إلى أقرب درجة:

1)


$B\approx23^\circ, C\approx116^\circ, a\approx5.1$

2)


$A\approx104^\circ, B\approx47^\circ, C\approx29^\circ$

3)


$A\approx143^\circ, B\approx20^\circ, C\approx18^\circ$

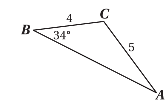
4) $C=71^\circ, a=3, b=4$

$A\approx44^\circ, B\approx67^\circ, c\approx4.1$

5) $C = 35^\circ, a = 5, b = 8$

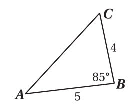
$A\approx37^\circ, B\approx107^\circ, c\approx4.8$

حدد القانون (الجيوب أم جيوب التمام) الذي يتعين بدء استعماله لحل المثلث في كل مما يأتي، ثم حُلّ المثلث.

6)


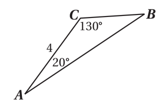
قانون الجيوب؛

$A\approx27^\circ, C\approx119^\circ, c\approx7.8$

7)


قانون جيوب التمام؛

$A\approx41^\circ, C\approx55^\circ, b\approx6.1$

8)


قانون الجيوب؛

$B\approx30^\circ, a\approx2.7^\circ, c\approx6.1$

9) $A = 11^\circ, C = 27^\circ, c = 50$

قانون الجيوب؛

$B\approx142^\circ, a\approx21.0^\circ, b\approx67.8$

10) $B = 47^\circ, a = 20, c = 24$

قانون جيوب التمام؛

$b\approx17.9, C\approx79^\circ, A\approx55^\circ$

11) $A = 71^\circ, C = 62^\circ, a = 20$

قانون الجيوب؛

$B=47^\circ, b\approx15.5, c\approx18.7$

12) $a = 5, b = 12, c = 13$

قانون جيوب التمام؛

$A\approx23^\circ, B\approx67^\circ, C\approx90^\circ$

13) $A = 51^\circ, b = 7, c = 10$

قانون جيوب التمام؛

$a\approx7.8, C\approx85^\circ, B\approx44^\circ$

14) $a = 13, A = 41^\circ, B = 75^\circ$

قانون الجيوب؛

$c\approx17.8, b\approx19.1, C=64^\circ$

15) $B = 125^\circ, a = 8, b = 14$

قانون الجيوب؛

$A\approx28^\circ, C\approx27^\circ, c\approx7.8$

16) $a = 5, b = 6, c = 7$

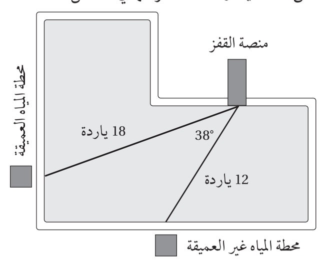
قانون جيوب التمام؛

$A\approx44^\circ, B\approx57^\circ, C\approx78^\circ$

8-5 تدريبات حل المسألة

قانون جيوب التمام

1) **بركة سباحة:** يمثل الشكل أدناه بركة سباحة، وبجانبها محطتا إنقاذ واحدة من جهة المياه العميقة، والأخرى من جهة المياه غير العميقة. والمسافة بين كل من المحطتين ومنصة القفز كما في الشكل.



a) إذا تبادل المنقذان أماكنهما سباحة، فما المسافة التي يقطعها أحدهما للانتقال من محطة المياه العميقة إلى محطة المياه غير العميقة؟

11.3 ياردة

b) إذا كان المنقذ عند محطة المياه العميقة مواجهًا تمامًا لقاعدة المنصة، فما قياس الزاوية التي يجب أن يستديرها ليواجه محطة المياه غير العميقة؟

41.8°

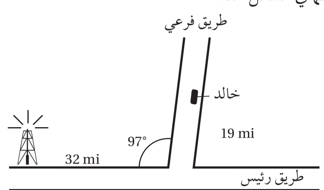
2) مخيم للكشافة له بوابتان A و B المسافة بينهما 80 m. يقع مكتب مدير المخيم عند النقطة O على بعد 95 m من A وعلى بعد 115 m من B. ما قياس الزاوية AOB؟

43.5°

3) **دراجات:** تحرك طفلان بدراجتيهما من نقطة A في مسارين مستقيمين، قياس الزاوية بينهما 15°. فإذا قطع الطفل الأول مسافة 5 m، والثاني 7 m، فما المسافة بينهما في تلك اللحظة؟

2.5 m

4) **تقنية:** مع خالد جهاز اتصال لاسلكي يمكنه استعماله إذا كان في مدى لا يزيد على 40 mi عن برج البث. إذا قاد خالد سيارته مسافة 32 mi من برج البث على طريق رئيس ثم سار في طريق فرعية مسافة 19 mi آخر كما في الشكل أدناه.



a) هل يستطيع خالد استعمال الجهاز من هذا المكان؟ وضح إجابتك.

نعم، إنه على بُعد 39.2 mi عن البرج.

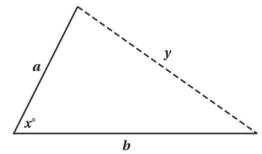
b) إذا كان خالد في مدى البث عند هذه النقطة، فكم المسافة التي يجب أن يسيرها على الطريق الفرعي ليخرج من مدى البث؟ وإذا كان خارج مدى البث، فما المسافة التي يجب أن يسيرها عائدًا ليكون في مدى البث.

إنه ضمن مدى البث، ويبقى في مدى البث أيضًا إن سار 1.4 mi مبتعدًا.

الاسم: ______ التاريخ: ______

8-5 التدريبات الإثرائية

قانون جيوب التمام ونظرية فيثاغورس



يحمل قانون جيوب التمام الكثير من الشبه مع نظرية فيثاغورس. ووفقًا لقانون جيوب التمام إذا كان a و b طولي ضلعين في مثلث وقياس الزاوية بينهما هو x° فإن طول الضلع الثالث y يمكن الحصول عليه باستعمال المعادلة $y^2=a^2+b^2-2ab\cos x^\circ$.

أجب عن الأسئلة الآتية لتوضيح العلاقة بين قانون جيوب التمام ونظرية فيثاغورس:

1) ما القيمة التي تصلها $\cos x^\circ$ إذا صغرت قيمة x° بدرجة كبيرة؟

1

2) إذا كانت x° قريبة جدًا من الصفر ثم بدأت بالزيادة، فما القيمة التي تقترب منها $\cos x^\circ$ كلما اقتربت x° من 90°؟

تتناقص، وتصل إلى الصفر.

3) إذا كانت قيمة x° تساوي 90° فما قيمة $\cos x^\circ$؟ وكيف تصبح المعادلة $y^2=a^2+b^2-2ab\cos x^\circ$ في هذه الحالة؟

0، $y^2=a^2+b^2$

4) ما الذي يحصل لقيمة $\cos x^\circ$ إذا بدأت قيمة x° في الزيادة من 90° إلى 180°؟

تتناقص من صفر إلى -1.

5) ليكن $a=7$ و $b=19$، فاستعمل الحاسبة البيانية لتمثيل الدالة الناتجة عن حل المعادلة $y^2=7^2+19^2-2(7)(19)\cos x$ بالنسبة لـ y.

انظر تمثيلات الطلاب.

a) ما مدى قيم x° من وجهة نظر هندسية؟

القيمة العظمى = 180°، والقيمة الصغرى = 0°.

b) ارسم المنحنى باستعمال ميزة TRACE في الحاسبة البيانية. ما القيم العظمى والصغرى للدالة؟

انظر تمثيلات الطلاب.

c) كيف ترتبط القيمتان 7 و 19 بإجابة فرع **b**؟ وهل يمكن فعلًا الحصول على القيمتين العظمى والصغرى في فرع **b** هندسيًّا؟

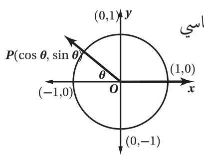
العظمى $=7+19$، الصغرى $=19-7$؛ لا.

الاسم: ______ التاريخ: ______

8-6 تدريبات إعادة التعليم

الدوال الدائرية

الدوال الدائرية

تعريف الجيب وجيب التمام	إذا قطع ضلع الانتهاء للزاوية θ المرسومة في الوضع القياسي دائرة الوحدة في النقطة $p(x,y)$ فإن $\cos\theta=x$, $\sin\theta=y$. لذا يمكن كتابة إحداثيات النقطة P على الصورة $P(\cos\theta, \sin\theta)$. 

مثال

إذا كان ضلع الانتهاء للزاوية θ المرسومة في الوضع القياسي يقطع دائرة الوحدة عند النقطة $P(-\frac{5}{6}, \frac{\sqrt{11}}{6})$، فأوجد كلًّا من $\cos\theta, \sin\theta$.

$P(-\frac{5}{6}, \frac{\sqrt{11}}{6})$ إذن $\sin\theta=\frac{\sqrt{11}}{6}$, $\cos\theta=-\frac{5}{6}$

تمارين

إذا كان ضلع الانتهاء للزاوية θ المرسومة في الوضع القياسي يقطع دائرة الوحدة في النقطة المعطاة، فأوجد قيمة كل من $\cos\theta, \sin\theta$:

1) $P\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}\right)$

$\boldsymbol{\sin\theta=\frac{1}{2}, \cos\theta=-\frac{\sqrt{3}}{2}}$

2) $P(0, -1)$

$\boldsymbol{\sin\theta=-1, \cos\theta=0}$

3) $P\left(-\frac{2}{3}, \frac{\sqrt{5}}{3}\right)$

$\boldsymbol{\sin\theta=\frac{\sqrt{5}}{3}, \cos\theta=-\frac{2}{3}}$

4) $P\left(-\frac{4}{5}, -\frac{\sqrt{3}}{5}\right)$

$\boldsymbol{\sin\theta=-\frac{\sqrt{3}}{5}, \cos\theta=-\frac{4}{5}}$

5) $P\left(\frac{1}{6}, -\frac{\sqrt{35}}{6}\right)$

$\boldsymbol{\sin\theta=-\frac{\sqrt{35}}{6}, \cos\theta=\frac{1}{6}}$

6) $P\left(\frac{\sqrt{7}}{4}, \frac{3}{4}\right)$

$\boldsymbol{\sin\theta=\frac{3}{4}, \cos\theta=\frac{\sqrt{7}}{4}}$

7) P تقع على ضلع الانتهاء للزاوية $\theta=45^\circ$.

$\boldsymbol{\sin\theta=\frac{\sqrt{2}}{2}, \cos\theta=\frac{\sqrt{2}}{2}}$

8) P تقع على ضلع الانتهاء للزاوية $\theta=120^\circ$.

$\boldsymbol{\sin\theta=\frac{\sqrt{3}}{2}, \cos\theta=-\frac{1}{2}}$

9) P تقع على ضلع الانتهاء للزاوية $\theta=240^\circ$.

$\boldsymbol{\sin\theta=-\frac{\sqrt{3}}{2}, \cos\theta=-\frac{1}{2}}$

10) P تقع على ضلع الانتهاء للزاوية $\theta=330^\circ$.

$\boldsymbol{\sin\theta=-\frac{1}{2}, \cos\theta=\frac{\sqrt{3}}{2}}$

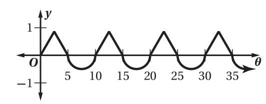
8-6 تدريبات إعادة التعليم (تتمة)

الدوال الدائرية

الدوال الدورية :

الدالة الدورية هي دالة تتكرر قيمة y فيها على فترات منتظمة. وعندما يكتمل النمط بصورة تامة تتكوَّن **دورة**، والطول الأفقي لهذه الدورة يسمى **طول الدورة**. ودالتا الجيب وجيب التمام دالتان دوريتان طول دورة كل منهما 360° أو 2π rad.

مثال 1 أوجد طول دورة الدالة



بما أن النمط يتكرر كل 10 وحدات، فإن طول الدورة يساوي 10.

مثال 2 أوجد القيمة الدقيقة لكل دالة مما يأتي:

a) $\sin 855^\circ$

$\sin 855^\circ = \sin(135^\circ + 720^\circ)$

$= \sin 135^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2}$

b) $\cos\left(\frac{31\pi}{6}\right)$

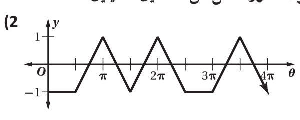
$\cos\left(\frac{31\pi}{6}\right) = \cos\left(\frac{7\pi}{6} + 4\pi\right)$

$= \cos\frac{7\pi}{6} = -\frac{\sqrt{3}}{2}$

تمارين

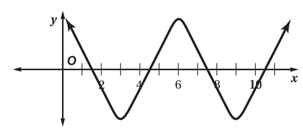
أوجد طول الدورة لكل من الدالتين الآتيتين:

1)



$\frac{5\pi}{2}$

2)



6

أوجد القيمة الدقيقة لكل دالة مما يأتي:

3) $\sin(-510^\circ)$ **$-\frac{1}{2}$**

4) $\sin 495^\circ$ **$\frac{\sqrt{2}}{2}$**

5) $\cos\left(-\frac{5\pi}{2}\right)$ **0**

6) $\sin\left(\frac{5\pi}{3}\right)$ **$-\frac{\sqrt{3}}{2}$**

7) $\cos\left(\frac{11\pi}{4}\right)$ **$-\frac{\sqrt{2}}{2}$**

8) $\sin\left(-\frac{3\pi}{4}\right)$ **$-\frac{\sqrt{2}}{2}$**

8-6 تدريبات المهارات

الدوال الدائرية

إذا كان ضلع الانتهاء للزاوية θ المرسومة في الوضع القياسي يقطع دائرة الوحدة في النقطة P فأوجد $\cos\theta$ و $\sin\theta$ في كل مما يأتي:

1) $P\left(\frac{3}{5}, \frac{4}{5}\right)$ **$\sin\theta = \frac{4}{5}$, $\cos\theta = \frac{3}{5}$**

2) $P\left(\frac{5}{13}, -\frac{12}{13}\right)$ **$\sin\theta = -\frac{12}{13}$, $\cos\theta = \frac{5}{13}$**

3) $P\left(-\frac{9}{41}, -\frac{40}{41}\right)$ **$\sin\theta = -\frac{40}{41}$, $\cos\theta = -\frac{9}{41}$**

4) $P(0, 1)$ **$\sin\theta = 1$, $\cos\theta = 0$**

5) $P(-1, 0)$ **$\sin\theta = 0$, $\cos\theta = -1$**

6) $P\left(\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ **$\sin\theta = -\frac{\sqrt{3}}{2}$, $\cos\theta = \frac{1}{2}$**

أوجد القيمة الدقيقة لكل دالة مما يأتي:

7) $\cos 45^\circ$ **$\frac{\sqrt{2}}{2}$**

8) $\sin 210^\circ$ **$-\frac{1}{2}$**

9) $\sin 330^\circ$ **$-\frac{1}{2}$**

10) $\cos 330^\circ$ **$\frac{\sqrt{3}}{2}$**

11) $\cos(-60^\circ)$ **$\frac{1}{2}$**

12) $\sin(-390^\circ)$ **$-\frac{1}{2}$**

13) $\sin 5\pi$ **0**

14) $\cos 3\pi$ **-1**

15) $\sin\frac{5\pi}{2}$ **1**

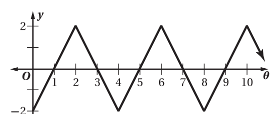
16) $\sin\frac{7\pi}{3}$ **$\frac{\sqrt{3}}{2}$**

17) $\cos\left(-\frac{7\pi}{3}\right)$ **$\frac{1}{2}$**

18) $\cos\left(-\frac{5\pi}{6}\right)$ **$-\frac{\sqrt{3}}{2}$**

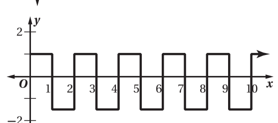
أوجد طول الدورة لكل من الدوال الآتية:

19)



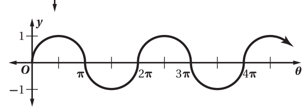
4

20)



2

21)

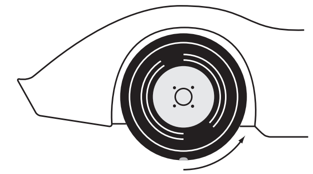


2π

8-6 تدريبات حل المسألة

الدوال الدائرية

1) **إطارات:** وضعت نقطة ملونة على حافة إطار سيارة. ومع حركة السيارة بدأ ارتفاع النقطة عن سطح الأرض يتغير بحسب العلاقة $h=-8cost+8$ حيث t الزمن بالثواني، h ارتفاع النقطة بالبوصات.



a) ما أقصى ارتفاع عن سطح الطريق تصله النقطة؟

16 in

b) ما أدنى ارتفاع عن سطح الأرض تصله هذه النقطة؟

0 in

c) ما عدد دورات الإطار في الثانية؟

2

d) ما المسافة التي تقطعها النقطة في 30 ثانية؟ وفي ساعة؟

480 ft ؛ 10.91 mi

2) **هندسة:** درجة الحرارة الشهرية (بالفهرنهايت) في إحدى المدن يُعبَّر عنها بالعلاقة $T=42+30\ sin\left(\frac{\pi}{6}t\right)$ حيث t بالشهور.

a) ما أعلى درجة حرارة شهرية في هذه المدينة؟

$72^{\circ}F$

b) ما الشهر الذي تحصل فيه على هذه الدرجة؟

مارس

c) ما أدنى درجة حرارة شهرية في المدينة؟

$12^{\circ}F$

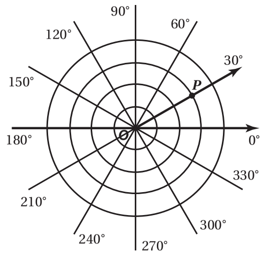
d) ما الشهر الذي تحصل فيه على هذه الدرجة؟

سبتمبر

8-6 التدريبات الإثرائية

الإحداثيات القطبية

ارسم زاوية في الوضع القياسي رأسها عند نقطة O تسمى القطب. وضلع الابتداء لها على محور أفقي يسمى المحور القطبي. النقطة P الواقعة على ضلع انتهاء الزاوية تُكتب باستعمال الإحداثيات القطبية $P(r,\theta)$ ، حيث r: المسافة المتجهة من O إلى P، و θ قياس الزاوية. ويمكن رسم المنحنيات في هذا النظام باستعمال ورقة رسم الإحداثيات القطبية التي تظهر في الشكل المجاور.

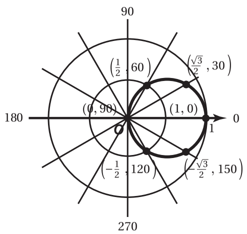


الإحداثيات القطبية لنقطة ليست وحيدة، فعلى سبيل المثال $(3,30^{\circ})$ تمثل النقطة P وكذلك النقطة $(3,390^{\circ})$، ويمكن تسمية النقطة P أيضًا $(-3,210^{\circ})$ فهل تعلم لماذا؟

إحداثيا القطب هما $(0,\theta)$ ، حيث θ تمثل قياس أي زاوية.

مثال مثّل الدالة $r=cos\ \theta$ بيانيًا، وذلك بتكوين جدول لعدد مناسب من قيم θ و r ، وتمثيله على ورقة إحداثيات قطبية.

θ	0°	30°	60°	90°	120°	150°	180°
r	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1



بما أن دورة دالة جيب التمام هي 180° ، فإن قيم r المقابلة لقيم $\theta > 180^{\circ}$ هي تكرار لقيم r المقابلة لقيم $\theta < 180^{\circ}$.

مثّل كلًا من الدوال الآتية، بتكوين جدول قيم مناسب، وتمثيله على ورقة إحداثيات قطبية:

1) $r=4$

$r=4$ لجميع قيم θ ، هو منحنى دائرة نصف قطرها 4 ومركزها في القطب.

2) $r=3\ sin\ \theta$

منحنى دائرة نصف قطرها $\frac{3}{2}$ ومركزها $(\frac{3}{2},90^{\circ})$.

3) $r=3\ cos\ 2\theta$

منحنى يشبه الزهرة ذات البتلات الأربع التي تلتقي معًا في القطب، ورؤوسها في النقاط $(3,0^{\circ})$ ، $(3,90^{\circ})$, (3.180), $(3,270^{\circ})$.

4) $r=2(1+cos\ \theta)$

منحنى شكل القلب ويكون متماثلًا حول المحور القطبي.

الاسم: ________________ التاريخ: ________

8-7 تدريبات إعادة التعليم

تمثيل الدوال المثلثية بيانيًّا

دوال الجيب، جيب التمام، والظل: يمكنك تمثيل الدوال المثلثية بيانيًّا في المستوى الإحداثي. أمّا الدوال الدورية فلها أنماط متكررة أو دورات، والطول الأفقي لكل دورة يسمى طول الدورة. **وسعة** منحنى كل من دالة الجيب ودالة جيب التمام تساوي نصف الفرق بين القيمة العظمى والقيمة الصغرى لكل دالة منهما. وتوجد خطوط تقارب لمنحنى دالة الظل.

	الدالة الأم	$y=\sin\theta$	$y=\cos\theta$	$y=\tan\theta$
دوال الجيب، وجيب التمام، والظل	المجال	مجموعة الأعداد الحقيقية	مجموعة الأعداد الحقيقية	$\{\theta \mid \theta\neq 90^\circ+180\,n,\ n\in Z\}$
	المدى	$\{y \mid -1\le y\le 1\}$	$\{y \mid -1\le y\le 1\}$	مجموعة الأعداد الحقيقية
	السعة	1	1	غير معرفة
	طول الدورة	360°	360°	180°

مثال أوجد السعة وطول الدورة لكل من الدوال الآتية، ثم مثّل الدالة بيانيًّا:

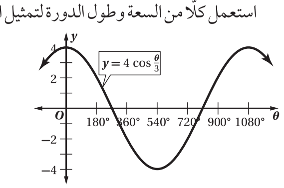
a) $y=4\cos\frac{\theta}{3}$

السعة: $|a|=|4|$ ، إذن السعة $=4$،

طول الدورة:

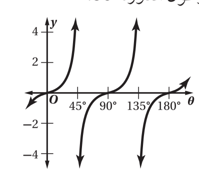
$\frac{360^\circ}{\left|\frac{1}{3}\right|}=1080^\circ$ إذن طول الدورة $=1080^\circ$

استعمل كلًّا من السعة وطول الدورة لتمثيل الدالة بيانيًّا.



b) $y=-\frac{1}{2}\tan 2\theta$

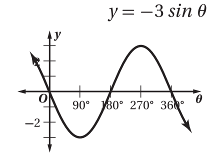
ليس لهذه الدالة سعة (السعة غير معرفة)، وطول الدورة 90°.



تمارين

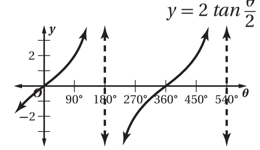
أوجد السعة وطول الدورة لكلٍّ من الدالتين الآتيتين، ثم مثّلها بيانيًّا:

1) $y=-3\sin\theta$



$3; 360^\circ$

2) $y=2\tan\frac{\theta}{2}$



لاتوجد سعة؛ 360°

الاسم: ________________ التاريخ: ________

8-7 تدريبات إعادة التعليم

(تتمة)

تمثيل الدوال المثلثية بيانيًّا

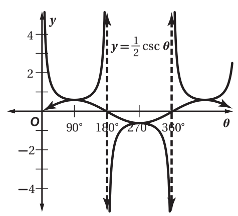
منحنيات الدوال المثلثية الأخرى: ترتبط منحنيات الدوال المثلثية: القاطع، وقاطع التمام، وظل التمام بمنحنيات الدوال المثلثية: جيب التمام، والجيب، والظل.

	الدالة الأم	$y=\csc\theta$	$y=\sec\theta$	$y=\cot\theta$
دوال القاطع، وقاطع التمام، وظل التمام	المجال	$\{\theta:\theta\neq 180n,\ n\in Z\}$	$\{\theta:\theta\neq 90+180\,n,\ n\in Z\}$	$\{\theta:\theta\neq 180\,n,\ n\in Z\}$
	المدى	$\{y \mid 1\le y\vee y\le -1\}$	$\{y \mid 1\le y\vee y\le -1\}$	مجموعة الأعداد الحقيقية
	السعة	غير معرفة	غير معرفة	غير معرفة
	طول الدورة	360°	360°	180°

مثال أوجد طول دورة الدالة $y=\frac{1}{2}\csc\theta$، ثم مثّلها بيانيًّا.

لما كان $\csc\theta$ مقلوب $\sin\theta$ فإن للدالتين طول الدورة نفسه، وخطوط التقارب الرأسية تحصل عند: $\theta=0$, $\theta=180^\circ$, $\theta=360^\circ$.

ارسم منحنى الدالة $y=\frac{1}{2}\sin\theta$، ثم استعمله لرسم منحنى الدالة $y=\frac{1}{2}\csc\theta$.

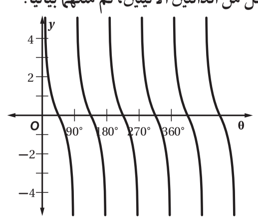


تمارين

أوجد طول الدورة لكل من الدالتين الآتيتين، ثم مثّلها بيانيًّا:

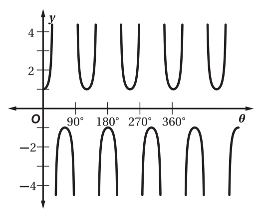
1) $y=\cot 2\theta$

90°



2) $y=\sec 3\theta$

120°

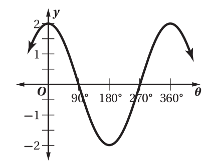


8-7 تدريبات المهارات

تمثيل الدوال المثلثية بيانيًا

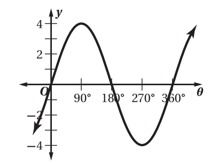
أوجد السعة وطول الدورة لكل من الدوال الآتية، ثم مثّل الدالة بيانيًا:

1) $y = 2\cos\theta$



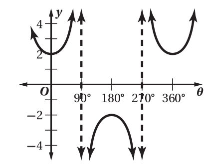
$2; 360^\circ$

2) $y = 4\sin\theta$



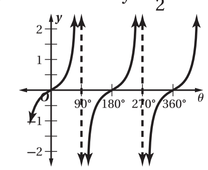
$4; 360^\circ$

3) $y = 2\sec\theta$



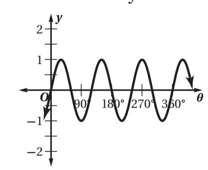
لا توجد سعة، 360°

4) $y = \frac{1}{2}\tan\theta$



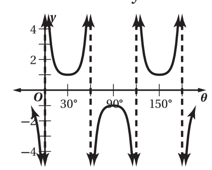
لا توجد سعة، 180°

5) $y = \sin 3\theta$



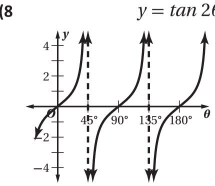
$1; 120^\circ$

6) $y = \csc 3\theta$



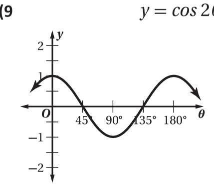
لا توجد سعة، 120°

7) $y = \tan 2\theta$



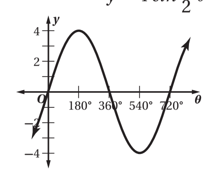
لا توجد سعة، 90°

8) $y = \cos 2\theta$



$1; 180^\circ$

9) $y = 4\sin\frac{1}{2}\theta$



$4; 720^\circ$

8-7 تدريبات حل المسألة

تمثيل الدوال المثلثية بيانيًا

1) **فيزياء:** يبين الجدول الآتي الدوال التي تمثّل أنماط موجات ألوان الضوء المختلفة الصادرة من مصدر ضوئي معين، حيث y ارتفاع الموجة بالنانومتر، و t الطول من بداية الموجة بالنانومتر.

اللون	الدالة
أحمر	$y = 300\sin\left(\frac{\pi}{350}t\right)$
برتقالي	$y = 125\sin\left(\frac{\pi}{305}t\right)$
أصفر	$y = 460\sin\left(\frac{\pi}{290}t\right)$
أخضر	$y = 200\sin\left(\frac{\pi}{260}t\right)$
أزرق	$y = 40\sin\left(\frac{\pi}{235}t\right)$
بنفسجي	$y = 80\sin\left(\frac{\pi}{210}t\right)$

a) ما سعة وطول دورة الدالة التي تمثّل موجات اللون الأخضر؟

200 نانومتر؛ 520 نانومتر

b) تتناسب شدة موجة الضوء طرديًا مع سعة الموجة. فأيّ الألوان له أكبر شدة موجة؟

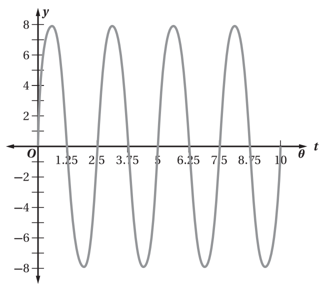
الأصفر

c) يعتمد لون الضوء على طول دورة الموجة، فأيّ الألوان له أقصر طول دورة؟ وأيها له أكبر طول دورة؟

الأحمر والبنفسجي

2) **سباحة:** يمكن تمثيل موقع ذراع سباح خلال السباحة بالنسبة لسطح الماء بالشكل أدناه، حيث y تمثل ارتفاع الذراع من سطح الماء بالبوصات و t الزمن بالثواني من بدء السباحة. فما الدالة التي تمثل هذا الوضع؟

$$y = 8\sin\left(\frac{4\pi}{5}t\right)$$



3) **بيئة:** يمكن تمثيل كثافة أوراق الشجر في إحدى الغابات بالدالة $\left(y=20+15\sin\left(\frac{\pi}{6}(t-3)\right)\right)$، حيث y: عدد أوراق الشجر في القدم المربعة الواحدة و t: عدد الأشهر بعد شهر يناير.

a) أوجد طول دورة هذه الدالة؟ وما الذي تمثّله هذه الدورة؟

طول دورة الدالة 12؛ وتمثّل الدورة عامًا كاملًا.

b) ما أكبر قيمة لكثافة الأوراق في هذه الغابة؟ وفي أي شهر يكون ذلك؟

35 ورقة لكل قدم مربعة؛ يونيو

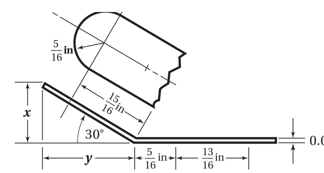
الاسم: ______ التاريخ: ______

8-7 التدريبات الإثرائية

مخططات هندسية

يتطلب تنفيذ المخططات الهندسية القدرة على اختيار الدوال المثلثية والخصائص الهندسية واستعمالها. فرؤوس الأشكال الهندسية ليس لها أسماء في هذه المخططات. لذا يتعين اختيار المعلومات ذات العلاقة، واستعمال الدوال المناسبة لإيجاد القياسات المجهولة.

مثال أوجد القياسين المجهولين في المخطط المجاور.



x و y هما ساقا مثلث قائم الزاوية

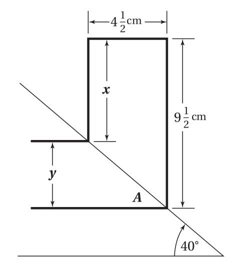
طول الوتر هو $\frac{15}{16}\text{ in} + \frac{5}{16}\text{ in} = \frac{20}{16}\text{ in}$

$\frac{x}{\frac{20}{16}} = \sin 30^\circ$ $\qquad$ $\frac{y}{\frac{20}{16}} = \cos 30^\circ$

$x = 0.63$ in $\qquad$ $y = 1.08$ in

أوجد القياسات المجهولة في كل من المخططات الآتية:

1)

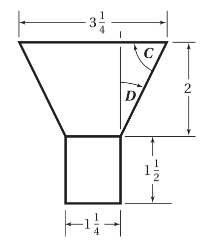


$y = 3.78$ cm

$x = 5.72$ cm

$m\angle A = 40^\circ$

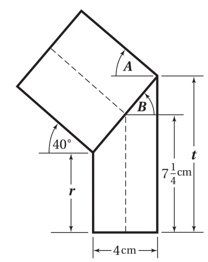
2)



$m\angle C = 63.43^\circ$

$m\angle D = 26.57^\circ$

3)



$m\angle A = 40^\circ$

$m\angle B = 50^\circ$

$t = 9.63$ cm

$r = 4.87$ cm

الاسم: ______ التاريخ: ______

8-8 تدريبات إعادة التعليم

الدوال المثلثية العكسية

معكوس الدالة المثلثية: إذا عُلمت قيمة دالة مثلثية لزاوية ما، فإنك تستطيع استعمال معكوس الدالة لإيجاد قياس الزاوية. وإذا حدّدت مجال الدالة، بحيث يكون المعكوس دالة فإن القيم ضمن هذا المجال المحدد تسمى **القيم الأساسية**.

القيم الأساسية للجيب وجيب التمام والظل	$y=Sin\,x$ إذا وفقط إذا $y=sin\,x$ ، $-\frac{\pi}{2} \le x \le \frac{\pi}{2}$. $y=Cos\,x$ إذا وفقط إذا $y=cos\,x$ ، $0\le x\le\pi$. $y=Tan\,x$ إذا وفقط إذا $y=tan\,x$ ، $\frac{-\pi}{2} \le x \le \frac{\pi}{2}$.
معكوس الجيب وجيب التمام والظل	إذا كان $y=Sin\,x$، فإن معكوس دالة الجيب يعرف على النحو الآتي: $y=Sin^{-1}x$ أو $y=Arcsin\,x$ إذا كان $y=Cos\,x$، فإن معكوس دالة جيب التمام يعرف على النحو الآتي: $y=Cos^{-1}x$ أو $y=Arc\cos x$ إذا كان $y=Tan\,x$، فإن معكوس دالة الظل يعرف على النحو الآتي: $y=Tan^{-1}x$ أو $y=Arctan\,x$.

مثال 1 **أوجد قيمة $Sin^{-1}\frac{\sqrt{3}}{2}$ ، واكتب قياس الزاوية بالدرجات وبالراديان.**

أوجد الزاوية θ التي جيبها $\frac{\sqrt{3}}{2}$ وتقع في الفترة $\frac{-\pi}{2} \le \theta \le \frac{\pi}{2}$ باستعمال دائرة الوحدة.

النقطة التي تقع على دائرة الوحدة وإحداثيها الصادي $\frac{\sqrt{3}}{2}$ هي $\frac{\pi}{3}$ أو 60°.

لذا فإن $sin^{-1}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{\pi}{3} = 60^\circ$

مثال 2 **أوجد قيمة $tan\left(Sin^{-1}\frac{1}{2}\right)$ إلى أقرب جزء من مئة.**

لتكن $\theta = Sin^{-1}\frac{1}{2}$، فإن $Sin\,\theta = \frac{1}{2}$ و $\frac{-\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2}$. القيمة $\theta = \frac{\pi}{6}$ تحقق الشرطين معًا.

لذا $tan\frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{3}$، $tan\left(Sin^{-1}\frac{1}{2}\right) = \frac{\sqrt{3}}{3}$.

تمارين

أوجد قيمة كل مما يأتي بالدرجات، وبالراديان:

1) $Cos^{-1}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ **$30^\circ, \frac{\pi}{6}$**

2) $Sin^{-1}\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ **$-60^\circ, -\frac{\pi}{3}$**

3) $Arccos\left(-\frac{1}{2}\right)$ **$120^\circ, \frac{2\pi}{3}$**

4) $Arctan\,\sqrt{3}$ **$60^\circ, \frac{\pi}{3}$**

5) $Arccos\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ **$135^\circ, \frac{3\pi}{4}$**

6) $Tan^{-1}(-1)$ **$-45^\circ, -\frac{\pi}{4}$**

أوجد قيمة كل مما يأتي، مقربًا الإجابة إلى أقرب جزء من مئة:

7) $cos\left[Sin^{-1}\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\right]$ **0.71**

8) $tan\left[Arcsin\left(-\frac{5}{7}\right)\right]$ **−1.02**

9) $sin\left(Tan^{-1}\frac{5}{12}\right)$ **0.38**

10) $Cos\,[Arcsin\,(-0.7)]$ **0.71**

11) $cos\,(Arctan\,5)$ **0.20**

12) $sin\,(Cos^{-1}\,0.3)$ **0.95**

8-8 تدريبات إعادة التعليم

(تتمة)

الدوال المثلثية العكسية

حُلّ المعادلات باستعمال الدوال العكسية : يمكنك إعادة كتابة المعادلات المثلثية؛ لإيجاد قياس زاوية ما.

مثال حُلّ المعادلة $Sin\theta = -0.25$ مقرِّبًا الناتج إلى أقرب جزء من عشرة.

جيب زاويةٍ ما هو -0.25، ويمكن إعادة كتابة هذا على النحو الآتي: $\theta = Arc\,sin(-0.25)$.

استعمل الآلة الحاسبة لإيجاد الحل.

استعمل المفاتيح: SHIFT SIN⁻¹ (−) 0.25) = -14.47751219

لذا فإن $\theta \approx -14.5°$.

تمارين

حُلَّ كلًّا من المعادلات الآتية، مقرِّبًا الناتج إلى أقرب جزء من عشرة:

1) $Sin\,\theta = 0.8$
$53.1°$

2) $Tan\,\theta = 4.5$
$77.5°$

3) $Cos\,\theta = 0.5$
$60.0°$

4) $Cos\,\theta = -0.95$
$161.8°$

5) $Sin\,\theta = -0.1$
$-5.7°$

6) $Tan\,\theta = -1$
$-45.0°$

7) $Cos\,\theta = 0.52$
$58.7°$

8) $Cos\,\theta = -0.2$
$101.5°$

9) $Sin\,\theta = 0.35$
$20.5°$

10) $Tan\,\theta = 8$
$82.9°$

8-8 تدريبات المهارات

الدوال المثلثية العكسية

أوجد قيمة كل مما يأتي بالدرجات وبالراديان:

1) $Sin^{-1}\frac{\sqrt{2}}{2}$
$45°; \frac{\pi}{4}$

2) $Cos^{-1}\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$
$150°; \frac{5\pi}{6}$

3) $Tan^{-1}\sqrt{3}$
$60°; \frac{\pi}{3}$

4) $Arctan\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\right)$
$-30°; -\frac{\pi}{6}$

5) $Arccos\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$
$135°; \frac{3\pi}{4}$

6) $Arcsin\,1$
$90°; \frac{\pi}{2}$

أوجد قيمة كلٍّ مما يأتي، مقرِّبًا الناتج إلى أقرب جزء من مئة:

7) $sin\,(Cos^{-1}\,1)$
0

8) $sin\left(Sin^{-1}\frac{1}{2}\right)$
0.5

9) $tan\left(Arcsin\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$
1.73

10) $cos\,(Tan^{-1}\,3)$
0.32

11) $sin\,[Arctan\,(-1)]$
-0.71

12) $sin\left[Arccos\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\right]$
0.71

حُلَّ كلًّا من المعادلات الآتية، مقرِّبًا الناتج إلى أقرب جزء من عشرة:

13) $cos\,\theta = 0.25$
$75.5°$

14) $sin\,\theta = -0.57$
$-34.8°$

15) $tan\,\theta = 5$
$78.7°$

16) $cos\,\theta = 0.11$
$83.7°$

17) $sin\,\theta = 0.9$
$64.2°$

18) $tan\,\theta = -11.35$
$-85°$

$sin\,\theta = 1$
$90°$

$tan\,\theta = -0.01$
$-0.6°$

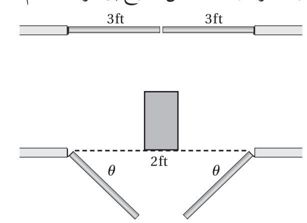
$cos\,\theta = -0.36$
$111.1°$

$tan\,\theta = -16.6$
$-86.6°$

8-8 تدريبات حل المسألة

الدوال المثلثية العكسية

1) **أبواب:** مخرج مطبخ أحد المطاعم له زوج من الأبواب المتأرجحة التي تلتقي في منتصف المخرج. وكل باب منها عرضه 3 ft. ويريد عامل مطعم أن ينقل عربة أطباق عرضها قدمان من المطبخ إلى غرفة الطعام.

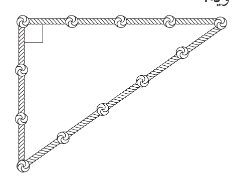


a) ما أصغر زاوية θ يجب أن يفتح بها كلا البابين حتى تخرج العربة؟
48.2°

b) إذا كان من الممكن فتح باب واحد فقط، فما أصغر زاوية θ يمكن أن يفتح بها الباب بحيث تخرج العربة؟
70.5°

c) إذا استبدل زوج الأبواب المتأرجحة بباب واحد مفرد، عرضه مساوٍ لعرض المخرج، فما أصغر زاوية θ يتعين أن يُفتح بها الباب، بحيث تخرج العربة؟
48.2°

2) **مساحة الأراضي:** من المعروف منذ القدم أن المثلث الذي أطوال أضلاعه 5 , 4 , 3 وحدات هو مثلث قائم الزاوية، لذا استعمل مسَّاحو الأراضي حبلًا بعُقد عند كل وحدة طول لضمان أن يكون المثلث قائم الزاوية. ويستعمل مثل هذا الحبل لتكوين مثلث على الأرض على أن يكون في إحدى ساقيه ثلاث عقد، وفي الساق الثانية أربع عقد. وهذا يضمن أن المثلث المتكون مثلث قائم الزاوية.



ما قياسات الزوايا في المثلث المتشكل بهذه الطريقة إلى أقرب درجة؟
37°, 53°, 90°

3) **سفر:** يقود عبد الله دراجته إلى بيت صديقه خالد. ويستطيع أن يقود على الشوارع التي تتجه شمال – جنوب أو شرق – غرب فقط.

a) قاد عبد الله 2 km شرقًا و 4 km جنوبًا إلى بيت خالد. فإذا استطاع عبد الله أن يقود مباشرة بخط مستقيم من بيته إلى بيت خالد، فبأي اتجاه سيقود دراجته؟
63.4° جنوب الشرق

b) بعد ذلك، قاد عبد الله دراجته 3 km غربًا و 1 km شمالًا ليصل إلى البقالة. فما الاتجاه الذي سيقود به عبد الله لو تمكَّن أن يقود دراجته في مسار مستقيم مباشرة من بيت خالد إلى البقالة؟
18.4° شمال الغرب

8-8 التدريبات الإثرائية

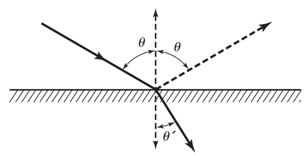
قانون سنل (Snell's Law)

يصف قانون سنل ما يحدث للشعاع الضوئي عندما ينتقل من الهواء إلى الماء أو أي مادة أخرى؛ إذ يصنع شعاع الضوء زاوية سقوط مقدارها θ مع السطح كما في الشكل أدناه، حيث ينعكس جزء من الشعاع بزاوية θ، وينكسر الجزء الآخر عندما ينفذ إلى الماء أو أي مادة أخرى صانعًا زاوية θ'.

زاوية السقوط تساوي زاوية الانعكاس.

يعطي قانون سنل العلاقة بين زاوية السقوط وزاوية الانكسار.

$\sin\theta = k\sin\theta'$، حيث k هو ثابت يسمى معامل الانكسار.



المادة	k
الماء	1.33
الكحول الإيثيلي	1.36
الملح الصخري والكوارتز	1.54
الزجاج	1.46–1.96
الماس	2.42

استعمل قانون سنل لحل المسائل التالية، مقرِّبًا قياس الزوايا بالدرجات إلى أقرب منزلة عشرية:

1) إذا كان قياس زاوية سقوط شعاع ضوئي على سطح نافذة 45°، وكان k=1.6، فما قياس زاوية الانكسار؟
26.2°

2) إذا سقط شعاع ضوئي على سطح الماء بزاوية 50°، فما قياس زاوية الانكسار؟
35.2°

3) ينكسر شعاع ضوئي داخل بلورة كوارتز بزاوية انكسار 24°، فما زاوية السقوط؟
38.8°

4) قيست زوايا السقوط والانكسار في وسطٍ ما في خمسِ محاولات. والقياسات جميعها موضحة في الجدول، واحدة منها خطأ، هل هذه المادة زجاج أم كوارتز أم ماس؟
زجاج

θ	15°	30°	40°	60°	80°
θ'	9.7°	16.1°	21.2°	28.6°	33.2°

5) إذا كانت زاوية سقوط شعاع ضوئي على سطح الكحول الإيثيلي 60°، فما زاوية الانكسار لهذا الشعاع؟
39.6°