وزارة التربية والتعليم
Ministry of Education
المملكة العربية السعودية

الرياضيات

للصف الثالث الثانوي

مصادر المعلم للأنشطة الصفية

الفصل السادس: الإحداثيات القطبية والأعداد المركبة

Obeikan العبيكان
McGraw Hill Education

١٤٣٥هـ - ٢٠١٤م

Glencoe Mathematics © 2010

CHAPTER RESOURCE MASTERS

Precalculus

الرياضيات ـ الصف الثالث الثانوي

مصادر المعلم للأنشطة الصفية

أعدَّ النسخة العربية: شركة العبيكان للتعليم

www.obeikaneducation.com

McGraw Hill Education

العبيكان Obeikan

Arabic Edition is published by Obeikan under agreement with
The McGraw-Hill Companies, Inc. © 2008.

الطبعة العربية: مجموعة العبيكان للاستثمار
وفقًا لاتفاقيتها مع شركة ماجروهل© ٢٠٠٨م/ ١٤٢٩هـ.

بِسْمِ اللّٰهِ الرَّحْمٰنِ الرَّحِيمِ

المقدمة

الحمد لله، والصلاة والسلام على نبينا محمد، وعلى آله وصحبه أجمعين، وبعد:

عزيزي المعلم / عزيزتي المعلمة

يسرنا أن نقدِّم هذه المجموعة من التدريبات المساندة، التي تراعي الفروق الفردية بين الطلاب. حيث نطمح أن يساعدك التنوع في هذه التدريبات على الوصول إلى جميع الطلاب في الصف، مهما تباينت مستوياتهم.

وقد تم تخصيص صفحة أو أكثر لكل نوعٍ من هذه التدريبات؛ لتغطي درسًا من دروس كتاب الطالب. حيث يمكنك أن تكلف الطلاب حل صفحة التدريبات المقابلة لكل درس بحسب مستوى كل منهم؛ سواء في داخل الصف أم في المنزل. وليست هذه التدريبات بديلًا عن كتاب التمارين، ولكنها مساندة ومكملة له.

وتشمل هذه التدريبات الأنواع التالية:

تدريبات إعادة التعليم

تركِّز هذه التدريبات على محتوى الدروس في كتاب الطالب، وتقدِّمه بأسلوب تدريسي ومعالجة يختلفان عن كتابي الطالب والتمارين. وهي موجَّهة إلى الطلاب ذوي المستوى دون المتوسط.

تدريبات حل المسألة

تأتي هذه التدريبات انطلاقًا من اهتمام هذه المناهج بحلّ المسألة، حيث تم تخصيصها لتقديم تدريبات إضافية على حل المسألة ترتبط بكل درس من دروس كتاب الطالب. وهي موجَّهة إلى جميع الطلاب على اختلاف مستوياتهم التحصيلية.

التدريبات الإثرائية

تساعد هذه التدريبات على التوسُّع في مفاهيم الدرس، كما تؤدي إلى توسيع مدارك الطلاب حول تعلم الرياضيات بشكل عام. وهذه التدريبات موجَّهة إلى الطلاب ذوي المستوى فوق المتوسط.

ملحق الإجابات:

يتضمن هذا المصدر في آخره ملحقًا بالإجابات، حيث تظهر باللون الأسود الغامق على صفحات مصغَّرة.

الفهرس

6-1 تدريبات إعادة التعليم

الإحداثيات القطبية

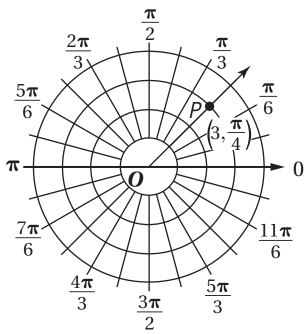
تمثيل الإحداثيات القطبية : في نظام الإحداثيات القطبية، تعيَّن مواقع النقاط باستعمال الطول والزاوية؛ إذ يمكن تعيين موقع النقطة P بالإحداثيات القطبية بالزوج المرتب (r, θ)، حيث r المسافة من القطب، أو نقطة الأصل، إلى النقطة P، و θ قياس الزاوية المتجهة المحصورة بين نصف المستقيم الواصل من القطب إلى النقطة P والمحور القطبي.

مثال مثِّل كلًّا من النقطتين الآتيتين:

a) $P\left(3, \frac{\pi}{4}\right)$.

ارسم ضلع انتهاء الزاوية $\frac{\pi}{4}$ في وضعها القياسي.

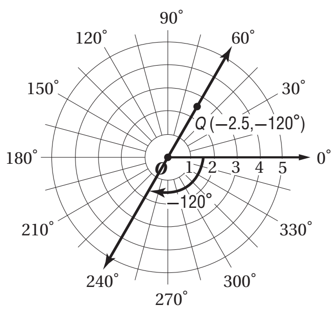
لمّا كانت r موجبة $(r = 3)$، فإنه يمكن تعيين نقطة على ضلع الانتهاء على بُعْدِ 3 وحداتٍ من القطب، لاحظ أن النقطة P تقع على الدائرة الثالثة حول القطب.



b) $Q(-2.5, -120°)$

يكون قياس الزاوية باتجاه عقارب الساعة سالبًا، ارسم ضلع انتهاء الزاوية $-120°$ في وضعها القياسي.

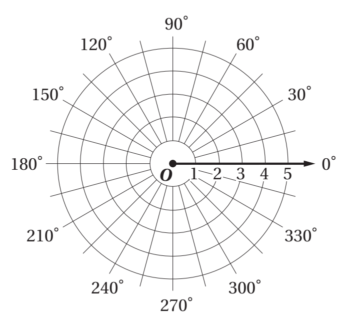
لمّا كانت r سالبة، فإنه يمكن مدّ ضلع انتهاء الزاوية في الاتجاه المعاكس، ثم تعيين النقطة Q على هذا الضلع، على أن تبعد 2.5 وحدة عن القطب.



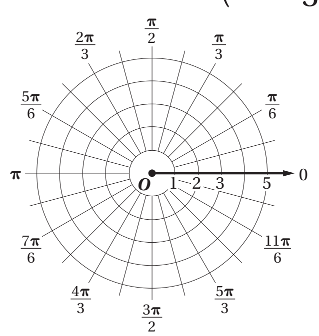
تمارين

مثّل كل نقطة مما يأتي في المستوى القطبي:

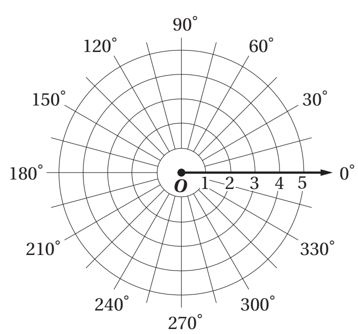
1) $R(3, 60°)$



2) $Q\left(4, -\frac{4\pi}{3}\right)$



3) $A(-2.5, -150°)$



6-1 تدريبات إعادة التعليم

(تتمة)

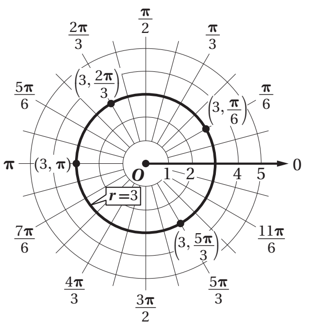
الإحداثيات القطبية

تمثيل المعادلات القطبية بيانيًا: المعادلة المكتوبة بدلالة الإحداثيات القطبية تسمى معادلة "قطبية"، فالتمثيل القطبي هو مجموعة كل النقاط (r, θ) التي تحقق المعادلة القطبية المعطاة، والتمثيلات البيانية لمعادلات على الصورة $r = k$ و $\theta = k$، حيث k ثابت، تُعدّ أساسيةً في نظام الإحداثيات القطبية. حلول المعادلة $r = k$ هي (k, θ)، حيث θ أي زاوية، وحلول المعادلات $\theta = k$ هي (r, θ) حيث r أي قيمة حقيقية.

مثال مثِّل كلًّا من المعادلتين القطبيتين الآتيتين بيانيًّا:

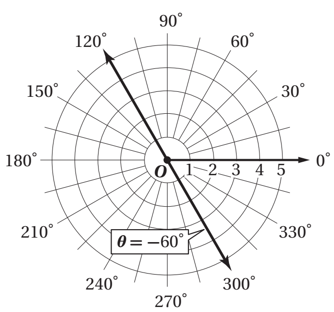
a) $r = 3$

حلول المعادلة $r=3$، هي نقاط على الصورة $(3, \theta)$، حيث θ أي زاوية مثل: $\left(3, \frac{\pi}{6}\right)$، $\left(3, \frac{2\pi}{3}\right)$، $(3, \pi)$، $\left(3, \frac{5\pi}{3}\right)$؛ إذن يتكون التمثيل البياني لهذه المعادلة من جميع النقاط التي تبعد 3 وحداتٍ عن القطب؛ لذا فإن التمثيل البياني هو دائرة مركزها نقطة الأصل، وطول نصف قطرها 3



b) $\theta = -60°$

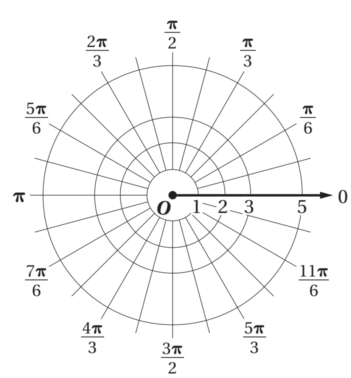
حلول المعادلة $\theta = -60°$ هي نقاط على الصورة $(r, -60°)$، حيث r أي عدد حقيقي. يتكون التمثيل البياني لهذه المعادلة من جميع النقاط الواقعة على المستقيم الذي يصنع زاوية $-60°$ مع المحور القطبي الموجب.



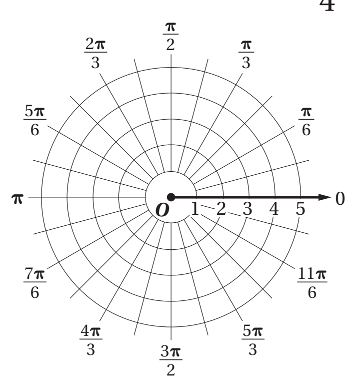
تمارين

مثّل كل معادلة قطبية فيما يأتي بيانيًّا:

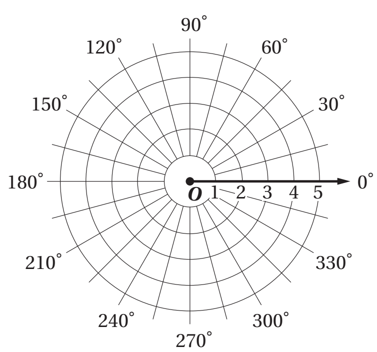
1) $r = 4$



2) $\theta = \frac{3\pi}{4}$



3) $\theta = -300°$

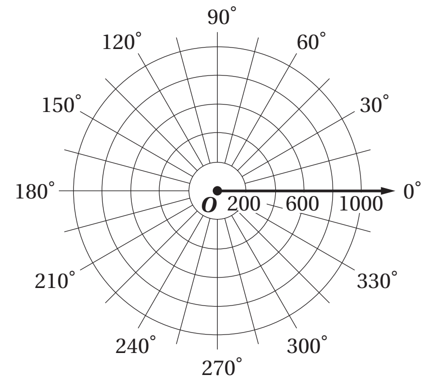


6-1 تدريبات حل المسألة

الإحداثيات القطبية

1) طيران: عند الساعة $1:00pm$ تطير طائرة باتجاه $30°$ غرب الشمال من نقطة الأصل بسرعة قدرها 300 ميلٍ في الساعة.

a) عيّن موقع الطائرة باستعمال المستوى القطبي بعد ساعتين.



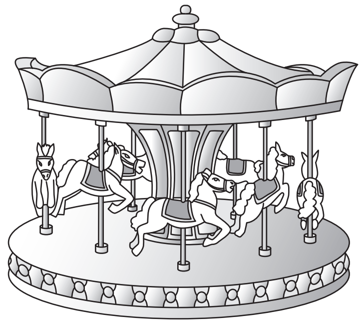
b) إذا علمت أن المطار يقع عند النقطة $(800, 150°)$، فعيّن موقع المطار على المستوى نفسه.

c) كم ميلًا تبعد الطائرة عن المطار بعد ساعتين؟

d) بعد ساعتين، غيَّرَت الطائرة اتجاه حركتها باتجاه المطار مباشرة، بسرعة متوسطة مقدارها 250 ميلًا في الساعة. يخطط مسافر في الطائرة للّحاق بطائرةٍ أخرى تُقلِع عند الساعة 3:55 بعد الظهر، فإذا أقلعت الطائرة الأخرى في الموعد المحدد، فهل سيصل المسافر في الوقت المناسب؟ وضح إجابتك.

2) حدائق: ثُبّت مِرشٌّ في حديقة لريِّها، على أن يصل الماء إلى المنطقة: $0 \le r \le 6$ ، $-\dfrac{17\pi}{12} \le \theta \le \dfrac{-7\pi}{12}$ ، حيث r بالأقدام، أوجد مساحة المنطقة التي يصلها الماء.

3) مركبة دوّارة: يركب عليٌّ مركبة دوارة في مدينة الألعاب.



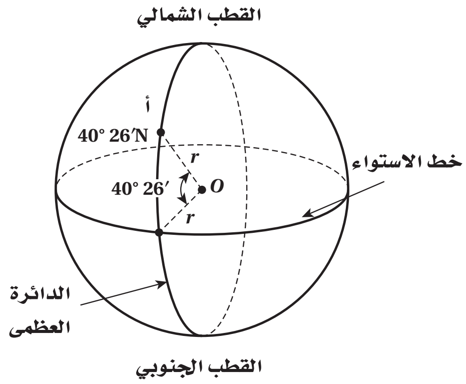
a) إذا كان بُعد علي 3 أمتارٍ من مركز المركبة، فاكتب معادلة تمثل موقعه في أثناء دوران المركبة.

b) تصنع المركبة $\dfrac{5}{19}$ دورة في الثانية، فإذا كان موقع علي الحالي يصنع زاويةً قياسها $165°$ عكس اتجاه حركة عقارب الساعة مع موقعه الأصلي، فأوجد موقعه بعد 1.9 ثانية بالنسبة لموقعه الأصلي.

4) آثار: وجد عالم آثار إناءً مصنوعًا من السيراميك البيروني، يعود إلى عام 400 قبل الميلاد، إذ يحوي هذا الإناء، الذي يبلغ طول قطر فتحته الدائرية 25 سنتمترًا، نقوشًا على أبعاد متساوية. نُقش أحدها عند النقطة $(-1.5, \dfrac{2\pi}{3})$، أوجد ثلاثة أزواج مختلفة، كلٌّ منها يمثل إحداثيين قطبيَّين لهذه النقطة.

6-1 التدريبات الإثرائية

المسافة على سطح الأرض



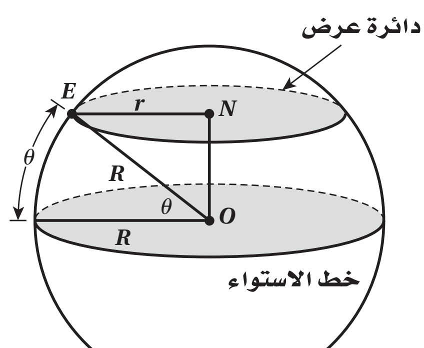
تتقاطع خطوط الطول على سطح الأرض عند القطبين الشمالي والجنوبي، وخط الطول الذي يمر حول الأرض ويمر بالقطبين يسمى **الدائرة العظمى** .
الدوائر العظمى جميعها لها المحيط نفسه، وتساوي محيط الدائرة التي طول نصف قطرها يساوي طول نصف قطر الكرة الأرضية 3963.2 ميلًا. (تذكَّر أن الأرض ليست كروية تمامًا، إلَّا أنه بإمكاننا إهمال الفرق).

1) أوجد محيط الدائرة العظمى.

تُقاس المواقع على الدائرة العظمى بالدرجات شمال أو جنوب خط الاستواء. تقع المدينة أ عند $40° 26′N$، وهذا يعني أن نصفَي القطرين من مركز الأرض إلى كلٍّ من المدينة أ، ونقطة تقاطع خط الاستواء مع الدائرة العظمى التي تمر في المدينة أ يشكِّلان زاويةً قياسها $40° 26′$، (انظر الشكل المجاور).

2) أوجد طول القوس على الدائرة العُظمى الذي يقابل زاويةً قياسها درجة واحدة.

3) تقع المدينة ب $(32° 46′ N)$، والمدينة جـ $(2°9′ S)$ على الدائرة العظمى نفسها التي تمر في المدينة أ، أوجد المسافة بين المدينة أ، وكلٍّ من المدينتين ب وَ جـ.



لمّا كانت دوائر العرض موازيةً لخط الاستواء، فإن أنصاف أقطارها ومحيطاتها تصغُر كلما اقتربنا من أحد القطبين، ويعتمد طول القوس الذي يقابل زاوية قياسها درجة واحدة على بُعْدِ دوائر العرض شمال خط الاستواء أو جنوبه، والشكل المجاور يبين دائرة عرض طول نصف قطرها r، وتقع شمال خط الاستواء بزاوية قياسها θ، ولمّا كان نصفَا قُطرَي دائرة خط الاستواء ودائرة العرض متوازيين، فإن $m\angle NEO = \theta$، وَ $cos\theta = \frac{r}{R}$؛ لذا يكون $r = R\cos\theta$، حيث R طول نصف قطر الكرة الأرضية.

4) أوجد طول نصف قطر دائرة عرض $70°$ شمال خط الاستواء ومحيطها.

5) أوجد طول القوس من دائرة العرض في السؤال 4، والذي يقابل زاويةً قياسها درجة واحدة.

الاسم: ______________________ التاريخ: ______________

6-2 تدريبات إعادة التعليم

الصورة القطبية والصورة الديكارتية للمعادلات

الإحداثيات القطبية والديكارتية: إذا كانت إحداثيات النقطة P القطبية هي (r, θ)، فإن إحداثياتها الديكارتية هي $x = r\cos\theta$ و $y = r\sin\theta$، وإذا كانت إحداثيات النقطة P الديكارتية هي (x, y)، فإن إحداثياتها القطبية هي: $r=\sqrt{x^2+y^2}$ و $\theta = \tan^{-1}\frac{y}{x}$ عندما $x > 0$، و $\theta = \tan^{-1}\frac{y}{x} + \pi$ عندما $x < 0$.

مثال 1

أوجد الإحداثيات الديكارتية للنقطة P التي إحداثياتها القطبية $\left(3, \frac{3\pi}{4}\right)$.

لمّا كانت إحداثيات النقطة P هي $\left(3, \frac{3\pi}{4}\right)$، فإن $r = 3$ و $\theta = \frac{3\pi}{4}$.

معادلات التحويل

$$y = r\sin\theta \qquad\qquad x = r\cos\theta$$

$$= 3\sin\frac{3\pi}{4} \qquad\qquad = 3\cos\frac{3\pi}{4}$$

$$= 3\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{3\sqrt{2}}{2} \qquad\qquad = 3\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = -\frac{3\sqrt{2}}{2}$$

أيْ أن الإحداثيات الديكارتية للنقطة P هي $\left(-\frac{3\sqrt{2}}{2}, \frac{3\sqrt{2}}{2}\right)$؛ أو $(-2.12, 2.12)$ إلى أقرب جزء من مئة.

مثال 2

أوجد زوجين مختلفين، كلٌّ منهما يمثل إحداثيَّين قطبيين للنقطة R التي إحداثياتها الديكارتية $(5, -9)$.

لمّا كانت إحداثيات النقطة R هي $(5, -9)$، فإن: $x = 5$ و $y = -9$

$$\theta = \tan^{-1}\frac{y}{x} \qquad\qquad r = \sqrt{x^2+y^2}$$

$$= \tan^{-1}\frac{-9}{5} \qquad\qquad = \sqrt{5^2+(-9)^2}$$

$$= -1.06 \qquad\qquad = \sqrt{106} \approx 10.30$$

أيْ أن أحد الزوجين بالإحداثيات القطبية للنقطة R هو $(10.30, -1.06)$، ولإيجاد تمثيل آخر بالإحداثيات القطبية للنقطة R، اجمع 2π للزاوية -1.06؛ لتحصل على $(10.30, -1.06 + 2\pi)$، أو $(10.30, 5.22)$.

تمارين

أوجد الإحداثيات الديكارتية لكل نقطة إحداثياتها القطبية معطاة فيما يأتي:

1) $(20, -60°)$ **2)** $\left(-1, \frac{5\pi}{6}\right)$ **3)** $(6, -30°)$ **4)** $\left(3, \frac{\pi}{3}\right)$

أوجد زوجين بالإحداثيات القطبية لكل نقطة معطاة بالإحداثيات الديكارتية، على أن تكون $-2\pi \le \theta \le 2\pi$

5) $(2, -2)$. **6)** $(3, 5)$.

6-2 تدريبات إعادة التعليم

(تتمة)

الصورة القطبية والصورة الديكارتية للمعادلات

المعادلات القطبية والديكارتية : يمكنك استعمال العلاقات: $x= r\cos\theta$, $y= r\sin\theta$, $\tan\theta=\frac{y}{x}$، $r^2 = x^2 + y^2$؛ للتحويل بين المعادلات الديكارتية والمعادلات القطبية.

مثال 1 اكتب المعادلة الديكارتية $y = -3x^2$، على الصورة القطبية.

$y = -3x^2$	المعادلة الأصلية
$r\sin\theta = -3(r\cos\theta)^2$	$x = r\cos\theta, y = r\sin\theta$
$r\sin\theta = -3r^2\cos^2\theta$	اضرب
$\frac{\sin\theta}{-3\cos^2\theta} = r$	اقسم على $-3r\cos^2\theta$
$r = -\frac{1}{3}\tan\theta\sec\theta$	متطابقة القسمة والمقلوب

مثال 2 اكتب المعادلة $r = 5\cos\theta$ على الصورة الديكارتية.

$r = 5\cos\theta$	المعادلة الأصلية
$r^2 = 5r\cos\theta$	اضرب الطرفين في r
$x^2+y^2=5x$	$r^2 = x^2+y^2, x = r\cos\theta$
$x^2-5x+y^2=0$	اطرح $5x$ من الطرفين

تمارين

اكتب كلًّا من المعادلتين الآتيتين على الصورة القطبية:

(1 $x = 5$

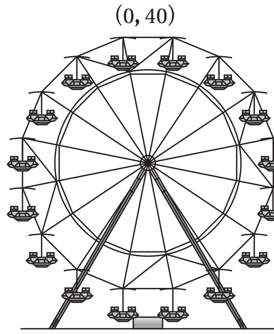
(2 $y = -x$

(3 اكتب المعادلة $r = 2\sin\theta$ على الصورة الديكارتية.

6-2 تدريبات حل المسألة

الصورة القطبية والصورة الديكارتية للمعادلات

1) **العجلة الدوّارة:** العجلة الدوّارة في مدينة ألعاب تصل إلى أدنى ارتفاع لها عند النقطة $(0, 0)$، وأقصى ارتفاع عند النقطة $(0, 40)$.



a) اكتب معادلة تمثل العجلة الدوارة على الصورة الديكارتية.

b) حدد نوع التمثيل البياني للمعادلة التي أوجدتها في **a**.

c) اكتب المعادلة في **a** على الصورة القطبية.

2) **احتفال:** تم تسيير مركبتين مُضاءتين في مسارين بحسب المعادلتين: $r = 4\sin\theta$ وَ $r = 4\cos\theta$.

a) اكتب المعادلة الديكارتية لكلٍّ من هاتين المعادلتين القطبيتين.

3) **زلازل:** تستعمل المعادلة $r = 17\cos\theta$؛ لنمذجة أمواج زلزالية، حيث r بالأميال.

a) اكتب معادلة تمثل الزلزال على الصورة الديكارتية.

b) أوجد مركز الزلزال، والمساحة التي تتأثر به.

4) **عمارة:** صمَّم أحد مهندِسِي العمارة منزلًا فيه نافذة على شكل مثلث متطابق الأضلاع.

a) اكتب معادلة على الصورة الديكارتية تمثل مساحة النافذة، إذا كان طول ضلعها x.

b) اكتب الصيغة القطبية للمعادلة التي أوجدتها في الفرع **a**.

6-2 التدريبات الإثرائية

حل نظام من معادلتين على الصورة القطبية

تعلمت سابقًا فكرة حل نظام من المعادلات، ويمكن تطبيق الفكرة ذاتها على نظام من المعادلات القطبية. افترض أنك مهتم بحل النظام الآتي على الفترة $[0, 2\pi]$:

$$r = \cos\theta$$

$$r = 1$$

لمّا كان الطرف الأيسر في كلٍّ من المعادلتين هو r، فإنه من الممكن مساواة الطرف الأيمن في كلٍّ منهما معًا؛ للحصول على المعادلة $\cos\theta = 1$، وبحل هذه المعادلة نحصل على
$\theta = 0$؛ لذا تكون النقطة $(1, 0)$ هي حل النظام.

في العادة، يكون لنظام المعادلات القطبية أكثر من حل واحد، فمثلًا، لحل النظام

$$r = \sin\theta$$

$$r = \frac{1}{2}$$

في الفترة $[0, 2\pi]$، فإننا نُساوِي الطرف الأيمن في كلٍّ منهما معًا للحصول على المعادلة

$$\sin\theta = \frac{1}{2}$$

$$\theta = \frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}$$

أيْ أن نقاط الحل في الفترة $[0, 2\pi]$ هي $\left(\frac{1}{2}, \frac{\pi}{6}\right)$ و $\left(\frac{1}{2}, \frac{5\pi}{6}\right)$.

تمارين

حل كل نظام مما يأتي في الفترة $[0, 2\pi]$:

1) $r = \sqrt{2}, r = 2\sin\theta$

2) $r = 3, r = \cos\theta + 3$

3) $r = \sqrt{3}, r = 2\cos\theta$

4) $r = 1, r = \sin\theta + 1$

6-3 تدريبات إعادة التعليم

الأعداد المركبة ونظرية ديموافر

الصورة القطبية للعدد المركب: يمكنك تحويل العدد المركب $z = a + bi$ إلى الصورة القطبية أو المثلثية باستعمال المعادلة $z = r\,(\cos\theta + i\sin\theta)$، حيث $r = |z| = \sqrt{a^2+b^2}$ و $\theta = \tan^{-1}\frac{b}{a}$ عندما $a > 0$، و $\theta = \tan^{-1}\frac{b}{a} + \pi$ عندما $a < 0$، كما يمكنك تحويل العدد المركب من صورته القطبية إلى صورته الديكارتية باستعمال المعادلتين $a = r\cos\theta$ وَ $b = r\sin\theta$.

مثال 1 اكتب العدد $2\sqrt{3} - 2i$ على الصورة القطبية

أولًا، أوجد مقياس العدد، ثم أوجد سعته.

$$r = \sqrt{a^2+b^2} \qquad \theta = \tan^{-1}\left(\frac{b}{a}\right)$$

$$= \sqrt{(2\sqrt{3})^2 + (-2)^2} \qquad = \tan^{-1}\frac{-2}{2\sqrt{3}}$$

$$= 4 \qquad = \frac{11\pi}{6}$$

أيْ أن الصورة القطبية للعدد $2\sqrt{3} - 2i$ هي: $4\left(\cos\frac{11\pi}{6} + i\sin\frac{11\pi}{6}\right)$، أو $4(\cos 5.76 + i\sin 5.76)$ تقريبًا.

مثال 2 اكتب العدد $z = 2\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right)$ على الصورة الديكارتية.

أوجد القيم المثلثية، ثم بسّط.

$$2\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right) = 2\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \sqrt{2} + i\sqrt{2}$$

فتكون الصورة الديكارتية للعدد z هي: $\sqrt{2} + i\sqrt{2}$

تمارين

اكتب كل عدد مركب فيما يأتي على الصورة القطبية:

(1 $1 - i$ **(2** $3 + 2i$ **(3** $-1 + \sqrt{3}\,i$

اكتب كل عددٍ مما يأتي على الصورة الديكارتية:

(4 $4\left(\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6}\right)$ **(5** $4\sqrt{2}\left(\cos\frac{5\pi}{4} + i\sin\frac{5\pi}{4}\right)$ **(6** $6\left(\cos\frac{5\pi}{3} + i\sin\frac{5\pi}{3}\right)$

6-3 تدريبات إعادة التعليم

(تتمة)

الأعداد المركبة ونظرية ديموافر

ضرب الأعداد المركبة، وقسمتها، وقواها، وجذورها: استعمل المعادلتين الآتيتين لضرب عددين مركبين وقسمتهما.

إذا كان: $z_1=r_1(cos\,\theta_1+i\,sin\,\theta_1)$ وَ $z_2=r_2(cos\,\theta_2+i\,sin\,\theta_2)$، فإن:

صيغة الضرب: $z_1 z_2= r_1r_2[cos\,(\theta_1+\theta_2)+ i\,sin\,(\theta_1+\theta_2)]$

صيغة القسمة: $\frac{z_1}{z_2}=\frac{r_1}{r_2}[cos(\theta_1-\theta_2)+ i\,sin(\theta_1-\theta_2)],\ r_2 \neq 0$، حيث $z_2 \neq 0$ ، $r_2 \neq 0$

مثال أوجد ناتج $3\left(cos\frac{\pi}{4}+i\,sin\frac{\pi}{4}\right).4\left(cos\frac{\pi}{2}+i\,sin\frac{\pi}{2}\right)$، ثم اكتبه على الصورة الديكارتية.

$3\left(cos\frac{\pi}{4}+i\,sin\frac{\pi}{4}\right).4\left(cos\frac{\pi}{2}+i\,sin\frac{\pi}{2}\right)$	العبارة الأصلية
$=3(4)\left[cos\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{2}\right)+i\,sin\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{2}\right)\right]$	صيغة الضرب
$=12\left(cos\frac{3\pi}{4}+i\,sin\frac{3\pi}{4}\right)$	بسِّط
$=12\left(\frac{-\sqrt{2}}{2}+i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$	احسب القيم
$=-6\sqrt{2}+6i\sqrt{2}$	خاصية التوزيع

فتكون الصورة القطبية لناتج الضرب هي $12\left(cos\frac{3\pi}{4}+i\,sin\frac{3\pi}{4}\right)$، والصورة الديكارتية هي $-6\sqrt{2}+6\,i\sqrt{2}$، يمكنك استعمال نظرية ديموافر: $[r(cos\theta+i\,sin\,\theta)]^n= r^n[cos\,n\theta+i\,sin\,n\theta]$؛ لإيجاد قوى الأعداد المركبة وجذورها وذلك عند كتابتها على الصورة القطبية.

تمارين

أوجد ناتج الضرب أو القسمة في كلٍّ مما يأتي، ثم اكتبه على الصورة الديكارتية:

1) $3\left(cos\frac{\pi}{3}+i\,sin\frac{\pi}{3}\right).3\left(cos\frac{5\pi}{3}+i\,sin\frac{5\pi}{3}\right)$

2) $6\left(cos\frac{\pi}{2}+i\,sin\frac{\pi}{2}\right)\div 2\left(cos\frac{\pi}{3}+i\,sin\frac{\pi}{3}\right)$

أوجد قوة العدد المركب في كلٍّ مما يأتي، ثم اكتبها على الصورة الديكارتية:

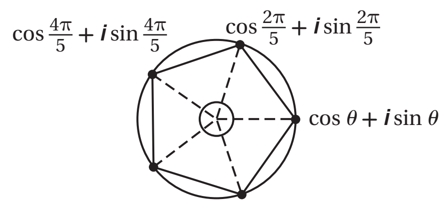
3) $(2-2\sqrt{3}\,i)^3$

4) $(1-i)^5$

6-3 تدريبات حل المسألة

الأعداد المركبة ونظرية ديموافر

1) **تصميم:** ترغب ليلى في رسم نموذج لطبق معدني خماسي منتظم، فترسم دائرة، وتدوّر نصف قطرها بمقدار $72°$ في كل مرة؛ لتحصل على الخماسي المنتظم، ثم تعين رؤوسه على الدائرة، كما في الشكل أدناه.



a) ما قياس زاوية الدوران في كل مرة بالراديان؟

b) أوجد الرأسين الآخرين للخماسي على الصورة المثلثية.

2) **هندسة كهربائية:** المعاوقة هي مقاومة سير التيار في دارة كهربائية ذات تيار متردد، حيث تعمل كثير من الأجهزة الكهربائية على فرق جهد 115 فولت، وتيار متردد، وتستعمل المعادلة $I = \frac{V}{Z}$؛ لوصف العلاقة بين فرق الجهد E، وشدة التيار I، والمعاوقة Z، أوجد كلًّا مما يأتي على الصورة الديكارتية:

a) أوجد فرق الجهد إذا كان

$I = 10(\cos 35° + j\sin 35°)$

$Z = 3\,(\cos 20° + j\sin 20°)$

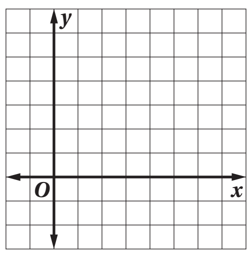
b) أوجد المعاوقة، إذا كان:

$I = 8\,(\cos 5° + j\sin 5°)$

$V = 115(\cos 45° + j\sin 45°)$

3) **تصميم أثاثٍ:** وُضع أحد أركان سطح طاولة عند نقطة الأصل لمستوى مركب، وركنان آخران عند $1+3i$ و $6+2i$، والركن الرابع عند $(6+2i) + (1+3i)$.

a) ارسم سطح الطاولة.



b) صف شكل سطح الطاولة.

c) اكتب $1+3i$ على الصورة القطبية.

d) أوجد $(6+2i)^2$ على الصورة القطبية.

6-3 التدريبات الإثرائية

البحث عن الكنز

أخفى شخص ينقّب عن الذهب قطعة ذهبية تحت التراب، وكان قد كتب إرشادات يخبر فيها عن مكانها.

1) ابدأ حيث توجد شجرة البلوط، ثم تحرك باتجاه نبع المياه المعدنية، وعُدّ خطواتك.

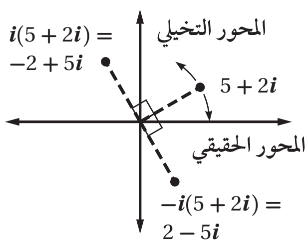
2) انعطف يمينًا بزاوية قياسها $90°$، ثم تحرك عدد الخطوات نفسه في 1، ثم ضع عصًا في المكان الذي وصلت إليه.

3) ارجع إلى شجرة البلوط، ثم تحرك باتجاه الصخرة الحمراء، وعُدّ خطواتك.

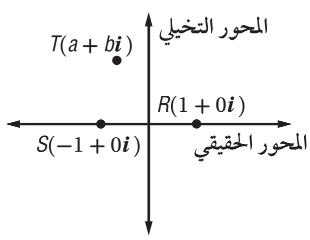
4) انعطف يسارًا بزاوية قياسها $90°$، ثم تحرك عدد الخطوات نفسه في 3، ثم ضع عصًا في المكان الذي وصلت إليه.

5) أوجد نقطةً منتصف المسافة بين العصوَين، تجد القطعة الذهبية عند تلك النقطة.

وبعد سنوات، وجد خبير في الأعداد المركبة هذه التعليمات في علبة صَدِئة، كما وجد تعليمات إضافية تدلُّه على مكان شجرة البلوط، والنبع، والصخرة الحمراء، ولكن لسوء حظّه، عندما ذهب إلى تلك المنطقة، وجد المئات من أشجار البلوط قد نبتت، إلّا أنه استطاع إيجاد قطعة الذهب، وذلك بعدما استعمل الأعداد المركبة بطريقة حكيمة.



- يمكن تمثيل المسافة بين عددين مركبين بالقيمة المطلقة لناتج طرحهما.
- ضرب العدد المركب في العدد i، يدوّر العدد الأصلي بزاوية $90°$ عكس اتجاه عقارب الساعة، وعند ضرب العدد في $-i$، فإنه يدوِّره بزاوية $90°$ باتجاه حركة عقارب الساعة.
- رسم الخبير خريطةً على المستوى المركب، فوضع النبع عند النقطة $S\,(-1+0i)$، والصخرة عند $R(1+0i)$، ورمز إلى موقع شجرة البلوط بالنقطة $T(a+bi)$.



1) أوجد المسافة بين شجرة البلوط والنبع، وعبّر عن المسافة بعدد مركب.

2) اكتب عددًا مركبًا يمثل صورة العدد المركب في 1، بدوران مقداره $90°$ عكس اتجاه عقارب الساعة، فيمثل هذا العدد موقع العصا الأولى.

3) أعد الخطوتين 1 و 2 للمسافة بين شجرة البلوط والصخرة، ما موقع العصا الثانية؟

4) يقع الكنز عند نقطة منتصف المسافة بين العصوين، أوجد إحداثيات الموقع.

ملحق الإجابات

الاسم: ________ التاريخ: ________

6-1 تدريبات إعادة التعليم

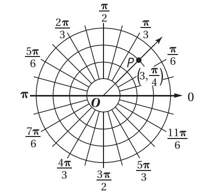
الإحداثيات القطبية

تمثيل الإحداثيات القطبية : في نظام الإحداثيات القطبية، تعيَّن مواقع النقاط باستعمال الطول والزاوية؛ إذ يمكن تعيين موقع النقطة P بالإحداثيات القطبية بالزوج المرتب (r, θ)، حيث r المسافة من القطب، أو نقطة الأصل، إلى النقطة P، و θ قياس الزاوية المتجهة المحصورة بين نصف المستقيم الواصل من القطب إلى النقطة P والمحور القطبي.

مثال مثِّل كلًّا من النقطتين الآتيتين:

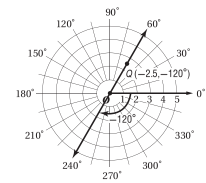
a) $P\left(3, \frac{\pi}{4}\right)$.

ارسم ضلع انتهاء الزاوية $\frac{\pi}{4}$ في وضعها القياسي.
لمّا كانت r موجبة $(r=3)$، فإنه يمكن تعيين نقطة على ضلع الانتهاء على بُعْد 3 وحداتٍ من القطب، لاحظ أن النقطة P تقع على الدائرة الثالثة حول القطب.



b) $Q(-2.5, -120°)$

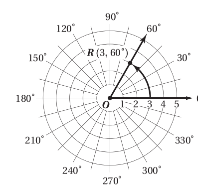
يكون قياس الزاوية باتجاه عقارب الساعة سالبًا، ارسم ضلع انتهاء الزاوية $-120°$ في وضعها القياسي.
لمّا كانت r سالبة، فإنه يمكن مدّ ضلع انتهاء الزاوية في الاتجاه المعاكس، ثم تعيين النقطة Q على هذا الضلع، على أن تبعد 2.5 وحدة عن القطب.



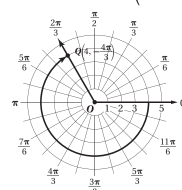
تمارين

مثّل كل نقطة مما يأتي في المستوى القطبي:

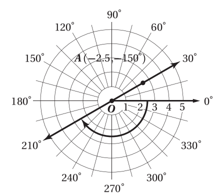
1) $R(3, 60°)$



2) $Q\left(4, -\frac{4\pi}{3}\right)$



3) $A(-2.5, -150°)$



الاسم: ________ التاريخ: ________

6-1 تدريبات إعادة التعليم (تتمة)

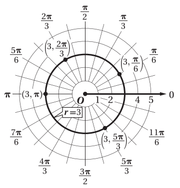
الإحداثيات القطبية

تمثيل المعادلات القطبية بيانيًا : المعادلة المكتوبة بدلالة الإحداثيات القطبية تسمى معادلة "قطبية"، فالتمثيل القطبي هو مجموعة كل النقاط (r, θ) التي تحقق المعادلة القطبية المعطاة، والتمثيلات البيانية لمعادلات على الصورة $r=k$ و $\theta=k$، حيث k ثابت، تُعدّ أساسيةً في نظام الإحداثيات القطبية. حلول المعادلة $r=k$ هي (k, θ)، حيث θ أي زاوية، وحلول المعادلات $\theta=k$ هي (r, θ) حيث r أي قيمة حقيقية.

مثال مثِّل كلًّا من المعادلتين القطبيتين الآتيتين بيانيًا:

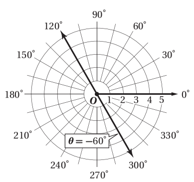
a) $r=3$

حلول المعادلة $r=3$، هي نقاط على الصورة $(3, \theta)$، حيث θ أي زاوية مثل: $\left(3, \frac{\pi}{6}\right)$، $\left(3, \frac{2\pi}{3}\right)$، $(3, \pi)$، $\left(3, \frac{5\pi}{3}\right)$؛ إذن يتكون التمثيل البياني لهذه المعادلة من جميع النقاط التي تبعد 3 وحداتٍ عن القطب؛ لذا فإن التمثيل البياني هو دائرة مركزها نقطة الأصل، وطول نصف قطرها 3



b) $\theta=-60°$

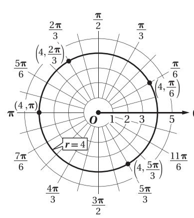
حلول المعادلة $\theta=-60°$ هي نقاط على الصورة $(r, -60°)$، حيث r أي عدد حقيقي. يتكون التمثيل البياني لهذه المعادلة من جميع النقاط الواقعة على المستقيم الذي يصنع زاوية $-60°$ مع المحور القطبي الموجب.



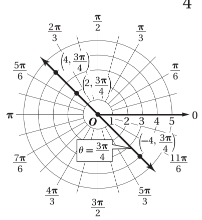
تمارين

مثّل كل معادلة قطبية فيما يأتي بيانيًا:

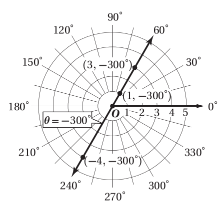
1) $r=4$



2) $\theta=\frac{3\pi}{4}$



3) $\theta=-300°$

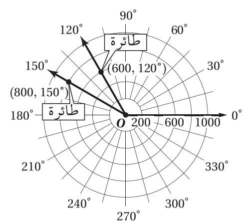


6-1 تدريبات حل المسألة

الإحداثيات القطبية

1) **طيران:** عند الساعة $1:00pm$ تطير طائرة باتجاه $30°$ غرب الشمال من نقطة الأصل بسرعة قدرها 300 ميل في الساعة.

a) عيّن موقع الطائرة باستعمال المستوى القطبي بعد ساعتين.



b) إذا علمت أن المطار يقع عند النقطة $(800, 150°)$، فعيّن موقع المطار على المستوى نفسه.

c) كم ميلًا تبعد الطائرة عن المطار بعد ساعتين؟

411 ميلًا تقريبًا

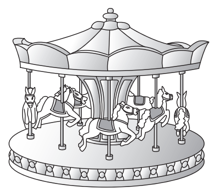
d) بعد ساعتين، غيّرت الطائرة اتجاه حركتها باتجاه المطار مباشرة، بسرعة متوسطة مقدارها 250 ميلًا في الساعة. يخطط مسافر في الطائرة للّحاق بطائرة أخرى تُقلِع عند الساعة 3:55 بعد الظهر، فإذا أقلعت الطائرة الأخرى في الموعد المحدد، فهل سيصل المسافر في الوقت المناسب؟ وضح إجابتك.

لا ؛ تصل الطائرة إلى المطار الساعة $4:39\ pm$ تقريبًا، أو بعد 44 دقيقة من إقلاع الطائرة الثانية.

2) **حدائق:** ثُبّت مِرشٌّ في حديقة لريّها، على أن يصل الماء إلى المنطقة: $6 \le r \le 0$ ، $-\frac{17\pi}{12} \le \theta \le \frac{-7\pi}{12}$ ، حيث r بالأقدام، أوجد مساحة المنطقة التي يصلها الماء.

47 قدمًا مربعة تقريبًا.

3) **مركبة دوّارة:** يركب عليٌّ مركبة دوارة في مدينة الألعاب.



a) إذا كان بُعد علي 3 أمتارٍ من مركز المركبة، فاكتب معادلة تمثل موقعه في أثناء دوران المركبة.

$r = 3$

b) تصنع المركبة $\frac{5}{19}$ دورة في الثانية، فإذا كان موقع علي الحالي يصنع زاويةً قياسها $165°$ عكس اتجاه حركة عقارب الساعة مع موقعه الأصلي، فأوجد موقعه بعد 1.9 ثانية بالنسبة لموقعه الأصلي.

$(3, -15°)$

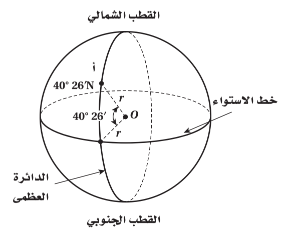
4) **آثار:** وجد عالم آثار إناءً مصنوعًا من السيراميك البيروني، يعود إلى عام 400 قبل الميلاد، إذ يحوي هذا الإناء، الذي يبلغ طول قطر فتحته الدائرية 25 سنتمترًا، نقوشًا على أبعاد متساوية. نُقش أحدها عند النقطة $(-1.5, \frac{2\pi}{3})$، أوجد ثلاثة أزواج مختلفة، كلٌّ منها يمثل إحداثيين قطبيّين لهذه النقطة.

إجابة ممكنة:

$$\left(-1.5, -\frac{4\pi}{3}\right), \left(1.5, \frac{5\pi}{3}\right), \left(1.5, -\frac{\pi}{3}\right)$$

6-1 التدريبات الإثرائية

المسافة على سطح الأرض



تتقاطع خطوط الطول على سطح الأرض عند القطبين الشمالي والجنوبي، وخط الطول الذي يمر حول الأرض ويمر بالقطبين يسمى **الدائرة العظمى** . الدوائر العظمى جميعها لها المحيط نفسه، وتساوي محيط الدائرة التي طول نصف قطرها يساوي طول نصف قطر الكرة الأرضية 3963.2 ميلًا. (تذكَّر أن الأرض ليست كرويةً تمامًا، إلّا أنه بإمكاننا إهمال الفرق).

1) أوجد محيط الدائرة العظمى.

24901.5 ميل

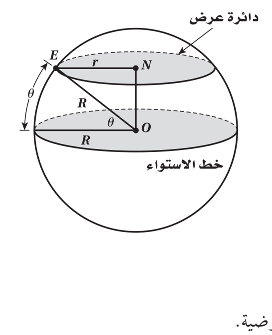
تُقاس المواقع على الدائرة العظمى بالدرجات شمال أو جنوب خط الاستواء. تقع المدينة أ عند $40° 26′N$، وهذا يعني أن نصفَي القطرين من مركز الأرض إلى كلٍّ من المدينة أ، ونقطة تقاطع خط الاستواء مع الدائرة العظمى التي تمر في المدينة أ يشكّلان زاويةً قياسها $40° 26′$، (انظر الشكل المجاور).

2) أوجد طول القوس على الدائرة العُظمى الذي يقابل زاويةً قياسها درجة واحدة.

69.2 ميلًا تقريبًا

3) تقع المدينة ب $(32° 46′ N)$، والمدينة جـ $(2° 9′ S)$ على الدائرة العظمى نفسها التي تمر في المدينة أ، أوجد المسافة بين المدينة أ، وكلٍّ من المدينتين ب وَ جـ.

2945.5 ميلًا , 530.3 ميلًا



لمّا كانت دوائر العرض موازيةً لخط الاستواء، فإن أنصاف أقطارها ومحيطاتها تصغُر كلما اقتربنا من أحد القطبين، ويعتمد طول القوس الذي يقابل زاوية قياسها درجة واحدة على بُعْدِ دوائر العرض شمال خط الاستواء أو جنوبه، والشكل المجاور يبين دائرة عرض طول نصف قطرها r، وتقع شمال خط الاستواء بزاوية قياسها θ، ولمّا كان نصفَا قُطرَي دائرة خط الاستواء ودائرة العرض متوازيين، فإن $m\angle NEO = \theta$، وَ $\cos\theta = \frac{r}{R}$؛ لذا يكون $r = R\cos\theta$، حيث R طول نصف قطر الكرة الأرضية.

4) أوجد طول نصف قطر دائرة عرض $70°$ شمال خط الاستواء ومحيطها.

8516.8 ميلًا، 1355.5 ميلًا

5) أوجد طول القوس من دائرة العرض في السؤال 4، والذي يقابل زاويةً قياسها درجة واحدة.

23.7 ميلًا

الاسم: ________ التاريخ: ________

6-2 تدريبات إعادة التعليم

الصورة القطبية والصورة الديكارتية للمعادلات

الإحداثيات القطبية والديكارتية : إذا كانت إحداثيات النقطة P القطبية هي (r, θ)، فإن إحداثياتها الديكارتية هي $x= r\cos\theta$ و $y = r\sin\theta$، وإذا كانت إحداثيات النقطة P الديكارتية هي (x, y)، فإن إحداثياتها القطبية هي: $r=\sqrt{x^2+y^2}$ و $\theta = tan^{-1}\frac{y}{x}$ عندما $x > 0$، و $\theta = tan^{-1}\frac{y}{x}+\pi$ عندما $x < 0$.

مثال 1 أوجد الإحداثيات الديكارتية للنقطة P التي إحداثياتها القطبية $(3,\frac{3\pi}{4})$.

لمّا كانت إحداثيات النقطة P هي $(3,\frac{3\pi}{4})$، فإن $r=3$ و $\theta = \frac{3\pi}{4}$.

معادلات التحويل

$$y = r\sin\theta \qquad x = r\cos\theta$$

$$= 3\sin\frac{3\pi}{4} \qquad = 3\cos\frac{3\pi}{4}$$

$$= 3\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{3\sqrt{2}}{2} \qquad = 3\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = -\frac{3\sqrt{2}}{2}$$

أيْ أن الإحداثيات الديكارتية للنقطة P هي $\left(-\frac{3\sqrt{2}}{2}, \frac{3\sqrt{2}}{2}\right)$، أو $(-2.12, 2.12)$ إلى أقرب جزء من مئة.

مثال 2 أوجد زوجين مختلفين، كلٌّ منهما يمثل إحداثيَّين قطبيين للنقطة R التي إحداثياتها الديكارتية $(5, -9)$.

لمّا كانت إحداثيات النقطة R هي $(5, -9)$، فإن: $x=5$ و $y=-9$

$$r = \sqrt{x^2+y^2} \qquad \theta = tan^{-1}\frac{y}{x}$$

$$= \sqrt{5^2+(-9)^2} \qquad = tan^{-1}\frac{-9}{5}$$

$$= \sqrt{106} \approx 10.30 \qquad = -1.06$$

أيْ أن أحد الزوجين بالإحداثيات القطبية للنقطة R هو $(10.30, -1.06)$، ولإيجاد تمثيل آخر بالإحداثيات القطبية للنقطة R، اجمع 2π للزاوية -1.06؛ لتحصل على $(10.30, -1.06+2\pi)$، أو $(10.30, 5.22)$.

تمارين

أوجد الإحداثيات الديكارتية لكل نقطة إحداثياتها القطبية معطاة فيما يأتي:

1) $(20, -60°)$ **$(10, -10\sqrt{3})$**

2) $\left(-1, \frac{5\pi}{6}\right)$ **$\left(\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2}\right)$**

3) $(6, -30°)$ **$(3\sqrt{3}, -3)$**

4) $\left(3, \frac{\pi}{3}\right)$ **$\left(\frac{3}{2}, \frac{3\sqrt{3}}{2}\right)$**

أوجد زوجين بالإحداثيات القطبية لكل نقطة معطاة بالإحداثيات الديكارتية، على أن تكون $-2\pi \le \theta \le 2\pi$

5) $(2, -2)$. **$\left(2\sqrt{2}, -\frac{\pi}{4}\right), \left(2\sqrt{2}, \frac{7\pi}{4}\right)$**

6) $(3, 5)$. **$(5.8, 1.0), (-5.8, 4.2)$**

الاسم: ________ التاريخ: ________

6-2 تدريبات إعادة التعليم (تتمة)

الصورة القطبية والصورة الديكارتية للمعادلات

المعادلات القطبية والديكارتية : يمكنك استعمال العلاقات: $x= r\cos\theta$, $y= r\sin\theta$, $tan\,\theta=\frac{y}{x}$، $r^2 = x^2 + y^2$؛ للتحويل بين المعادلات الديكارتية والمعادلات القطبية.

مثال 1 اكتب المعادلة الديكارتية $y = -3x^2$، على الصورة القطبية.

$y = -3x^2$	المعادلة الأصلية
$r\sin\theta = -3(r\cos\theta)^2$	$x = r\cos\theta, y = r\sin\theta$
$r\sin\theta = -3r^2\cos^2\theta$	اضرب
$\frac{\sin\theta}{-3\cos^2\theta} = r$	اقسم على $-3r\cos^2\theta$
$r = -\frac{1}{3}\tan\theta\sec\theta$	متطابقة القسمة والمقلوب

مثال 2 اكتب المعادلة $r = 5\cos\theta$ على الصورة الديكارتية.

$r = 5\cos\theta$	المعادلة الأصلية
$r^2 = 5r\cos\theta$	اضرب الطرفين في r
$x^2+y^2=5x$	$r^2=x^2+y^2, x = r\cos\theta$
$x^2-5x+y^2=0$	اطرح $5x$ من الطرفين

تمارين

اكتب كلًّا من المعادلتين الآتيتين على الصورة القطبية:

1) $x = 5$ **$r = 5\sec\theta$**

2) $y = -x$ **$\theta = \frac{3\pi}{4}$**

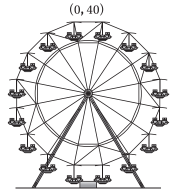
3) اكتب المعادلة $r = 2\sin\theta$ على الصورة الديكارتية. **$x^2 + y^2 - 2y = 0$**

الاسم: ______________ التاريخ: ________

6-2 تدريبات حل المسألة

الصورة القطبية والصورة الديكارتية للمعادلات

1) **العجلة الدوّارة:** العجلة الدوّارة في مدينة ألعاب تصل إلى أدنى ارتفاع لها عند النقطة $(0, 0)$، وأقصى ارتفاع عند النقطة $(0, 40)$.



a) اكتب معادلة تمثل العجلة الدوارة على الصورة الديكارتية.
$\boldsymbol{x^2+(y-20)^2=400}$

b) حدد نوع التمثيل البياني للمعادلة التي أوجدتها في a.
دائرة مركزها (0,20) ، وطول نصف قطرها 20

c) اكتب المعادلة في a على الصورة القطبية.
$\boldsymbol{r=40\sin\theta}$

2) **احتفال:** تم تسيير مركبتين مُضاءتين في مسارين بحسب المعادلتين: $r=4\sin\theta$ وَ $r=4\cos\theta$.

a) اكتب المعادلة الديكارتية لكلٍّ من هاتين المعادلتين القطبيتين.
$\boldsymbol{x^2+(y-2)^2=4\ ;\ (x-2)^2+y^2=4}$

3) **زلازل:** تستعمل المعادلة $r=17\cos\theta$؛ لنمذجة أمواج زلزالية، حيث r بالأميال.

a) اكتب معادلة تمثل الزلزال على الصورة الديكارتية.
$\boldsymbol{(x-8.5)^2+y^2=72.25}$

b) أوجد مركز الزلزال، والمساحة التي تتأثر به.
(8.5,0)؛ 226.98 ميلًا مربعًا

4) **عمارة:** صمَّم أحد مهندِسِي العمارة منزلًا فيه نافذة على شكل مثلث متطابق الأضلاع.

a) اكتب معادلة على الصورة الديكارتية تمثل مساحة النافذة، إذا كان طول ضلعها x.
$\boldsymbol{y=\frac{\sqrt{3}}{4}x^2}$

b) اكتب الصيغة القطبية للمعادلة التي أوجدتها في الفرع a.
$\boldsymbol{r=\frac{4\sqrt{3}}{3}\tan\theta\sec\theta}$

الاسم: ______________ التاريخ: ________

6-2 التدريبات الإثرائية

حل نظام من معادلتين على الصورة القطبية

تعلمت سابقًا فكرة حل نظام من المعادلات، ويمكن تطبيق الفكرة ذاتها على نظام من المعادلات القطبية. افترض أنك مهتم بحل النظام الآتي على الفترة $[0, 2\pi)$:

$$r=\cos\theta$$
$$r=1$$

لمّا كان الطرف الأيسر في كلٍّ من المعادلتين هو r، فإنه من الممكن مساواة الطرف الأيمن في كلٍّ منهما معًا؛ للحصول على المعادلة $\cos\theta=1$، وبحل هذه المعادلة نحصل على $\theta=0$؛ لذا تكون النقطة $(1, 0)$ هي حل النظام.

في العادة، يكون لنظام المعادلات القطبية أكثر من حل واحد، فمثلًا، لحل النظام

$$r=\sin\theta$$
$$r=\frac{1}{2}$$

في الفترة $[0, 2\pi)$، فإننا نُساوِي الطرف الأيمن في كلٍّ منهما معًا للحصول على المعادلة

$$\sin\theta=\frac{1}{2}$$
$$\theta=\frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}$$

أيْ أن نقاط الحل في الفترة $[0, 2\pi)$ هي $\left(\frac{1}{2}, \frac{\pi}{6}\right)$ و $\left(\frac{1}{2}, \frac{5\pi}{6}\right)$.

تمارين

حل كل نظام مما يأتي في الفترة $[0, 2\pi)$:

1) $r=\sqrt{2}, r=2\sin\theta$
$\boldsymbol{\left(\sqrt{2},\frac{\pi}{4}\right), \left(\sqrt{2},\frac{3\pi}{4}\right)}$

2) $r=3, r=\cos\theta+3$
$\boldsymbol{\left(3,\frac{\pi}{2}\right), \left(3,\frac{3\pi}{2}\right)}$

3) $r=\sqrt{3}, r=2\cos\theta$
$\boldsymbol{\left(\sqrt{3},\frac{\pi}{6}\right), \left(\sqrt{3}, \frac{11\pi}{6}\right)}$

4) $r=1, r=\sin\theta+1$
$\boldsymbol{(1,0), (1,\pi)}$

الاسم: ________ التاريخ: ________

6-3 تدريبات إعادة التعليم

الأعداد المركبة ونظرية ديموافر

الصورة القطبية للعدد المركب: يمكنك تحويل العدد المركب $z=a+bi$ إلى الصورة القطبية أو المثلثية باستعمال المعادلة $z=r\,(\cos\theta+i\sin\theta)$، حيث $r=|z|=\sqrt{a^2+b^2}$ و $\theta=\tan^{-1}\frac{b}{a}$ عندما $a>0$، و $\theta=\tan^{-1}\frac{b}{a}+\pi$ عندما $a<0$، كما يمكنك تحويل العدد المركب من صورته القطبية إلى صورته الديكارتية باستعمال المعادلتين $a=r\cos\theta$ وَ $b=r\sin\theta$.

مثال 1 اكتب العدد $2\sqrt{3}-2i$ على الصورة القطبية

أولًا، أوجد مقياس العدد، ثم أوجد سعته.

$$r=\sqrt{a^2+b^2}=\sqrt{(2\sqrt{3})^2+(-2)^2}=4$$

$$\theta=\tan^{-1}\left(\frac{b}{a}\right)=\tan^{-1}\frac{-2}{2\sqrt{3}}=\frac{11\pi}{6}$$

أيْ أن الصورة القطبية للعدد $2\sqrt{3}-2i$ هي: $4\left(\cos\frac{11\pi}{6}+i\sin\frac{11\pi}{6}\right)$، أو $4(\cos 5.76+i\sin 5.76)$ تقريبًا.

مثال 2 اكتب العدد $z=2\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right)$ على الصورة الديكارتية.

أوجد القيم المثلثية، ثم بسّط.

$$2\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right)=2\left(\frac{\sqrt{2}}{2}+i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=\sqrt{2}+i\sqrt{2}$$

فتكون الصورة الديكارتية للعدد z هي: $\sqrt{2}+i\sqrt{2}$

تمارين

اكتب كل عدد مركب فيما يأتي على الصورة القطبية:

1) $1-i$
$\sqrt{2}\left(\cos\frac{7\pi}{4}+i\sin\frac{7\pi}{4}\right)$

2) $3+2i$
$\sqrt{13}\,(\cos 33.69°+i\sin 33.69°)$

3) $-1+\sqrt{3}\,i$
$2\left(\cos\frac{2\pi}{3}+i\sin\frac{2\pi}{3}\right)$

اكتب كل عددٍ مما يأتي على الصورة الديكارتية:

4) $4\left(\cos\frac{\pi}{6}+i\sin\frac{\pi}{6}\right)$
$2\sqrt{3}+2i$

5) $4\sqrt{2}\left(\cos\frac{5\pi}{4}+i\sin\frac{5\pi}{4}\right)$
$-4-4i$

6) $6\left(\cos\frac{5\pi}{3}+i\sin\frac{5\pi}{3}\right)$
$3-3\sqrt{3}i$

الاسم: ________ التاريخ: ________

6-3 تدريبات إعادة التعليم (تتمة)

الأعداد المركبة ونظرية ديموافر

ضرب الأعداد المركبة، وقسمتها، وقواها، وجذورها: استعمل المعادلتين الآتيتين لضرب عددين مركبين وقسمتهما.

إذا كان: $z_1=r_1(\cos\theta_1+i\sin\theta_1)$ وَ $z_2=r_2(\cos\theta_2+i\sin\theta_2)$، فإن:

صيغة الضرب: $z_1 z_2=r_1r_2[\cos(\theta_1+\theta_2)+i\sin(\theta_1+\theta_2)]$

صيغة القسمة: $\frac{z_1}{z_2}=\frac{r_1}{r_2}[\cos(\theta_1-\theta_2)+i\sin(\theta_1-\theta_2)],\ r_2\neq 0$، حيث $z_2\neq 0$، $r_2\neq 0$

مثال أوجد ناتج $3\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right).4\left(\cos\frac{\pi}{2}+i\sin\frac{\pi}{2}\right)$، ثم اكتبه على الصورة الديكارتية.

العبارة الأصلية	$3\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right).4\left(\cos\frac{\pi}{2}+i\sin\frac{\pi}{2}\right)$
صيغة الضرب	$=3(4)\left[\cos\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{2}\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{2}\right)\right]$
بسّط	$=12\left(\cos\frac{3\pi}{4}+i\sin\frac{3\pi}{4}\right)$
احسب القيم	$=12\left(\frac{-\sqrt{2}}{2}+i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$
خاصية التوزيع	$=-6\sqrt{2}+6i\sqrt{2}$

فتكون الصورة القطبية لناتج الضرب هي $12\left(\cos\frac{3\pi}{4}+i\sin\frac{3\pi}{4}\right)$، والصورة الديكارتية هي $-6\sqrt{2}+6\,i\sqrt{2}$

، يمكنك استعمال نظرية ديموافر: $[r(\cos\theta+i\sin\theta)]^n=r^n[\cos n\theta+i\sin n\theta]$؛ لإيجاد قوى الأعداد المركبة وجذورها وذلك عند كتابتها على الصورة القطبية.

تمارين

أوجد ناتج الضرب أو القسمة في كلٍّ مما يأتي، ثم اكتبه على الصورة الديكارتية:

1) $3\left(\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}\right).3\left(\cos\frac{5\pi}{3}+i\sin\frac{5\pi}{3}\right)$
9

2) $6\left(\cos\frac{\pi}{2}+i\sin\frac{\pi}{2}\right)\div 2\left(\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}\right)$
$\frac{3\sqrt{3}}{2}+\frac{3}{2}i$

أوجد قوة العدد المركب في كلٍّ مما يأتي، ثم اكتبها على الصورة الديكارتية:

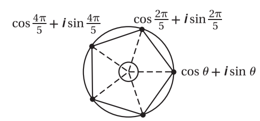
3) $(2-2\sqrt{3}\,i)^3$
-64

4) $(1-i)^5$
$-4+4i$

6-3 تدريبات حل المسألة

الأعداد المركبة ونظرية ديموافر

1) **تصميم:** ترغب ليلى في رسم نموذج لطبق معدني خماسي منتظم، فترسم دائرة، وتدوّر نصف قطرها بمقدار 72° في كل مرة؛ لتحصل على الخماسي المنتظم، ثم تعين رؤوسه على الدائرة، كما في الشكل أدناه.



a) ما قياس زاوية الدوران في كل مرة بالراديان؟

$\boldsymbol{\frac{2\pi}{5}}$

b) أوجد الرأسين الآخرين للخماسي على الصورة المثلثية.

$\boldsymbol{\cos\frac{6\pi}{5} + i\sin\frac{6\pi}{5}}$

$\boldsymbol{\cos\frac{8\pi}{5} + i\sin\frac{8\pi}{5}}$

2) **هندسة كهربائية:** المعاوقة هي مقاومة سير التيار في دارة كهربائية ذات تيار متردد، حيث تعمل كثير من الأجهزة الكهربائية على فرق جهد 115 فولت، وتيار متردد، وتستعمل المعادلة $I = \frac{V}{Z}$؛ لوصف العلاقة بين فرق الجهد E، وشدة التيار I، والمعاوقة Z، أوجد كلًّا مما يأتي على الصورة الديكارتية:

a) أوجد فرق الجهد إذا كان

$I = 10(\cos 35^\circ + j\sin 35^\circ)$

$Z = 3(\cos 20^\circ + j\sin 20^\circ)$

$\mathbf{17.21 + 24.57}\boldsymbol{j}$

b) أوجد المعاوقة، إذا كان:

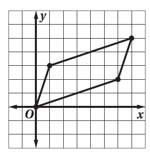
$I = 8(\cos 5^\circ + j\sin 5^\circ)$

$V = 115(\cos 45^\circ + j\sin 45^\circ)$

$\mathbf{11.01 + 9.24}\boldsymbol{j}$

3) **تصميم أثاث:** وُضع أحد أركان سطح طاولة عند نقطة الأصل لمستوى مركب، وركنان آخران عند $1+3i$ و $6+2i$، والركن الرابع عند $(6+2i) + (1+3i)$.

a) ارسم سطح الطاولة.



b) صف شكل سطح الطاولة.

متوازي أضلاع

c) اكتب $1+3i$ على الصورة القطبية.

$\boldsymbol{\sqrt{10}(\cos 71.6^\circ + i\sin 71.6^\circ)}$

d) أوجد $(6+2i)^2$ على الصورة القطبية.

$\boldsymbol{40(\cos 36.9^\circ + i\sin 36.9^\circ)}$

6-3 التدريبات الإثرائية

البحث عن الكنز

أخفى شخص ينقّب عن الذهب قطعة ذهبية تحت التراب، وكان قد كتب إرشادات يخبر فيها عن مكانها.

1) ابدأ حيث توجد شجرة البلوط، ثم تحرك باتجاه نبع المياه المعدنية، وعُدّ خطواتك.

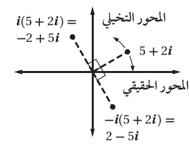
2) انعطف يمينًا بزاوية قياسها 90°، ثم تحرك عدد الخطوات نفسه في 1، ثم ضع عصًا في المكان الذي وصلت إليه.

3) ارجع إلى شجرة البلوط، ثم تحرك باتجاه الصخرة الحمراء، وعُدّ خطواتك.

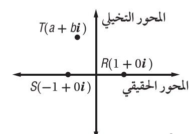
4) انعطف يسارًا بزاوية قياسها 90°، ثم تحرك عدد الخطوات نفسه في 3، ثم ضع عصًا في المكان الذي وصلت إليه.

5) أوجد نقطةً منتصف المسافة بين العصوَين، تجد القطعة الذهبية عند تلك النقطة.

وبعد سنوات، وجد خبير في الأعداد المركبة هذه التعليمات في علبة صَدِئة، كما وجد تعليمات إضافية تدلُّه على مكان شجرة البلوط، والنبع، والصخرة الحمراء، ولكن لسوء حظّه، عندما ذهب إلى تلك المنطقة، وجد المئات من أشجار البلوط قد نبتت، إلّا أنه استطاع إيجاد قطعة الذهب، وذلك بعدما استعمل الأعداد المركبة بطريقة حكيمة.



- يمكن تمثيل المسافة بين عددين مركبين بالقيمة المطلقة لناتج طرحهما.
- ضرب العدد المركب في العدد i، يدوّر العدد الأصلي بزاوية 90° عكس اتجاه عقارب الساعة، وعند ضرب العدد في $-i$، فإنه يدوِّره بزاوية 90° باتجاه حركة عقارب الساعة.
- رسم الخبير خريطةً على المستوى المركب، فوضع النبع عند النقطة $S(-1+0i)$، والصخرة عند $R(1+0i)$، ورمز إلى موقع شجرة البلوط بالنقطة $T(a+bi)$.



1) أوجد المسافة بين شجرة البلوط والنبع، وعبّر عن المسافة بعدد مركب. $\boldsymbol{|(a+1)+bi|}$

2) اكتب عددًا مركبًا يمثل صورة العدد المركب في 1، بدوران مقداره 90° عكس اتجاه عقارب الساعة، فيمثل هذا العدد موقع العصا الأولى. $\boldsymbol{-b+(a+1)i}$

3) أعد الخطوتين 1 و 2 للمسافة بين شجرة البلوط والصخرة، ما موقع العصا الثانية؟ $\boldsymbol{b-(a-1)i}$

4) يقع الكنز عند نقطة منتصف المسافة بين العصوين، أوجد إحداثيات الموقع.

$(0+i)$؛ الموقع على المحور التخيلي وعلى بُعد وحدة واحدة من نقطة الأصل .