وزارة التربية والتعليم
Ministry of Education
المملكة العربية السعودية

الرياضيات

للصف الأول الثانوي

مصادر المعلم للأنشطة الصفية

الفصل الخامس: الأشكال الرباعية

العبيكان Obeikan
McGraw Hill Education

١٤٣٥هـ - ٢٠١٤م

Glencoe Mathematics © 2010
CHAPTER RESOURCE MASTERS
Geometry

الرياضيات ـ الصف الأول الثانوي

مصادر المعلم للأنشطة الصفية

أعدَّ النسخة العربية: شركة العبيكان للتعليم

www.obeikaneducation.com

McGraw Hill Education

العبيكان Obeikan

Arabic Edition is published by Obeikan under agreement with
The McGraw-Hill Companies, Inc. © 2008.

الطبعة العربية: مجموعة العبيكان للاستثمار
وفقًا لاتفاقيتها مع شركة ماجروهل© ٢٠٠٨م/ ١٤٢٩هـ.

بِسْمِ اللَّهِ الرَّحْمَنِ الرَّحِيمِ

المقدمة

عزيزي المعلم / عزيزتي المعلمة

يسرنا أن نقدم هذه المجموعة من التدريبات المساندة، التي تراعي الفروق الفردية بين الطلاب. حيث نطمح أن يساعدك التنوع في هذه التدريبات على الوصول إلى جميع الطلاب في الصف، مهما تباينت مستوياتهم التحصيلية.

وقد تم تخصيص صفحتين لتدريبات إعادة التعليم وصفحة واحدة لكلٍّ من التدريبات الأخرى لكل درسٍ من دروس كتاب الطالب. حيث يمكنك أن تكلف الطلاب حل صفحة التدريبات المقابلة لكل درس حسب مستوىً كلٍّ منهم؛ سواء أكان ذلك داخل الصف أم في المنزل. وليست هذه التدريبات بديلًا عن كتاب التمارين، ولكنها مساندة ومكملة له.
وهذه التدريبات هي:

تدريبات إعادة التعليم

تركِّز هذه التدريبات على الأفكار الرئيسة في الدرس وتقدمها بأسلوب تدريسي ومعالجة يختلفان أحيانًا عن كتابي الطالب والتمارين. وهي موجّهة إلى الطلاب ذوي المستوى دون المتوسط.

تدريبات المهارات

تركِّز هذه التدريبات على المهارات الحسابية الموجودة في الدرس؛ فتقدم تدريبات إضافية على مهارات الدرس وبعض المسائل التي تركز على تلك المهارات. وهي موجّهة إلى الطلاب ذوي المستوى ضمن المتوسط ودون المتوسط.

تدريبات حل المسألة

تأتي هذه التدريبات انطلاقًا من اهتمام هذه المناهج بحلّ المسألة، حيث تم تخصيصها؛ لتقديم تدريبات إضافية على حل المسألة ترتبط بكل درس من دروس كتاب الطالب. وهي موجهة إلى جميع الطلاب على اختلاف مستوياتهم التحصيلية.

التدريبات الإثرائية

تساعد هذه التدريبات الإثرائية على التوسع أو تدعيم مفاهيم الدرس، كما تؤدي إلى توسيع مدارك الطلاب حول تعلُّم الرياضيات بشكل عام. وهذه التدريبات موجهة إلى الطلاب ذوي المستوى ضمن المتوسط وفوق المتوسط.

الفهرس

الاسم ______________________________ التاريخ ______________

5-1 تدريبات إعادة التعليم

زوايا المضلَّع

مجموع قياسات الزوايا الداخليّة لمضلّع:

القطعة المستقيمة التي تصل بين رأسين غير متتاليين لمضلّعٍ تُسمّى **قطرًا** له، والأقطار المرسومة من أحد رؤوس مضلّعٍ عدد أضلاعه n، تقسمه إلى مثلثاتٍ عددها $n-2$، ويمكنك إيجاد مجموع قياسات الزوايا الداخليّة للمضلّع، بجمع قياسات الزوايا الداخليّة لهذه المثلثات.

5.1	**نظريّة مجموع قياسات الزوايا الداخليّة للمضلّع.**	إذا كان عدد أضلاع مضلّعٍ محدّبٍ هو n، ومجموع قياسات زواياه الداخليّة هو S، فإنّ $S = (n-2) \cdot 180°$

مثال 1 **أوجد مجموع قياسات الزوايا الداخلية لمضلع محدب عدد أضلاعه 13 ضلعًا.**

$$S = (n-2) \cdot 180°$$
$$= (13-2) \cdot 180°$$
$$= (11) \cdot 180°$$
$$= 1980°$$

مثال 2 **إذا كان قياس الزاوية الداخليّة لمضلّعٍ منتظمٍ يساوي °140؛ فأوجد عدد أضلاعه.**

ليكن عدد الأضلاع n، فيكون مجموع قياسات الزوايا الداخليّة للمضلّع يساوي $140°n$.

$$S = (n-2) \cdot 180°$$
$$140°n = (n-2) \cdot 180°$$
$$140°n = 180°n - 360°$$
$$-40°n = -360°$$
$$n = 9$$

تمارين

أوجد مجموع قياسات الزوايا الداخليّة لكلٍّ من المضلعات المحدّبة الآتية:

1) التّساعي.

2) ذي 16 ضلعًا.

3) ذي 30 ضلعًا.

4) الثّماني.

5) ذي 18 ضلعًا.

6) ذي 35 ضلعًا.

إذا كان قياس إحدى الزاوايا الداخليّة لمضلّع منتظم معطى، فأوجد عدد الأضلاع في كلٍّ ممّا يأتي:

7) $150°$

8) $160°$

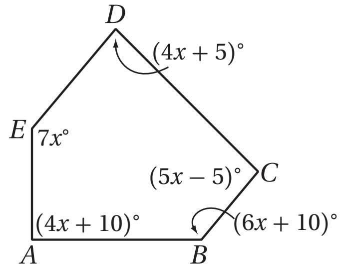
9) $175°$

10) $165°$

11) $144°$

12) $135°$

13) أوجد قياسات جميع الزوايا الداخلية للمضلع المجاور.



5-1 تدريبات إعادة التعليم (تتمة)

زوايا المضلّع

مجموع قياسات الزوايا الخارجيّة لمضلّع:

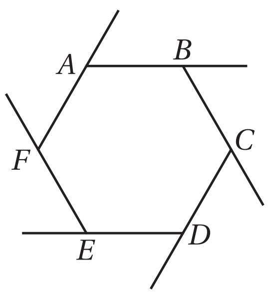
توجد علاقة بين عدد أضلاع مضلَّعٍ محدّبٍ، ومجموع قياسات زواياه الخارجية.

5.2	**نظريّة مجموع قياسات الزوايا الخارجيّة للمضلّع**	مجموع قياسات الزوايا الخارجيّة للمضلَّع المحدّب بأخذ زاوية واحدة عند كلّ رأس يساوي $360°$.

مثال 1 **أوجد مجموع قياسات الزوايا الخارجيّة بأخذ زاوية واحدة عند كلّ رأس لمضلّع محدّب عدد أضلاعه 27.**

لأي مضلّع محدّب، يكون مجموع قياسات زواياه الخارجيّة بأخذ زاوية واحدة عند كلّ رأس يساوي $360°$.

مثال 2 **أوجد قياس الزاوية الخارجيّة للسداسيّ المنتظم *ABCDF*.**



بما أن مجموع قياسات الزوايا الخارجيّة للمضلّع المحدب بأخذ زاوية واحدة عند كلّ رأس يساوي $360°$، وللسداسيّ 6 زوايا خارجيّة، وعلى فرض أن قياس كلّ زاوية خارجيّة هو n فإنّ:

$$6n = 360°$$
$$n = 60°$$

أي أن قياس كلّ زاوية خارجية للسداسيّ المنتظم يساوي $60°$.

تمارين

أوجد مجموع قياسات الزوايا الخارجيّة بأخذ زاوية واحدة عند كلّ رأس لكلّ مضلّع منتظم:

1) العشاريّ. **2)** ذو 16 ضلعًا. **3)** ذو 36 ضلعًا.

أوجد قياس الزاوية الخارجيّة للمضلع المنتظم المُعطَى عدد أضلاعه في كلٍّ مما يأتي، وقرّب إجابتك إلى أقربِ عُشر:

4) ذو 12 ضلعًا. **5)** ذو 16 ضلعًا. **6)** ذو 20 ضلعًا.

7) ذو 40 ضلعًا. **8)** السباعيّ. **9)** ذو 18 ضلعًا.

10) ذو 24 ضلعًا. **11)** ذو 180 ضلعًا. **12)** الثمانيّ.

5-1 تدريبات المهارات

زوايا المضلّع

أوجد مجموع قياسات الزوايا الداخليّة للمضلّع المحدَّب في كلٍّ ممَّا يأتي:

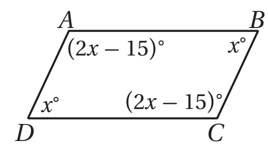
1) التُّساعيّ. **2)** السُّباعيّ. **3)** العُشاريّ.

إذا كان قياس إحدى الزوايا الداخلية لمضلع منتظم مُعطًى، فأوجد عدد الأضلاع في كلٍّ ممَّا يأتي:

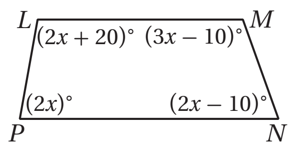
4) $108°$ **5)** $120°$ **6)** $150°$

أوجد قياسات جميع الزوايا الداخليّة لكلٍّ من المضلعات الآتية:

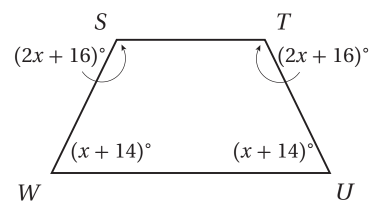
7)



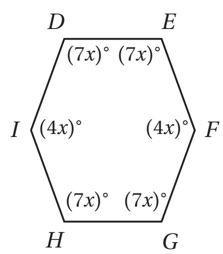
8)



9)



10)



أوجد قياس زاويةٍ داخليّةٍ لكلٍّ من المضلعات المنتظمة الآتية:

11) الرباعيّ. **12)** الخماسيّ. **13)** العشاريّ.

أوجد قياسَي زاويةٍ خارجيةٍ وزاويةٍ داخليةٍ للمضلع المنتظم المُعطَى عدد أضلاعه في كلٍّ ممَّا يأتي:

14) الثمانيّ. **15)** التُساعيّ. **16)** ذو 12 ضلع.

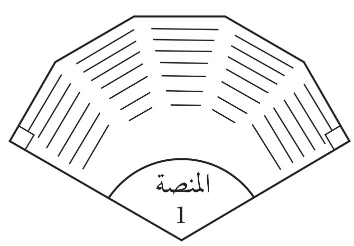
5-1 تدريبات حلّ المسألة

زوايا المضلّع

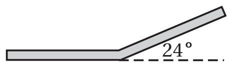
1) **هندسة معمارية:** صُمِّمت صالة لعرض قطع أثرية على شكل مضلّع ثُماني منتظم كما في الشكل أدناه، فما قياس الزاوية بين كلّ جدارين متجاورين فيها؟

2) **صناديق:** صَمَّمت جميلة صندوقًا على شكل مضلع منتظم؛ لتحفظ فيه إكسسواراتها، فكان قياس زاويته الداخليّة يساوي نصف قياس زاويته الخارجيّة، فما المضلّع المنتظم الذي ستستعمله؟

3) **مسارح:** يبيّن الشكل أدناه مخطط أرضيّة مسرح، الأضلاع الخمسة العُلْيا فيه جزءٌ من مضلّعٍ منتظمٍ عدد أضلاعه اثنا عشر ضلعًا، أوجد $m\angle 1$.

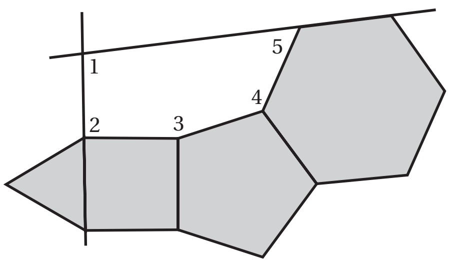


4) **علم الآثار:** كشف علماء آثار أجزاءً من جدارين متجاورين في قلعةٍ قديمةٍ.



وقد علموا من مخطوطات عثروا عليها في الموقع أن قاعدة القلعة على شكل مضلّع منتظم، إلّا أنهم اختلفوا في عدد أضلاعها، فما عدد أضلاع القلعة تبعًا للمعلومات المبيّنة في الشكل؟

5) **تصميم:** ضمن مشروع الفصل، صمّم عددٌ من الطلاب نموذجًا باستعمال مضلّعاتٍ منتظمةٍ، أضلاعها متّصلة بعضها ببعض كما في الشكل أدناه.



a) أوجد $m\angle 2$ وَ $m\angle 5$.

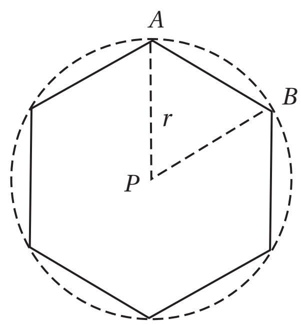
b) أوجد $m\angle 3$ وَ $m\angle 4$.

c) ما قياس $\angle 1$؟

5-1 التدريبات الإثرائيّة

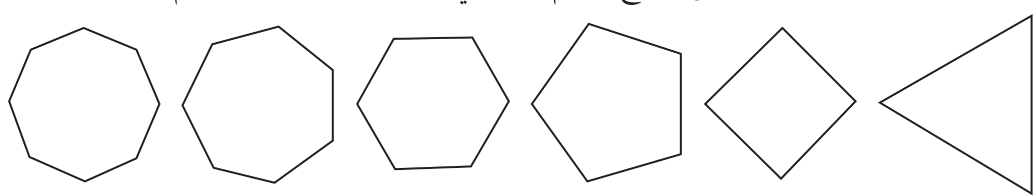
الزوايا المركزيّة للمضلّع المنتظم:

درست الزوايا الداخليّة والزوايا الخارجيّة للمضلّع، وتحتوي المضلّعات المنتظمة على **زوايا مركزية** أيضًا، ويكون رأس الزاوية المركزية عند مركز المضلّع،



ومركز المضلّع نقطةٌ لها البعد نفسه عن جميع رؤوس المضلع، وهو مثل مركز الدائرة الذي يبعد بُعدًا ثابتًا عن جميع نقاط الدائرة تمامًا، والزاوية المركزيّة هي الزاوية التي رأسها عند مركز الدائرة، ويمرّ ضلعاها برأسين متتاليين من رؤوس المضلّع. فالزاوية APB هي إحدى الزوايا المركزية في المضلّع السداسيّ المنتظم المجاور، ولعلّك تذكر من التمثيل بالقطاعات الدائريّة أن مجموع قياسات الزوايا حول مركز الدائرة يساوي $360°$.

1) أوجد قياس الزاوية المركزيّة لكلّ مضلّع منتظم فيما يأتي مستعملًا المنطق، أو برسم أشكال تقريبية:



2) خمّن العلاقة بين قياس الزاويّة المركزيّة لمضلّعٍ منتظمٍ وقياسَي زاويتَيه الداخليّة والخارجيّة.

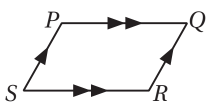
3) تحدٍّ: الضلع $\overline{BC}$ هو أطول الأضلاع في ΔABC المنفرج الزاوية، و $\overline{AC}$ ضلع في مضلّعٍ منتظمٍ عدد أضلاعه 21 أيضًا، وَ $\overline{AB}$ ضلع في مضلّعٍ منتظم عدد أضلاعه 28. المضلّع المنتظم ذو 21 ضلعًا والمضلّع المنتظم ذو 28 ضلعًا لهما نقطة المركز P نفسها. إذا كان $\overline{BC}$ ضلعًا في مضلّعٍ منتظمٍ عدد أضلاعه n ومركزه النقطة P، فأوجد قيمة n .
(**إرشاد:** ارسم دائرةً مركزها P، وعيّن عليها النقاط A, B, C).

5-2 تدريبات إعادة التعليم

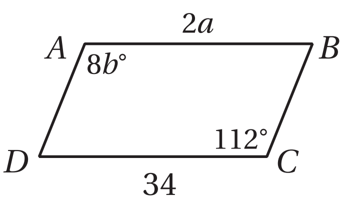
متوازي الأضلاع

أضلاع متوازي الأضلاع وزواياه:

متوازي الأضلاع هو شكل رباعيّ فيه كلّ ضلعين متقابلين متوازيان ويرمز له بالرمز ▱ ، وفيما يأتي أربع خصائص لمتوازي الأضلاع.

		إذا كان **PQRS** متوازي أضلاع، فإنّ:	
5.3	كل ضلعين متقابلين في متوازي الأضلاع متطابقان.	$\overline{PS} \cong \overline{QR}$ و $\overline{PQ} \cong \overline{SR}$	
5.4	كل زاويتين متقابلتين في متوازي الأضلاع متطابقتان.	$\angle S \cong \angle Q$ و $\angle P \cong \angle R$	
5.5	كل زاويتين متحالفتين في متوازي الأضلاع متكاملتان.	$\angle P$ و $\angle S$ متكاملتان؛ $\angle S$ و $\angle R$ متكاملتان؛ $\angle R$ و $\angle Q$ متكاملتان؛ $\angle Q$ و $\angle P$ متكاملتان.	
5.6	إذا كانت إحدَى زوايا متوازي الأضلاع قائمة، فإن زواياه الأربع قوائم.	إذا كان: $m\angle P = 90°$ ، فإن: $m\angle Q = 90°, m\angle R = 90°$، و $m\angle S = 90°$	

مثال **في الشكل المجاور، إذا كان $ABCD$ متوازي أضلاع، فأوجد قيمة كلٍّ من a و b.**



بما أن $\overline{AB}$ وَ $\overline{CD}$ ضلعان متقابلان في متوازي أضلاع، فإنّ:

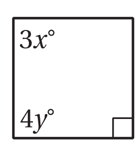
$\overline{AB} \cong \overline{CD}$	كل ضلعين متقابلَين في متوازي الأضلاع متطابقان
$AB \cong CD$	تعريف تطابق القطع المستقيمة
$2a = 34$	بالتعويض
$a = 17$	بقسمة كلا الطرفين على 2

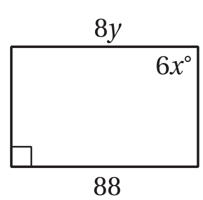
وبما أن $\angle A$ و $\angle C$ زاويتان متقابلتان، فإنّ:

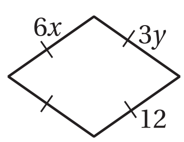
$\angle C \cong \angle A$	كل زاويتين في متوازي الأضلاع متطابقتان
$m\angle C = m\angle A$	تعريف تطابق الزوايا
$8b° = 112°$	بالتعويض
$b = 14$	بقسمة كلا الطرفين على 8

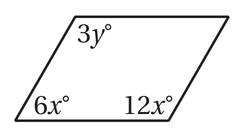
تمارين

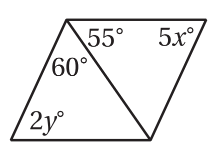
أوجد قيمة كلٍّ من x, y في كلِّ متوازي أضلاع ممّا يأتي:

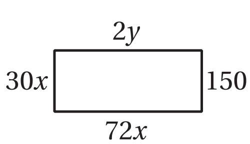
(1


(2


(3


(4


(5


(6


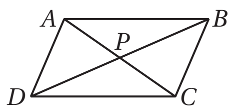
5-2 تدريبات إعادة التعليم (تتمة)

متوازي الأضلاع

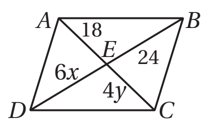
قطرا متوازي الأضلاع:

قُطرا متوازي الأضلاع يحقِّقان الخاصيتين الآتيتين:

		إذا كان $ABCD$ متوازي أضلاع، فإن:	
5.7	قطرا متوازي الأضلاع ينصّف كلٌّ منهما الآخر.	$AP = PC$ و $DP = PB$	
5.8	كلّ قطر في متوازي أضلاع يقسمه إلى مثلثين متطابقين.	$\Delta ACD \cong \Delta CAB$ و $\Delta ADB \cong \Delta CBD$	



مثال أوجد قيمة كلٍّ من x و y في متوازي الأضلاع $ABCD$ المجاور.



بما أن قطري متوازي الأضلاع ينصّف كلٌّ منهما الآخر، إذن:

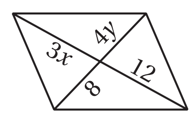
$\overline{AE} \cong \overline{EC}$	قُطرا متوازي الأضلاع ينصِّف كلٌّ منهما الآخر.
$AE = EC$	تعريف تطابق القطع المستقيمة
$18 = 4y$	بالتعويض
$4.5 = y$	بقسمة كلا الطرفين على 4

$\overline{DE} \cong \overline{EB}$	قُطرا متوازي الأضلاع ينصِّف كلٌّ منهما الآخر.
$DE = EB$	تعريف تطابق القطع المستقيمة
$6x = 24$	بالتعويض
$x = 6$	بقسمة كلا الطرفين على 6

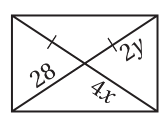
تمارين

أوجد قيمة كلٍّ من x و y في كلّ متوازيات الأضلاع الآتية:

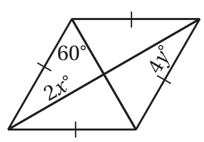
(1



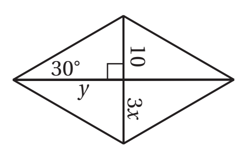
(2



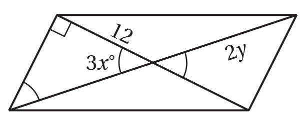
(3



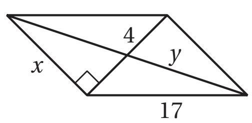
(4



(5



(6



هندسة إحداثيّة: أوجد إحداثيَّي نقطة تقاطع قُطرَي $\square ABCD$، الذي أُعطيت إحداثيّات رؤوسه في كلٍّ من السؤالين الآتيين:

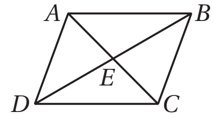
(7 $A(3,6), B(5,8), C(3,-2), D(1,-4)$.

(8 $A(-4,3), B(2,3), C(-1, -2), D(-7, -2)$.

(9 برهان: اكتب برهانًا حرًّا لما يأتي:

المعطيات: $ABCD$ متوازي أضلاع.

المطلوب: $\Delta AED \cong \Delta BEC$.

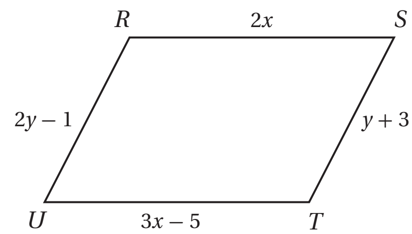


5-2 تدريبات المهارات

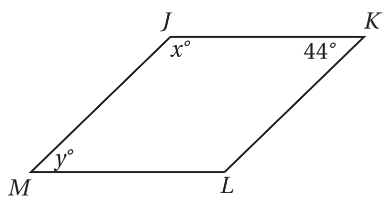
متوازي الأضلاع

جبر: أوجد قيمتَي x, y في كلٍّ من متوازيات الأضلاع الآتية:

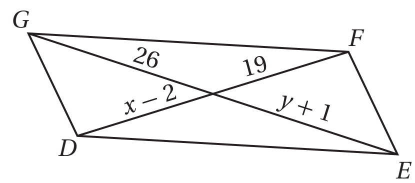
1)



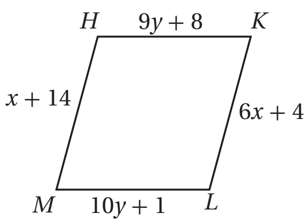
2)



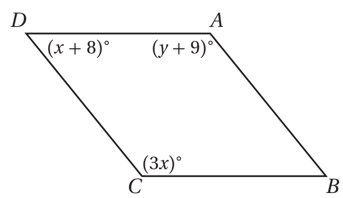
3)



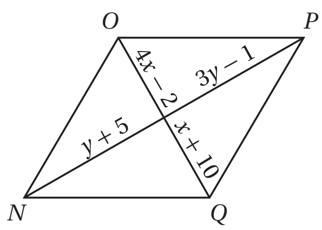
4)



5)



6)



هندسة إحداثيَة: أوجد إحداثيَّي نقطة تقاطع قُطرَي $\square HJKL$، الذي أُعطِيت إحداثيات رؤوسه في كلٍّ من السؤالين الآتيين:

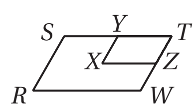
7) $H(1, 1)$, $J(2, 3)$, $K(6, 3)$, $L(5, 1)$.

8) $H(-1, 4)$, $J(3, 3)$, $K(3, -2)$, $L(-1, -1)$.

9) برهان: اكتب برهانًا ذا عمودين.

المعطيات: $\square RSTW$, $\square XYTZ$

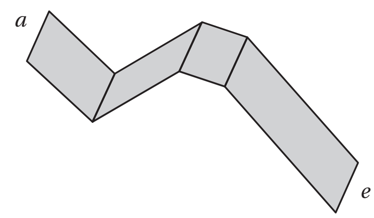
المطلوب: $\overline{XZ} \parallel \overline{RW}$



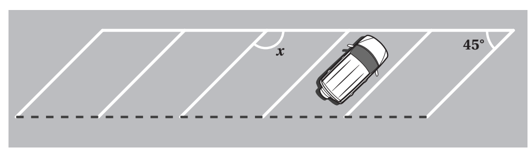
5-2 تدريبات حلّ المسألة

متوازي الأضلاع

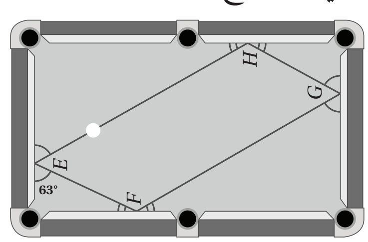
1) ممرّات: يتكون ممرٌّ من أربعة متوازيات أضلاع موصولة بعضها ببعض كما في الشكل أدناه، فهل القطعتان المستقيمتان a و e متوازيتان؟ وضّح إجابتك.



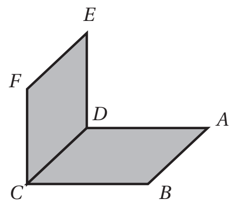
2) مواقف سيارات: يبيّن الشكل أدناه خمسة مواقف أمام أحد المحال التجارية، كلٌّ منها على شكل متوازي أضلاع وجميعها متطابقة، أوجد قياس الزاوية المجهولة x ، وبرّر إجابتك.



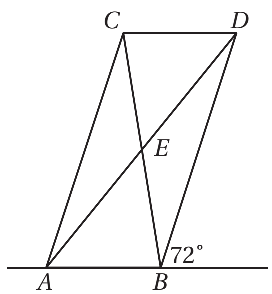
3) بلياردو: يلعب خالد البلياردو، إذا ضرب الكرة فارتطمت بحافة الطاولة واردت في مسارات مختلفة على شكل متوازي أضلاع كما في الشكل أدناه، فحدّد قياسات الزوايا الأربع لمتوازي الأضلاع.



4) نجارة: الشكل أدناه عبارة عن سطح مكتب صمَّمه نجّار على شكل حرف L، وهو عبارة عن متوازيَي أضلاع متلاصقين، فهل القطعتان AD وَ CF متطابقتان؟ ولماذا.



5) تصوير: ركب مصوِّرٌ مروحيةً لالتقاط صورةٍ لمبنًى حديث في إحدى المدن، والشكل أدناه يبين المنظرَ العلويَّ لهذا المبنى، إذا كان قياس الزاوية الخارجيّة عند المدخل 72°، وأراد مهندسٌ أن يعرف مزيدًا عن البِناية، فقام برسم الشكل أدناه، واستعمل مهاراته الهندسية ليعرف المزيد عنها، علمًا بأن المدخل الأمامي يقع بجانب الرأس B.



a) ما قياسات الزوايا الأربع لمتوازي الأضلاع؟

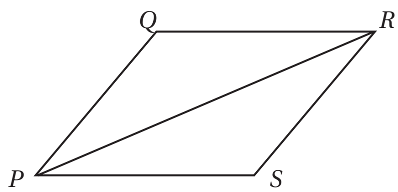
b) ما عدد أزواج المثلثات المتطابقة في الشكل؟وما هي؟

5-2 التدريبات الإثرائيّة

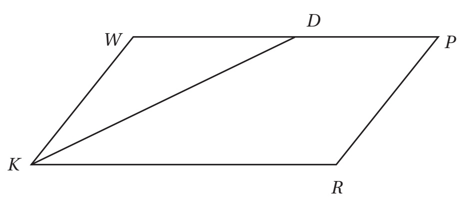
قطرا متوازي الأضلاع:

قطر متوازي الأضلاع في بعض الرسوم يبدو على شكل منصّف لزاويتين متقابلتين، فمتى يكون ذلك صحيحًا؟

1) إذا كان $\overline{PR}$ قطرًا في متوازي الأضلاع $SRQP$، وَ $\overline{PR}$ منصّف لكلٍّ من $\angle QPS$ وَ $\angle QRS$،
فما نوع متوازي الأضلاع $PQRS$؟ برّر إجابتك.

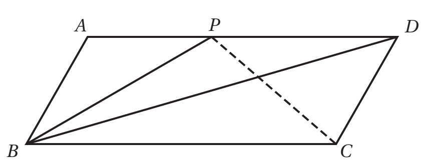


2) إذا كان $\overline{KD}$ منصّف زاويةٍ في متوازي الأضلاع $WPRK$ وَ $WD = 7$, $DP = 5$،
فأوجد WK و KR.



3) ارجع للسؤال 2، واكتب تخمينًا حول متوازي الأضلاع $WPRK$ ومنصّف الزاوية $\overline{KD}$.

4) إذا كان $\overline{BD}$ قطرًا في متوازي الأضلاع $ABCD$، وَ $\overline{BP}$ منصّفًا للزاوية B،
وَ $CP = 5$, $BP = 7$, $PD = 6$، ومحيط ΔPCD يساوي 15،
فأوجد AB وَ BC.



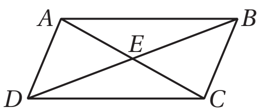
الاسم ____________________ التاريخ ____________

5-3 تدريبات إعادة التعليم

تمييز متوازي الأضلاع

شروط متوازي الأضلاع:

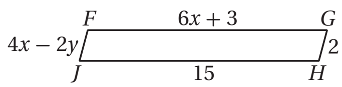
توجد عدّة طرق لإثبات أن شكلًا رباعيًّا ما هو متوازي أضلاع.

	في الشكل الرباعي إذا:	إذا كان:	
تعريف	كان كلّ ضلعين متقابلين متوازيين	$\overline{AD} \parallel \overline{BC}$ و $\overline{AB} \parallel \overline{DC}$	
5.9	كان كلّ ضلعين متقابلين متطابقين	$\overline{AD} \cong \overline{BC}$ و $\overline{AB} \cong \overline{DC}$	
5.10	كانت كلّ زاويتين متقابلتين متطابقتين	$\angle DAB \cong \angle BCD$ و $\angle ABC \cong \angle ADC$	
5.11	نصّف قطراه كلٌّ منهما الآخر	$\overline{DE} \cong \overline{BE}$ و $\overline{AE} \cong \overline{CE}$	
5.12	كان ضلعان متقابلان متطابقين ومتوازيين	$\overline{AD} \cong \overline{BC}$ و $\overline{AD} \parallel \overline{BC}$ أو $\overline{AB} \cong \overline{DC}$ و $\overline{AB} \parallel \overline{DC}$	
	فإنّ الشكل متوازي أضلاع.	**فإنّ $ABCD$ متوازي أضلاع.**	

مثال

أوجد قيمتَي x, y، بحيث يكون الشكل الرباعيّ $FGHJ$ متوازي أضلاع.

يكون الشكل الرباعيّ $FGHJ$ متوازي أضلاع، إذا كان طولا كلّ ضلعين متقابلين فيه متساويين.

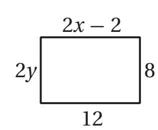


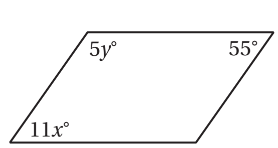
$FG = JH$	تعريف تطابق القطع المستقيمة
$6x + 3 = 15$	بالتعويض
$6x = 12$	بطرح 3 من كلا الطرفين
$x = 2$	بقسمة كلا الطرفين على 6

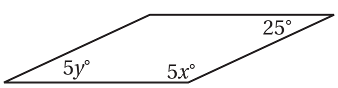
$FJ = GH$	تعريف تطابق القطع المستقيمة
$4x - 2y = 2$	بالتعويض
$4(2) - 2y = 2$	بالتعويض عن x بـ 2
$8 - 2y = 2$	بالتبسيط
$-2y = -6$	بطرح 8 من كلا الطرفين
$y = 3$	بقسمة كلا الطرفين على (-2)

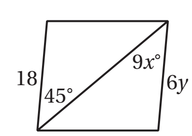
تمارين

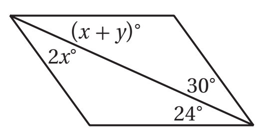
أوجد قيمتَي x, y في كلٍّ مما يأتي، بحيث يكون الشكل الرباعيّ متوازي أضلاع:

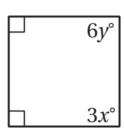
(1


(2


(3


(4


(5


(6


الاسم ______________ التاريخ ______________

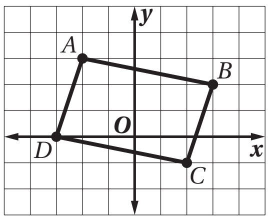
5-3 تدريبات إعادة التعليم (تتمة)

تمييز متوازي الأضلاع

متوازي الأضلاع في المستوى الإحداثيّ:

يمكنك استعمال صيغ المسافة بين نقطتين والميل ونقطة المنتصف؛ لتحديد ما إذا كان الشكل الرباعيّ في المستوى الإحداثيّ متوازي أضلاعٍ أم لا.

مثال



مثّل في المستوى الإحداثي الشكل الرباعي $ABCD$ الذي إحداثيّات رؤوسه: $A(-2,3), B(3,2), C(2,-1), D(-3,0)$ ، وحدِّد ما إذا كان متوازي أضلاعٍ أم لا.

الطريقة 1: استعمال صيغة الميل، $m = \dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$.

ميل $\overline{AD}$: $m = \dfrac{3-0}{-2-(-3)} = \dfrac{3}{1} = 3$ ، وميل $\overline{BC}$: $m = \dfrac{2-(-1)}{3-2} = \dfrac{3}{1} = 3$

و ميل $\overline{AB}$: $m = \dfrac{2-3}{3-(-2)} = -\dfrac{1}{5}$ ، وميل $\overline{DC}$: $m = \dfrac{-1-0}{2-(-3)} = -\dfrac{1}{5}$

بما أنّ كلّ ضلعين متقابلين لهما الميل نفسه، فإنّ $\overline{CD} \parallel \overline{AB}$ وَ $\overline{BC} \parallel \overline{AD}$ ؛ إذن الشكل $ABCD$ متوازي أضلاع وفق التعريف.

الطريقة 2: استعمال صيغة المسافة بين نقطتين، $d = \sqrt{(x_2-x_1)^2 + (y_2-y_1)^2}$.

$AD = \sqrt{(-2-(-3))^2 + (3-0)^2} = \sqrt{1+9} = \sqrt{10}$ $AB = \sqrt{(-2-3)^2 + (3-2)^2} = \sqrt{25+1} = \sqrt{26}$

$BC = \sqrt{(3-2)^2 + (2-(-1))^2} = \sqrt{1+9} = \sqrt{10}$ $CD = \sqrt{(2-(-3))^2 + (-1-0)^2} = \sqrt{25+1} = \sqrt{26}$

بما أنّ كلّ ضلعين متقابلين متساويان في الطول، إذن $\overline{AB} \cong \overline{CD}$ و $\overline{AD} \cong \overline{BC}$ ، لذا فالشكل $ABCD$ متوازي أضلاع وفق النظرية 5.9

تمارين

هندسة إحداثية: مثّل في المستوى الإحداثي الشكل الرباعي المعطاة إحداثيات رؤوسه فيما يأتي، وحدّد ما إذا كان متوازي أضلاع أم لا، برّر إجابتك باستعمال الطريقة المحددة في السؤال:

1) $A(0,0)$, $B(1,3)$, $C(5,3)$, $D(4,0)$ صيغة الميل.

2) $D(-1,1)$, $E(2,4)$, $F(6,4)$, $G(3,1)$ صيغة الميل.

3) $R(-1,0)$, $S(3,0)$, $T(2,-3)$, $U(-3,-2)$
صيغة المسافة بين نقطتين.

4) $A(-3,2)$, $B(-1,4)$, $C(2,1)$, $D(0,-1)$
صيغتا الميل والمسافة بين نقطتين.

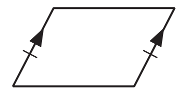
5) $S(-2,4)$, $T(-1,-1)$, $U(3,-4)$, $V(2,1)$
صيغتا الميل والمسافة بين نقطتين.

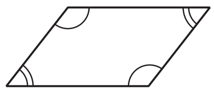
6) $F(3,3)$, $G(1,2)$, $H(-3,1)$, $I(-1,4)$
صيغة نقطة المنتصف.

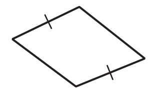
5-3 تدريبات المهارات

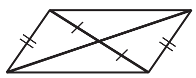
تمييز متوازي الأضلاع

حدّد ما إذا كان كل شكلٍ رباعيٍّ فيما يأتي متوازي أضلاع أم لا، وبرّر إجابتك.

1) 

2) 

3) 

4) 

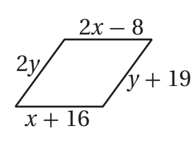
هندسة إحداثيّة: مثّل في المستوى الإحداثي الشكل الرباعي المعطاة إحداثيات رؤوسه فيما يأتي، وحدّد ما إذا كان الشكل متوازي أضلاع أم لا، وبرّر إجابتك بالطريقة المحدّدة في السؤال.

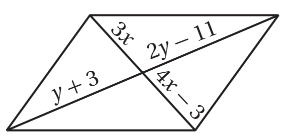
5) $P(0\,,\,0)\,,\,Q(3\,,\,4)\,,\,S(7\,,4)\,,\,Y(4\,,\,0)$؛ صيغة الميل.

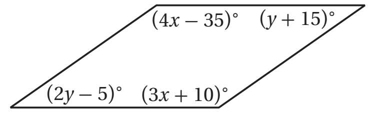
6) $S(-2\,,\,1)\,,\,R(1\,,3)\,,\,T(2\,,0)\,,\,Z(-1\,,-2)$؛ صيغتا المسافة بين نقطتين والميل.

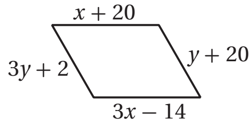
7) $W(2\,,5)\,,\,R(3\,,3)\,,\,Y(-2\,,-3)\,,\,N(-3\,,1)$؛ صيغة نقطة المنتصف.

جبر: أوجد قيمتَي x, y في كلٍّ مما يأتي، بحيث يكون الشكل الرباعي متوازي أضلاع:

8) 

9) 

10) 

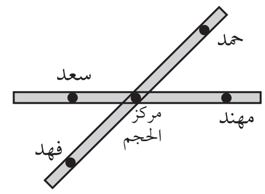
11) 

12) إذا كانت إحداثيّات ثلاثة من رؤوس متوازي أضلاع هي: $R(-2,\ -1),\ S(2,\ 1),\ T(0,\ -3)$، فأوجد الإحداثيّات الممكنة للرأس الرابع جميعها.

5-3 تدريبات حلّ المسألة

تمييز متوازي الأضلاع

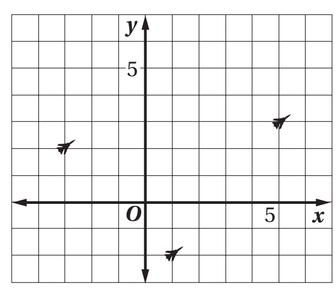
1) توازن: يوازن حمد وسعد وفهد ومهند أنفسهم على جسم على شكل "X" يطفو على سطح الماء، وذلك بالجلوس في أربعة مواقع تشكّل رؤوسًا لمتوازي أضلاع كما في الشكل أدناه،



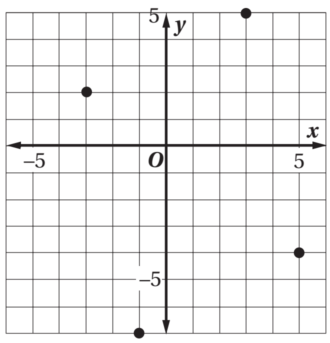
فهل يتعيّن أن يبعد الأشخاص الأربعة المسافة نفسها عن مركز الجسم، إذا كان لكلّ اثنين متقابلين الكتلة نفسها؟ وضّح إجابتك.

2) بوصلة: وُضعت إبرتا بوصلتين متجاورتين على طاولةٍ، إذا كان طول كلٍّ منهما 2 in وتُشيران نحو الشمال، فهل تشكّلان ضلعين في متوازي أضلاع؟

3) عروض جويّة: يبين الرسم أدناه مواقع ثلاث طائرات من بين أربعٍ تحلّق مشكِّلة رؤوس متوازي أضلاع، فما المواقع الثلاثة الممكنة للطائرة الرابعة؟



4) خرائط: وضع خالد مستوى إحداثيًّا فوق خريطة مدينته، فظهرت أركانها الأربعة كما في الشكل أدناه، فهل تشكِّل الأركان الأربعة رؤوس متوازي أضلاع؟ وضّح إجابتك.



5) إطار صورة: لدى نوال قطعتان من الخشب طول كلٍّ منهما 3 ft، وقطعتان أُخرَيان طول كلٍّ منهما 4 ft، وتريد أن تصنع منها إطارًا خشبيًّا لصورةٍ على شكل متوازي أضلاع .

a) إذا ثُبّتت القطع الأربع عند أطرافها، فما الترتيب الذي يتعيّن أن تثبت به القطع حتى يكوّن متوازي أضلاع؟

b) ما عدد متوازيات الأضلاع التي يمكنها تكوينها بهذه القطع الأربع؟

c) وضّح ما يمكن أن تفعله نوال لتحدد شكل متوازي الأضلاع بدقةٍ.

5-3 التدريبات الإثرائيّة

استقصاء شروط متوازي الأضلاع:

وفق التعريف، يكون الشكل الرباعيّ متوازي أضلاع، إذا وفقط إذا كان كلّ ضلعين متقابلين متوازيين. ما الشروط الأخرى الكافية لإثبات أن شكلًا رباعيًّا ما متوازي أضلاع غير شرط توازِي كلّ ضلعين متقابلين؟ في هذا النشاط، ستستقصى عدة حالات ممكنة من خلال رسم أشكال رباعيّة تحقّق شروطًا معيّنةً.

تذكّر أن أي شرط يبدو كافيًا حتى يكون شكلًا رباعيًّا ما متوازي أضلاع، يجب إثبات صحته أولًا حتى يُعدَّ صالحًا.

نفذّ كلًّا ممّا يأتي:

1) ارسم شكلًا رباعيًّا فيه ضلعان متقابلان متطابقان. هل أنت متأكّد من كونه متوازي أضلاع؟

2) ارسم شكلًا رباعيًّا فيه كلُّ ضلعين متقابلين متطابقان. هل أنت متأكّد من كونه متوازي أضلاع؟

3) ارسم شكلًا رباعيًّا فيه ضلعان متقابلان متوازيان والضلعان الآخران متطابقان. هل أنت متأكّد من كونه متوازي أضلاع ؟

4) ارسم شكلًا رباعيًّا فيه ضلعان متقابلان متوازيان ومتطابقان. هل أنت متأكّد من كونه متوازي أضلاع؟

5) ارسم شكلًا رباعيًّا فيه زاويتان متقابلتان متطابقتان. هل أنت متأكّد من كونه متوازي أضلاع؟

6) ارسم شكلًا رباعيًّا فيه كلُّ زاويتين متقابلتين متطابقتان. هل أنت متأكّد من كونه متوازي أضلاع؟

7) ارسم شكلًا رباعيًّا فيه ضلعان متقابلان متوازيان وزاويتان متقابلتان متطابقتان. هل أنت متأكّد من كونه متوازي أضلاع؟

الاسم ______________________ التاريخ ____________

5-4 تدريبات إعادة التعليم

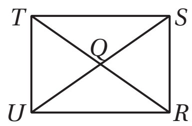
المستطيل

خصائص المستطيل:

المستطيل شكل رباعيٌّ زواياه الأربع قوائم، وبما أن الزوايا المتقابلة متطابقة فهو متوازي أضلاع أيضًا.

وتتوافر فيه خصائص متوازي الأضلاع وهي: الأضلاع المتقابلة متوازية، والأضلاع المتقابلة متطابقة، والزوايا المتحالفة متكاملة، والقطران ينصّف كلٌّ منهما الآخر.

بالإضافة إلى الخصائص الآتية:

تعريف	جميع الزوايا الأربع قوائم.	$\angle UTS, \angle TSR, \angle SRU, \angle RUT$ قوائم.	
5.13	القطران متطابقان.	$\overline{TR} \cong \overline{US}$	

- جميع الزوايا الأربع قوائم. $\angle UTS, \angle TSR, \angle SRU, \angle RUT$ قوائم.
- القطران متطابقان. $\overline{TR} \cong \overline{US}$

مثال 1 **إذا كان الشكل الرباعيّ $RUTS$ أعلاه مستطيلًا، وكان: $RT = 7x - 2,\ US = 6x + 3$، فأوجد قيمة x.**

بما أن قطرَي المستطيل متطابقان؛ إذن:

$US = RT$	تعريف تطابق القطع المستقيمة
$6x + 3 = 7x - 2$	بالتعويض
$3 = x - 2$	بطرح $6x$ من كلا الطرفين
$5 = x$	بإضافة 2 إلى كلا الطرفين

مثال 2 **إذا كان الشكل الرباعيّ $RUTS$ أعلاه مستطيلًا، وكان: $m\angle STR = (8x + 3)^\circ$ ، وَ $m\angle UTR = (16x - 9)^\circ$ ، فأوجد $m\angle STR$.**

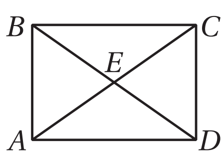
بما أن $\angle UTS$ زاوية قائمة،

فإنّ: $m\angle STR + m\angle UTR = 90^\circ$	زاوية قائمة
$(8x + 3)^\circ + (16x - 9)^\circ = 90^\circ$	بالتعويض
$(24x - 6)^\circ = 90^\circ$	بالتبسيط
$(24x)^\circ = 90^\circ$	بإضافة 6 إلى كلا الطرفين
$x = 4$	بقسمة كلا الطرفين على 24

إذن: $m\angle STR = 8x + 3 = 8(4) + 3 = 35^\circ$

تمارين

استفد من المستطيل $ABCD$ المجاور لحل الأسئلة 8–1:



1) إذا كان: $AE = 36$ و $CE = 2x - 4$، فأوجد قيمة x.

2) إذا كان: $BE = 6y + 2$ و $CE = 4y + 6$، فأوجد قيمة y.

3) إذا كان: $BC = 24$ و $AD = 5y - 1$، فأوجد قيمة y.

4) إذا كان: $m\angle BEA = 62^\circ$، فأوجد $m\angle BAC$.

5) إذا كان: $m\angle AED = (12x)^\circ$ و $m\angle BEC = (10x + 20)^\circ$، فأوجد $m\angle AED$.

6) إذا كان: $BD = 8y - 4$ و $AC = 7y + 3$، فأوجد BD.

7) إذا كان: $m\angle DBC = (10x)^\circ$ و $m\angle ACB = (4x^2 - 6)^\circ$، فأوجد $m\angle ACB$.

8) إذا كان: $AB = 6y$ و $BC = 8y$، فأوجد BD بدلالة y.

5-4 تدريبات إعادة التعليم (تتمة)

المستطيل

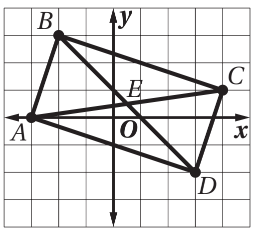
إثبات أنّ متوازي الأضلاع يكون مستطيلًا:

إذا كان متوازي الأضلاع مستطيلًا فإن قطرَيه متطابقان، وعكس هذه النظرية صحيح أيضًا، فإذا كان قطرا متوازي أضلاع متطابقين فإنه مستطيل.

وفي المستوى الإحداثيّ، يمكنك استعمال صيغة المسافة بين نقطتين وصيغة الميل وخصائص القطرين لتحدّد ما إذا كان شكل ما مستطيلًا أم لا.

مثال

في المستوى الإحداثي، مثّل الشكل الرباعيّ $ABCD$ الذي رؤوسه: $A(-3,0), B(-2,3), C(4,1), D(3,-2)$، ثم حدّد ما إذا كان $ABCD$ مستطيلًا أم لا، وبرّر إجابتك



الطريقة 1: استعمال صيغة الميل، $m = \dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$

ميل $\overline{AB}$: $m = \dfrac{3-0}{-2-(-3)} = \dfrac{3}{1} = 3$، وميل $\overline{AD}$: $m = \dfrac{-2-0}{3-(-3)} = -\dfrac{2}{6} = -\dfrac{1}{3}$

و ميل $\overline{CD}$: $m = \dfrac{-2-1}{3-4} = \dfrac{-3}{-1} = 3$، وميل $\overline{BC}$: $m = \dfrac{1-3}{4-(-2)} = -\dfrac{2}{6} = -\dfrac{1}{3}$

بما أن كلّ ضلعين متقابلين في الشكل الرباعيّ متوازيان، فإنه متوازي أضلاع، ولمّا كانت الأضلاع المتتالية متعامدة، فإن الشكل $ABCD$ متوازي أضلاع زواياه الأربع قوائم؛ أي أنه مستطيل.

الطريقة 2: استعمال صيغة المسافة بين نقطتين، $d = \sqrt{(x_2-x_1)^2 + (y_2-y_1)^2}$

$BC = \sqrt{(-2-4)^2 + (3-1)^2} = \sqrt{40}$ $\quad AB = \sqrt{(-3-(-2))^2 + (0-3)^2} = \sqrt{10}$

$AD = \sqrt{(-3-3)^2 + (0-(-2))^2} = \sqrt{40}$ $\quad CD = \sqrt{(4-3)^2 + (1-(-2))^2} = \sqrt{10}$

بما أن كلّ ضلعين متقابلين متطابقان، فإن الشكل $ABCD$ متوازي أضلاع.

$AC = \sqrt{(-3-4)^2 + (0-1)^2} = \sqrt{50}$ $\quad BD = \sqrt{(-2-3)^2 + (3-(-2))^2} = \sqrt{50}$

وبما أن $ABCD$ متوازي أضلاع قطراه متطابقان، إذن هو مستطيل.

تمارين

هندسة إحداثيّة: في المستوى الإحداثي، مثّل الشكل الرباعي المعطاة إحداثيّات رؤوسه في كلٍّ مما يأتي، وحدّد ما إذا كان مستطيلًا أم لا، برّر إجابتك باستعمال الطريقة المحددة في السؤال.

1) $A(-3,1), B(-3,3), C(3,3), D(3,1)$؛ صيغة المسافة بين نقطتين.

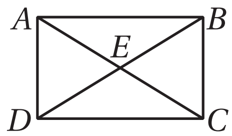
2) $A(-3,0), B(-2,3), C(4,5), D(3,2)$؛ صيغة الميل.

3) $A(-3,0), B(-2,2), C(3,0), D(2,-2)$؛ صيغة المسافة بين نقطتين.

4) $A(-1,0), B(0,2), C(4,0), D(3,-2)$؛ صيغة الميل.

5-4 تدريبات المهارات

المستطيل



جبر: استفد من المستطيل $ABCD$ المجاور لحل الأسئلة 8–1.

1) إذا كان: $AC = 2x + 13$ وَ $DB = 4x - 1$، فأوجد DB.

2) إذا كان: $AC = x + 3$ وَ $DB = 3x - 19$، فأوجد AC.

3) إذا كان: $AE = 3x + 3$ وَ $EC = 5x - 15$، فأوجد AC.

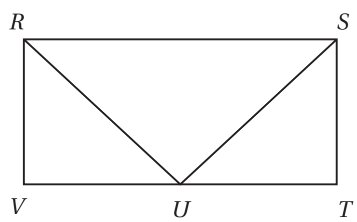
4) إذا كان: $DE = 6x - 7$ وَ $AE = 4x + 9$، فأوجد DB.

5) إذا كان: $m\angle DAC = (2x + 4)^\circ$ وَ $m\angle BAC = (3x + 1)^\circ$، فأوجد $m\angle BAC$.

6) إذا كان: $m\angle BDC = (7x + 1)^\circ$ وَ $m\angle ADB = (9x - 7)^\circ$، فأوجد $m\angle BDC$.

7) إذا كان: $m\angle ABD = (7x - 31)^\circ$ وَ $m\angle CDB = (4x + 5)^\circ$، فأوجد $m\angle ABD$.

8) إذا كان: $m\angle BAC = (x + 3)^\circ$ وَ $m\angle CAD = (x + 15)^\circ$، فأوجد $m\angle BAC$.



9) برهان: اكتب برهانًا ذا عمودين

المعطيات: الشكل $RSTV$ مستطيل، و U نقطة منتصف $\overline{VT}$.

المطلوب: $\Delta RUV \cong \Delta SUT$

هندسة إحداثية: مثّل في المستوى الإحداثي الشكل الرباعي المعطاة إحداثيات رؤوسه في كلٍّ مما يأتي، وحدد ما إذا كان مستطيلًا أم لا، برّر إجابتك باستعمال الطريقة المحددة في السؤال.

10) $P(-2, -3)$, $Q(-4, 2)$, $R(2, 4)$, $S(3, 0)$؛ صيغة الميل.

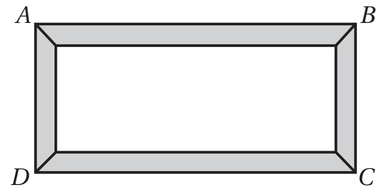
11) $J(-6, 3)$, $K(0, 6)$, $L(2, 2)$, $M(-4, -1)$؛ صيغة المسافة بين نقطتين.

12) $T(4, 1)$, $U(3, -1)$, $X(-3, 2)$, $Y(-2, 4)$؛ صيغة المسافة بين نقطتين.

5-4 تدريبات حلّ المسألة

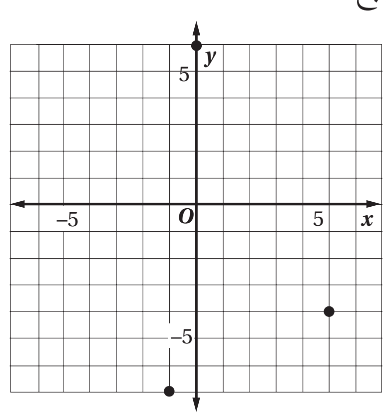
المستطيل

1) إطار صورة: صنع حمدٌ الإطار المستطيل المبيّن أدناه، ثم قاس المسافتين BD وَ AC لكي يتأكّد من أن الإطار مستطيل، ما العلاقة بين هاتين المسافتين إذا كان الإطار مستطيلًا؟

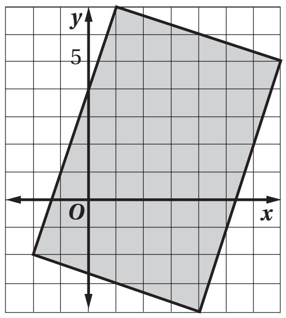


2) مكتبات: في الشكل أدناه، خزانة كتب تتكون من لوحين خشبيَّين عموديَّين وخمسة ألواح أفقية، فهل واجهة كل قسم من أقسام الخزانة الناتجة عن تقاطع الألواح الأفقية واللَّوحين العموديين تشكل مستطيلًا؟ وضّح إجابتك.

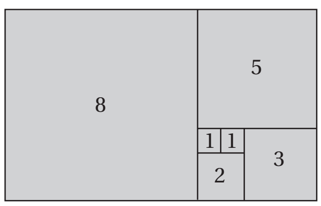
3) مسح الأراضي: يحدّد مسّاح أراض رؤوس قطعة أرض مستطيلة؛ ثلاثة رؤوس منها مبيّنة في الشكل أدناه. ما إحداثيّات الرأس الرابع؟



4) برك سباحة: يُصمّم ماجد بركة سباحةٍ في المستوى الإحداثي، فهل البركة مستطيلة؟ وضّح إجابتك.



5) أنماط: كوّن خالد النمط الآتي مستعملًا 6 مربعاتٍ، وقد كتب طول ضلع كلّ مربعٍ داخله.



a) كم مستطيلًا يمكن تكوينه باستعمال الأضلاع الظاهرة في هذا الشكل؟

b) إذا أراد خالدٌ أن يوّسع هذا النمط بإضافة مستطيل آخر، أضلاعه متساوية الطول لتكوين مستطيل أكبر، فما الأطوال الممكنة لأضلاع المستطيل الذي يمكنه إضافته؟

الاسم ________________ التاريخ ________

5-4 التدريبات الإثرائيّة

المحيط الثابت والمساحة الثابتة للمستطيل:

في هذا النشاط ستستقصِي أن المستطيل الذي محيطه ثابت (معلوم) لا يعني أن بُعدَيه ثابتان؛ فقد يوجد أكثر من مستطيلٍ له المحيط نفسه وبُعداه مختلفان. وسنربط ذلك بالمساحة؛ لنستنتج أن المستطيل المعلوم المحيط ومساحته أكبر ما يمكن سيكونُ مربعًا، كما سنستقصي أن المستطيل المعلوم المساحة ومحيطه أقل ما يمكن سيكون مربعًا أيضًا.

المحيط الثابت

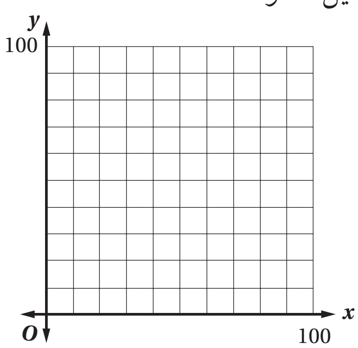
يريد سلمان أن يحوط قطعة مستطيلة الشكل من حديقة بيته بسياجٍ، فاشترى 200 ft منه.

1) أكمل الجدول المجاور بأعدادٍ كليةٍ؛ لبيان أبعاد القطع المستطيلة الخمس التي سيُستعمل في إحاطتها بالسياج كلّه، ثم أوجد مساحة كلِّ قطعةٍ.

المحيط (ft)	الطول (ft)	العرض (ft)	المساحة $(ft)^2$
200	80		
200	70		
200	60		
200	50		
200	45		

2) هل القطع المستطيلة الخمس لها المساحة نفسها؟ وإلّا فما مساحة القطعة الكبرى؟

3) اكتب قاعدةً لإيجاد أبعاد المستطيل الذي له أكبر مساحةٍ ممكنةٍ، عندما يكون محيط المستطيل معلومًا.



4) ليكن x يمثّل طول مستطيل وy يمثّل عرضه، اكتب علاقةً تربط بين x وَ y لجميع المستطيلات التي مُحيطُها 200 ft، ثم مثّل هذه العلاقة في المستوى الإحداثيّ المجاور.

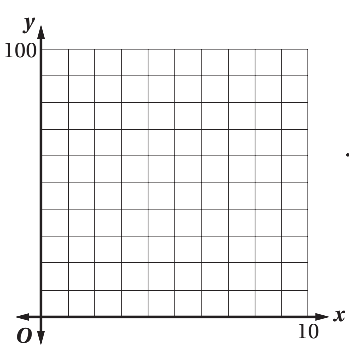
أراد سلمان أن يضع سياجًا حول قطعةٍ مستطيلةٍ أخرى مساحتها $100\ ft^2$ ، وقبل أن يذهب لشراء السياج، كوّن سلمان جدولًا لتحديد أبعاد القطعة المستطيلة التي سيُحوِّطها بالسياج.

5) المساحة الثابتة: أكمل الجدول بأعدادٍ كليةٍ؛ لإيجاد الأبعاد الممكنة للقطع المستطيلة الخمس التي مساحتها $100\ ft^2$

المساحة $(ft)^2$	الطول (ft)	العرض (ft)	طول السياج (ft)
100			
100			
100			
100			
100			

6) يُريد سلمان أن يكون ثمن شراء السياج أقلّ ما يمكن، ساعده على إيجاد أبعاد القطعة التي تكلفة سياجها أقلّ ما يمكن؟

7) اكتب قاعدةً لإيجاد أبعاد المستطيل ذي المحيط الأصغر، عندما تكون مساحة المستطيل معطاة.



8) افترض أن x يمثّل طول المستطيل وy يمثّل عرضه. اكتب علاقةً تربط بين x وy للمستطيل الذي مساحته $100\ ft^2$، ثم مثّل هذه العلاقة في المستوى الإحداثيّ المجاور.

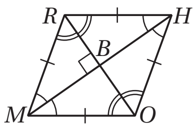
الاسم ____________ التاريخ ____________

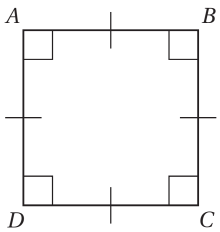
5-5 تدريبات إعادة التعليم

المعيّن والمربّع

خصائص المعيّن:

المعيّن هو شكل رباعيّ أضلاعه الأربعة متطابقة. وبما أنّ كلّ ضلعين متقابلين فيه متطابقان، فهو متوازي أضلاع أيضًا. وتتوافر فيه خصائص متوازي الأضلاع وهي: الأضلاع المتقابلة متوازية، والزوايا المتقابلة متطابقة، والزوايا المتحالفة متكاملة، وكذلك القطران ينصّف كلّ منهما الآخر، بالإضافة إلى الخصائص الآتية:

5.15	قطرا المعين متعامدان.	$\overline{MH} \perp \overline{RO}$	
5.16	كلّ قطرٍ فيه ينصّف كلًّا من الزاويتين اللّتين يصل بين رأسَيهما.	$\overline{MH}$ ينصّف $\angle RMO$ و $\angle RHO$، $\overline{RO}$ ينصّف $\angle MRH$ و $\angle MOH$	

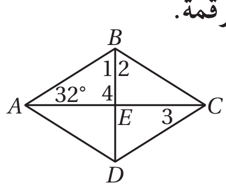


المربع $ABCD$

المربّع هو متوازي أضلاع جميع أضلاعه متطابقة وجميع زواياه متطابقة. تذكّر أن متوازي الأضلاع الذي زواياه الأربع قوائم يكون مستطيلًا، ومتوازي الأضلاع الذي أضلاعه الأربعة متطابقة يكون معيّنًا؛ لذا فعندما يكون متوازي الأضلاع معيّنًا وإحدى زواياه قائمة فإنّه يكون مربّعًا أيضًا.

مثال

في المعين $ABCD$ المجاور. إذا كان $m\angle BAC = 32°$ ، فأوجد قياس كلّ زاوية مرقّمة.



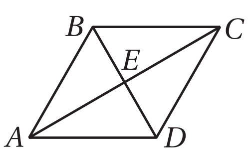
بما أنّ $ABCD$ معيّنًا، فإنّ قطريه متعامدان و$\triangle ABE$ قائم الزاوية؛ لذا فإن: $m\angle 4 = 90°$،

و $m\angle 1 = 90° - 32° = 58°$. وبما أنّ كلّ قطر في المعين ينصّف الزاويتين اللتين يمرّ بهما،

فإنّ $m\angle 1 = m\angle 2$؛ إذن $m\angle 2 = 58°$.

وبما أنّ المعيّن متوازي أضلاع، فإنّ الأضلاع المتقابلة فيه متوازية، وبما أنّ الزاويتين $\angle BAC$ وَ $\angle 3$ متبادلتان داخليًّا بين مستقيمين متوازيين، فإنّ $m\angle 3 = 32°$.

تمارين



جبر: استفد من المعيّن $ABCD$ المجاور للإجابة عن الأسئلة 8–1:

1) إذا كان: $m\angle ABD = 60°$، فأوجد $m\angle BDC$.

2) إذا كان: $AE = 8$، فأوجد AC.

3) إذا كان: $AB = 26$ وَ $BD = 20$، فأوجد AE.

4) أوجد $m\angle CEB$.

5) إذا كان: $m\angle CBD = 58°$، فأوجد $m\angle ACB$.

6) إذا كان: $AE = 3x - 1$ وَ $AC = 16$، فأوجد قيمة x.

7) إذا كان: $m\angle CDB = (6y)°$ وَ $m\angle ACB = (2y + 10)°$، فأوجد قيمة y.

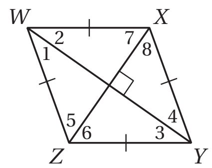
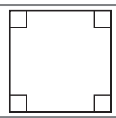
8) إذا كان: $AD = 2x + 4$ وَ $CD = 4x - 4$، فأوجد قيمة x.

5-5 تدريبات إعادة التعليم (تتمة)

المعيّن والمربّع

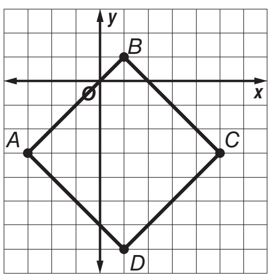
إثبات أن الشكل الرباعي معين أو مربع:

تحدد النظريات الآتية الشروط الكافية لتحديد ما إذا كان متوازي الأضلاع معينًا أو مربعًا.

5.17	إذا كان قطرا متوازي الأضلاع متعامدين فإنه معيَّن.	إذا كان: $\overline{WY} \perp \overline{ZX}$، فإن $\square WXYZ$ معينًا	
5.18	إذا نصَّف قطرا متوازي أضلاع كلًّا من الزاويتين اللتين يصل بين رأسيهما، فإن متوازي الأضلاع يكون معينًا.	إذا كان: $\angle 1 \cong \angle 2, \angle 3 \cong \angle 4, \angle 5 \cong \angle 6,$ $\angle 7 \cong \angle 8$ ، فإن $\square WXYZ$ معينًا	
5.19	إذا كان ضلعان متتاليان في متوازي الأضلاع متطابقين فإنه معين.	إذا كان: $\overline{XY} \cong \overline{YZ}$ ، فإن $\square WXYZ$ معينًا	
5.20	إذا كان الشكل الرباعي مستطيلًا ومعينًا فإنه مربع.		

مثال

حدد ما إذا كان متوازي الأضلاع $ABCD$ الذي إحداثيات رؤوسه: $A(-3, -3), B(1, 1), C(5, -3), D(1, -7)$ معينًا أو مستطيلًا أو مربعًا. اكتب جميع التسميات التي تنطبق عليه، ووضّح إجابتك. مثّل $\square ABCD$ في المستوى الإحداثي، ثم أوجد AC وَ BD



$AC = \sqrt{(-3-5)^2 + (-3-(-3))^2} = \sqrt{64} = 8$ ، $BD = \sqrt{(1-1)^2 + (-7-1)^2} = \sqrt{64} = 8$

القطران متطابقان؛ إذن فمتوازي الأضلاع $ABCD$ مستطيل. والآن، أوجد ميل كلٍّ من $\overline{AC}$ وَ $\overline{BD}$.

ميل $\overline{AC}$: $m = \frac{-3-(-3)}{-3-5} = \frac{0}{-8} = 0$ ؛ $\overline{AC}$ مستقيم أفقي.

ميل $\overline{BD}$: $m = \frac{1-(-7)}{1-1} = \frac{8}{0}$ = كمية غير معرفة ؛ $\overline{BD}$ مستقيم رأسي.

وبما أن المستقيمين (الأفقي والرأسي) متعامدان دائمًا، فإن قطري متوازي، الأضلاع $ABCD$ متعامدان؛ ولذلك فهو معيَّن ومستطيل، وبالتالي فهو مربع.

تمارين

هندسة إحداثية: حدِّد ما إذا كان $\square ABCD$ المعطاة إحداثيات رؤوسه في كلٍّ مما يأتي معينًا أو مستطيلًا أو مربعًا، اكتب جميع التسميات التي تنطبق عليه. ووضِّح إجابتك.

1) $A(0, 2), B(2, 4), C(4, 2), D(2, 0)$

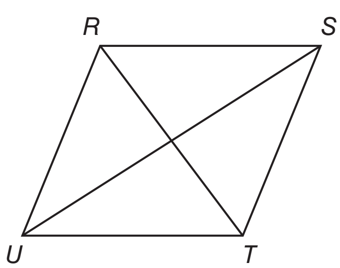
2) $A(-2, 1), B(-1, 3), C(3, 1), D(2, -1)$

3) $A(-2, -1), B(0, 2), C(2, -1), D(0, -4)$

4) برهان: اكتب برهانًا ذا عمودين.

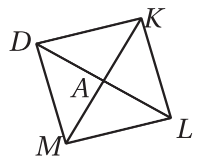
المعطيات: في متوازي الأضلاع $RSTU$ ، $\overline{RS} \cong \overline{ST}$

المطلوب: $RSTU$ معيَّن.



5-5 تدريبات المهارات

المعين والمربّع



جبر: استفد من المعين $DKLM$ المجاور للإجابة عن الأسئلة 6–1.

1) إذا كان: $DK = 8$، فأوجد KL.

2) إذا كان: $m\angle DML = 82°$، فأوجد $m\angle DKM$.

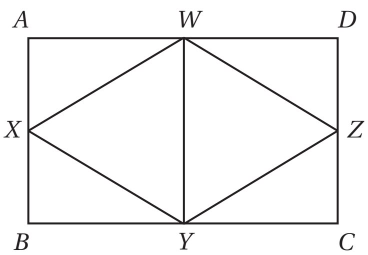
3) إذا كان: $m\angle KAL = (2x - 8)°$، فأوجد قيمة x.

4) إذا كان: $DA = 4x$ و $AL = 5x - 3$، فأوجد DL.

5) إذا كان: $m\angle DKL = (3x + 2)°$، و $m\angle KLM = (3x - 2)°$، فأوجد $m\angle MDK$.

6) إذا كان: $DM = 5y + 2$ و $DK = 3y + 6$، فأوجد KL.

7) برهان: اكتب برهانًا ذا عمودين.



المعطيات: الشكل الرباعي $ABCD$ مستطيل، و W, X, Z نقاط منتصف $\overline{AD}, \overline{AB}, \overline{DC}$ على الترتيب، وَ $\triangle WXY, \triangle WZY$ مثلثان متطابقا الضلعين، وَ $\overline{WY}$ قاعدة مشتركة بينهما.

المطلوب: إثبات أن الشكل $WXYZ$ معيّن.

هندسة إحداثيّة: حدّد ما إذا كان $\square QRST$ المعطاة إحداثيات رؤوسه في كلٍّ مما يأتي معينًا أو مستطيلًا أو مربعًا، واكتب جميع التسميات التي تنطبق عليه، ووضِّح إجابتك.

8) $T(-1,5), S(-1,1), R(3,1), Q(3,5)$

9) $T(-11,4), S(-1,4), R(5,12), Q(-5,12)$

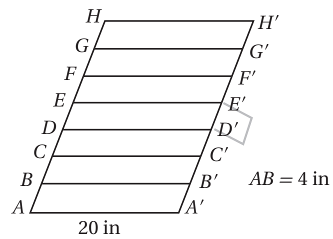
10) $T(-8,10), S(2,5), R(4,-6), Q(-6,-1)$

11) $T(-2,6), S(-10,2), R(-6,-8), Q(2,-4)$

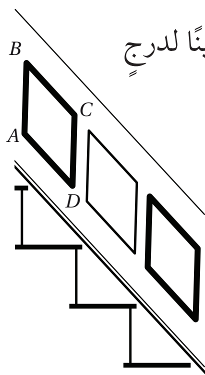
5-5 تدريبات حلّ المسألة

المعيّن والمربّع

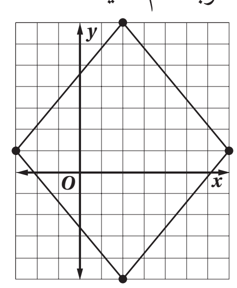
1) رفوف الأطباق: الشكل أدناه يمثل المنظر الجانبي لرف أطباق، والذي يبدو على شكل متوازي أضلاع، إذا كانت المسافات بين الرفوف متساوية، فما النقطتان اللتان تشكّلان معينًا مع النقطتين A و A'؟



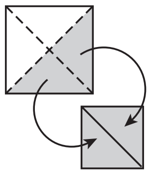
2) درج: يبيّن الشكل المجاور درابزينًا لدرجٍ على شكل معيناتٍ متطابقةٍ؛ في المعين $ABCD$ ، إذا كان $m\angle A$ يساوي ضعف $m\angle B$ ، فأوجد $m\angle C, m\angle D$.



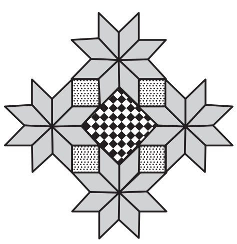
3) نوافذ: رُسمت نافذة في المستوى الإحداثيّ أدناه، حدّد ما إذا كانت النافذة مربّعًا أم معيّنًا.



4) مربّعات: قصّت صفيَّة مربّعًا على طول قُطريه، فحصلت على أربعة مثلثات قائمة ومتطابقة، ثم لصقت اثنين منها من جهة ضلعَيهما الطويلين. بيّن أن الشكل الناتج مربّع.



5) تصميم: استعملت هدى 32 من المعيّنات المتطابقة؛ لتكوين تصميمٍ يشبه الزهرة عند كلّ ركنٍ كما في الشكل المجاور.

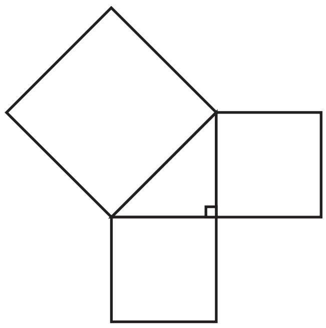


a) ما قياسات زوايا المعيّنات المتطابقة المستخدمة في التصميم؟ وضح إجابتك.

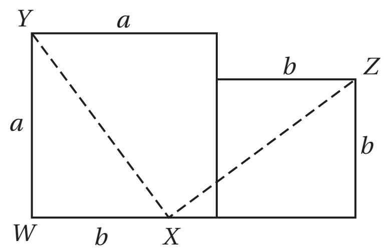
b) ما أنواع الأشكال الرباعيّة المنقّطة والشكل الرباعي الذي يتوسط التصميم؟ وضح إجابتك.

5-5 التدريبات الإثرائيّة

ألغاز على نظريّة فيثاغورس



تصف نظرية فيثاغورس العلاقة بين طولَي الساقين والوتر في أي مثلث قائم الزاوية، بحيث يكون مجموع مساحتَي المربعين المنشأين على الساقين يساوي مساحة المربع المنشأ على الوتر، ويمكنك تكوين لغز التبليط لتوضيح نظرية فيثاغورس بلعبةٍ مشابهةٍ للعبة تانجرام باستعمال خمس قطع، وذلك برسم مربعين متلاصقين، بحيث يمثل طول ضلع كلٍّ منهما طول ساق من ساقَي المثلث، وطول الضلع المتكوّن من المربعين بعد قصِّهما بطريقةٍ معينةٍ، يمثل طول وتر المثلث القائم؛ أي أن مساحة المربع المتكوّن من القطع الخمس تساوي مجموع مساحتَي المربعين، واللغز المبيّن أدناه مثال على ذلك. اتبع الخطوات التالية:



1) أنشئ مربّعًا بدقّة، واكتب عليه طول ضلعه a، ثم أنشئ مربّعًا صغيرًا عن يمين المربع الأول، طول ضلعه b على صورة الشكل أعلاه. يتعيّن أن تكون القاعدتان متجاورتين وعلى استقامةٍ واحدةٍ.

2) عيّن النقطة X على بُعد b وحدةً من الحافّة اليسرى للمربّع الكبير (W)،
ثم ارسم قطعتين مستقيمتين؛ الأولى من الرأس العلوي الأيسر للمربّع الأكبر (Y)
إلى النقطة X، والثانية من الرأس العلويّ الأيمن للمربّع الأصغر (Z) إلى النقطة X.

3) قصّ القطع الخمس، ثم أعد ترتيبها لتشكّل مربّعًا كبيرًا،
وارسم شكلًا يبيّن إجابتك.

4) تحقق من أن طول كلٍّ من أضلاع المربع يساوي $\sqrt{a^2 + b^2}$

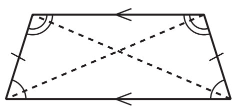
الاسم ______________________ التاريخ ____________

5-6 تدريبات إعادة التعليم

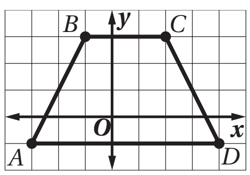
شبه المنحرف وشكل الطائرة الورقية

خصائص شبه المنحرف:

شبه المنحرف شكل رباعيّ فيه ضلعان فقط متوازيان، يسمّى كلٌّ منهما **قاعدة شبه المنحرف**، وُيسمّى الضلعان غير المتوازيين **ساقي شبه المنحرف**. وإذا كان الساقان متطابقين، فإن شبه المنحرف يُسمّى **متطابق الساقين**.

5.21	إذا كان شبه المنحرف متطابق الساقين، فإن زاويتَي كل قاعدةٍ متطابقتان.	إذا كان شبه المنحرف $FGHJ$ متطابق الساقين، فإن: $\angle G \cong \angle H, \angle F \cong \angle J$	
5.22	إذا كانت زاويتا قاعدةٍ في شبه المنحرف متطابقتَين، فإنه يُسمَّى متطابق الساقين.	إذا كانت $\angle G \cong \angle H$، فإن $FGHJ$ شبه المنحرف متطابق الساقين.	
5.23	يكون شبه المنحرف متطابق الساقين، إذا وفقط كان قطراه متطابقين.	إذا كان شبه المنحرف $FGHJ$ متطابق الساقين، فإن $\overline{FH} \cong \overline{JG}$ ، وإذا كان $\overline{FH} \cong \overline{JG}$ ، فإن $FGHJ$ شبه منحرف متطابق الساقين.	

مثال **بيّن أن الشكل الرباعي $ABCD$ الذي رؤوسه: $A(-3, -1), B(-1, 3), C(2, 3), D(4, -1)$. هو شبه منحرف، وحدّد ما إذا كان متطابق الساقين أم لا، ووضح إجابتك.**



ميل $\overline{AB}$: $m = \dfrac{3-(-1)}{-1-(-3)} = \dfrac{4}{2} = 2$ ، ميل $\overline{AD}$: $m = \dfrac{-1-(-1)}{4-(-3)} = -\dfrac{0}{7} = 0$

ميل $\overline{BC}$: $m = \dfrac{3-3}{2-(-1)} = \dfrac{0}{3} = 0$ ، ميل $\overline{CD}$: $m = \dfrac{-1-3}{4-2} = -\dfrac{4}{2} = -2$

بما أن فيه ضلعين متوازيين فقط هما $\overline{AD}$ وَ $\overline{BC}$ ، فإن الشكل $ABCD$ شبه منحرف.

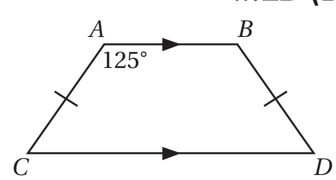
$AB = \sqrt{(-3-(-1))^2 + (-1-3)^2} = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}$, $CD = \sqrt{(2-4)^2 + (3-(-1))^2} = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}$

ولمّا كان $AB = CD$ ، فإنه شبه منحرف متطابق الساقين.

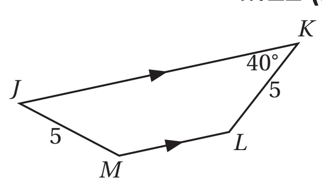
تمارين

أوجد القياس المطلوب في كلٍّ من السؤالين 1 وَ 2:

1) $m\angle D$



2) $m\angle L$

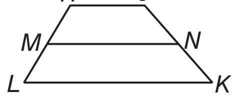


هندسة إحداثيَة: بيّن أنّ الشكل الرباعيّ المعطاة إحداثيات رؤوسه في كلٍّ ممَّا يأتي شبه منحرف، وحدِّد ما إذا كان متطابق الساقين؟

3) $A(-1, 1), B(3, 2), C(1, -2), D(-2, -1)$

4) $J(1, 3), K(3, 1), L(3, -2), M(-2, 3)$

جبر: في الشكل المجاور M, N نقطتا منتصفَي الساقين لشبه المنحرف $HJKL$.



5) إذا كان: $HJ = 5, LK = 60$ ، فأوجد MN.

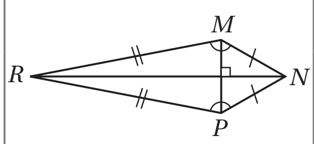
6) إذا كان: $HJ = 18, MN = 28$ ، فأوجد LK.

5-6 تدريبات إعادة التعليم (تتمة)

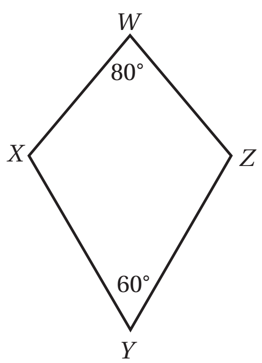
شبه المنحرف وشكل الطائرة الورقية

خصائص شكل الطائرة الورقية

شكل الطائرة الورقية هو شكل رباعي يتكون من زوجين متمايزين من الأضلاع المتجاورة المتطابقة، وعلى عكس متوازي الأضلاع، كل ضلعين متقابلين في شكل الطائرة الورقية ليسا متطابقين ولا متوازيين.

5.25	قُطرا شكل الطائرة الورقية متعامدان.	بما أن $RMNP$ شكل طائرة ورقية، فإن $\overline{MP} \perp \overline{RN}$	
5.26	في شكل الطائرة الورقية، يوجد زوج واحد فقط من الزوايا المتقابلة المتطابقة، هما الزاويتان المحصورتان بين كل ضلعين متجاورين وغير متطابقين.	بما أن $RMNP$ شكل طائرة ورقية، فإن: $\angle P \cong \angle M$ ، وَ $\angle R \cong \angle N$	

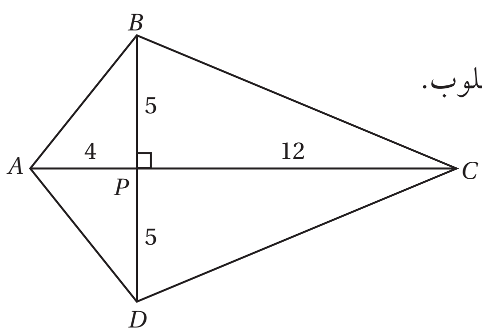
مثال 1 **إذا كان $WXYZ$ شكل طائرة ورقية، فأوجد $m\angle Z$**



بما أن: $\angle W \ncong \angle Y$ ، إذن: $\angle X \cong \angle Z$ ، وَ $m\angle X = m\angle Z$.

$m\angle X + m\angle Y + m\angle Z + m\angle W = 360°$	نظرية مجموع قياسات الزوايا الداخلية للمضلع
$m\angle X + 60° + m\angle Z + 80° = 360°$	بالتعويض
$m\angle X + m\angle Z = 220°$	بالتبسيط
$m\angle X = 110°, m\angle Z = 110°$	بطرح $140°$ من كلا الطرفين

مثال 2 **إذا كان $ABCD$ على شكل طائرة ورقية، فأوجد BC .**

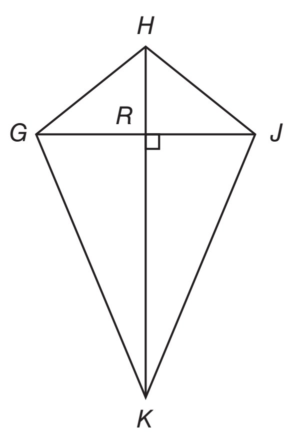


قطرا شكل الطائرة الورقية متعامدان، استعمل نظرية فيثاغورس لتجد الطول المطلوب.

$$BP^2 + PC^2 = BC^2$$
$$5^2 + 12^2 = BC^2$$
$$169 = BC^2$$
$$13 = BC$$

تمارين

الشكل $GHJK$ المجاورعلى شكل طائرة ورقية.



1) أوجد $m\angle JRK$.

2) إذا كان: $RJ = 3, RK = 10$ ، فأوجد JK .

3) إذا كان: $m\angle GHJ = 90°, m\angle GKJ = 110°$ ، فأوجد $m\angle HGK$.

4) إذا كان: $HJ = 7$ ، فأوجد HG .

5) إذا كان: $HG = 7, GR = 5$ ، فأوجد HR .

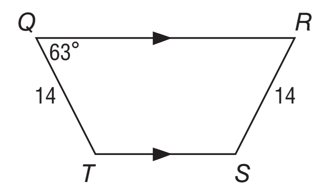
6) إذا كان: $m\angle GHJ = 52°, m\angle GKJ = 95°$ ، فأوجد $m\angle HGK$.

5-6 تدريبات المهارات

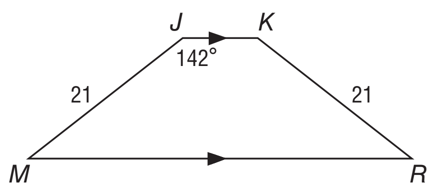
شبه المنحرف وشكل الطائرة الورقية

أوجد القياس المطلوب في كلٍّ من الأسئلة 4–1:

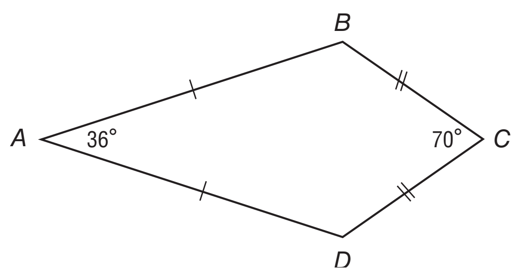
1) $m\angle S$



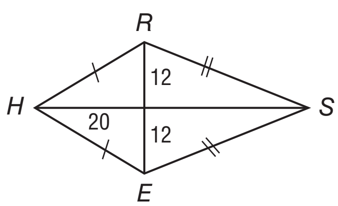
2) $m\angle M$



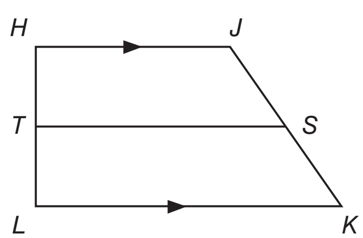
3) $m\angle D$



4) RH



جبر: في الشكل المجاور S, T نقطتا منتصفي الساقين لشبه المنحرف $HJKL$.



5) إذا كان: $HJ = 14, LK = 42$ ، فأوجد TS.

6) إذا كان: $LK = 19, TS = 15$ ، فأوجد HJ.

7) إذا كان: $HJ = 7, TS = 10$ ، فأوجد LK.

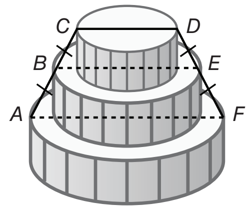
8) إذا كان: $LK = 17, HJ = 9$ ، فأوجد TS.

9) هندسة إحداثيّة: إذا كانت إحداثيات رؤوس الشكل الرباعي $EFGH$ هي: $E(1, 3), F(5, 0), G(8, -5), H(-4, 4)$ ، فبيِّن أن $EFGH$ شبه منحرف، وحدد ما إذا كان $EFGH$ شبه منحرف متطابق الساقين أم لا، ووضح إجابتك.

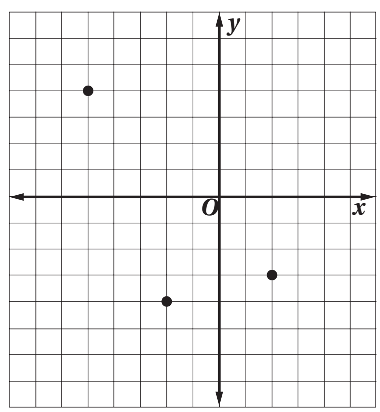
5-6 تدريبات حلّ المسألة

شبه المنحرف وشكل الطائرة الورقية

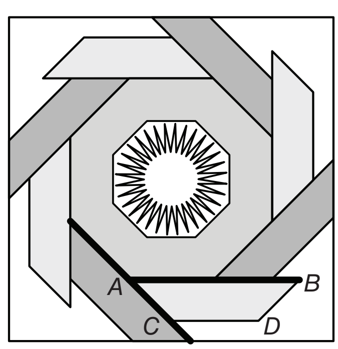
1) كيك: إذا كان قطر الطبقة العليا من كيكة فرح هو 10 in ، وقطر الطبقة السُّفلَى منها هو 22 in ، كما في الشكل أدناه، فأوجد قطر الطبقة الوسطَى منها.



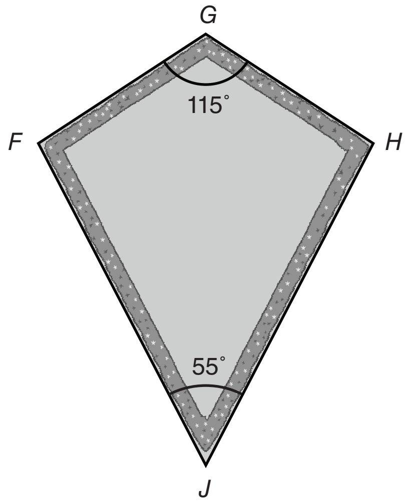
2) مسح الأراضي: صمّم مهندس ساحةً عامّةً على شكل طائرة ورقية؛ كي تعطي شعورًا بالاتساع. تظهر في المستوى الإحداثيّ أدناه ثلاثة أركان من الأركان الأربعة للساحة. إذا كان الركن الرابع يقع في الربع الأول من المستوى، فما إحداثيّيه؟



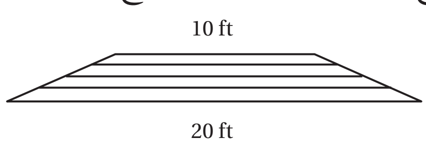
3) لوحة فنية: صمَّم فنان لوحةً فنيةً تتكوّن من مضلع ثمانيٍّ منتظم تُحيط به ثمانية أشكال متطابقة من شبه المنحرف المتطابِق الساقين، أوجد قياس $\angle B$ في شبه المنحرف $ABCD$.



4) مزرعة: زرع عبد العزيز سياجًا من الأشجار لإحاطة مزرعته، فكانت على شكل الطائرة الورقية المجاورة، أوجد $m\angle F$.



5) درج: صُمّمت درجاتٌ في مسرح مدرسيٍّ كما في الشكل، بحيث يكون عددها 4 درجاتٍ، كلّ منها على شكل شبه منحرف، ويمكنك وضعها الواحد فوق الآخر لتكوين أشكال شبه منحرف مختلفة الارتفاعات، وجميع الدرجات لها الارتفاع نفسه. إذا وضعنا الدرجات الأربع جميعها، يكون عرض قمة الدرج 10 ft، وعرض قاعدة الدرج 20 ft .



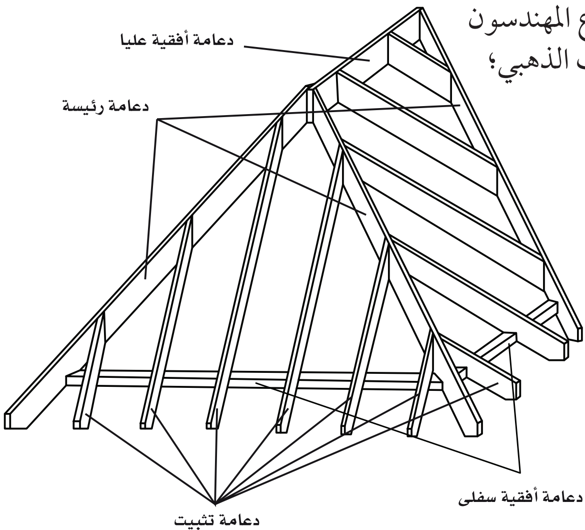
a) إذا استعملت الدرجتان السفليتان فقط، فكم يكون عرض قمة الدرج؟

b) كم قدمًا يكون عرض قمَّة الدرج، إذا استعملت الدرجات الثلاث السفلى فقط؟

5-6 التدريبات الإثرائيّة

الأشكال الهندسية في أعمال الإنشاءات:

تُستعمل الأشكال الهندسية في الأعمال الإنشائية بصورةٍ مطّردةٍ، وقد برع المهندسون (منذ القدم) في توظيف علاقات التوازن والنظريات الهندسية مثل المثلث الذهبي؛ لتحقيق التناغم والإبداع المعماري، وهو ما يعرف بهندسة الطبيعة.



1) يمثّل الشكل المجاور هيكل سقف تظهر فيه أشكال هندسيةٌ عدّةٌ، حدد الأشكال الآتيةَ في الشكل وظلّل حوافّها.

a) مثلث متطابق الضلعين.

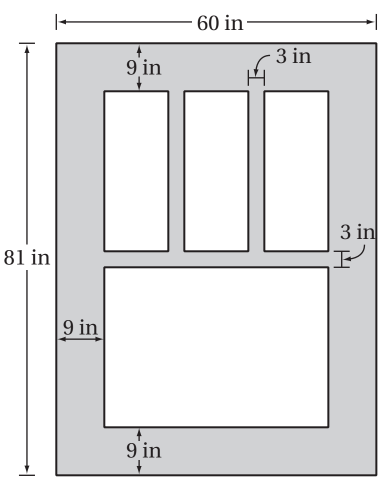
b) مثلث مختلف الأضلاع.

c) متوازي أضلاع.

d) مستطيل.

e) معيّن.

f) شبه منحرف .

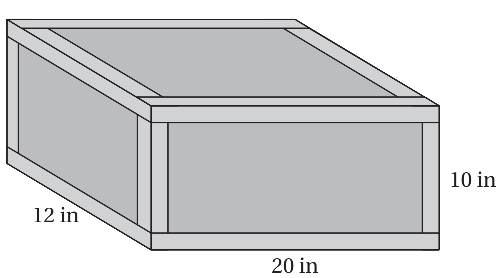


2) يمثّل الشكل المجاور نافذةً، عرض الأجزاء الخشبيّة بين الألواح الزجاجيّة فيها 3 in، وعرض الإطار الخارجيّ 9 in، وبُعدا النافذة من الخارج 60 in في 81 in، إذا علمت أن لجميع الألواح الزجاجيّة العليا واللوح الزجاجي السفلي الطول نفسه، والألواح الزجاجيّة الثلاث العُليا متطابقة، فأوجد كلًّا ممّا يأتي:

a) طول اللوح الزجاجيّ السفليّ.

b) طول كلّ لوحٍ زجاجيٍّ.

c) عرض كلٍّ من الألواح الزجاجيّة العُلْيا.



3) دُعِّمت أحرف الصندوق المجاور بقطع من الألومنيوم لدعمه وتقويته، إذا كان طول الصندوق 20 in، وعرضهً 12 in، وارتفاعه 10 in، فما طول قطع الألومنيوم التي استُعملت لدعم الصندوق؟

ملحق الإجابات

الاسم ______________ التاريخ ______________

5-1 تدريبات إعادة التعليم

زوايا المضلّع

مجموع قياسات الزوايا الداخليّة لمضلّع:

القطعة المستقيمة التي تصل بين رأسين غير متتاليين لمضلّعٍ تُسمّى **قطرًا** له، والأقطار المرسومة من أحد رؤوس مضلّعٍ عدد أضلاعه n، تقسمه إلى مثلثاتٍ عددها $n-2$، ويمكنك إيجاد مجموع قياسات الزوايا الداخليّة للمضلّع، بجمع قياسات الزوايا الداخليّة لهذه المثلثات.

5.1	**نظريّة مجموع قياسات الزوايا الداخليّة للمضلّع.**	إذا كان عدد أضلاع مضلّعٍ محدّبٍ هو n، ومجموع قياسات زواياه الداخليّة هو S، فإنّ $S = (n-2) \cdot 180°$

مثال 1 أوجد مجموع قياسات الزوايا الداخلية لمضلع محدب عدد أضلاعه 13 ضلعًا.

$$S = (n-2) \cdot 180°$$
$$= (13-2) \cdot 180°$$
$$= (11) \cdot 180°$$
$$= 1980°$$

مثال 2 إذا كان قياس الزاوية الداخليّة لمضلّعٍ منتظمٍ يساوي °140؛ فأوجد عدد أضلاعه.

ليكن عدد الأضلاع n، فيكون مجموع قياسات الزوايا الداخليّة للمضلّع يساوي $140°n$.

$$S = (n-2) \cdot 180°$$
$$140°n = (n-2) \cdot 180°$$
$$140°n = 180°n - 360°$$
$$-40°n = -360°$$
$$n = 9$$

تمارين

أوجد مجموع قياسات الزوايا الداخليّة لكلٍّ من المضلعات المحدّبة الآتية:

1) التّساعي. **°1260** **2)** ذي 16 ضلعًا. **°2520** **3)** ذي 30 ضلعًا. **°5040**

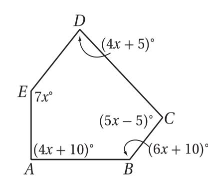
4) الثّماني. **°1080** **5)** ذي 18 ضلعًا. **°2880** **6)** ذي 35 ضلعًا. **°5940**

إذا كان قياس إحدى الزوايا الداخليّة لمضلّعٍ منتظمٍ معطى، فأوجد عدد الأضلاع في كلٍّ ممّا يأتي:

7) °150 **12** **8)** °160 **18** **9)** °175 **72**

10) °165 **24** **11)** °144 **10** **12)** °135 **8**

13) أوجد قياسات جميع الزوايا الداخلية للمضلع المجاور.



m ∠ A = 90°
m ∠ B = 130°
m ∠ C = 95°
m ∠ D = 85°
m ∠ E = 140°

الاسم ______________ التاريخ ______________

5-1 تدريبات إعادة التعليم (تتمة)

زوايا المضلّع

مجموع قياسات الزوايا الخارجيّة لمضلّع:

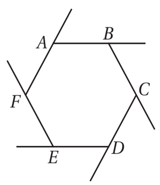
توجد علاقة بين عدد أضلاع مضلّعٍ محدّبٍ، ومجموع قياسات زواياه الخارجية.

5.2	**نظريّة مجموع قياسات الزوايا الخارجيّة للمضلّع**	مجموع قياسات الزوايا الخارجيّة للمضلّع المحدّب بأخذ زاوية واحدة عند كلّ رأس يساوي °360.

مثال 1 أوجد مجموع قياسات الزوايا الخارجيّة بأخذ زاوية واحدة عند كلّ رأس لمضلّع محدّب عدد أضلاعه 27.

لأي مضلّع محدّب، يكون مجموع قياسات زواياه الخارجيّة بأخذ زاوية واحدة عند كلّ رأس يساوي °360.

مثال 2 أوجد قياس الزاوية الخارجيّة للسداسيّ المنتظم $ABCDF$.



بما أن مجموع قياسات الزوايا الخارجيّة للمضلّع المحدب بأخذ زاوية واحدة عند كلّ رأس يساوي °360، وللسداسيّ 6 زوايا خارجيّة، وعلى فرض أن قياس كلّ زاوية خارجيّة هو n فإنّ:

$$6n = 360°$$
$$n = 60°$$

أي أن قياس كلّ زاوية خارجية للسداسيّ المنتظم يساوي °60.

تمارين

أوجد مجموع قياسات الزوايا الخارجيّة بأخذ زاوية واحدة عند كلّ رأس لكلّ مضلّع منتظم:

1) العشاريّ. **°360** **2)** ذو 16 ضلعًا. **°360** **3)** ذو 36 ضلعًا. **°360**

أوجد قياس الزاوية الخارجيّة للمضلع المنتظم المُعطى عدد أضلاعه في كلٍّ مما يأتي، وقرّب إجابتك إلى أقربِ عُشر:

4) ذو 12 ضلعًا. **°30** **5)** ذو 16 ضلعًا. **°157.5** **6)** ذو 20 ضلعًا. **°18**

7) ذو 40 ضلعًا. **°9** **8)** السباعيّ. **°51.4** **9)** ذو 18 ضلعًا. **°20**

10) ذو 24 ضلعًا. **°15** **11)** ذو 180 ضلعًا. **°2** **12)** الثمانيّ. **°45**

الاسم ____________ التاريخ ________

5-1 تدريبات المهارات

زوايا المضلّع

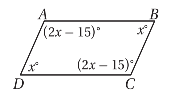
أوجد مجموع قياسات الزوايا الداخليّة للمضلّع المحدّب في كلٍّ ممّا يأتي:

1) التُّساعيّ. **1260°** 2) السُّباعيّ. **900°** 3) العُشاريّ. **1440°**

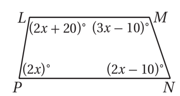
إذا كان قياس إحدى الزوايا الداخلية لمضلع منتظم مُعطًى، فأوجد عدد الأضلاع في كلٍّ ممّا يأتي:

4) 108° **5** 5) 120° **6** 6) 150° **12**

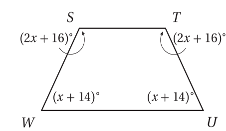
أوجد قياسات جميع الزوايا الداخليّة لكلٍّ من المضلعات الآتية:

7) 

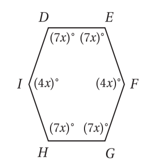
$\mathbf{m\angle A = 115°\ ,\ m\angle B = 65°,}$
$\mathbf{m\angle C = 115°\ ,\ m\angle D = 65°}$

8) 

$\mathbf{m\angle L = 100°\ ,\ m\angle M = 110°}$
$\mathbf{m\angle N = 70°\ ,\ m\angle P = 80°}$

9) 

$\mathbf{m\angle S = 116,\ m\angle T = 116,}$
$\mathbf{m\angle W = 64\ ,\ m\angle U = 64}$

10) 

$\mathbf{m\angle D = 140\ ,\ m\angle E = 140\ ,}$
$\mathbf{m\angle F = 80\ ,\ m\angle I = 80\ ,}$
$\mathbf{m\angle G = 140\ ,\ m\angle H = 140}$

أوجد قياس زاويةٍ داخليّةٍ لكلٍّ من المضلعات المنتظمة الآتية:

11) الرباعيّ. **90°** 12) الخماسيّ. **108°** 13) العشاريّ. **144°**

أوجد قياسَي زاويةٍ خارجيةٍ وزاويةٍ داخليةٍ للمضلع المنتظم المُعطَى عدد أضلاعه في كلٍّ ممّا يأتي:

14) الثمانيّ. **45° , 135°** 15) التُّساعيّ. **40° , 140°** 16) ذو 12 ضلع. **30° , 150°**

الاسم ____________ التاريخ ________

5-1 تدريبات حلّ المسألة

زوايا المضلّع

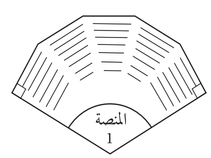
1) **هندسة معمارية:** صُمِّمت صالة لعرض قطع أثرية على شكل مضلّع ثُماني منتظم كما في الشكل أدناه، فما قياس الزاوية بين كلّ جدارين متجاورين فيها؟

135°

2) **صناديق:** صَمَّمت جميلة صندوقًا على شكل مضلع منتظم؛ لتحفظ فيه إكسسواراتها، فكان قياس زاويته الداخليّة يساوي نصف قياس زاويته الخارجيّة، فما المضلّع المنتظم الذي ستستعمله؟

مثلث متطابق الأضلاع

3) **مسارح:** يبيّن الشكل أدناه مخطط أرضيّة مسرح، الأضلاع الخمسة العُليا فيه جزءٌ من مضلّعٍ منتظمٍ عدد أضلاعه اثنا عشر ضلعًا، أوجد $m\angle 1$. **120°**

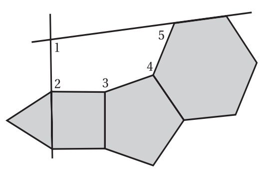


4) **علم الآثار:** كشف علماء آثار أجزاءً من جدارين متجاورين في قلعةٍ قديمةٍ.

وقد علموا من مخطوطات عثروا عليها في الموقع أن قاعدة القلعة على شكل مضلّعٍ منتظمٍ، إلّا أنهم اختلفوا في عدد أضلاعها، فما عدد أضلاع القلعة تبعًا للمعلومات المبيّنة في الشكل؟

15 ضلعًا

5) **تصميم:** ضمن مشروع الفصل، صمّم عددٌ من الطلاب نموذجًا باستعمال مضلّعاتٍ منتظمةٍ، أضلاعها متّصلة بعضها ببعض كما في الشكل أدناه.



a) أوجد $m\angle 2$ وَ $m\angle 5$.

90° و 60°

b) أوجد $m\angle 3$ وَ $m\angle 4$.

162° و 132°

c) ما قياس $\angle 1$؟

96°

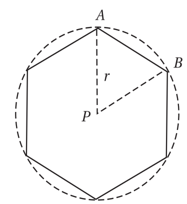
الاسم ____________ التاريخ ____________

5-1 التدريبات الإثرائيّة

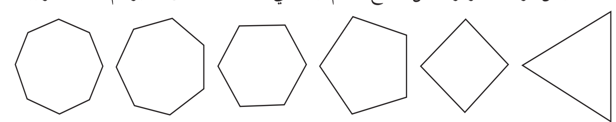
الزوايا المركزيّة للمضلّع المنتظم:

درست الزوايا الداخليّة والزوايا الخارجيّة للمضلّع، وتحتوي المضلّعات المنتظمة على **زوايا مركزية** أيضًا، ويكون رأس الزاوية المركزية عند مركز المضلّع.

ومركز المضلّع نقطةٌ لها البعد نفسه عن جميع رؤوس المضلع، وهو مثل مركز الدائرة الذي يبعد بُعدًا ثابتًا عن جميع نقاط الدائرة تمامًا، والزاوية المركزيّة هي الزاوية التي رأسها عند مركز الدائرة، ويمرّ ضلعاها برأسين متتاليين من رؤوس المضلّع. فالزاوية APB هي إحدى الزوايا المركزية في المضلّع السداسيّ المنتظم المجاور، ولعلّك تذكر من التمثيل بالقطاعات الدائريّة أن مجموع قياسات الزوايا حول مركز الدائرة يساوي $360°$.



1) أوجد قياس الزاوية المركزيّة لكلّ مضلّع منتظم فيما يأتي مستعملًا المنطق، أو برسم أشكال تقريبية:



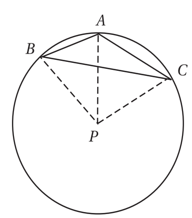
120° **90°** **72°** **60°** **51.43° تقريبًا** **45°**

2) خمّن العلاقة بين قياس الزاويّة المركزيّة لمضلّع منتظم وقياسَي زاويتَيه الداخليّة والخارجيّة.

قياس الزاوية المركزيّة يساوي قياس الزاوية الخارجيّة، والزاوية المركزيّة مكمّلة للزاوية الداخليّة.

3) تحدٍّ: الضلع $\overline{BC}$ هو أطول الأضلاع في ΔABC المنفرج الزاوية، و $\overline{AC}$ ضلع في مضلّع منتظم عدد أضلاعه 21 أيضًا، وَ $\overline{AB}$ ضلع في مضلّع منتظم عدد أضلاعه 28. المضلّع المنتظم ذو 21 ضلعًا والمضلّع المنتظم ذو 28 ضلعًا لهما نقطة المركز P نفسها. إذا كان $\overline{BC}$ ضلعًا في مضلّع منتظم عدد أضلاعه n ومركزه النقطة P، فأوجد قيمة n.

(**إرشاد:** ارسم دائرةً مركزها P، وعيِّن عليها النقاط A, B, C).



إجابة ممكنة:

12 ضلعًا: قياس الزاوية المركزية للمضلع المنتظم ذي الـ 21 ضلعًا، والذي $\overline{AC}$ ضلعٌ فيه يساوي $\frac{360°}{21} \approx 17.14°$، وقياس الزاوية المركزية للمضلع المنتظم ذي الـ 28 ضلعًا، والذي $\overline{AB}$ ضلعٌ فيه يساوي $\frac{360°}{28} \approx 12.86°$، فيكون بحسب الشكل المجاور قياس الزاوية المركزية للمضلع المنتظم الذي $\overline{BC}$ ضلعٌ فيه يساوي: $17.14° + 12.86° = 30°$

أي أن: $\frac{360°}{n} = 30°$، $n = 12$

الصف: الأول الثانوي 10 الفصل 5: الأشكال الرباعية

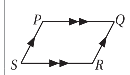
الاسم ____________ التاريخ ____________

5-2 تدريبات إعادة التعليم

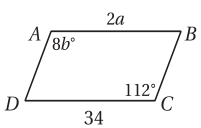
متوازي الأضلاع

أضلاع متوازي الأضلاع وزواياه:

متوازي الأضلاع هو شكل رباعيّ فيه كلّ ضلعين متقابلين متوازيان ويرمز له بالرمز ▱، وفيما يأتي أربع خصائص لمتوازي الأضلاع.

		إذا كان $PQRS$ متوازي أضلاع، فإنّ:	
5.3	كل ضلعين متقابلين في متوازي الأضلاع متطابقان.	$\overline{PS} \cong \overline{QR}$ و $\overline{PQ} \cong \overline{SR}$	
5.4	كل زاويتين متقابلتين في متوازي الأضلاع متطابقتان.	$\angle S \cong \angle Q$ و $\angle P \cong \angle R$	
5.5	كل زاويتين متحالفتين في متوازي الأضلاع متكاملتان.	$\angle P$ و $\angle S$ متكاملتان؛ $\angle S$ و $\angle R$ متكاملتان؛ $\angle R$ و $\angle Q$ متكاملتان؛ $\angle Q$ و $\angle P$ متكاملتان.	
5.6	إذا كانت إحدى زوايا متوازي الأضلاع قائمة، فإن زواياه الأربع قوائم.	إذا كان: $m\angle P = 90°$، فإن: $m\angle Q = 90°, m\angle R = 90°$، و $m\angle S = 90°$	

مثال **في الشكل المجاور، إذا كان $ABCD$ متوازي أضلاع، فأوجد قيمة كلٍّ من a و b.**



بما أن $\overline{AB}$ وَ $\overline{CD}$ ضلعان متقابلان في متوازي أضلاع، فإنّ:

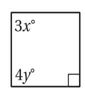
$\overline{AB} \cong \overline{CD}$	كل ضلعين متقابلين في متوازي الأضلاع متطابقان
$AB \cong CD$	تعريف تطابق القطع المستقيمة
$2a = 34$	بالتعويض
$a = 17$	بقسمة كلا الطرفين على 2

وبما أن $\angle A$ و $\angle C$ زاويتان متقابلتان، فإنّ:

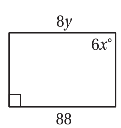
$\angle C \cong \angle A$	كل زاويتين في متوازي الأضلاع متطابقتان
$m\angle C = m\angle A$	تعريف تطابق الزوايا
$8b° = 112°$	بالتعويض
$b = 14$	بقسمة كلا الطرفين على 8

تمارين

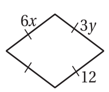
أوجد قيمة كلٍّ من x, y في كلِّ متوازي أضلاع ممّا يأتي:

1) 

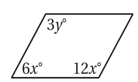
$x = 30; y = 22.5$

2) 

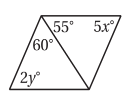
$x = 15; y = 11$

3) 

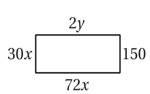
$x = 2; y = 4$

4) 

$x = 10; y = 40$

5) 

$x = 13; y = 32.5$

6) 

$x = 5; y = 180$

الصف: الأول الثانوي 11 الفصل 5: الأشكال الرباعية

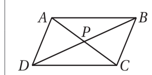
الاسم ________________ التاريخ ____________

5-2 تدريبات إعادة التعليم (تتمة)

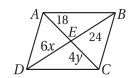
متوازي الأضلاع

قطرا متوازي الأضلاع:

قُطرا متوازي الأضلاع يحقِّقان الخاصيتين الآتيتين:

	إذا كان ABCD متوازي أضلاع، فإن:		
5.7	قطرا متوازي الأضلاع ينصّف كلٌّ منهما الآخر.	$DP = PB$ و $AP = PC$	
5.8	كلّ قطر في متوازي أضلاع يقسمه إلى مثلثين متطابقين.	$\triangle ACD \cong \triangle CAB$ و $\triangle ADB \cong \triangle CBD$	

مثال أوجد قيمة كلٍّ من x و y في متوازي الأضلاع $ABCD$ المجاور.

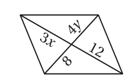


بما أن قطري متوازي الأضلاع ينصّف كلٌّ منهما الآخر، إذن:

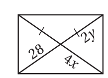
$\overline{AE} \cong \overline{EC}$	قُطرا متوازي الأضلاع ينصِّف كلٌّ منهما الآخر.	$\overline{DE} \cong \overline{EB}$	قُطرا متوازي الأضلاع ينصِّف كلٌّ منهما الآخر.
$AE = EC$	تعريف تطابق القطع المستقيمة	$DE = EB$	تعريف تطابق القطع المستقيمة
$18 = 4y$	بالتعويض	$6x = 24$	بالتعويض
$4.5 = y$	بقسمة كلا الطرفين على 4	$x = 6$	بقسمة كلا الطرفين على 6

تمارين

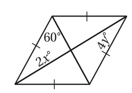
أوجد قيمة كلٍّ من x و y في كلّ متوازيات الأضلاع الآتية:

1) 

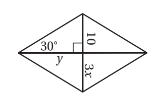
$x = 4 , y = 2$

2) 

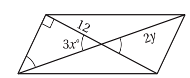
$x = 7 , y = 14$

3) 

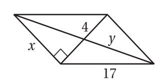
$x = 15 , y = 7.5$

4) 

$x = 3\frac{1}{3} , y = 10\sqrt{3}$

5) 

$x = 15 , y = 6\sqrt{2}$

6) 

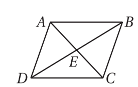
$x = 15 , y = \sqrt{241}$

هندسة إحداثيَة: أوجد إحداثيَّي نقطة تقاطع قُطرَي $\square ABCD$، الذي أُعطيت إحداثيّات رؤوسه في كلٍّ من السؤالين الآتيين:

7) $A(3,6)$, $B(5,8)$, $C(3,-2)$, $D(1,-4)$ **(3, 2)**

8) $A(-4,3)$, $B(2,3)$, $C(-1, -2)$, $D(-7, -2)$ **(−2.5, 0.5)**

9) **برهان:** اكتب برهانًا حرًّا لما يأتي:



المعطيات: $ABCD$ متوازي أضلاع.

المطلوب: $\triangle AED \cong \triangle BEC$.

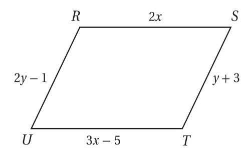
بما أن قطري متوازي الأضلاع ينصّف كلٌّ منهما الآخر، فإن: $\overline{AE} \cong \overline{CE}$ و $\overline{BE} \cong \overline{DE}$ ، وبما أن الأضلاع المتقابلة في متوازي الأضلاع متطابقة، فإن $\overline{AD} \cong \overline{BC}$، ولأن الأضلاع المتناظرة في المثلثين متطابقة، إذن المثلثان متطابقان وفق SSS.

الاسم ________________ التاريخ ____________

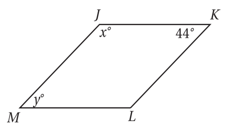
5-2 تدريبات المهارات

متوازي الأضلاع

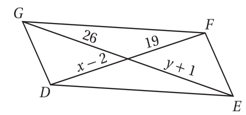
جبر: أوجد قيمتَي x, y في كلٍّ من متوازيات الأضلاع الآتية:

1) 

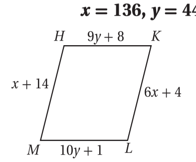
$x = 5, y = 4$

2) 

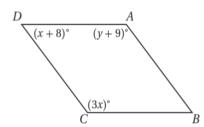
$x = 136, y = 44$

3) 

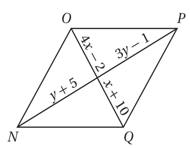
$x = 21, y = 25$

4) 

$x = 2, y = 7$

5) 

$x = 43, y = 120$

6) 

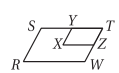
$x = 4, y = 3$

هندسة إحداثيَة: أوجد إحداثيَّي نقطة تقاطع قُطرَي $\square HJKL$، الذي أُعطيت إحداثيات رؤوسه في كلٍّ من السؤالين الآتيين:

7) $H(1, 1)$, $J(2, 3)$, $K(6, 3)$, $L(5, 1)$. **(3.5 , 2)**

8) $H(-1, 4)$, $J(3, 3)$, $K(3, -2)$, $L(-1, -1)$. **(1, 1)**

9) **برهان:** اكتب برهانًا ذا عمودين.



المعطيات: $\square RSTW$, $\square XYTZ$

المطلوب: $\overline{XZ} \parallel \overline{RW}$

العبارات	المبرِّرات
1) **$RSTW$, $XYTZ$ متوازيا أضلاع**	1) **معطيات**
2) **$\overline{ST} \parallel \overline{RW}$, $\overline{YT} \parallel \overline{XZ}$**	2) **الأضلاع المتقابلة في متوازي الأضلاع متوازية.**
3) **$\overline{XZ} \parallel \overline{RW}$**	3) **إذا وازى مستقيمان مستقيمًا ما، فهما متوازيان (خاصية التعدي).**

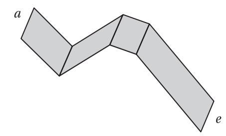
الاسم ______________ التاريخ __________

5-2 تدريبات حلّ المسألة

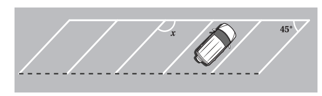
متوازي الأضلاع

1) ممرات: يتكون ممرٌّ من أربعة متوازيات أضلاع موصولة بعضها ببعض كما في الشكل أدناه، فهل القطعتان المستقيمتان a و e متوازيتان؟ وضّح إجابتك.

نعم: الأضلاع المتقابلة في متوازي الأضلاع متوازية، وعلاقة التوازي تحقق خاصيّة التعدي.

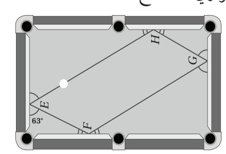


2) مواقف سيارات: يبيّن الشكل أدناه خمسة مواقف أمام أحد المحال التجارية، كلٌّ منها على شكل متوازي أضلاع وجميعها متطابقة، أوجد قياس الزاوية المجهولة x، وبرّر إجابتك.



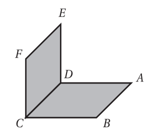
$135°$؛ بما أن متوازيات الأضلاع جميعها متطابقة، إذن الزاوية المجهولة متحالفة مع الزاوية التي قياسها $45°$؛ أي أن مجموع قياسيهما $180°$، وعليه يكون قياس الزاوية المجهولة x هو:
$180° - 45° = 135°$

3) بلياردو: يلعب خالد البلياردو، إذا ضرب الكرة فارتطمت بحافة الطاولة واردت في مسارات مختلفة على شكل متوازي أضلاع كما في الشكل أدناه، فحدّد قياسات الزوايا الأربع لمتوازي الأضلاع.



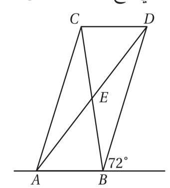
$m\angle E = 54°$
$m\angle F = 126°$
$m\angle G = 54°$
$m\angle H = 126°$

4) نجارة: الشكل أدناه عبارة عن سطح مكتب صمّمه نجّار على شكل حرف L، وهو عبارة عن متوازيَي أضلاع متلاصقين، فهل القطعتان AD وَ CF متطابقتان؟ ولماذا.



لا؛ لأن متوازيَي الأضلاع $ABCD$, $CDEF$ غير متطابقين.

5) تصوير: ركب مصوِّرٌ مروحيةً لالتقاط صورة لمبنًى حديث في إحدى المدن، والشكل أدناه يبين المنظرَ العلويَّ لهذا المبنى، إذا كان قياس الزاوية الخارجيّة عند المدخل $72°$، وأراد مهندسٌ أن يعرف مزيدًا عن البناية، فقام برسم الشكل أدناه، واستعمل مهاراته الهندسية ليعرف المزيد عنها، علمًا بأن المدخل الأمامي يقع بجانب الرأس B.



a) ما قياسات الزوايا الأربع لمتوازي الأضلاع؟

$m\angle A = 72°$
$m\angle D = 72°$
$m\angle B = 108°$
$m\angle C = 108°$

b) ما عدد أزواج المثلثات المتطابقة في الشكل؟ وما هي؟

4 أزواج؛ هي:
$\triangle ABE \cong \triangle DCE,$
$\triangle ABC \cong \triangle DCB,$
$\triangle ACE \cong \triangle DBE,$
$\triangle ABD \cong \triangle DCA.$

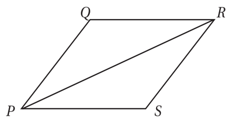
الاسم ______________ التاريخ __________

5-2 التدريبات الإثرائيّة

قطرا متوازي الأضلاع:

قطر متوازي الأضلاع في بعض الرسوم يبدو على شكل منصّف لزاويتين متقابلتين، فمتى يكون ذلك صحيحًا؟

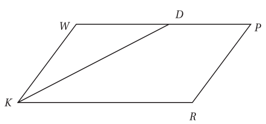
1) إذا كان $\overline{PR}$ قطرًا في متوازي الأضلاع $SRQP$، وَ $\overline{PR}$ منصّف لكلٍّ من $\angle QPS$ وَ $\angle QRS$، فما نوع متوازي الأضلاع $PQRS$؟ برّر إجابتك.



$\angle QRS \cong \angle QPS$	**زاويتان متقابلتان في متوازي الأضلاع.**
$\angle QPR \cong \angle RPS$	**تعريف منصّف الزاوية.**
$\angle QRP \cong \angle SRP$	**تعريف منصّف الزاوية.**
$\angle QPR \cong \angle PRS$	**زاويتان متبادلتان داخليًا.**
$\angle RPS \cong \angle PRS$	**خاصيّة التعدّي.**
$\overline{SP} \cong \overline{SR}$	**عكس نظرية المثلث المتطابق الضلعين.**
$\overline{SP} \cong \overline{RQ}$	**ضلعان متقابلان في متوازي الأضلاع.**
$\overline{PQ} \cong \overline{SR}$	**ضلعان متقابلان في متوازي الأضلاع.**

بما أن جميع الأضلاع متطابقة، إذن الشكل $SRQP$ معيّن.

2) إذا كان $\overline{KD}$ منصّف زاويةٍ في متوازي الأضلاع $WPRK$ وَ $WD = 7$, $DP = 5$، فأوجد WK و KR.



في $WPRK$ ▱ يكون $\overline{KR} \cong \overline{WP}$ ؛ لأنهما ضلعان متقابلان في متوازي الأضلاع.

$$\begin{aligned} KR &= WP \\ &= WD + DP \\ &= 7 + 5 = 12 \end{aligned}$$

أيضًا

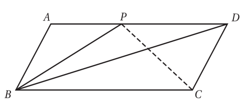
$\angle WKD \cong \angle DWR$	**$\overline{KD}$ منصّف لـ $\angle WKR$**
$\angle DWR \cong \angle WDK$	**نظرية الزاويتين المتبادلتين داخليًا**
$\angle WDK \cong \angle WKD$	**خاصية التعدي**

أي أن $\triangle WDK$ مثلث متطابق الضلعين، وعليه فإن: $WK = WD = 7$

3) ارجع للسؤال 2، واكتب تخمينًا حول متوازي الأضلاع $WPRK$ ومنصّف الزاوية $\overline{KD}$.

$WPRK$ ليس معينًا و$\overline{KD}$ ليس قطرًا.

4) إذا كان $\overline{BD}$ قطرًا في متوازي الأضلاع $ABCD$، وَ $\overline{BP}$ منصّفًا للزاوية B، وَ $CP = 5$, $BP = 7$, $PD = 6$، ومحيط $\triangle PCD$ يساوي 15، فأوجد AB وَ BC.



$AB = 4, BC = 10$

الاسم ________________ التاريخ ________

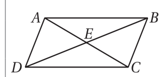
5-3 تدريبات إعادة التعليم

تمييز متوازي الأضلاع

شروط متوازي الأضلاع:

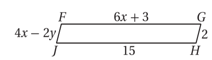
توجد عدّة طرق لإثبات أن شكلًا رباعيًّا ما هو متوازي أضلاع.

	في الشكل الرباعي إذا:	إذا كان:
تعريف	كان كلّ ضلعين متقابلين متوازيين	$\overline{AD} \parallel \overline{BC}$ و $\overline{AB} \parallel \overline{DC}$
5.9	كان كلّ ضلعين متقابلين متطابقين	$\overline{AD} \cong \overline{BC}$ و $\overline{AB} \cong \overline{DC}$
5.10	كانت كلّ زاويتين متقابلتين متطابقتين	$\angle DAB \cong \angle BCD$ و $\angle ABC \cong \angle ADC$
5.11	نصّف قطراه كلٌّ منهما الآخر	$\overline{DE} \cong \overline{BE}$ و $\overline{AE} \cong \overline{CE}$
5.12	كان ضلعان متقابلان متطابقين ومتوازيين	$\overline{AB} \parallel \overline{DC}$ و $\overline{AB} \cong \overline{DC}$ أو $\overline{AD} \parallel \overline{BC}$ و $\overline{AD} \cong \overline{BC}$
	فإنّ الشكل متوازي أضلاع.	فإنّ $ABCD$ متوازي أضلاع.



مثال

أوجد قيمتَي x, y، بحيث يكون الشكل الرباعيّ $FGHJ$ متوازي أضلاع.



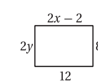
يكون الشكل الرباعيّ $FGHJ$ متوازي أضلاع، إذا كان طولا كلّ ضلعين متقابلين فيه متساويين.

$FG = JH$	تعريف تطابق القطع المستقيمة
$6x + 3 = 15$	بالتعويض
$6x = 12$	بطرح 3 من كلا الطرفين
$x = 2$	بقسمة كلا الطرفين على 6

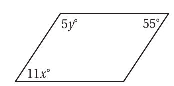
$FJ = GH$	تعريف تطابق القطع المستقيمة
$4x - 2y = 2$	بالتعويض
$4(2) - 2y = 2$	بالتعويض عن x بـ 2
$8 - 2y = 2$	بالتبسيط
$-2y = -6$	بطرح 8 من كلا الطرفين
$y = 3$	بقسمة كلا الطرفين على (-2)

تمارين

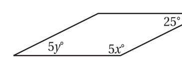
أوجد قيمتَي x, y في كلٍّ مما يأتي، بحيث يكون الشكل الرباعيّ متوازي أضلاع:

1)


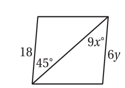
$x = 7, y = 4$

2)


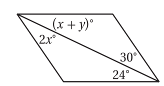
$x = 5, y = 25$

3)


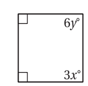
$x = 31, y = 5$

4)


$x = 5, y = 3$

5)


$x = 15, y = 9$

6)


$x = 30, y = 15$

الاسم ________________ التاريخ ________

5-3 تدريبات إعادة التعليم (تتمة)

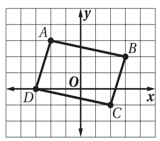
تمييز متوازي الأضلاع

متوازي الأضلاع في المستوى الإحداثيّ:

يمكنك استعمال صيغ المسافة بين نقطتين والميل ونقطة المنتصف؛ لتحديد ما إذا كان الشكل الرباعيّ في المستوى الإحداثيّ متوازي أضلاعٍ أم لا.

مثال

مثّل في المستوى الإحداثي الشكل الرباعي $ABCD$ الذي إحداثيّات رؤوسه: $A(-2,3), B(3,2), C(2,-1), D(-3,0)$، وحدِّد ما إذا كان متوازي أضلاع أم لا.



الطريقة 1: استعمال صيغة الميل، $m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$.

ميل $\overline{AD}$: $m = \frac{3-0}{-2-(-3)} = \frac{3}{1} = 3$، وميل $\overline{BC}$: $m = \frac{2-(-1)}{3-2} = \frac{3}{1} = 3$

و ميل $\overline{AB}$: $m = \frac{2-3}{3-(-2)} = -\frac{1}{5}$، وميل $\overline{DC}$: $m = \frac{-1-0}{2-(-3)} = -\frac{1}{5}$

بما أنّ كلّ ضلعين متقابلين لهما الميل نفسه، فإنّ $\overline{AB} \parallel \overline{CD}$ و $\overline{AD} \parallel \overline{BC}$؛ إذن الشكل $ABCD$ متوازي أضلاع وفق التعريف.

الطريقة 2: استعمال صيغة المسافة بين نقطتين، $d = \sqrt{(x_2-x_1)^2 + (y_2-y_1)^2}$.

$AB = \sqrt{(-2-3)^2 + (3-2)^2} = \sqrt{25+1} = \sqrt{26}$ $\quad AD = \sqrt{(-2-(-3))^2 + (3-0)^2} = \sqrt{1+9} = \sqrt{10}$

$CD = \sqrt{(2-(-3))^2 + (-1-0)^2} = \sqrt{25+1} = \sqrt{26}$ $\quad BC = \sqrt{(3-2)^2 + (2-(-1))^2} = \sqrt{1+9} = \sqrt{10}$

بما أنّ كلّ ضلعين متقابلين متساويان في الطول، إذن $\overline{AB} \cong \overline{CD}$ و $\overline{AD} \cong \overline{BC}$، لذا فالشكل $ABCD$ متوازي أضلاع وفق النظرية 5.9

تمارين

هندسة إحداثية: مثّل في المستوى الإحداثي الشكل الرباعي المعطاة إحداثيات رؤوسه فيما يأتي، وحدّد ما إذا كان متوازي أضلاع أم لا، برّر إجابتك باستعمال الطريقة المحددة في السؤال: **انظر رسومات الطلاب**

1) $A(0,0)$, $B(1,3)$, $C(5,3)$, $D(4,0)$؛ صيغة الميل.
نعم؛ ميل $\overline{AB}$ يساوي ميل $\overline{CD}$ ويساوي 3؛ لذا $\overline{AB} \parallel \overline{CD}$، وميل $\overline{BC}$ يساوي ميل $\overline{AD}$ ويساوي 0، لذا $\overline{AD} \parallel \overline{BC}$، ولأن كل ضلعين متقابلين متوازيان، إذن $ABCD$ متوازي أضلاع.

2) $D(-1,1)$, $E(2,4)$, $F(6,4)$, $G(3,1)$؛ صيغة الميل.
نعم؛ ميل DE يساوي ميل FG ويساوي 1، لذا $\overline{DE} \parallel \overline{FG}$، وميل EF يساوي ميل DG ويساوي 0، لذا $\overline{EF} \parallel \overline{DG}$، ولأن كل ضلعين متقابلين متوازيان، إذن $DEFG$ متوازي أضلاع.

3) $R(-1,0)$, $S(3,0)$, $T(2,-3)$, $U(-3,-2)$؛ صيغة المسافة بين نقطتين. **لا؛ يجب أن يكون كل ضلعين متقابلين متطابقين $RS = 4$، $TU = \sqrt{26}$، لذا $\overline{RS} \parallel \overline{TU}$، وبما أن الضلعين متقابلان وغير متطابقين، إذن $RSTU$ ليس متوازي أضلاع.**

4) $A(-3,2)$, $B(-1,4)$, $C(2,1)$, $D(0,-1)$؛ صيغتا الميل والمسافة بين نقطتين.
نعم؛ ميل $\overline{AB}$ يساوي ميل $\overline{CD}$ ويساوي 1؛ لذا $\overline{AB} \parallel \overline{CD}$، وميل $\overline{BC}$ يساوي ميل $\overline{AD}$ ويساوي -1؛ لذا $\overline{BC} \parallel \overline{AD}$، ولأن كل ضلعين متقابلين متوازيان، إذن $ABCD$ متوازي أضلاع، أيضًا: $AB = 2\sqrt{2}$، $CD = 2\sqrt{2}$، $\overline{BC} = 3\sqrt{2}$، $\overline{AD} = 3\sqrt{2}$، وبما أن $AB = CD$، $BC = AD$، فإن $AB \cong CD$، $\overline{BC} \cong \overline{AD}$؛ إذن فإن $ABCD$ متوازي أضلاع.

5) $S(-2,4)$, $T(-1,-1)$, $U(3,-4)$, $V(2,1)$؛ صيغتا الميل والمسافة بين نقطتين. **نعم**

6) $F(3,3)$, $G(1,2)$, $H(-3,1)$, $I(-1,4)$؛ صيغة نقطة المنتصف. **لا؛ لأن منتصف $\overline{FH}$ هي $(0,2)$ أما منتصف $\overline{GI}$ فهي $(-2, \frac{5}{2})$**

الاسم ______________ التاريخ ________

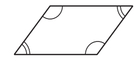
5-3 تدريبات المهارات

تمييز متوازي الأضلاع

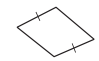
حدّد ما إذا كان كل شكلٍ رباعيٍّ فيما يأتي متوازي أضلاع أم لا، وبرّر إجابتك.

1) 

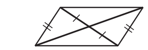
نعم؛ فيه ضلعان متقابلان متوازيان ومتطابقان

2) 

نعم؛ فيه كلّ زاويتين متقابلتين متطابقتان

3) 

لا؛ المعطيات غير كافية لمعرفة هل هو متوازي أضلاع أم لا، حيث يوجد ضلعان متقابلان متطابقان، لكن لا يوجد ما يدل على أنهما متوازيان.

4) 

لا؛ المعطيات غير كافية لمعرفة هل هو متوازي أضلاع أم لا، حيث إن أحد قطريه ينصف الآخر، ولكن لا يوجد ما يدل على أن القطر الآخر ينصفه، كما أنه يوجد ضلعان متقابلان متطابقان، ولكن لا يوجد ما يدل على أنهما متوازيان.

هندسة إحداثيّة: مثِّل في المستوى الإحداثي الشكل الرباعي المعطاة إحداثيات رؤوسه فيما يأتي، وحدّد ما إذا كان الشكل متوازي أضلاع أم لا، وبرّر إجابتك بالطريقة المحدّدة في السؤال.

5) $P(0,0)$, $Q(3,4)$, $S(7,4)$, $Y(4,0)$؛ صيغة الميل.

نعم؛ بما أن ميلَي $\overline{QS}$, $\overline{PY}$ متساويان ويساويان صفرًا وميلَي $\overline{YS}$, $\overline{PQ}$ متساويان ويساويان $\frac{4}{3}$ ، فإن: $\overline{QS} \parallel \overline{PY}$ و $\overline{YS} \parallel \overline{PQ}$.

فالشكل متوازي أضلاع؛ لأن الأضلاع المتقابلة متوازية.

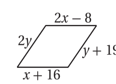
6) $S(-2,1)$, $R(1,3)$, $T(2,0)$, $Z(-1,-2)$؛ صيغتا المسافة بين نقطتين والميل.

نعم؛ بما أن: $SR = ZT = \sqrt{13}$ وميلَي $\overline{SR}$ و $\overline{ZT}$ متساويين ويساوي $\frac{2}{3}$ ، فالشكل متوازي أضلاع؛ لأنّ فيه ضلعين متقابلين متوازيان ومتطابقان.

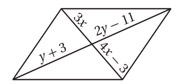
7) $W(2,5)$, $R(3,3)$, $Y(-2,-3)$, $N(-3,1)$؛ صيغة نقطة المنتصف.

لا؛ ليس للقطرين نقطة المنتصف نفسها، حيث نقطة منتصف $\overline{WY}$ هي $(0, 1)$، أما نقطة منتصف $\overline{RN}$ فهي $(0, 2)$

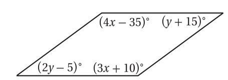
جبر: أوجد قيمتَي x, y في كلٍّ مما يأتي، بحيث يكون الشكل الرباعي متوازي أضلاع:

8) 

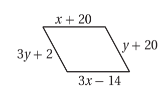
$x = 24; y = 19$

9) 

$x = 3; y = 14$

10) 

$x = 45; y = 20$

11) 

$x = 17; y = 9$

12) إذا كانت إحداثيّات ثلاثة من رؤوس متوازي أضلاع هي: $T(0,-3)$, $S(2,1)$, $R(-2,-1)$، فأوجد الإحداثيّات الممكنة للرأس الرابع جميعها.

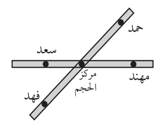
$(4,-1), (0,3), (-4,-5)$

الاسم ______________ التاريخ ________

5-3 تدريبات حلّ المسألة

تمييز متوازي الأضلاع

1) **توازن:** يوازن حمد وسعد وفهد ومهند أنفسهم على جسم على شكل "X" يطفو على سطح الماء، وذلك بالجلوس في أربعة مواقع تشكّل رؤوسًا لمتوازي أضلاع كما في الشكل أدناه.



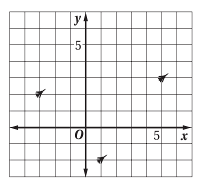
فهل يتعيّن أن يبعد الأشخاص الأربعة المسافة نفسها عن مركز الجسم، إذا كان لكلّ اثنين متقابلين الكتلة نفسها؟ وضّح إجابتك.

لا؛ يتعيّن أن تكون حمد وفهد على المسافة نفسها، وسعد ومهند على المسافة نفسها، وليس شرطًا أن يكون بُعدا سعد ومهند عن المركز مساويين لبعدَي حمد وفهد.

2) **بوصلة:** وُضعت إبرتا بوصلتين متجاورتين على طاولة، إذا كان طول كلٍّ منهما 2 in وتُشيران نحو الشمال، فهل تشكّلان ضلعين في متوازي أضلاع؟

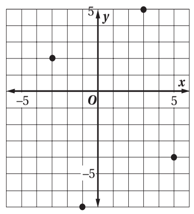
نعم

3) **عروض جويّة:** يبين الرسم أدناه مواقع ثلاث طائرات من بين أربع تحلّق مشكّلة رؤوس متوازي أضلاع، فما المواقع الثلاثة الممكنة للطائرة الرابعة؟



$(1, 7); (9, -1); (-7, -3)$

4) **خرائط:** وضع خالد مستوى إحداثيًّا فوق خريطة مدينته، فظهرت أركانها الأربعة كما في الشكل أدناه، فهل تشكّل الأركان الأربعة رؤوس متوازي أضلاع؟ وضّح إجابتك.



نعم؛ الأضلاع المتقابلة متطابقة.

5) **إطار صورة:** لدى نوال قطعتان من الخشب طول كلٍّ منهما 3 ft، وقطعتان أُخريان طول كلٍّ منهما 4 ft، وتريد أن تصنع منها إطارًا خشبيًّا لصورةٍ على شكل متوازي أضلاع.

a) إذا ثُبّتت القطع الأربع عند أطرافها، فما الترتيب الذي يتعيّن أن تثبت به القطع حتى يكوّن متوازي أضلاع؟

يتعيّن عليها ترتيبها بالتبادل 3, 4, 3, 4 أو 4, 3, 4, 3

b) ما عدد متوازيات الأضلاع التي يمكنها تكوينها بهذه القطع الأربع؟

عدد لا نهائي.

c) وضّح ما يمكن أن تفعله نوال لتحدد شكل متوازي الأضلاع بدقةٍ.

إجابة ممكنة: يمكنها أن تحدد طول أحد القطرين.

الاسم ______________ التاريخ ______________

5-3 التدريبات الإثرائية

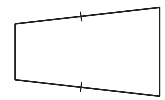
استقصاء شروط متوازي الأضلاع:

وفق التعريف، يكون الشكل الرباعيّ متوازي أضلاع، إذا وفقط إذا كان كلّ ضلعين متقابلين متوازيين. ما الشروط الأخرى الكافية لإثبات أن شكلًا رباعيًا ما متوازي أضلاع غير شرط توازي كلّ ضلعين متقابلين؟ في هذا النشاط، ستستقصي عدة حالات ممكنة من خلال رسم أشكال رباعيّة تحقّق شروطًا معيّنة.

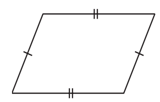
تذكّر أن أي شرط يبدو كافيًا حتى يكون شكلًا رباعيًا ما متوازي أضلاع، يجب إثبات صحته أولًا حتى يُعدَّ صالحًا.

نفذّ كلًّا ممّا يأتي:

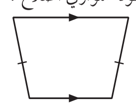
1) ارسم شكلًا رباعيًا فيه ضلعان متقابلان متطابقان. هل أنت متأكّد من كونه متوازي أضلاع؟
لا



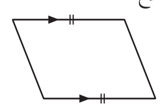
2) ارسم شكلًا رباعيًا فيه كلُّ ضلعين متقابلين متطابقان. هل أنت متأكّد من كونه متوازي أضلاع؟
نعم



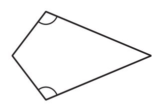
3) ارسم شكلًا رباعيًا فيه ضلعان متقابلان متوازيان والضلعان الآخران متطابقان. هل أنت متأكّد من كونه متوازي أضلاع ؟
لا



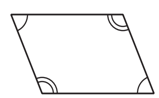
4) ارسم شكلًا رباعيًا فيه ضلعان متقابلان متوازيان ومتطابقان. هل أنت متأكّد من كونه متوازي أضلاع؟
نعم



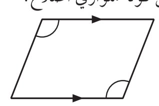
5) ارسم شكلًا رباعيًا فيه زاويتان متقابلتان متطابقتان. هل أنت متأكّد من كونه متوازي أضلاع؟
لا



6) ارسم شكلًا رباعيًا فيه كلُّ زاويتين متقابلتين متطابقتان. هل أنت متأكّد من كونه متوازي أضلاع؟
نعم



7) ارسم شكلًا رباعيًا فيه ضلعان متقابلان متوازيان وزاويتان متقابلتان متطابقتان. هل أنت متأكّد من كونه متوازي أضلاع؟
نعم



الاسم ______________ التاريخ ______________

5-4 تدريبات إعادة التعليم

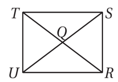
المستطيل

خصائص المستطيل:

المستطيل شكل رباعيٌّ زواياه الأربع قوائم، وبما أن الزوايا المتقابلة متطابقة فهو متوازي أضلاع أيضًا.

وتتوافر فيه خصائص متوازي الأضلاع وهي: الأضلاع المتقابلة متوازية، والأضلاع المتقابلة متطابقة، والزوايا المتحالفة متكاملة، والقطران ينصّف كلٌّ منهما الآخر.

بالإضافة إلى الخصائص الآتية:

تعريف	جميع الزوايا الأربع قوائم.	$\angle UTS, \angle TSR, \angle SRU, \angle RUT$ قوائم.	
5.13	القطران متطابقان.	$\overline{TR} \cong \overline{US}$	

- جميع الزوايا الأربع قوائم. $\angle UTS, \angle TSR, \angle SRU, \angle RUT$ قوائم.
- القطران متطابقان. $\overline{TR} \cong \overline{US}$

مثال 1 إذا كان الشكل الرباعيّ $RUTS$ أعلاه مستطيلًا، وكان: $RT = 7x - 2$, $US = 6x + 3$، فأوجد قيمة x.

بما أن قطرَي المستطيل متطابقان؛ إذن:

$US = RT$	تعريف تطابق القطع المستقيمة
$6x + 3 = 7x - 2$	بالتعويض
$3 = x - 2$	بطرح $6x$ من كلا الطرفين
$5 = x$	بإضافة 2 إلى كلا الطرفين

مثال 2 إذا كان الشكل الرباعيّ $RUTS$ أعلاه مستطيلًا، وكان: $m\angle STR = (8x + 3)^\circ$ ، وَ $m\angle UTR = (16x - 9)^\circ$ ، فأوجد $m\angle STR$.

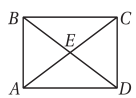
بما أن $\angle UTS$ زاوية قائمة،

فإنّ: $m\angle STR + m\angle UTR = 90^\circ$	زاوية قائمة
$(8x + 3)^\circ + (16x - 9)^\circ = 90^\circ$	بالتعويض
$(24x - 6)^\circ = 90^\circ$	بالتبسيط
$(24x)^\circ = 90^\circ$	بإضافة 6 إلى كلا الطرفين
$x = 4$	بقسمة كلا الطرفين على 24

إذن: $m\angle STR = 8x + 3 = 8(4) + 3 = 35^\circ$

تمارين

استفد من المستطيل $ABCD$ المجاور لحل الأسئلة 8–1:



1) إذا كان: $AE = 36$ و $CE = 2x - 4$، فأوجد قيمة x. **20**

2) إذا كان: $BE = 6y + 2$ و $CE = 4y + 6$، فأوجد قيمة y. **2**

3) إذا كان: $BC = 24$ و $AD = 5y - 1$، فأوجد قيمة y. **5**

4) إذا كان: $m\angle BEA = 62^\circ$، فأوجد $m\angle BAC$. **59°**

5) إذا كان: $m\angle AED = (12x)^\circ$ و $m\angle BEC = (10x + 20)^\circ$، فأوجد $m\angle AED$. **120°**

6) إذا كان: $BD = 8y - 4$ و $AC = 7y + 3$، فأوجد BD. **52**

7) إذا كان: $m\angle DBC = (10x)^\circ$ و $m\angle ACB = (4x^2 - 6)^\circ$، فأوجد $m\angle ACB$. **30°**

8) إذا كان: $AB = 6y$ و $BC = 8y$، فأوجد BD بدلالة y. **10y**

الاسم ________________ التاريخ ________

5-4 تدريبات إعادة التعليم (تتمة)

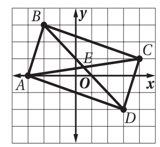
المستطيل

إثبات أنَ متوازي الأضلاع يكون مستطيلًا:

إذا كان متوازي الأضلاع مستطيلًا فإن قطرَيه متطابقان، وعكس هذه النظرية صحيح أيضًا، فإذا كان قطرا متوازي أضلاع متطابقين فإنه مستطيل.

وفي المستوى الإحداثيّ، يمكنك استعمال صيغة المسافة بين نقطتين وصيغة الميل وخصائص القطرين لتحدّد ما إذا كان شكل ما مستطيلًا أم لا.

مثال **في المستوى الإحداثي، مثّل الشكل الرباعيّ $ABCD$ الذي رؤوسه: $A(-3,0), B(-2,3), C(4,1), D(3,-2)$، ثم حدّد ما إذا كان $ABCD$ مستطيلًا أم لا، وبرّر إجابتك**



الطريقة 1: استعمال صيغة الميل، $m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$

ميل $\overline{AB}$: $m = \frac{3-0}{-2-(-3)} = \frac{3}{1} = 3$ ، وميل $\overline{AD}$: $m = \frac{-2-0}{3-(-3)} = -\frac{2}{6} = -\frac{1}{3}$

و ميل $\overline{CD}$: $m = \frac{-2-1}{3-4} = \frac{-3}{-1} = 3$ ، وميل $\overline{BC}$: $m = \frac{1-3}{4-(-2)} = -\frac{2}{6} = -\frac{1}{3}$

بما أن كلّ ضلعين متقابلين في الشكل الرباعيّ متوازيان، فإنه متوازي أضلاع، ولمّا كانت الأضلاع المتتالية متعامدة، فإن الشكل $ABCD$ متوازي أضلاع زواياه الأربع قوائم؛ أي أنه مستطيل.

الطريقة 2: استعمال صيغة المسافة بين نقطتين، $d = \sqrt{(x_2-x_1)^2 + (y_2-y_1)^2}$

$BC = \sqrt{(-2-4)^2 + (3-1)^2} = \sqrt{40}$ ، $AB = \sqrt{(-3-(-2))^2 + (0-3)^2} = \sqrt{10}$

$AD = \sqrt{(-3-3)^2 + (0-(-2))^2} = \sqrt{40}$ ، $CD = \sqrt{(4-3)^2 + (1-(-2))^2} = \sqrt{10}$

بما أن كلّ ضلعين متقابلين متطابقان، فإن الشكل $ABCD$ متوازي أضلاع.

$AC = \sqrt{(-3-4)^2 + (0-1)^2} = \sqrt{50}$ ، $BD = \sqrt{(-2-3)^2 + (3-(-2))^2} = \sqrt{50}$

وبما أن $ABCD$ متوازي أضلاع قطراه متطابقان، إذن هو مستطيل.

تمارين

هندسة إحداثيّة: في المستوى الإحداثي، مثّل الشكل الرباعي المعطاة إحداثيّات رؤوسه في كلٍّ مما يأتي، وحدّد ما إذا كان مستطيلًا أم لا، برّر إجابتك باستعمال الطريقة المحددة في السؤال. **انظر رسومات الطلاب.**

1) $A(-3,1), B(-3,3), C(3,3), D(3,1)$؛ صيغة المسافة بين نقطتين.

نعم؛ $AB = 2, BC = 6, CD = 2, DA = 6, AC = \sqrt{40}, BD = \sqrt{40}$ الأضلاع المتقابلة متطابقة والقطران متطابقان.

2) $A(-3,0), B(-2,3), C(4,5), D(3,2)$؛ صيغة الميل.

لا؛ ميل $\overline{AB}$ يساوي 3، وميل $\overline{BC}$ يساوي $\frac{1}{3}$. يبيّن الميلان أن ضلعين متتالين ليسا متعامدين؛ أي أنه ليس كل زواياه قوائم.

3) $A(-3,0), B(-2,2), C(3,0), D(2,-2)$؛ صيغة المسافة بين نقطتين. **لا؛ $AC = 6, BD = \sqrt{32}$، القطران ليسا متطابقين.**

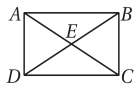
4) $A(-1,0), B(0,2), C(4,0), D(3,-2)$؛ صيغة الميل.

نعم؛ ميل $\overline{AB}$ يساوي 2، وميل $\overline{AD}$ يساوي $-\frac{1}{2}$، وميل $\overline{CD}$ يساوي 2، وميل $\overline{BC}$ يساوي $-\frac{1}{2}$، وبما أن كل ضلعين متقابلين متوازيان، والأضلاع المتتالية متعامدة، فإن الشكل $ABCD$ متوازي أضلاع زواياه الأربع قوائم؛ أي أنه مستطيل.

الاسم ________________ التاريخ ________

5-4 تدريبات المهارات

المستطيل



جبر: استفد من المستطيل $ABCD$ المجاور لحل الأسئلة 1–8.

1) إذا كان: $AC = 2x + 13$ وَ $DB = 4x - 1$، فأوجد DB. **27**

2) إذا كان: $AC = x + 3$ وَ $DB = 3x - 19$، فأوجد AC. **14**

3) إذا كان: $AE = 3x + 3$ وَ $EC = 5x - 15$، فأوجد AC. **60**

4) إذا كان: $DE = 6x - 7$ وَ $AE = 4x + 9$، فأوجد DB. **82**

5) إذا كان: $m\angle DAC = (2x + 4)°$ وَ $m\angle BAC = (3x + 1)°$، فأوجد $m\angle BAC$. **52°**

6) إذا كان: $m\angle BDC = (7x + 1)°$ وَ $m\angle ADB = (9x - 7)°$، فأوجد $m\angle BDC$. **43°**

7) إذا كان: $m\angle ABD = (7x - 31)°$ وَ $m\angle CDB = (4x + 5)°$، فأوجد $m\angle ABD$. **53°**

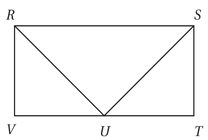
8) إذا كان: $m\angle BAC = (x + 3)°$ وَ $m\angle CAD = (x + 15)°$، فأوجد $m\angle BAC$. **39°**

9) **برهان:** اكتب برهانًا ذا عمودين

المعطيات: الشكل $RSTV$ مستطيل، و U نقطة منتصف $\overline{VT}$.

المطلوب: $\Delta RUV \cong \Delta SUT$

البرهان:



العبارات	المبرِّرات
1) $RSTV$ مستطيل	1) مُعطى.
2) $\angle V$ و $\angle T$ قائمتان	2) تعريف المستطيل.
3) $\angle V \cong \angle T$	3) جميع الزوايا القوائم متطابقة.
4) U نقطة منتصف $\overline{VT}$	4) مُعطى.
5) $\overline{VU} \cong \overline{TU}$	5) تعريف نقطة المنتصف.
6) $\overline{VR} \cong \overline{TS}$	6) الأضلاع المتقابلة في المستطيل متطابقة.
7) $\Delta RUV \cong \Delta SUT$	7) المسلّمة SAS.

هندسة إحداثية: مثّل في المستوى الإحداثي الشكل الرباعي المعطاة إحداثيات رؤوسه في كلٍّ مما يأتي، وحدد ما إذا كان مستطيلًا أم لا، برّر إجابتك باستعمال الطريقة المحددة في السؤال. **انظر رسومات الطلاب.**

10) $S(3,0), R(2,4), Q(-4,2), P(-2,-3)$؛ صيغة الميل.

لا؛ ميل $\overline{SR}$ يساوي -4، وميل $\overline{RQ}$ يساوي $\frac{1}{3}$ ، يبيّن الميلان أن ضلعين متتالين ليسا متعامدين؛ أي ليس كل زواياه قوائم.

11) $M(-4,-1), L(2,2), K(0,6), J(-6,3)$؛ صيغة المسافة بين نقطتين.

نعم؛ $MJ = 2\sqrt{5}$ ، $LK = 2\sqrt{5}$ ، $KJ = 3\sqrt{5}$ ، $ML = 3\sqrt{5}$ وبما أن كل ضلعين متقابلين متطابقان؛ إذن الشكل $SRQP$ متوازي أضلاع، و $MK = \sqrt{65}$ ، $LJ = \sqrt{65}$ ، وبما أن $SRQP$ متوازي أضلاع قطراه متطابقان؛ إذن هو مستطيل.

12) $T(4,1), U(3,-1), X(-3,2), Y(-2,4)$؛ صيغة المسافة بين نقطتين.

نعم؛ $YT = 3\sqrt{5}$ ، $XU = 3\sqrt{5}$ ، $UT = \sqrt{5}$ ، $YX = \sqrt{5}$ ، وبما أن كل ضلعين متقابلين متطابقان؛ إذن الشكل $YXUT$ متوازي أضلاع، و $YU = 5\sqrt{2}$ ، $XT = 5\sqrt{2}$ ، وبما أن $YXUT$ متوازي أضلاع قطراه متطابقان؛ إذن هو مستطيل.

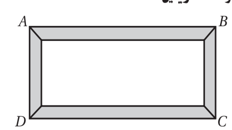
الاسم ____________ التاريخ ____________

5-4 تدريبات حلّ المسألة

المستطيل

1) **إطار صورة:** صنع حمدٌ الإطار المستطيل المبيّن أدناه، ثم قاس المسافتين BD وَ AC لكي يتأكّد من أن الإطار مستطيل، ما العلاقة بين هاتين المسافتين إذا كان الإطار مستطيلًا؟

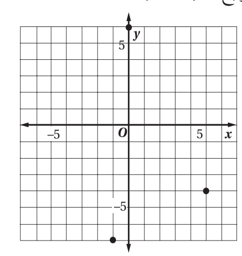
يتعيّن أن تكونا متساويتين.



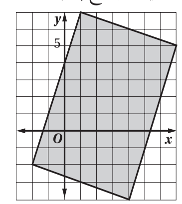
2) **مكتبات:** في الشكل أدناه، خزانة كتب تتكون من لوحين خشبيّين عموديّين وخمسة ألواح أفقية، فهل واجهة كل قسم من أقسام الخزانة الناتجة عن تقاطع الألواح الأفقية واللّوحين العموديين تشكل مستطيلًا؟ وضّح إجابتك.

نعم؛ كلّ زاوية من الزوايا الأربع لكلّ واحد من واجهات الأقسام الأربعة ناتجة من تقاطع مستقيم أفقي ومستقيم رأسيّ، فهي زاوية قائمة. وعليه، فإن واجهة كلّ قسم من الأقسام الأربعة مستطيل؛ لأن زواياه الأربع قوائم.

3) **مسح الأراضي:** يحدّد مسّاح أراض رؤوس قطعة أرض مستطيلة؛ ثلاثة رؤوس منها مبيّنة في الشكل أدناه. ما إحداثيّات الرأس الرابع؟ **$(-6, 3)$**

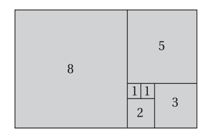


4) **برك سباحة:** يُصمّم ماجد بركة سباحة في المستوى الإحداثي، فهل البركة مستطيلة؟ وضّح إجابتك.



نعم؛ إجابة ممكنة: ميل كلٍّ من الضلعين الطويلين يساوي 3، وميل كلٍّ من الضلعين القصيرين يساوي $-\frac{1}{3}$؛ إذن فكل زوج من الأضلاع متوازيان، والأضلاع القصيرة تعامد الأضلاع الطويلة؛ لأن حاصل ضرب الميلين يساوي -1؛ إذن فالزوايا الأربع قوائم.

5) **أنماط:** كوّن خالد النمط الآتي مستعملًا 6 مربعاتٍ، وقد كتب طول ضلع كلّ مربعٍ داخله.



a) كم مستطيلًا يمكن تكوينه باستعمال الأضلاع الظاهرة في هذا الشكل؟ **11**

b) إذا أراد خالدٌ أن يوّسع هذا النمط بإضافة مستطيل آخر، أضلاعه متساوية الطول لتكوين مستطيل أكبر، فما الأطوال الممكنة لأضلاع المستطيل الذي يمكنه إضافته؟

13 وحدة؛ لأن طول ضلع كل مربع، ابتداءً من المربع الثالث يساوي مجموع طولَي ضلعَي المربعين السابقين في النمط، فالمربع الثالث طول ضلعه يساوي $1 + 1 = 2$، والرابع طول ضلعه يساوي $1 + 2 = 3$، ... وهكذا؛ أي أن طول ضلع المربع المضاف سيكون $5 + 8 = 13$

الاسم ____________ التاريخ ____________

5-4 التدريبات الإثرائيّة

المحيط الثابت والمساحة الثابتة للمستطيل:

في هذا النشاط ستستقصِي أن المستطيل الذي محيطه ثابت (معلوم) لا يعني أن بُعدَيه ثابتان؛ فقد يوجد أكثر من مستطيل له المحيط نفسه وبُعداه مختلفان. وسنربط ذلك بالمساحة؛ لنستنتج أن المستطيل المعلوم المحيط ومساحته أكبر ما يمكن سيكونُ مربعًا، كما سنستقصي أن المستطيل المعلوم المساحة ومحيطه أقل ما يمكن سيكون مربعًا أيضًا.

المحيط الثابت

يريد سلمان أن يحوط قطعة مستطيلة الشكل من حديقة بيته بسياج، فاشترى 200 ft منه.

1) أكمل الجدول المجاور بأعدادٍ كلية؛ لبيان أبعاد القطع المستطيلة الخمس التي سيُستعمل في إحاطتها بالسياج كلّه، ثم أوجد مساحة كلّ قطعة.

المحيط (ft)	الطول (ft)	العرض (ft)	المساحة $(ft)^2$
200	80	**20**	**1600**
200	70	**30**	**2100**
200	60	**40**	**2400**
200	50	**50**	**2500**
200	45	**55**	**2475**

2) هل القطع المستطيلة الخمس لها المساحة نفسها؟ وإلّا فما مساحة القطعة الكبرى؟

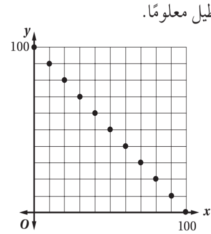
لا؛ القطعة التي أبعادها 50×50 لها أكبر مساحة.

3) اكتب قاعدةً لإيجاد أبعاد المستطيل الذي له أكبر مساحةٍ ممكنةٍ، عندما يكون محيط المستطيل معلومًا.

المستطيل ذو المساحة الأكبر لمحيطٍ معلوم يكون مربعًا.

4) ليكن x يمثّل طول مستطيل و y يمثّل عرضه، اكتب علاقةً تربط بين x وَ y لجميع المستطيلات التي مُحيطُها 200 ft، ثم مثّل هذه العلاقة في المستوى الإحداثيّ المجاور.

$x + y = 100$ أو $2x + 2y = 200$



أراد سلمان أن يضع سياجًا حول قطعةٍ مستطيلةٍ أخرى مساحتها $100\ ft^2$، وقبل أن يذهب لشراء السياج، كوّن سلمان جدولًا لتحديد أبعاد القطعة المستطيلة التي سيُحوِّطها بالسياج.

5) **المساحة الثابتة:** أكمل الجدول بأعدادٍ كلية؛ لإيجاد الأبعاد الممكنة للقطع المستطيلة الخمس التي مساحتها $100\ ft^2$

المساحة $(ft)^2$	الطول (ft)	العرض (ft)	طول السياج (ft)
100	**1**	**100**	**202**
100	**2**	**50**	**104**
100	**4**	**25**	**58**
100	**5**	**20**	**50**
100	**10**	**10**	**40**

6) يُريد سلمان أن يكون ثمن شراء السياج أقلّ ما يمكن، ساعده على إيجاد أبعاد القطعة التي تكلفة سياجها أقلّ ما يمكن؟

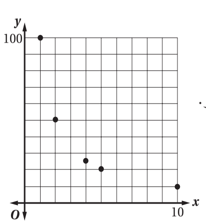
10 ft × 10 ft

7) اكتب قاعدةً لإيجاد أبعاد المستطيل ذي المحيط الأصغر، عندما تكون مساحة المستطيل معطاة.

المستطيل الذي محيطه أقل ما يمكن، ومساحته معلومة يكون مربعًا.

8) افترض أن x يمثّل طول المستطيل و y يمثّل عرضه. اكتب علاقةً تربط بين x و y للمستطيل الذي مساحته $100\ ft^2$، ثم مثّل هذه العلاقة في المستوى الإحداثيّ المجاور.

$x\,y = 100$

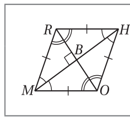


الاسم ________ التاريخ ________

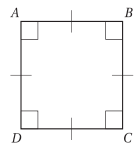
5-5 تدريبات إعادة التعليم
المعيّن والمربّع

خصائص المعيّن:

المعيّن هو شكل رباعيّ أضلاعه الأربعة متطابقة. وبما أنّ كلّ ضلعين متقابلين فيه متطابقان، فهو متوازي أضلاع أيضًا. وتتوافر فيه خصائص متوازي الأضلاع وهي: الأضلاع المتقابلة متوازية، والزوايا المتقابلة متطابقة، والزوايا المتحالفة متكاملة، وكذلك القطران ينصّف كلّ منهما الآخر، بالإضافة إلى الخصائص الآتية:

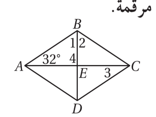
5.15	قطرا المعين متعامدان.	$\overline{MH} \perp \overline{RO}$	
5.16	كلّ قطرٍ فيه ينصّف كلًّا من الزاويتين اللّتين يصل بين رأسَيها.	$\overline{MH}$ ينصّف $\angle RMO$ و$\angle RHO$، $\overline{RO}$ ينصّف $\angle MRH$ و$\angle MOH$	

المربّع هو متوازي أضلاع جميع أضلاعه متطابقة وجميع زواياه متطابقة. تذكّر أن متوازي الأضلاع الذي زواياه الأربع قوائم يكون مستطيلًا، ومتوازي الأضلاع الذي أضلاعه الأربعة متطابقة يكون معيّنًا؛ لذا فعندما يكون متوازي الأضلاع معيّنًا وإحدى زواياه قائمة فإنّه يكون مربّعًا أيضًا.



المربع ABCD

مثال في المعين $ABCD$ المجاور. إذا كان $m\angle BAC = 32°$ ، فأوجد قياس كلّ زاوية مرقّمة.

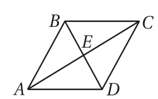


بما أنّ $ABCD$ معيّنًا، فإنّ قطريه متعامدان و$\triangle ABE$ قائم الزاوية؛ لذا فإن: $m\angle 4 = 90°$،
و $m\angle 1 = 90° - 32° = 58°$. وبما أنّ كلّ قطر في المعين ينصّف الزاويتين اللتين يمرّ بهما،
فإنّ $m\angle 2 = m\angle 1$؛ إذن $m\angle 2 = 58°$.

وبما أنّ المعيّن متوازي أضلاع، فإنّ الأضلاع المتقابلة فيه متوازية، وبما أنّ الزاويتين $\angle BAC$ وَ $\angle 3$ متبادلتان داخليًّا بين مستقيمين متوازيين، فإنّ $m\angle 3 = 32°$.

تمارين

جبر: استفد من المعين $ABCD$ المجاور للإجابة عن الأسئلة 8–1:



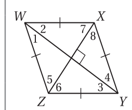
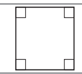
1) إذا كان: $m\angle ABD = 60°$، فأوجد $m\angle BDC$. **60°**
2) إذا كان: $AE = 8$، فأوجد AC. **16**
3) إذا كان: $AB = 26$ وَ $BD = 20$، فأوجد AE. **24**
4) أوجد $m\angle CEB$. **90°**
5) إذا كان: $m\angle CBD = 58°$، فأوجد $m\angle ACB$. **32°**
6) إذا كان: $AE = 3x - 1$ وَ $AC = 16$، فأوجد قيمة x. **3**
7) إذا كان: $m\angle CDB = (6y)°$ وَ $m\angle ACB = (2y + 10)°$، فأوجد قيمة y. **10**
8) إذا كان: $AD = 2x + 4$ وَ $CD = 4x - 4$، فأوجد قيمة x. **4**

الاسم ________ التاريخ ________

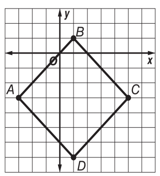
5-5 تدريبات إعادة التعليم (تتمة)
المعيّن والمربّع

إثبات أن الشكل الرباعي معين أو مربع:

تحدد النظريات الآتية الشروط الكافية لتحديد ما إذا كان متوازي الأضلاع معينًا أو مربعًا.

5.17	إذا كان قطرا متوازي الأضلاع متعامدين فإنه معيّن.	إذا كان: $\overline{WY} \perp \overline{ZX}$، فإن $\square WXYZ$ معينًا	
5.18	إذا نصّف قطرا متوازي أضلاع كلًّا من الزاويتين اللتين يصل بين رأسيها، فإن متوازي الأضلاع يكون معينًا.	إذا كان: $\angle 1 \cong \angle 2, \angle 3 \cong \angle 4, \angle 5 \cong \angle 6$، $\angle 7 \cong \angle 8$، فإن $\square WXYZ$ معينًا	
5.19	إذا كان ضلعان متتاليان في متوازي الأضلاع متطابقين فإنه معين.	إذا كان: $\overline{XY} \cong \overline{YZ}$، فإن $\square WXYZ$ معينًا	
5.20	إذا كان الشكل الرباعي مستطيلًا ومعينًا فإنه مربع.		

مثال حدد ما إذا كان متوازي الأضلاع $ABCD$ الذي إحداثيات رؤوسه: $A(-3, -3), B(1, 1), C(5, -3), D(1, -7)$ معينًا أو مستطيلًا أو مربعًا. اكتب جميع التسميات التي تنطبق عليه، ووضّح إجابتك. مثّل $\square ABCD$ في المستوى الإحداثي، ثم أوجد AC وَ BD



$AC = \sqrt{(-3-5)^2 + (-3-(-3))^2} = \sqrt{64} = 8$, $BD = \sqrt{(1-1)^2 + (-7-1)^2} = \sqrt{64} = 8$

القطران متطابقان؛ إذن فمتوازي الأضلاع $ABCD$ مستطيل. والآن، أوجد ميل كلٍّ من $\overline{AC}$ وَ $\overline{BD}$.

ميل $\overline{AC}$: $m = \frac{-3-(-3)}{-3-5} = \frac{0}{-8} = 0$ ؛ $\overline{AC}$ مستقيم أفقي.

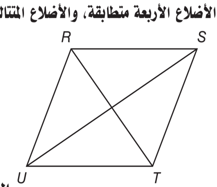
ميل $\overline{BD}$: $m = \frac{1-(-7)}{1-1} = \frac{8}{0}$ = كمية غير معرفة ؛ $\overline{BD}$ مستقيم رأسي.

وبما أن المستقيمين (الأفقي والرأسي) متعامدان دائمًا، فإن قطري متوازي الأضلاع $ABCD$ متعامدان؛ ولذلك فهو معيّن ومستطيل، وبالتالي فهو مربع.

تمارين

هندسة إحداثية: حدِّد ما إذا كان $\square ABCD$ المعطاة إحداثيات رؤوسه في كلٍّ مما يأتي معينًا أو مستطيلًا أو مربعًا، اكتب جميع التسميات التي تنطبق عليه. ووضِّح إجابتك.

1) $A(0 ,2), B(2 ,4), C(4 ,2), D(2, 0)$
مستطيل، معيَّن، مربَّع، الأضلاع الأربعة متطابقة، والأضلاع المتتالية متعامدة.
2) $A(-2 ,1), B(-1 ,3), C(3 ,1), D(2, -1)$ **مستطيل: الأضلاع المتتالية متعامدة.**
3) $A(-2, -1), B(0, 2), C(2, -1), D(0, -4)$ **معيَّن: الأضلاع الأربعة متطابقة، والأضلاع المتتالية ليست متعامدة.**
4) **برهان:** اكتب برهانًا ذا عمودين.
المعطيات: في متوازي الأضلاع $RSTU$، $\overline{RS} \cong \overline{ST}$
المطلوب: $RSTU$ معيَّن.



إجابة سؤال 4

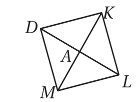
العبارات	المبررات
1) $RSTU$ متوازي أضلاع، $\overline{RS} \cong \overline{ST}$	1) معطيات.
2) $\overline{RS} \cong \overline{UT}$, $\overline{RU} \cong \overline{ST}$	2) تعريف متوازي الأضلاع
3) $\overline{UT} \cong \overline{RS} \cong \overline{ST} \cong \overline{RU}$	3) بالتعويض
4) $RSTU$ معين	4) تعريف المعين

الاسم ________________ التاريخ ________

5-5 تدريبات المهارات

المعيّن والمربّع

جبر: استفد من المعين $DKLM$ المجاور للإجابة عن الأسئلة 6–1.



1) إذا كان: $DK = 8$، فأوجد KL. **8**

2) إذا كان: $m\angle DML = 82°$، فأوجد $m\angle DKM$. **41°**

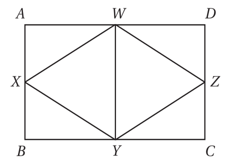
3) إذا كان: $m\angle KAL = (2x - 8)°$، فأوجد قيمة x. **49°**

4) إذا كان: $DA = 4x$ و $AL = 5x - 3$، فأوجد DL. **24**

5) إذا كان: $m\angle DKL = (3x + 2)°$، و $m\angle KLM = (3x - 2)°$، فأوجد $m\angle MDK$. **88°**

6) إذا كان: $DM = 5y + 2$ و $DK = 3y + 6$، فأوجد KL. **12**

7) **برهان:** اكتب برهانًا ذا عمودين.



المعطيات: الشكل الرباعي $ABCD$ مستطيل، و W, X, Z نقاط منتصف $\overline{AD}, \overline{AB}, \overline{DC}$ على الترتيب، و $\triangle WXY, \triangle WZY$ مثلثان متطابقا الضلعين، و $\overline{WY}$ قاعدة مشتركة بينهما.

المطلوب: إثبات أن الشكل $WXYZ$ معيّن.

البرهان:

العبارات	المبرّرات
1) $\overline{AB} \cong \overline{DC}$	1) ضلعان متقابلان في مستطيل.
2) W, X, Z نقاط منتصف $\overline{AD}, \overline{AB}, \overline{DC}$ على الترتيب	2) مُعطى.
3) $\overline{AX} \cong \overline{DZ}$	3) نصفا ضلعين متطابقين.
4) $\angle WAX, \angle WDZ$ قائمتان	4) زوايا المستطيل قائمة.
5) $\overline{AW} \cong \overline{DW}$	5) نقطة المنتصف قسمت القطعة المستقيمة جزأين متطابقين.
6) $\triangle WAX \cong \triangle WDZ$	6) SAS
7) $\overline{WX} \cong \overline{WZ}$	7) نتيجة تطابق $\triangle WAX , \triangle WDZ$
8) $\triangle WXY , \triangle WZY$ متطابقان الأضلاع، ويشتركان في القاعدة WY	8) مُعطى.
9) $\overline{WX} \cong \overline{YX} , \overline{WZ} \cong \overline{YZ}$	9) ساقا مثلثين متطابقا الضلعين.
10) $\overline{YX} \cong \overline{WX} , \overline{WZ} \cong \overline{YZ}$	10) خاصية التعدي للخطوتين 9 ,7
11) $WXYZ$ معين	11) الشكل الرباعي فيه 4 أضلاع متطابقة

هندسة إحداثية: حدّد ما إذا كان $\square QRST$ المعطاة إحداثيات رؤوسه في كلٍّ مما يأتي معينًا أو مستطيلًا أو مربعًا، واكتب جميع التسميات التي تنطبق عليه، ووضّح إجابتك.

8) $T(-1,5), S(-1,1) , R(3,1) , Q(3,5)$ **معيّن، ومستطيل، ومربع؛ جميع الأضلاع متطابقة والقطران متطابقان ومتعامدان.**

9) $T(-11,4) , S(-1,4) , R(5,12) , Q(-5,12)$ **معيّن ؛ جميع الأضلاع متطابقة والقطران متعامدان وغير متطابقين.**

10) $T(-8,10) , S(2,5) , R(4,-6) , Q(-6,-1)$ **معيّن ؛ جميع الأضلاع متطابقة والقطران متعامدان وغير متطابقين.**

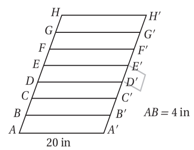
11) $T(-2,6) ,S(-10,2) , R(-6,-8) , Q(2,-4)$ **متوازي أضلاع فقط؛ الأضلاع المتقابلة متطابقة، لكن القطرين غير متطابقين وغير متعامدين.**

الاسم ________________ التاريخ ________

5-5 تدريبات حلّ المسألة

المعيّن والمربّع

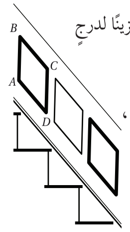
1) **رفوف الأطباق:** الشكل أدناه يمثل المنظر الجانبي لرف أطباق، والذي يبدو على شكل متوازي أضلاع، إذا كانت المسافات بين الرفوف متساوية، فما النقطتان اللتان تشكّلان معينًا مع النقطتين A و A'؟ **F, F'**



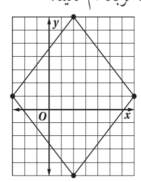
2) **درج:** يبيّن الشكل المجاور درابزينًا لدرجٍ على شكل معينات متطابقة؛ في المعين $ABCD$، إذا كان $m\angle A$ يساوي ضعف $m\angle B$، فأوجد $m\angle C, m\angle D$.

$m\angle C = 120°$

$m\angle D = 60°$

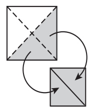


3) **نوافذ:** رُسمت نافذة في المستوى الإحداثيّ أدناه، حدّد ما إذا كانت النافذة مربعًا أم معينًا.



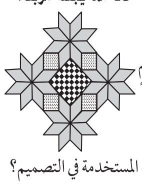
افترض أن إحداثيات رؤوس الشكل هي: $A(7, 1) , B(2, -5) , B(-3, 1) , D(2, 7)$، وميل $\overline{AB}$ يساوي ميل $\overline{CD}$ ويساوي $\frac{5}{5}$؛ لذا $\overline{AB} \parallel \overline{CD}$، وميل $\overline{BC}$ يساوي ميل $\overline{AD}$ ويساوي $-\frac{6}{5}$؛ لذا $\overline{BC} \parallel \overline{AD}$، ولأن كل ضلعين متقابلين متوازيان؛ إذن الشكل $ABCD$ متوازي أضلاع. وبما أن $AC = 10$ ، و $BD = 12$ قطران ليسا متطابقين، فإن $\square ABCD$ ليس مستطيلًا، وبما أنه ليس مستطيلًا، فإنه ليس مربعًا أيضًا، وبما أن ميل $\overline{AC}$ يساوي 0، وميل $\overline{BD}$ غير معرّف فإن القطرين متعامدان؛ لذا فالشكل $\square ABCD$ معين.

4) **مربعات:** قصّت صفيّة مربّعًا على طول قُطريه، فحصلت على أربعة مثلثات قائمة ومتطابقة، ثم لصقت اثنين منها من جهة ضلعَيهما الطويلين. بيّن أن الشكل الناتج مربّع.



إجابة ممكنة: بما أن أضلاع الشكل الرباعي الناتج متطابقة؛ لأن كلًّا منها هو نصف قطر من قطري المربع الكبير المتطابقين، واللذين ينصّف كلٌّ منهما الآخر والمتعامدين أيضًا. كما أن قياس كل زاوية من زوايا الشكل الرباعي الناتج هي زاوية قائمة؛ لأن زاويتين منها هما زاويتا القطرين المتعامدين، والزاويتان الأخريان هما من المثلثات الناتجة القائمة، أو التي زاوية كلٍّ منها عن القائمة $(45° + 45° = 90°)$ مما يجعله مربعًا.

5) **تصميم:** استعملت هدى 32 من المعيّنات المتطابقة؛ لتكوين تصميم يشبه الزهرة عند كلّ ركنٍ كما في الشكل المجاور.



a) ما قياسات زوايا المعيّنات المتطابقة المستخدمة في التصميم؟ وضح إجابتك.

$45°, 135°, 45°, 135°$؛ لأن مجموع قياسات الزوايا عند مركز كل ركن (تجمع 8 معينات) يساوي مجموع قياسات الزوايا عند نقطة $360°$؛ أي أن قياس كل زاوية من زوايا المعيّنات الثمانية حولها $\frac{360°}{8} = 45°$ ، كلٌّ منها تقابل زاوية مساوية لها في القياس بحسب تعريف المعين؛ أي أن قياس كلٍّ من الزاويتين الأخريين في المعين هو:

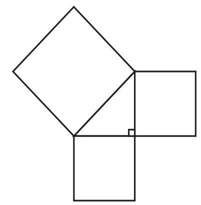
$$\frac{360° - (45° - 45°)}{2} = 135°$$

b) ما أنواع الأشكال الرباعيّة المنقّطة والشكل الرباعي الذي يتوسط التصميم؟ وضح إجابتك.

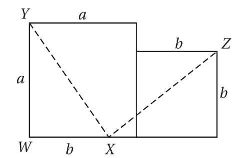
جميعها مربعات؛ بما أن طول كل ضلع من أضلاع الشكل الرباعي الذي يتوسط التصميم، يتكون من ضلعين من أضلاع معيّنين متطابقين، فإن أضلاعه متطابقة، وبما أن كل زاوية من زواياه هي زاوية من تجمّع زوايا عند نقطة يكون قياسها: $360° - (135° + 135°) = 90°$؛ أي أن الشكل مربع. كذلك بما أن طول ضلع كل شكل رباعي من الأشكال المنقطة يساوي طول ضلع المعين. كذلك فيه زاويتان متقابلتان قياس كل منها $90°$ ، حيث إنها زاوية من تجمّع زوايا عند نقطة يكون قياسها $360° - (135° + 135°) = 90°$ ؛ أي أن كل شكل رباعي منها هو مربع.

5-5 التدريبات الإثرائية

ألغاز على نظريّة فيثاغورس



تصف نظرية فيثاغورس العلاقة بين طولَي الساقين والوتر في أي مثلث قائم الزاوية، بحيث يكون مجموع مساحتَي المربعين المنشأين على الساقين يساوي مساحة المربع المنشأ على الوتر، ويمكنك تكوين لغز التبليط لتوضيح نظرية فيثاغورس بلعبةٍ مشابهةٍ للعبة تانجرام باستعمال خمس قطع، وذلك برسم مربعين متلاصقين، بحيث يمثل طول ضلع كلٍّ منهما طول ساق من ساقَي المثلث، وطول الضلع المتكوّن من المربعين بعد قصِّهما بطريقةٍ معينةٍ، يمثل طول وتر المثلث القائم؛ أي أن مساحة المربع المتكوّن من القطع الخمس تساوي مجموع مساحتَي المربعين، واللغز المبيّن أدناه مثال على ذلك. اتبع الخطوات التالية:



انظر إجابات الطلاب.

1) أنشئ مربّعًا بدقّة، واكتب عليه طول ضلعه a، ثم أنشئ مربّعًا صغيرًا عن يمين المربع الأول، طول ضلعه b على صورة الشكل أعلاه. يتعيّن أن تكون القاعدتان متجاورتين وعلى استقامةٍ واحدةٍ.

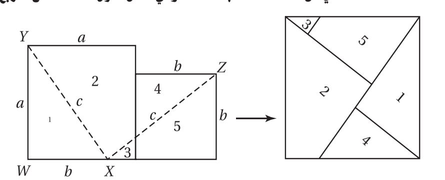
2) عيّن النقطة X على بُعد b وحدةً من الحافّة اليسرى للمربّع الكبير (W)،
ثم ارسم قطعتين مستقيمتين؛ الأولى من الرأس العلوي الأيسر للمربّع الأكبر (Y)
إلى النقطة X، والثانية من الرأس العلويّ الأيمن للمربّع الأصغر (Z) إلى النقطة X.

3) قصّ القطع الخمس، ثم أعد ترتيبها لتشكّل مربّعًا كبيرًا،
وارسم شكلًا يبيّن إجابتك. **إجابة ممكنة: الشكل المعروض أدناه.**

4) تحقق من أن طول كلٍّ من أضلاع المربع يساوي $\sqrt{a^2+b^2}$

وفق نظرية فيثاغورس في $\triangle YWX$

$c^2 = a^2 + b^2$؛ أي أن $c = \sqrt{a^2+b^2}$، وهي تمثل طول أحد أضلاع المربع الكبير.

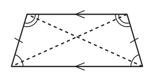


5-6 تدريبات إعادة التعليم

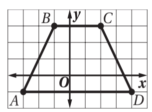
شبه المنحرف وشكل الطائرة الورقية

خصائص شبه المنحرف:

شبه المنحرف شكل رباعيّ فيه ضلعان فقط متوازيان، يسمّى كلٌّ منهما **قاعدة شبه المنحرف**، ويُسمّى الضلعان غير المتوازيين **ساقي شبه المنحرف**. وإذا كان الساقان متطابقين، فإن شبه المنحرف يُسمّى **متطابق الساقين**.

5.21	إذا كان شبه المنحرف متطابق الساقين، فإن زاويتَي كل قاعدةٍ متطابقتان.	إذا كان شبه المنحرف $FGHJ$ متطابق الساقين، فإن: $\angle G \cong \angle H, \angle F \cong \angle J$	
5.22	إذا كانت زاويتا قاعدةٍ في شبه المنحرف متطابقتَين، فإنه يُسمَّى متطابق الساقين.	إذا كانت $\angle G \cong \angle H$، فإن $FGHJ$ شبه المنحرف متطابق الساقين.	
5.23	يكون شبه المنحرف متطابق الساقين، إذا وفقط كان قطراه متطابقين.	إذا كان شبه المنحرف $FGHJ$ متطابق الساقين، فإن $\overline{FH} \cong \overline{JG}$، وإذا كان $\overline{FH} \cong \overline{JG}$، فإن $FGHJ$ شبه منحرف متطابق الساقين.	

مثال **بيّن أن الشكل الرباعي $ABCD$ الذي رؤوسه: $A(-3,-1), B(-1,3), C(2,3), D(4,-1)$ هو شبه منحرف، وحدّد ما إذا كان متطابق الساقين أم لا، ووضح إجابتك.**



ميل $\overline{AB}$: $m = \frac{3-(-1)}{-1-(-3)} = \frac{4}{2} = 2$ ، ميل $\overline{AD}$: $m = \frac{-1-(-1)}{4-(-3)} = -\frac{0}{7} = 0$

ميل $\overline{BC}$: $m = \frac{3-3}{2-(-1)} = \frac{0}{3} = 0$ ، ميل $\overline{CD}$: $m = \frac{-1-3}{4-2} = -\frac{4}{2} = -2$

بما أن فيه ضلعين متوازيين فقط هما $\overline{AD}$ وَ $\overline{BC}$، فإن الشكل $ABCD$ شبه منحرف.

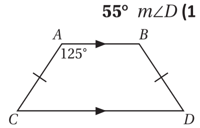
$AB = \sqrt{(-3-(-1))^2+(-1-3)^2} = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}$ ، $CD = \sqrt{(2-4)^2+(3-(-1))^2} = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}$

ولمّا كان $AB = CD$، فإنه شبه منحرف متطابق الساقين.

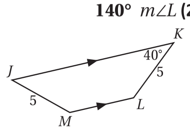
تمارين

أوجد القياس المطلوب في كلٍّ من السؤالين 1 وَ 2:

1) $m\angle D$ **55°**



2) $m\angle L$ **140°**

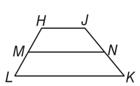


هندسة إحداثية: بيّن أنّ الشكل الرباعيّ المعطاة إحداثيات رؤوسه في كلٍّ ممّا يأتي شبه منحرف، وحدِّد ما إذا كان متطابق الساقين؟

3) $A(-1,1), B(3,2), C(1,-2), D(-2,-1)$
$\overline{AD} \parallel \overline{BC}, \overline{AB} \nparallel \overline{CD}$، لذا فإن $ABCD$ شبه منحرف، ولمّا كان $AB = \sqrt{17}, CD = \sqrt{10}$، فهو غير متطابق الساقين

4) $J(1,3), K(3,1), L(3,-2), M(-2,3)$
$\overline{JK} \parallel \overline{LM}, \overline{JM} \nparallel \overline{KL}$، لذا فإن $JKLM$ شبه منحرف، ولمّا كان $JM = KL = 3$، فهو متطابق الساقين

جبر: في الشكل المجاور M, N نقطتا منتصفَي الساقين لشبه المنحرف $HJKL$.



5) إذا كان: $HJ = 5, LK = 60$، فأوجد MN. **32.5**

6) إذا كان: $HJ = 18, MN = 28$، فأوجد LK. **38**

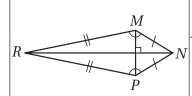
الاسم ________ التاريخ ________

5-6 تدريبات إعادة التعليم (تتمة)

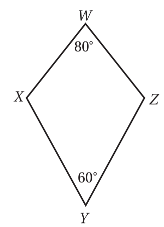
شبه المنحرف وشكل الطائرة الورقية

خصائص شكل الطائرة الورقية

شكل الطائرة الورقية هو شكل رباعي يتكون من زوجين متمايزين من الأضلاع المتجاورة المتطابقة، وعلى عكس متوازي الأضلاع، كل ضلعين متقابلين في شكل الطائرة الورقية ليسا متطابقين ولا متوازيين.

5.25	قُطرا شكل الطائرة الورقية متعامدان.	بما أن $RMNP$ شكل طائرة ورقية، فإن $\overline{MP} \perp \overline{RN}$	
5.26	في شكل الطائرة الورقية، يوجد زوج واحد فقط من الزوايا المتقابلة المتطابقة، هما الزاويتان المحصورتان بين كل ضلعين متجاورين وغير متطابقين.	بما أن $RMNP$ شكل طائرة ورقية، فإن: $\angle M \cong \angle P$ ، وَ $\angle R \not\cong \angle N$	

مثال 1 إذا كان $WXYZ$ شكل طائرة ورقية، فأوجد $m\angle Z$



بما أن: $\angle W \not\cong \angle Y$ ، إذن: $\angle X \cong \angle Z$ ، وَ $m\angle X = m\angle Z$.

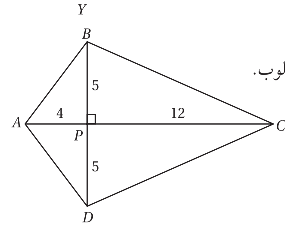
$m\angle X + m\angle Y + m\angle Z + m\angle W = 360°$ نظرية مجموع قياسات الزوايا الداخلية للمضلع

$m\angle X + 60° + m\angle Z + 80° = 360°$ بالتعويض

$m\angle X + m\angle Z = 220°$ بالتبسيط

$m\angle X = 110°, m\angle Z = 110°$ بطرح 140° من كلا الطرفين

مثال 2 إذا كان $ABCD$ على شكل طائرة ورقية، فأوجد BC .



قطرا شكل الطائرة الورقية متعامدان، استعمل نظرية فيثاغورس لتجد الطول المطلوب.

$BP^2 + PC^2 = BC^2$

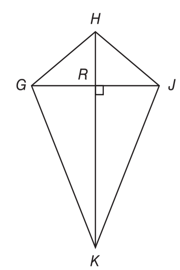
$5^2 + 12^2 = BC^2$

$169 = BC^2$

$13 = BC$

تمارين

الشكل $GHJK$ المجاور على شكل طائرة ورقية.



1) أوجد $m\angle JRK$. **90°**

2) إذا كان: $RJ = 3, RK = 10$ ، فأوجد JK. $\sqrt{109}$

3) إذا كان: $m\angle GHJ = 90°, m\angle GKJ = 110°$ ، فأوجد $m\angle HGK$. **80°**

4) إذا كان: $HJ = 7$ ، فأوجد HG. **7**

5) إذا كان: $HG = 7, GR = 5$ ، فأوجد HR. $\sqrt{24} = 2\sqrt{6}$

6) إذا كان: $m\angle GHJ = 52°, m\angle GKJ = 95°$ ، فأوجد $m\angle HGK$. **106.5°**

الصف: الأول الثانوي 32 الفصل 5: الأشكال الرباعية

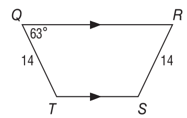
الاسم ________ التاريخ ________

5-6 تدريبات المهارات

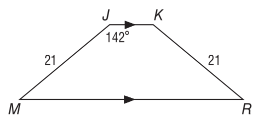
شبه المنحرف وشكل الطائرة الورقية

أوجد القياس المطلوب في كلٍّ من الأسئلة 4–1:

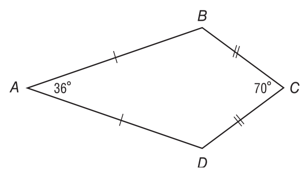
1) $m\angle S$ **117°**



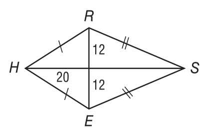
2) $m\angle M$ **38°**



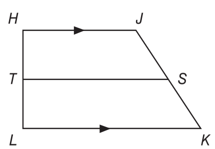
3) $m\angle D$ **127°**



4) RH $\sqrt{544} = 4\sqrt{34}$



جبر: في الشكل المجاور S, T نقطتا منتصفي الساقين لشبه المنحرف $HJKL$.



5) إذا كان: $HJ = 14, LK = 42$ ، فأوجد TS. **28**

6) إذا كان: $LK = 19, TS = 15$ ، فأوجد HJ. **11**

7) إذا كان: $HJ = 7, TS = 10$ ، فأوجد LK. **13**

8) إذا كان: $LK = 17, HJ = 9$ ، فأوجد TS. **13**

9) **هندسة إحداثية:** إذا كانت إحداثيات رؤوس الشكل الرباعي $EFGH$ هي: $E(1, 3), F(5, 0), G(8, -5), H(-4, 4)$ ، فبيِّن أن $EFGH$ شبه منحرف، وحدد ما إذا كان $EFGH$ شبه منحرف متطابق الساقين أم لا، ووضح إجابتك.

$\overline{EF} \parallel \overline{GH}$ ، ولكن $\overline{HE} \nparallel \overline{FG}$ ؛ غير متطابق الساقين؛ $EH = \sqrt{26}$, $FG = \sqrt{34}$

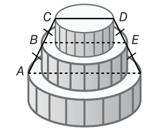
الصف: الأول الثانوي 33 الفصل 5: الأشكال الرباعية

الاسم ________________ التاريخ ________

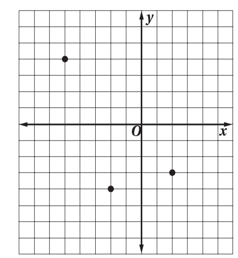
5-6 تدريبات حلّ المسألة

شبه المنحرف وشكل الطائرة الورقية

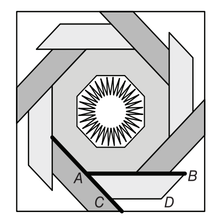
1) كيك: إذا كان قطر الطبقة العليا من كيكة فرح هو 10 in ، وقطر الطبقة السُّفلى منها هو 22 in ، كما في الشكل أدناه، فأوجد قطر الطبقة الوسطى منها. **16 in**



2) مسح الأراضي: صمّم مهندس ساحةً عامّةً على شكل طائرة ورقية؛ كي تعطي شعورًا بالاتساع. تظهر في المستوى الإحداثيّ أدناه ثلاثة أركان من الأركان الأربعة للساحة. إذا كان الركن الرابع يقع في الربع الأول من المستوى، فما إحداثيّيه؟ **(3, 1)**

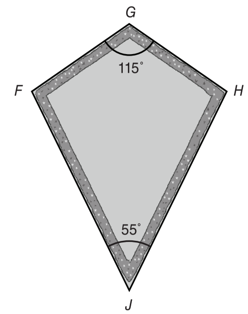


3) لوحة فنية: صمّم فنان لوحةً فنيةً تتكوّن من مضلع ثمانيّ منتظم تُحيط به ثمانية أشكال متطابقة من شبه المنحرف المتطابق الساقين، أوجد قياس $\angle B$ في شبه المنحرف $ABCD$.



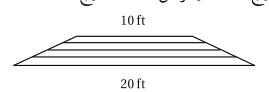
45°

4) مزرعة: زرع عبد العزيز سياجًا من الأشجار لإحاطة مزرعته، فكانت على شكل الطائرة الورقية المجاورة، أوجد $m\angle F$.



95°

5) درج: صُمّمت درجاتٌ في مسرح مدرسيّ كما في الشكل، بحيث يكون عددها 4 درجاتٍ، كلّ منها على شكل شبه منحرف، ويمكنك وضعها الواحد فوق الآخر لتكوين أشكال شبه منحرف مختلفة الارتفاعات، وجميع الدرجات لها الارتفاع نفسه. إذا وضعنا الدرجات الأربع جميعها، يكون عرض قمة الدرج 10 ft، وعرض قاعدة الدرج 20 ft .



a) إذا استعملت الدرجتان السفليتان فقط، فكم يكون عرض قمة الدرج؟
15 ft

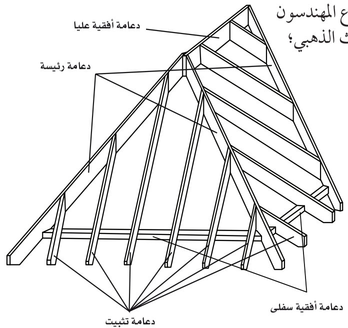
b) كم قدمًا يكون عرض قمّة الدرج، إذا استعملت الدرجات الثلاث السفلى فقط؟
12.5 ft

الاسم ________________ التاريخ ________

5-6 التدريبات الإثرائيّة

الأشكال الهندسية في أعمال الإنشاءات:

تُستعمل الأشكال الهندسية في الأعمال الإنشائية بصورةٍ مطّردةٍ، وقد برع المهندسون (منذ القدم) في توظيف علاقات التوازن والنظريات الهندسية مثل المثلث الذهبي؛ لتحقيق التناغم والإبداع المعماري، وهو ما يعرف بهندسة الطبيعة.

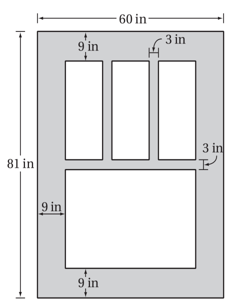


1) يمثّل الشكل المجاور هيكل سقف تظهر فيه أشكال هندسيةٌ عدّةٌ، حدد الأشكال الآتيةَ في الشكل وظلّل حوافّها.

انظر إجابات الطلاب

a) مثلث متطابق الضلعين.
b) مثلث مختلف الأضلاع.
c) متوازي أضلاع.
d) مستطيل.
e) معيّن.
f) شبه منحرف .

2) يمثّل الشكل المجاور نافذةً، عرض الأجزاء الخشبيّة بين الألواح الزجاجيّة فيها 3 in، وعرض الإطار الخارجيّ 9 in، وبُعدا النافذة من الخارج 60 in في 81 in، إذا علمت أن لجميع الألواح الزجاجيّة العليا واللوح الزجاجي السفلي الطول نفسه، والألواح الزجاجيّة الثلاث العُليا متطابقة، فأوجد كلًّا ممّا يأتي:



a) طول اللوح الزجاجيّ السفليّ. **42 in**
b) طول كلّ لوحٍ زجاجيٍّ. **30 in**
c) عرض كلٍّ من الألواح الزجاجيّة العُليا. **12 in**

3) دُعِّمت أحرف الصندوق المجاور بقطع من الألومنيوم لدعمه وتقويته، إذا كان طول الصندوق 20 in، وعرضهُ 12 in، وارتفاعه 10 in، فما طول قطع الألومنيوم التي استُعملت لدعم الصندوق؟
168 in