



وزارة التربية والتعليم
Ministry of Education
المملكة العربية السعودية

الرياضيات

لصف الثالث الثانوي

مصادر المعلم للأنشطة الصفية

الفصل الثامن: النهايات والاشتقاق

العبيكان
Obekon

Mc
Graw
Hill Education

يوزع مجاناً ولا يباع

١٤٣٥ هـ - ٢٠١٤ م

Glencoe Mathematics © 2010

CHAPTER RESOURCE MASTERS

Precalculus

الرياضيات - الصف الثالث الثانوي مصادر المعلم للأنشطة الصفية

أعدت النسخة العربية: شركة العبيكان للتعليم

www.obeikaneducation.com



English Edition Copyright © the McGraw-Hill Companies, Inc.
All rights reserved.

Arabic Edition is published by Obeikan under agreement with
The McGraw-Hill Companies, Inc. © 2008.



حقوق الطبع الإنجليزية محفوظة لشركة ماجروهل ©.

الطبعة العربية: مجموعة العبيكان للاستثمار
وفقاً لاتفاقيتها مع شركة ماجروهل © ٢٠٠٨ م / ١٤٢٩ هـ.

لا يسمح بإعادة إصدار هذا الكتاب أو نقله في أي شكل أو واسطة، سواء أكانت إلكترونية أو ميكانيكية، بما في ذلك التصوير بالنسخ «فوتوكوبي»، أو التسجيل، أو التخزين والاسترجاع، دون إذن خطي من الناشر.

بِسْمِ اللَّهِ الرَّحْمَنِ الرَّحِيمِ

المقدمة

الحمد لله، والصلاة والسلام على نبينا محمد، وعلى آله وصحبه أجمعين، وبعد:

عزيزي المعلم / عزيزتي المعلمة

يسرنا أن نقدّم هذه المجموعة من التدريبات المساندة، التي تراعي الفروق الفردية بين الطلاب. حيث نطمح أن يساعدك التنوع في هذه التدريبات على الوصول إلى جميع الطلاب في الصف، مهما تباينت مستوياتهم. وقد تم تخصيص صفحة أو أكثر لكل نوع من هذه التدريبات؛ لتغطي درسًا من دروس كتاب الطالب. حيث يمكنك أن تكلف الطلاب حل صفحة التدريبات المقابلة لكل درس بحسب مستوى كل منهم؛ سواء في داخل الصف أم في المنزل. وليست هذه التدريبات بديلاً عن كتاب التمارين، ولكنها مساندة ومكملة له.

وتشمل هذه التدريبات الأنواع التالية:

تدريبات إعادة التعليم

تركّز هذه التدريبات على محتوى الدروس في كتاب الطالب، وتقدّمه بأسلوب تدريسي ومعالجة يختلفان عن كتابي الطالب والتمارين. وهي موجّهة إلى الطلاب ذوي المستوى دون المتوسط.

تدريبات حل المسألة

تأتي هذه التدريبات انطلاقاً من اهتمام هذه المناهج بحلّ المسألة، حيث تم تخصيصها لتقديم تدريبات إضافية على حل المسألة ترتبط بكل درس من دروس كتاب الطالب. وهي موجّهة إلى جميع الطلاب على اختلاف مستوياتهم التحصيلية.

التدريبات الإثرائية

تساعد هذه التدريبات على التوسّع في مفاهيم الدرس، كما تؤدي إلى توسيع مدارك الطلاب حول تعلم الرياضيات بشكل عام. وهذه التدريبات موجّهة إلى الطلاب ذوي المستوى فوق المتوسط.

ملحق الإجابات:

يتضمن هذا المصدر في آخره ملحقاً بالإجابات، حيث تظهر باللون الأسود الغامق على صفحات مصغّرة.

المقدمة 4

الدرس 8-1 تقدير النهايات بيانياً

تدريبات إعادة التعليم 6
تدريبات حل المسألة 8
التدريبات الإثرائية 9

الدرس 8-4 المشتقة

تدريبات إعادة التعليم 18
تدريبات حل المسألة 20
التدريبات الإثرائية 21

الدرس 8-2 حساب النهايات جبرياً

تدريبات إعادة التعليم 10
تدريبات حل المسألة 12
التدريبات الإثرائية 13

الدرس 8-5 المساحة تحت المنحنى والتكامل

تدريبات إعادة التعليم 22
تدريبات حل المسألة 24
التدريبات الإثرائية 25

الدرس 8-3 المماس والسرعة المتجهة

تدريبات إعادة التعليم 14
تدريبات حل المسألة 16
التدريبات الإثرائية 17

الدرس 8-6 النظرية الأساسية في التفاضل والتكامل

تدريبات إعادة التعليم 26
تدريبات حل المسألة 28
التدريبات الإثرائية 29
ملحق الإجابات 30

تدريبات إعادة التعليم

8-1

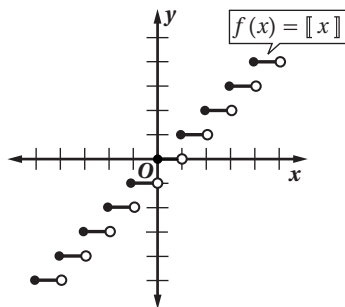
تقدير النهايات بيانياً

تقدير النهاية عند قيمة ثابتة.

النهاية من اليمين	النهاية من اليسار
إذا اقتربت قيم الدالة $f(x)$ من قيمة وحيدة L_2 ، عندما تقترب قيم x من c من اليمين، فإن: $\lim_{x \rightarrow c^+} f(x) = L_2$	إذا اقتربت قيم الدالة $f(x)$ من قيمة وحيدة L_1 ، عندما تقترب قيم x من c من اليسار، فإن: $\lim_{x \rightarrow c^-} f(x) = L_1$
<p>وجود النهاية عند نقطة</p> <p>تكون نهاية الدالة $f(x)$ موجودة عندما تقترب x من c، إذا وفقط إذا وجدت النهايتان من اليسار ومن اليمين وكانتا متساويتين. بمعنى أنه: $\lim_{x \rightarrow c^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow c^+} f(x) = L$ إذا وفقط إذا $\lim_{x \rightarrow c} f(x) = L$</p>	

مثال

قدّر كلاً من النهايات الآتية إذا كانت موجودة.



$$\lim_{x \rightarrow 2^-} \llbracket x \rrbracket, \lim_{x \rightarrow 2^+} \llbracket x \rrbracket, \lim_{x \rightarrow 2} \llbracket x \rrbracket$$

يظهر من منحنى الدالة $f(x) = \llbracket x \rrbracket$ ، أن $\lim_{x \rightarrow 2^-} \llbracket x \rrbracket = 1$

و $\lim_{x \rightarrow 2^+} \llbracket x \rrbracket = 2$ ولما كانت النهايتان من اليسار واليمين مختلفتين

عندما تقترب x من 2، فإن $\lim_{x \rightarrow 2} \llbracket x \rrbracket$ غير موجودة.

تمارين

قدّر كلاً من النهايات الآتية إذا كانت موجودة:

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 + 3x - 10}{x - 2} \quad (3)$$

$$\lim_{x \rightarrow -2^-} \frac{|x - 2|}{x^2 - 4} \quad (2)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{|3x|}{x} \quad (1)$$

$$\lim_{x \rightarrow -2} \frac{1}{(x + 2)^2} \quad (6)$$

$$\lim_{x \rightarrow 3^-} \frac{x^3 + 27}{x^2 - 9} \quad (5)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} (1 - \cos^2 x) \quad (4)$$

8-1

تدريبات إعادة التعليم

تقدير النهايات بيانياً

(تتمة)

تقدير النهايات عند المالا نهاية :

- إذا اقتربت قيم $f(x)$ من عدد وحيد L_1 عندما تزداد قيم x دون حدود، فإن $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = L_1$
- إذا اقتربت قيم $f(x)$ من عدد وحيد L_2 عندما تنقص قيم x دون حدود، فإن $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = L_2$

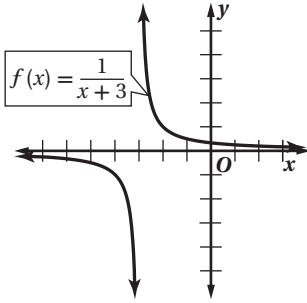
مثال

$$\text{قدّر قيمة: } \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x+3}$$

التحليل بيانياً: التمثيل البياني للدالة $f(x) = \frac{1}{x+3}$ يبيّن أن $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x+3} = 0$ ؛ إذ يقترب منحنى الدالة من

المحور x كلما ازدادت قيم x ، وهذا يعني وجود خط تقارب أفقي هو $y=0$

التعزيز عددياً: كوّن جدولاً يظهر قيماً كبيرة لـ x .



x	10	100	1000	10000	100000
$f(x)$	0.08	0.01	0.001	0.0001	0.00001

يظهر الجدول أن قيم $f(x)$ تقترب من الصفر كلما ازدادت قيم x .

تمارين

قدّر كل من نهاية مما يأتي إذا كانت موجودة:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-3x+1}{x-2} \quad (3)$$

(2)

(1)

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} (2^x + x) \quad (6)$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^2 - 5}{3x^3 + 2x} \quad (5)$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x^2} \quad (4)$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \cos 2x\pi \quad (9)$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} (2.7)^{2x} \quad (8)$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} (x \sin x) \quad (7)$$

8-1

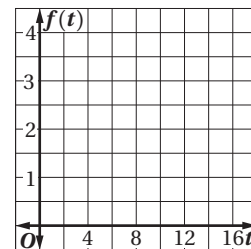
تدريبات حل المسألة

تقدير النهايات بيانياً

(1) نمو البكتيريا: يعطى وزن مجتمع بكتيري بالعلاقة:

$$f(t) = \frac{4}{1 + 0.35e^{-0.2t}}$$

(a) مثل بيانياً منحنى الدالة $f(t)$ في الفترة $0 \leq t \leq 18$



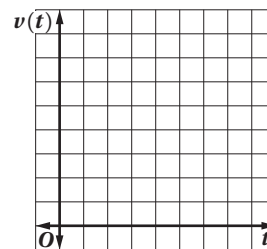
(b) استعمل المنحنى لتقدير وزن البكتيريا بعد 8 ساعات. مقرباً إجابتك إلى أقرب جزء من عشرة.

(c) قدّر $\lim_{t \rightarrow \infty} f(t)$ ، إذا كانت موجودة، وفسّر معناها.

(2) سيارات: يبلغ ثمن سيارة 30000 ريال، وبعد t سنة من

$$v(t) = 30000 (0.85)^t$$

(a) مثل الدالة $v(t)$ بيانياً على الفترة $0 \leq t \leq 8$.



(b) قدّر قيمة السيارة بعد 10 سنوات من شرائها.

(c) قدّر قيمة $\lim_{t \rightarrow \infty} v(t)$ ، إذا كانت موجودة، وفسّر معناها.

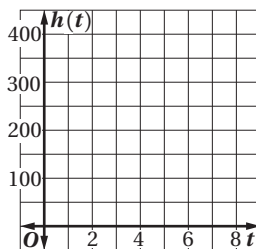
(3) ارتفاع المقذوفات: افترض أن جسماً قذف إلى أعلى،

والدالة $h(t)$ تمثل ارتفاعه بالأقدام بعد t ثانية، ويبين

الجدول الآتي ارتفاع القذيفة $h(t)$ بالأقدام بعد t ثانية من قذفها.

t	$h(t)$	t	$h(t)$
0	256	4	384
1	336	5	336
2	384	6	256
3	400	7	144

(a) مثل البيانات، وارسم منحنى يمر بنقاط البيانات التي مثلتها للحصول على الدالة $h(t)$.



(b) استعمل التمثيل البياني لتقدير قيمة $\lim_{t \rightarrow 8^-} h(t)$

(4) النظرية النسبية: يُعبّر عن كتلة جسم متحرك بسرعة

$$v \text{ نظرياً بالمعادلة: } m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{s^2}}}$$

الجسم عند السكون، و s سرعة الضوء و v سرعة

الجسم، فما قيمة $\lim_{v \rightarrow s^-} m$ ؟

(5) كهرباء: وجد أحمد أن معادلة فرق جهد دائرة كهربائية

$$V(t) = 140 \sin 120 \pi t$$

هي: $V(t)$ ، وضح سبب كون $\lim_{t \rightarrow \infty} V(t)$ غير موجودة.

التدريبات الإثرائية

8-1

النهايات

هناك العديد من أمثلة النهايات في الحياة العملية؛ بعضها مطلقة لا يمكن تجاوزه، وبعضها الآخر يمثل إرشادات، يدفع من يتجاوزها غرامة.

املاً الجدول

النهاية	كيف تضبط النهاية؟	هل النهاية مطلقة؟	الغرامة في حال تجاوز النهاية
(1) السرعة القصوى في شارع سريع			
(2) ارتفاع نفق			
(3) وزن الحقيرة في رحلة جوية			
(4) درجة حرارة جسم دافئ موضوع في غرفة باردة			
(5) سرعة مركبة فضائية متسارعة			

رياضياً، قد تكون النهاية موجودة ومنتهية، أو غير منتهية، أو غير موجودة، صنف كل نهاية من حيث كونها موجودة ومنتهية، أو غير منتهية، أو غير موجودة، وإذا كانت النهاية موجودة ومنتهية، فأوجد قيمتها:

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 4}{x^2 - x - 2} \quad (3)$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x + 1}{x^2 - 1} \quad (2)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^2 + 1} \quad (1)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{-1}{x^4} \quad (5)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin |x|}{x} \quad (4)$$

8-2

تدريبات إعادة التعليم
حساب النهايات جبرياً

حساب النهاية عند نقطة

مثال 1

أوجد: $\lim_{x \rightarrow -2} (-2x^4 + 3x^3 - 5x + 3)$ باستعمال التعويض المباشر إذا كان ممكناً.

لما كانت النهاية المطلوبة لكثيرة حدود، فإنه يمكنك إيجاد النهاية بالتعويض المباشر.

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow -2} (-2x^4 + 3x^3 - 5x + 3) &= -2(-2)^4 + 3(-2)^3 - 5(-2) + 3 \\ &= -32 - 24 + 10 + 3 = -43\end{aligned}$$

مثال 2

احسب: $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{x^2 - 9x + 20}{x - 4}$

حلّ

$$\lim_{x \rightarrow 4} \frac{x^2 - 9x + 20}{x - 4} = \lim_{x \rightarrow 4} \frac{(x - 5)(x - 4)}{(x - 4)}$$

اختصر العامل المشترك

$$= \lim_{x \rightarrow 4} (x - 5)$$

عوّض وبسّط

$$= 4 - 5 = -1$$

مثال 3

احسب: $\lim_{x \rightarrow 16} \frac{\sqrt{x} - 4}{x - 16}$ ينتج عن التعويض المباشر: $\frac{\sqrt{16}-4}{16-16} = \frac{0}{0}$ ؛ لذا اضرب في مرافق البسط قبل التحليل، واختصر العوامل المشتركة.

اضرب في المرافق

$$\lim_{x \rightarrow 16} \frac{\sqrt{x} - 4}{x - 16} = \lim_{x \rightarrow 16} \frac{\sqrt{x} - 4}{x - 16} \cdot \frac{\sqrt{x} + 4}{\sqrt{x} + 4}$$

بسّط

$$= \lim_{x \rightarrow 16} \frac{x - 16}{(x - 16)(\sqrt{x} + 4)}$$

اختصر العامل المشترك

$$= \lim_{x \rightarrow 16} \frac{\cancel{x - 16}}{(\cancel{x - 16})(\sqrt{x} + 4)}$$

بسّط

$$= \lim_{x \rightarrow 16} \frac{1}{(\sqrt{x} + 4)}$$

عوّض وبسّط

$$= \frac{1}{\sqrt{16} + 4} = \frac{1}{8}$$

تمارين

احسب كل نهاية مما يأتي:

$$\lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^2 + 9x + 14}{x + 2} \quad (3)$$

$$\lim_{x \rightarrow 5} \sqrt{x^3 - 4} \quad (2)$$

$$\lim_{x \rightarrow 3} (2x^2 - 5x) \quad (1)$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} (-x^2 + 5x - 1) \quad (6)$$

$$\lim_{x \rightarrow -4} \left(\frac{1}{x} + x \right) \quad (5)$$

$$\lim_{x \rightarrow 4} \frac{\sqrt{x} - 2}{x - 4} \quad (4)$$

8-2

تدريبات إعادة التعليم

حساب النهايات جبرياً

(تتمة)

حساب النهايات عند المالا نهائية

دوال القوى	دوال كثيرات الحدود	دوال المقلوب
<p>لأي عدد صحيح موجب n، تكون</p> <ul style="list-style-type: none"> $\lim_{x \rightarrow \infty} x^n = \infty$ $\lim_{x \rightarrow -\infty} x^n = \infty$ إذا كان n عدداً زوجياً. $\lim_{x \rightarrow -\infty} x^n = -\infty$ إذا كان n عدداً فردياً. 	<p>افترض أن p كثيرة حدود،</p> $p(x) = a_n x^n + \dots + a_1 x + a_0$ <p>فإن: $\lim_{x \rightarrow \infty} p(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} a_n x^n$</p> <p>و $\lim_{x \rightarrow -\infty} p(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} a_n x^n$</p>	<p>لأي عدد صحيح موجب n، تكون</p> $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{1}{x^n} = 0$

مثال

احسب كل نهاية مما يأتي.

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} (x^5 - 6x + 1) \quad (a)$$

نهاية دالة كثيرة حدود عند المالا نهائية

نهاية دالة قوة عند المالا نهائية

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} (x^5 - 6x + 1) = \lim_{x \rightarrow -\infty} x^5$$

$$= -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} (2x^4 + 5x^2) \quad (b)$$

نهاية دالة كثيرة حدود عند المالا نهائية

خاصية الضرب في ثابت

نهاية دالة القوة عند المالا نهائية

$$\lim_{x \rightarrow \infty} (2x^4 + 5x^2) = \lim_{x \rightarrow \infty} 2x^4$$

$$= 2 \lim_{x \rightarrow \infty} x^4$$

$$= 2 \cdot \infty = \infty$$

تمارين

احسب كل نهاية مما يأتي:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{6x - 1}{10x + 7} \quad (3)$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{5}{x^2} \quad (2)$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} (-2x^3 + 5x) \quad (1)$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} (3x^3 + 5x - 1) \quad (6)$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{5x^4 + 2x^3 - 1}{2x^3 + x^2 - 1} \quad (5)$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{6x^2 - 2x}{x^3 + 1} \quad (4)$$

8-2

تدريبات حل المسألة

حساب النهايات جبرياً

(4) القيادة الآمنة: في أثناء قيادة السيارة، لا بد من الحفاظ

على مسافة أمان بين سيارتك والسيارة التي تسير أمامك. افترض أن مسافة الأمان المقترحة بالiardة تتعين بالمعادلة $y(x) = 0.005x^2 + 0.3x + 3$ ،

حيث x السرعة بالأميال لكل ساعة، فأوجد $\lim_{x \rightarrow 70} y(x)$.

(5) تصنيع: تمثل المعادلة $c(p) = 3000 + 20P$ تكلفة إنتاج P قطعة منتج معين بالريالات.

(a) أوجد تكلفة إنتاج 100 قطعة.

(b) بلغت تكلفة الإنتاج 21000 ريال في أحد الأيام. فكم عدد القطع التي أنتجها المصنع في ذلك اليوم؟

(c) يمكن إيجاد متوسط تكلفة إنتاج القطعة بقسمة

$$\lim_{p \rightarrow 15000} \frac{c(p)}{p}$$

أوجد $c(p)$ على P ،

(6) أفران كهربائية: الدالة $f(x) = \frac{250x + 200000}{x}$

تمثل متوسط تكلفة الفرن الكهربائي عند إنتاج x فرنًا،

$$\lim_{x \rightarrow 2000} f(x)$$

أوجد

(1) بركة سباحة: ضُخَّ محلول يحتوي على 0.3 جرام من

الكلورين لكل لتر ماء في بركة سباحة، إذا أُعطي تركيز الكلورين في البركة بالجرامات لكل لتر ماء بعد t ثانية بالمعادلة:

$$C(t) = \frac{0.3t}{1000 + t}$$

أوجد $\lim_{t \rightarrow \infty} C(t)$.

(2) تلوث: المعادلة $C = \frac{60000P}{100-P}$ تمثل تكلفة إزالة $P\%$

من الملوثات التي يتسبب فيها أحد المصانع،

حيث $0 \leq p \leq 100$ ، أوجد $\lim_{p \rightarrow 100^-} C$.

(3) سيارات: اشترى علي سيارة بسعر 24000 ريال، إذا

كانت العلاقة $c(t) = 24(0.90)^t$. تعبر عن سعر

السيارة بالآلاف بعد t سنة.

(a) أكمل الجدول، مقرباً الإجابة إلى أقرب جزء من مئة.

السنة	1	3	5	6
القيمة				

(b) أوجد قيمة: $\lim_{t \rightarrow \infty} c(t)$

8-2

التدريبات الإثرائية

نظرية الشطيرة

في الدرس (1-8)، تعلمت أن $\lim_{x \rightarrow 0} \sin \frac{1}{x}$ غير موجودة، وذلك بسبب تذبذب الدالة بين 1 و -1 كلما اقتربت x من 0.

ولكن، ماذا عن $\lim_{x \rightarrow 0} x^2 \sin \frac{1}{x}$ ؟ هل هذه النهاية غير موجودة لأن $\lim_{x \rightarrow 0} \sin \frac{1}{x}$ غير موجودة؟ تساعد نظرية الشطيرة على الإجابة عن هذا السؤال.

نظرية الشطيرة

إذا كان: $h(x) \leq f(x) \leq g(x)$ لجميع قيم x في فترة مفتوحة تحوي c ، مع إمكانية استثناء c ، وكانت: $\lim_{x \rightarrow c} h(x) = L = \lim_{x \rightarrow c} g(x)$ ، فإن $\lim_{x \rightarrow c} f(x)$ موجودة وتساوي L .

لاحظ أن $-1 \leq \sin \frac{1}{x} \leq 1$ لجميع قيم x باستثناء $x = 0$ ، اضرب المتباينة في x^2 ؛ لتحصل على $-x^2 \leq x^2 \sin \frac{1}{x} \leq x^2$ ، ولتطبيق نظرية الشطيرة، افترض أن: $h(x) = -x^2$ ، $f(x) = x^2 \sin \frac{1}{x}$ ، $g(x) = x^2$. تعلمت في الدرس (2-8) أن كلاً من $\lim_{x \rightarrow 0} g(x)$ و $\lim_{x \rightarrow 0} h(x)$ تساوي 0؛ لذا فإن $\lim_{x \rightarrow 0} x^2 \sin \frac{1}{x} = 0$ حسب نظرية الشطيرة.

تمارين

(1) إذا كانت: $2\sqrt{x-1} - 1 \leq g(x) \leq (2.7)^{x-2}$ ، فاستعمل نظرية الشطيرة لإيجاد $\lim_{x \rightarrow 2} g(x)$

استعمل نظرية الشطيرة لإيجاد النهاية في كلٍّ مما يأتي:

$$\lim_{x \rightarrow 0} x^4 \sin \frac{1}{x} \quad (2)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} x^2 \cos \frac{1}{\sqrt[3]{x}} \quad (3)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} |x| \sin \frac{\pi}{x} \quad (4)$$

8-3

تدريبات إعادة التعليم

المماس والسرعة المتجهة

المماسات

معدل التغير اللحظي

يُعرَّف معدل التغير اللحظي لمنحنى $f(x)$ عند النقطة $(x, f(x))$ على أنه ميل المماس لمنحنى الدالة عند النقطة $(x, f(x))$ ، ويُعطى بالصيغة: $m = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$ ، بشرط أن تكون النهاية موجودة.

مثال

أوجد معادلة ميل منحنى الدالة $y = 3x^2 + 1$ عند أي نقطة عليه.

$$\text{صيغة معدل التغير اللحظي} \quad m = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

$$f(x+h) = 3(x+h)^2 + 1, f(x) = 3x^2 + 1 \quad m = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{[3(x+h)^2 + 1] - [3x^2 + 1]}{h}$$

$$\text{فك الأقواس} \quad m = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{[3x^2 + 6hx + 3h^2 + 1] - [3x^2 + 1]}{h}$$

$$\text{بسّط وحلّل} \quad m = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{3h(2x + h)}{h}$$

$$\text{اختصر } h \quad m = \lim_{h \rightarrow 0} 3(2x + h)$$

$$\text{خواص النهايات} \quad m = 6x$$

أي أن معادلة ميل المنحنى عند أي نقطة عليه هي $m = 6x$.

تمارين

أوجد معادلة ميل منحنى كل دالة مما يأتي عند أي نقطة عليه:

$$y = 4 - 7x \quad (2)$$

$$y = x^3 + 1 \quad (1)$$

$$y = \frac{4}{\sqrt{x}} \quad (4)$$

$$y = \frac{3}{x^2} \quad (3)$$

$$m = \frac{-2}{x\sqrt{x}}$$

8-3

تدريبات إعادة التعليم

المماس والسرعة المتجهة

(تتمة)

السرعة المتجهة اللحظية:

السرعة المتجهة اللحظية:

إذا أُعطي موقع جسم متحرك $f(t)$ بوصفه دالة في الزمن، فإن سرعة الجسم المتجهة اللحظية $v(t)$ عند الزمن t تُعطى بالصيغة: $v(t) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(t+h) - f(t)}{h}$ ، بشرط أن تكون هذه النهاية موجودة.

مثال 1

أُسقط حجر من ارتفاع 1500 قدم، ويُعبّر عن ارتفاعه بعد t ثانية من إسقاطه بالصيغة:

$f(t) = 1500 - 16t^2$ قدمًا، أوجد السرعة المتجهة اللحظية للحجر بعد 4 ثوانٍ.

$$v(t) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(t+h) - f(t)}{h} \quad \text{صيغة السرعة المتجهة اللحظية}$$

$$f(4+h) = 1500 - 16(4+h)^2, f(4) = 1500 - 16(4)^2 \quad = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{[1500 - 16(4+h)^2] - [1500 - 16(4)^2]}{h}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{-128h - 16h^2}{h} \quad \text{اضرب وبسط}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h(-128 - 16h)}{h} \quad \text{حلّل}$$

$$= -128 - 16(0) \quad \text{اختصر وعوّض.}$$

$$= -128 \quad \text{بسط}$$

أي أن السرعة اللحظية بعد 4 ثوانٍ هي -128 قدمًا في الثانية.

تمارين

تمثل $s(t)$ بُعد جسيم متحرك عن نقطة ثابتة بالأقدام بعد t ثانية، أوجد السرعة المتجهة اللحظية للجسيم عند الزمن المعطى في كلٍّ مما يأتي:

$$s(t) = -16t^2 + 1700; t = 5 \quad (2)$$

$$s(t) = 800 - 16t^2; t = 3 \quad (1)$$

$$s(t) = -16t^2 + 90t + 10; t = 2 \quad (4)$$

$$s(t) = 70t - 16t^2; t = 1 \quad (3)$$

8-3

تدريبات حل المسألة

المماس والسرعة المتجهة

(4) **السقوط الحر:** المعادلة: $h(t) = 15000 - 16t^2$ تمثل ارتفاع مظليّ بالأقدام بعد t ثانية من قفزه من الطائرة.

(a) أوجد السرعة المتجهة اللحظية للمظلي عند أي لحظة؟

(b) ما ارتفاع المظلي بعد ثانيتين؟

(c) ما السرعة المتجهة اللحظية للمظلي بعد 4 ثوانٍ؟

(5) **كرة قدم:** يركل لاعب الكرة بسرعة ابتدائية قدرها 80 ft/s ، فتصل ارتفاعاً $s(t)$ يُعبر عنه بالمعادلة: $s(t) = -16t^2 + 80t + 6.5$ قدماً بعد t ثانية.

(a) أوجد السرعة المتجهة اللحظية للكرة $v(t)$.

(b) ما سرعة الكرة المتجهة بعد 0.5 ثانية؟

(c) متى تصل الكرة إلى أقصى ارتفاع؟

(d) ما أقصى ارتفاع تبلغه الكرة؟

(1) **جسم ساقط:** أسقطت منى كرةً من على سطح بناية ارتفاعها 800 ft . والدالة: $s(t) = -16t^2 + 800$. تمثل ارتفاع الكرة عن سطح الأرض بالأقدام بعد t ثانية من إسقاطها، أوجد السرعة المتجهة اللحظية لسقوط الكرة بعد ثانيتين؟

(2) **جسم ساقط:** أسقط تامر حجراً من ارتفاع 1200 ft . والدالة: $s(t) = -16t^2 + 1200$. تمثل ارتفاع الحجر عن سطح الأرض بالأقدام بعد t ثانية من إسقاطه. (a) ما السرعة المتجهة اللحظية للحجر بعد 4 ثوانٍ من إسقاطه؟

(b) متى يصل الحجر إلى سطح الأرض؟

(c) أوجد صيغة لـ سرعة الحجر اللحظية في أي لحظة.

(d) أوجد سرعة الحجر عندما يصل إلى سطح الأرض.

(3) **القفز البهلواني:** المعادلة: $h(t) = 900 - 16t^2$ تمثل ارتفاع بهلوان عن سطح الأرض بعد قفزه من ارتفاع 900 قدم، أوجد السرعة المتجهة اللحظية للبهلوان.

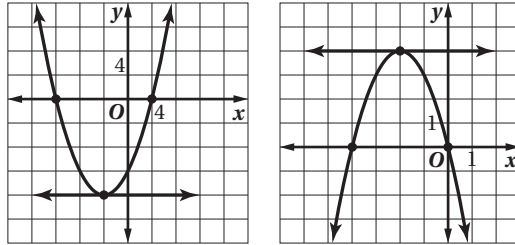
التدريبات الإثرائية

8-3

المماسات والرؤوس

هل يمكنك استعمال معادلة ميل القطع المكافئ الذي معادلته: $y = ax^2 + bx + c$ عند أي نقطة لإيجاد رأس القطع؟

خطوة 1: مثلّ قطعين مكافئين معادلتها $y = ax^2 + bx + c$ ، بحيث يكون $a > 0$ لأحدهما، و $a < 0$ للآخر، ثم ارسـم مماس القطع عند رأسه، واكتب معادلة كل قطع تحت تمثيله البياني.



خطوة 2: أوجد ميل مماس كل قطع عند رأسه.

خطوة 3: أوجد معادلة ميل مماس كل قطع عند أي نقطة عليه.

خطوة 4: ساوِ كل معادلة ميل بالصفر، وحلّها بالنسبة لـ x ، فيكون الحل هو الإحداثي x للرأس.

خطوة 5: عوّض الإحداثي x للرأس في معادلة القطع لإيجاد الإحداثي y للرأس.

خطوة 6: اكتب إحداثيّ رأس كل قطع.

تمارين

أوجد رأس القطع المكافئ في كلّ مما يأتي:

$$y = -x^2 - 6x - 9 \quad (2)$$

$$y = 2x^2 - 4x + 2 \quad (1)$$

$$y = \frac{1}{2}x^2 - 2x + 4 \quad (4)$$

$$y = 4x^2 - 25 \quad (3)$$

تدريبات إعادة التعليم

8-4

المشتقة

المشتقات والقواعد الأساسية : استعملت النهايات في الدرس (3-8)؛ لإيجاد ميل مماس منحنى الدالة عند أي نقطة عليه، وتسمى هذه النهاية مشتقة الدالة.

يُرمز إلى مشتقة الدالة $f(x)$ بالرمز $f'(x)$ ، ويعبر عنها بالنهاية: $f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$ ، بشرط وجود النهاية، وهناك العديد من قواعد الاشتقاق التي يمكن استعمالها لإيجاد مشتقة دالة تحتوي على أكثر من حد.

اسم القاعدة	القاعدة	مثال
مشتقة القوة	إذا كان $f(x) = x^n$ ، حيث n عدد حقيقي فإن $f'(x) = nx^{n-1}$.	إذا كان $f(x) = x^3$ فإن $f'(x) = 3x^2$.
مشتقة الثابت	مشتقة الدالة الثابتة تساوي صفراً. إذا كان $f(x) = c$ فإن $f'(x) = 0$.	إذا كان $f(x) = -2$ فإن $f'(x) = 0$.
مشتقة مضاعفات القوة	إذا كان $f(x) = cx^n$ ، حيث c ثابت و n عدد حقيقي، فإن $f'(x) = cnx^{n-1}$.	إذا كان $f(x) = 5x^3$ فإن $f'(x) = 15x^2$.
مشتقة المجموع والفرق	إذا كان $f(x) = g(x) \pm h(x)$ فإن $f'(x) = g'(x) \pm h'(x)$.	إذا كان $f(x) = 4x^2 + 3x$ فإن $f'(x) = 8x + 3$.

أوجد مشتقة كل دالة مما يأتي:

مثال

$$f(x) = 3x^2 - 2x + 4 \quad (a)$$

الدالة المعطاة
قواعد الاشتقاق
بسّط

$$\begin{aligned} f(x) &= 3x^2 - 2x + 4 \\ f'(x) &= 2 \cdot 3x^{2-1} - 2 \cdot 1x^{1-1} + 0 \\ &= 6x - 2 \end{aligned}$$

$$f(x) = x^4 (4x^3 - 5) \quad (b)$$

الدالة المعطاة
خاصية التوزيع
قواعد الاشتقاق
بسّط

$$\begin{aligned} f(x) &= x^4 (4x^3 - 5) \\ f(x) &= 4x^7 - 5x^4 \\ f'(x) &= 4 \cdot 7x^{7-1} - 5 \cdot 4x^{4-1} \\ &= 28x^6 - 20x^3 \end{aligned}$$

تمارين

أوجد مشتقة الدالة $f(x)$ ، في كل مما يأتي، ثم احسب قيمة المشتقة عند النقاط المعطاة:

$$f(x) = -x^3 + 5x^2; x = 1, -4 \quad (2)$$

$$f(x) = 4x^2 - 5; x = 3, -2 \quad (1)$$

$$f(x) = 3x^4 + x^5 - 2; x = -1, 2 \quad (4)$$

$$f(x) = -8 + 3x - x^2; x = 0, -3 \quad (3)$$

أوجد مشتقة كل دالة مما يأتي:

$$f(x) = -x^{3.4} + 3x^{0.2} \quad (6)$$

$$f(x) = 6x^2 - 3x + 4 \quad (5)$$

$$f(x) = -4x^2 + 3x^3 - 14 \quad (8)$$

$$f(x) = 4x^{\frac{1}{2}} - 3x^{\frac{3}{2}} \quad (7)$$

8-4

تدريبات إعادة التعليم

(تتمة)

المشتقة

قاعدتا الضرب والقسمة استعمال القاعدتين الآتيتين؛ لإيجاد مشتقة حاصل الضرب أو القسمة.

قاعدة مشتقة الضرب	إذا كانت كلٌّ من الدالتين f, g قابلة للاشتقاق عند x ، فإن
	$\frac{d}{dx}[f(x)g(x)] = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$
قاعدة مشتقة القسمة	إذا كانت كلٌّ من الدالتين f, g قابلة للاشتقاق عند x ، وكان $g(x) \neq 0$ ، فإن:
	$\frac{d}{dx} \left[\frac{f(x)}{g(x)} \right] = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{[g(x)]^2}$

مثال 1

أوجد مشتقة الدالة: $h(x) = (x^2 - 2)(2x^3 + 5x)$

افترض أن $f(x) = x^2 - 2$ و $g(x) = 2x^3 + 5x$

$f'(x) = 2x$ قواعد الاشتقاق $g'(x) = 6x^2 + 5$

قاعدة مشتقة الضرب $h'(x) = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$

عوض $= (2x)(2x^3 + 5x) + (x^2 - 2)(6x^2 + 5)$

خاصية التوزيع $= 4x^4 + 10x^2 + 6x^4 + 5x^2 - 12x^2 - 10$

بسط $= 10x^4 + 3x^2 - 10$

مثال 2

أوجد مشتقة: $h(x) = \frac{(2x^2 + 4)}{(x^2 - 1)}$

افترض أن $f(x) = 2x^2 + 4$ و $g(x) = x^2 - 1$

$f'(x) = 4x$ قواعد الاشتقاق $g'(x) = 2x$

قاعدة مشتقة القسمة $h'(x) = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{[g(x)]^2}$

عوض $= \frac{4x(x^2 - 1) - (2x^2 + 4)2x}{(x^2 - 1)^2}$

خاصية التوزيع $= \frac{4x^3 - 4x - 4x^3 - 8x}{(x^2 - 1)^2}$

بسط $= \frac{-12x}{(x^2 - 1)^2}$

تمارين

أوجد مشتقة كل دالة مما يأتي:

(2) $m(x) = (3x - 1)(x^2 + 5x)$

(1) $h(x) = (-4 + 2x^2)(2x + 3)$

(4) $k(x) = \frac{3x^3 + 4}{2x^2 - 1}$

(3) $d(x) = \frac{x^2 + 3}{x - 1}$

تدريبات حل المسألة

8-4

المشتقة

(1) طيور: يمكن تمثيل ارتفاع طائر بالأقدام بعد t ثانية من طيرانه بالمعادلة: $s(t) = \frac{-t^3}{3} + \frac{7}{2}t^2 + 18$ على الفترة $[1, 10]$ ، أوجد أقصى وأدنى ارتفاع للطائر.

(2) غطس: قفز غطّاس من قمة منحدر ارتفاعه 192 قدمًا عن سطح الماء، ويعبر عن ارتفاع الغطاس بعد t ثانية بالمعادلة: $h(t) = -16t^2 + 16t + 192$ قدمًا.
(a) أوجد سرعة الغطاس عند أي لحظة t .

(b) أوجد سرعة الغطاس بعد ثانية واحدة من قفزه.

(c) أوجد الزمن الذي يستغرقه الغطاس للوصول إلى سطح الماء.

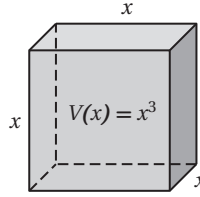
(d) ما سرعة الغطاس عند وصوله سطح الماء؟

(3) هندسة: الصيغة $V = \pi r^2 h$ تمثل حجم الأسطوانة التي طول نصف قطرها r وارتفاعها h ، افترض أن أسطوانة ارتفاعها 10 in، وطول نصف قطرها متغير.
(a) اكتب صيغة تمثل حجم الأسطوانة بدلالة طول نصف قطرها.

(b) أوجد صيغة تمثل معدل تغير حجم الأسطوانة بالنسبة إلى طول نصف قطرها.

(c) أوجد $V'(r)$ عندما $r = 3$ in.

(4) حجم: الصيغة $V = x^3$ تمثل حجم مكعب طول ضلعه x ، افترض أن x تتغير.



(a) أوجد معدل تغير الحجم $V(x)$ عندما تتغير x من 3.2 in إلى 3.4 in

(b) أوجد معدل تغير الحجم $V(x)$ اللحظي عندما $x = 4$ in.

(c) وضح العلاقة بين صيغة حجم المكعب ومشتقتها.

(5) حركة الكرة: أطلقت كرة إلى أعلى من نقطة ترتفع 6 ft عن سطح الأرض، بسرعة ابتدائية قدرها 80 ft/s، إذا كان ارتفاعها $h(t) = -16t^2 + 80t + 6$ قدمًا بعد t ثانية.

(a) أوجد سرعة الكرة عند أي لحظة t .

(b) أوجد السرعة اللحظية للكرة عندما $t = 2$ ثانية.

8-4

التدريبات الإثرائية

اشتقاق متسلسلات القوى

يمكن كتابة بعض الدوال المثلثية والأسية في صورة متسلسلة قوى، فمثلاً متسلسلة قوى الدالة الزوجية $y = \cos x$ تحتوي على القوى الزوجية لـ x .

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \frac{x^8}{8!} - \dots$$

وأن متسلسلة قوى الدالة الفردية $y = \sin x$ تحتوي على القوى الفردية لـ x :

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \frac{x^9}{9!} - \dots$$

يمكن اشتقاق متسلسلات القوى هذه.

(1) أوجد $(\sin x)'$ ، وذلك باشتقاق حدود متسلسلة قوى $\sin x$ حدًا حدًا، ثم بسّط النتيجة.

(b) ما الدالة التي تمثلها المتسلسلة اللانهائية الجديدة؟

(c) أي أن: $(\sin x)' = \underline{\hspace{2cm}}$

(2) ماذا تتوقع أن تكون مشتقة الدالة $\cos x$ ؟

(b) أوجد $(\cos x)'$ مستعملًا متسلسلة قوى $\cos x$

(c) أي أن: $(\cos x)' = \underline{\hspace{2cm}}$

(3) إذا كانت متسلسلة قوى الدالة $f(x)$ هي $f(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \dots$ ، فأوجد $f'(x)$.

(b) ما العلاقة بين $f(x)$ ، $f'(x)$ ؟

(c) إذا عبرنا عن الدالة $f(x)$ بالشكل e^x ، فأوجد $f'(x)$.

استعمل النتائج التي حصلت عليها في المسائل 3-1؛ لإيجاد مشتقة كل دالة فيما يأتي:

$$f(x) = xe^x \quad (4) \quad f(x) = \sin x + \cos x \quad (5) \quad f(x) = (\cos x)^2 \quad (6)$$

تدريبات إعادة التعليم

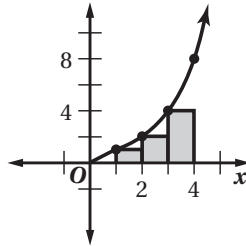
المساحة تحت المنحنى والتكامل

المساحة تحت منحنى: يمكنك استعمال مساحات مستطيلات لتقريب المساحة المحصورة بين منحنى دالة $f(x)$ ومحور x على الفترة $[a, b]$ ، الواقعة في مجال $f(x)$.

مثال

قرب مساحة المنطقة المحصورة بين منحنى $f(x) = \frac{1}{2}x^2$ والمحور x في الفترة $[0, 4]$ ، باستعمال مستطيلات عرض كل واحد منها وحدة واحدة، استعمل الأطراف اليمنى ثم اليسرى لقاعدات المستطيلات لتحديد ارتفاعها ثم احسب الوسط للتقريبين.

عند استعمال الأطراف اليمنى لقاعدات المستطيلات تنتج أربعة مستطيلات عرض كل منها وحدة واحدة. (الشكل A)، وعند استعمال الأطراف اليسرى للمستطيلات، تنتج أربعة مستطيلات عرض كل منها وحدة واحدة. (الشكل B).



الشكل B

المساحة باستعمال الأطراف اليسرى

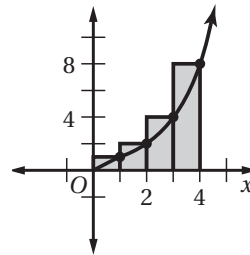
$$R_1 = 1 \cdot f(0) = 0$$

$$R_2 = 1 \cdot f(1) = 0.5$$

$$R_3 = 1 \cdot f(2) = 2$$

$$R_4 = 1 \cdot f(3) = 4.5$$

المساحة الكلية = 7 وحدة مربعة



الشكل A

المساحة باستعمال الأطراف اليمنى

$$R_1 = 1 \cdot f(1) = 0.5$$

$$R_2 = 1 \cdot f(2) = 2$$

$$R_3 = 1 \cdot f(3) = 4.5$$

$$R_4 = 1 \cdot f(4) = 8$$

المساحة الكلية = 15 وحدة مربعة

أي أن المساحة باستعمال الأطراف اليمنى أو اليسرى هي 15 أو 7 وحدة مربعة على الترتيب. وهذا يعطي تقديراً أعلى وآخر أدنى للمساحة؛ $7 < \text{المساحة} < 15$. وبأخذ متوسط التقريبين، فإن 11 يُعدُّ تقريباً أفضل للمساحة.

تمارين

1 قرب مساحة المنطقة المحصورة بين منحنى $f(x) = 3x^2 + 1$ والمحور x في الفترة $[0, 4]$ ، باستعمال مستطيلات عرض كل واحد منها وحدة واحدة. استعمل الأطراف اليمنى ثم اليسرى لقاعدات المستطيلات لتحديد ارتفاعها ثم احسب الوسط للتقريبين.

2 قرب مساحة المنطقة المحصورة بين منحنى $f(x) = -x^2 + 5x + 6$ والمحور x في الفترة $[1, 5]$ ، باستعمال مستطيلات عرض كل واحد منها وحدة واحدة. استعمل الأطراف اليمنى ثم اليسرى لقاعدات المستطيلات لتحديد ارتفاعها ثم احسب الوسط للتقريبين.

8-5

تدريبات إعادة التعليم

(تتمة)

المساحة تحت المنحنى والتكامل

التكامل

مساحة المنطقة المحصورة بين منحنى الدالة $f(x)$ والمحور x في الفترة $[a, b]$ هي:	التكامل المحدد
$\int_a^b f(x) dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n f(x_i) \Delta x$ $\Delta x = \frac{b-a}{n}, x_i = a + i \Delta x$	

مثال

استعمل النهايات لإيجاد مساحة المنطقة المحصورة بين منحنى $y = 4x^2$ والمحور x في الفترة $[0, 5]$

$$\int_0^5 4x^2 dx$$

ابدأ بإيجاد $\Delta x, x_i$ صيغة Δx

$$\Delta x = \frac{b-a}{n}$$

$$b = 5, a = 0$$

$$= \frac{5-0}{n}$$

صيغة x_i

$$x_i = a + i \Delta x$$

$$a = 0, \Delta x = \frac{5}{n}$$

$$= 0 + i \frac{5}{n} = \frac{5i}{n}$$

احسب التكامل المحدد الذي يعطي المساحة المطلوبة.

تعريف التكامل المحدد $f(x_i) = 4x_i^2$

$$\int_0^5 4x^2 dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n f(x_i) \Delta x = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n 4x_i^2 \Delta x$$

$$x_i = \frac{5i}{n}, \Delta x = \frac{5}{n}, \text{ خصائص المجموع}$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n 4 \left(\frac{5i}{n} \right)^2 \frac{5}{n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{20}{n} \left(\frac{25}{n^2} \sum_{i=1}^n i^2 \right)$$

$$\sum_{i=1}^n i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{20}{n} \left(\frac{25}{n^2} \cdot \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \right)$$

بسّط وأوجد المفكوك، ثم اقسم على n^2

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{500}{6} \left(\frac{2n^2 + 3n + 1}{n^2} \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{500}{6} \left(2 + \frac{3}{n} + \frac{1}{n^2} \right)$$

خصائص النهايات

$$= \left(\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{500}{6} \right) \left[\lim_{n \rightarrow \infty} 2 + \left(\lim_{n \rightarrow \infty} 3 \right) \left(\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \right) + \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^2} \right]$$

$$\text{بسّط} = \frac{500}{6} [2 + 3(0) + 0] \approx 166.67$$

تمارين

استعمل النهايات لإيجاد المساحة المحصورة بين منحنى $f(x)$ والمحور x والمعطاة بالتكامل المحدد في كل مما يأتي:

$$\int_2^4 (x^2 + 3) dx \quad (2)$$

$$\int_1^3 4x^3 dx \quad (4)$$

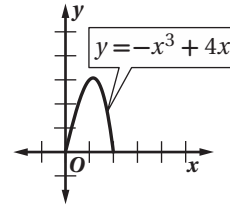
$$\int_0^2 x^3 dx \quad (1)$$

$$\int_4^6 (1+x) dx \quad (3)$$

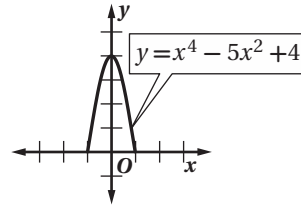
تدريبات حل المسألة

المساحة تحت المنحنى والتكامل

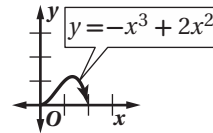
(1) مدخل: مدخل باب لعبة له الشكل الظاهر أدناه، فما مساحة المدخل إذا كانت x بالأقدام؟



(2) مناجم: يتخذ مدخل منجم للفحم الشكل الظاهر أدناه، فما مساحة المدخل إذا كانت x بالأمتار؟

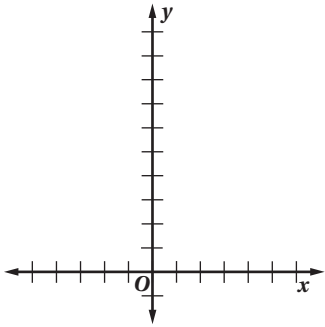


(3) سدود: يتخذ سطح سد للماء الشكل الظاهر أدناه، فما مساحة سطح السد إذا كانت x بالكيلو متر؟



(4) منطقة مثلثية: ارسم المثلث المكون من المحور x والمستقيمين $x = 5$ و $y = x + 4$ على المستوى الإحداثي.

(a) ظلّل المنطقة الداخلية للمثلث.



(b) أوجد طول القاعدة، وارتفاع المثلث، واستعملهما لحساب مساحة المثلث.

(c) أوجد مساحة المثلث بحساب التكامل

$$\int_{-4}^5 (x + 4) dx$$

(5) بذور: ينوي علي زراعة حديقة منزله بالبذور، فإذا

كانت مساحة الحديقة التي ينوي علي زراعتها بالأمتار

المربعة، تتعين بالتكامل: $\int_1^7 (-x^2 + 8x - 7) dx$ ،

وكانت البذور التي بحوزته كافية لزراعة 35 m^2 ، فهل

تكفي البذور لزراعتها؟ وضح إجابتك.

8-5

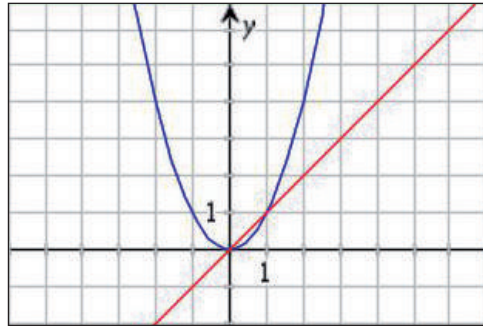
التدريبات الإثرائية

إيجاد المساحة المحصورة بين منحنيين

إيجاد المساحة المحصورة بين منحنيين:

تعلمت إيجاد المساحة المحصورة بين منحنى دالة والمحور x .

أجب عن الأسئلة الآتية لإيجاد المساحة المحصورة بين دالتين.

(1) مثل كلاً من الدالتين $y = x^2, y = x$ (2) أوجد نقاط التقاطع بين الدالتين: $y = x^2, y = x$ (3) أي الدالتين أكبر في الفترة $(0, 1)$ ؟

(4) أوجد كلاً من

(5) أوجد كلاً من

(6) ماذا يمثل الناتج في سؤال 6؟

(7) أوجد

قارن بين الناتجين للسؤالين 5, 7

(8) لخص الخطوات لإيجاد المساحة المحصورة بين دالتين.

8-6

تدريبات إعادة التعليم

النظرية الأساسية في التفاضل والتكامل

الدوال الأصلية والتكامل غير المحدد:

يُقال إن الدالة $F(x)$ هي دالة أصلية للدالة المعطاة $f(x)$ ، إذا كان $F'(x) = f(x)$.

قواعد الدوال الأصلية	
قاعدة القوة	إذا كان $f(x) = x^n$ ، حيث n عدد حقيقي لا يساوي -1 ، فإن $F(x) = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C$.
ضرب القوة في عدد	إذا كان $f(x) = kx^n$ ، حيث n عدد حقيقي لا يساوي -1 و k ثابت، فإن $F(x) = \frac{kx^{n+1}}{n+1} + C$.
الجمع والطرح	إذا كان $F(x)$ و $G(x)$ دالتين أصليتين للدالتين $f(x)$ و $g(x)$ على الترتيب، فإن $F(x) \pm G(x)$ دالة أصلية للدالة $f(x) \pm g(x)$.

مثال 1

أوجد جميع الدوال الأصلية لكل دالة مما يأتي:

(a) $f(x) = -3x^5$

الدالة المعطاة

$$f(x) = -3x^5$$

قاعدة ضرب دالة القوة في عدد

$$F(x) = \frac{-3x^{5+1}}{5+1} + C$$

بسّط

$$= -\frac{1}{2}x^6 + C$$

(b) $f(x) = x^3 + 4x^2 - 2$

الدالة المعطاة

$$f(x) = x^3 + 4x^2 - 2$$

إعادة كتابة الدالة

$$= x^3 + 4x^2 - 2x^0$$

قواعد الدالة الأصلية

$$F(x) = \frac{x^{3+1}}{3+1} + \frac{4x^{2+1}}{2+1} - \frac{2x^{0+1}}{0+1}$$

بسّط

$$= \frac{1}{4}x^4 + \frac{4}{3}x^3 - 2x + C$$

تمارين

أوجد جميع الدوال الأصلية لكل دالة مما يأتي:

(2) $g(x) = \frac{2}{x^3}$

(1) $f(x) = 2x^4 + 3x^2 - 5$

(4) $n(x) = \sqrt[5]{x} - 2$

(3) $t(x) = \frac{3}{4}x^6 - \frac{1}{2}x^3$

8-6

تدريبات إعادة التعليم

(تتمة)

النظرية الأساسية في التفاضل والتكامل

النظرية الأساسية في التفاضل والتكامل: يُعرّف التكامل غير المحدد للدالة $f(x)$ على أنه $\int f(x)dx = F(x) + C$ ، حيث $F(x)$ دالة أصلية للدالة $f(x)$ ؛ أي $F'(x) = f(x)$ و C ثابت.

$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$ <p>إذا كانت $F(x)$ دالة أصلية للدالة المتصلة $f(x)$، فإن</p> <p>ويمكن كتابة الطرف الأيمن للمعادلة في الصورة $F(x) \Big _a^b$</p>	النظرية الأساسية في التفاضل والتكامل
---	--------------------------------------

مثال

احسب كل تكامل مما يأتي:

$$\int (3x^2 + 4x - 1) dx \quad (a)$$

$$\begin{aligned} \int (3x^2 + 4x - 1) dx &= \frac{3x^{2+1}}{2+1} + \frac{4x^{1+1}}{1+1} - \frac{x^{0+1}}{0+1} + C \\ &= \frac{3x^3}{3} + \frac{4x^2}{2} - x + C \\ &= x^3 + 2x^2 - x + C \end{aligned}$$

قواعد الدالة الأصلية (ضرب القوة في عدد)

بسط

بسط

$$\int_2^4 (x^3 - 1) dx \quad (b)$$

النظرية الأساسية في التفاضل والتكامل

$$b = 4 ; a = 2$$

بسط

$$\begin{aligned} \int_2^4 (x^3 - 1) dx &= \left(\frac{x^4}{4} - x \right) \Big|_2^4 \\ &= \left(\frac{4^4}{4} - 4 \right) - \left(\frac{2^4}{4} - 2 \right) \\ &= 60 - 2 = 58 \end{aligned}$$

تمارين

أوجد كل تكامل مما يأتي:

$$\int_1^2 (x^2 + 1) dx \quad (2)$$

$$\int (3x^7 - x^2) dx \quad (1)$$

$$\int_{-1}^1 (x^3 - 2x + 1) dx \quad (4)$$

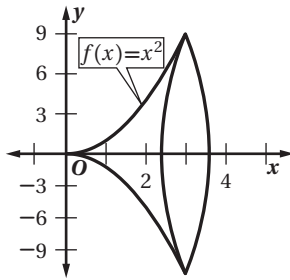
$$\int_1^2 (x^2 - 1) dx \quad (3)$$

تدريبات حل المسألة

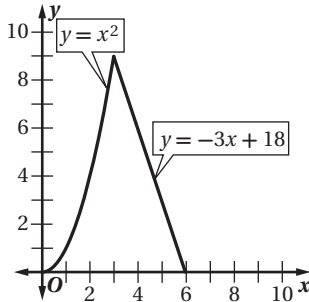
النظرية الأساسية في التفاضل والتكامل

(4) حجم: في الشكل أدناه، أوجد حجم الجسم الناتج عن دوران منحنى $f(x) = x^2$ حول محور السينات في الفترة $[0, 3]$ ، إذا كان الحجم يُعبّر عنه بالمعادلة:

$$\int_0^3 \pi(x^2)^2 dx$$



(5) دعاية: اشترت شركة لوحة إعلانية، وأمکن تمثيل هذه اللوحة بالشكل أدناه، حيث القياسات بالأقدام، فكم تبلغ مساحة اللوحة الإعلانية التي اشترتها الشركة؟

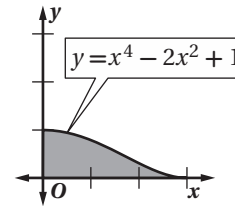


(1) الوثب العالي: تدرب محمود على الوثب العالي في حصة التربية الرياضية، فأمكن وصف سرعته في أثناء الوثبة بالدالة: $v(t) = -32t + 24$ ، حيث t بالثواني والسرعة بالأقدام لكل ثانية.

(a) أوجد دالة موقع محمود $s(t)$ ، مفترضاً أن $s(t) = 0$ عندما $t = 0$.

(b) عندما وثب محمود، كم استغرق من الوقت للوصول إلى الأرض؟

(2) إعلان: الشكل أدناه يمثل شعاراً لشركة جديدة، ما المساحة التي سيستغلها الشعار إذا قررت الشركة وضعه على قمصان تابعة لها؛ علماً بأن x بالبوصات وتقع بين 0 و1؟



(3) شد زنبرك: يُعبّر عن الشغل بالجول اللازم لشد زنبرك مسافة 36 in من وضعه الطبيعي بالمعادلة:

$$\int_0^3 80x dx$$

فما الشغل اللازم؟

8-6

التدريبات الإثرائية

بعض خصائص التكامل

بعض خصائص التكامل:

اتبع الخطوات التالية للوصول إلى بعض خصائص التكامل المحدد:

(1) أوجد كلاً من التكاملات الآتية: $\int_1^2 (2x^2 + 1) dx$, $\int_2^3 (2x^2 + 1) dx$, $\int_1^3 (2x^2 + 1) dx$

(2) قارن النتائج في السؤال الأول.

(3) هل تعتقد أن هذه النتيجة صحيحة دائماً؟

(4) عمّم النتيجة التي توصلت لها في السؤال 2.

(5) أوجد $\int_2^1 (2x^2 + 1) dx$, $\int_1^2 (2x^2 + 1) dx$

(6) قارن القيمتين في السؤال 5

(7) عمّم النتيجة التي توصلت لها في السؤال 6

(8) أوجد $\int_2^2 (2x^2 + 1) dx$

(9) عمّم النتيجة التي توصلت لها في السؤال 8.

(10) استخدم الخصائص الثلاث التي توصلت إليها لحساب قيمة: $\int_2^2 (5x^3 + 7) dx + \int_1^3 (2x + 4) dx + \int_3^5 (2x + 4) dx$

ملحق الإجابات

الاسم: التاريخ:

8-1 تدريبات إعادة التعليم

(تتمه) تقدير النهايات بيانياً

تقدير النهايات عند النهايات:

- إذا اقتربت قيم $f(x)$ من عدد وحيد L_1 عندما تزداد قيم x دون حدود، فإن $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = L_1$
- إذا اقتربت قيم $f(x)$ من عدد وحيد L_2 عندما تنقص قيم x دون حدود، فإن $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = L_2$

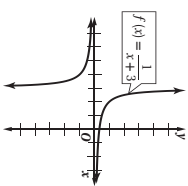
مثال: قُدِّر قيمة: $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x+3}$

اتحليل بيانياً، التمثيل البياني للدالة $f(x) = \frac{1}{x+3}$ يُبيِّن أن $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x+3} = 0$ إذ يقترب منحنى الدالة من

المحور x كلما ازدادت قيم x ، وهذا يعني وجود خط تقارب أفقي هو $y=0$

التمثيل عددياً، كُنْ جدولاً يظهر قيمًا كبيرة لـ x .

x	10	100	1000	10000	100000
$f(x)$	0.08	0.01	0.001	0.0001	0.00001



يظهر الجدول أن قيم $f(x)$ تقترب من الصفر كلما ازدادت قيم x .

تعاريف

قُدِّر كل من نهاية عايلي إذا كانت موجودة:

- | | | |
|--|--|---|
| $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-3x+1}{x-2}$ (3) | $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x+1}{x}$ (2) | $\lim_{x \rightarrow 5} (2x^2+3)$ (1) |
| -3 | 2 | 53 |
| $\lim_{x \rightarrow -\infty} (2^x + x)$ (6) | $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^2-5}{3x^3+2x}$ (5) | $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x^2}$ (4) |
| $-\infty$ | 0 | 0 |
| $\lim_{x \rightarrow -\infty} \cos 2x\pi$ (9) | $\lim_{x \rightarrow -\infty} (2.7)^{2x}$ (8) | $\lim_{x \rightarrow \infty} (x \sin x)$ (7) |
| غير موجودة | 0 | غير موجودة |

الفصل 8: النهايات والاستنتاج

7

الصف: الثالث الثانوي

الاسم: التاريخ:

8-1 تدريبات إعادة التعليم

تقدير النهايات بيانياً

تقدير النهاية عند قيمة ثابتة:

النهاية من اليسار	النهاية من اليمين
إذا اقتربت قيم الدالة $f(x)$ من قيمة وحيدة L_1 ، عندما تقترب قيم x من c من اليمين، فإن:	إذا اقتربت قيم الدالة $f(x)$ من قيمة وحيدة L_2 ، عندما تقترب قيم x من c من اليمين، فإن:
$\lim_{x \rightarrow c^-} f(x) = L_1$	$\lim_{x \rightarrow c^+} f(x) = L_2$

وجود النهاية عند نقطة

تكون نهاية الدالة $f(x)$ موجودة عندما تقترب x من c ، إذا فقط إذا وجدت النهايات من اليسار واليمين وكانتا متساويتين. بمعنى أنه: $\lim_{x \rightarrow c^-} f(x) = L$ ، $\lim_{x \rightarrow c^+} f(x) = L$ ، وإذا فقط إذا $\lim_{x \rightarrow c} f(x) = L$

قُدِّر كلًا من النهايات الآتية إذا كانت موجودة.

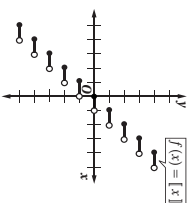
مثال

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} [x], \lim_{x \rightarrow 2} [x], \lim_{x \rightarrow 2^+} [x]$$

يظهر من منحنى الدالة $[x]$ ، أن $\lim_{x \rightarrow 2^-} [x] = 1$

و $\lim_{x \rightarrow 2^+} [x] = 2$ ، وبما كانت النهايات من اليسار واليمين مختلفتين

عندما تقترب x من 2، فإن $\lim_{x \rightarrow 2} [x]$ غير موجودة.



تعاريف

قُدِّر كلًا من النهايات الآتية إذا كانت موجودة:

- | | | |
|--|---|---|
| $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2+3x-10}{x-2}$ (3) | $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{ x-2 }{x^2-4}$ (2) | $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{ 3x }{x}$ (1) |
| ∞ | ∞ | 3 |
| $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{1}{x^2+2}$ (6) | $\lim_{x \rightarrow 3^-} \frac{x^3+27}{x^2-9}$ (5) | $\lim_{x \rightarrow 0} (1 - \cos^2 x)$ (4) |
| ∞ | $-\infty$ | 0 |

الفصل 8: النهايات والاستنتاج

6

الصف: الثالث الثانوي

الاسم: _____ التاريخ: _____

8-1 التدرّيات الإثرائية النهايات

هناك العديد من أمثلة النهايات في الحياة العملية؛ بعضها مطلقاً لا يمكن تجاوزه، وبعضها الآخر يمثل إرشادات، يدفع من يتجاوزها غراماً.

املا الجدول

النهاية	كيف تصنيف النهاية؟	هل النهاية منطوقة؟	الغرامة في حال تجاوز النهاية
(1) السرعة القصوى في شارع سريع	تضع إدارة المرور حدوداً للسرعة.	لا	دفع مبلغ محدد في حالة التجاوز
(2) ارتفاع نفق	وضع حدود ارتفاع السيارات التي يسمح لها بالمرور في مكان يارز	نعم	تقطع المركبة، أو تقطع أجزاء من النفق
(3) وزن القنبية في رحلة جوية	تعليمات من شركة الطيران أن الثاقلة	لا	يدفع المسافر أجور شحن عن الوزن الزائد
(4) درجة حرارة جسم دافئ موضوعة في غرفة باردة	توضع حدود الدرجة حرارة الغرفة	نعم	غير ممكنة
(5) سرعة مركبة فضائية متسارعة	وضع ثابت فيزيائي (موجة الضوء)	نعم	غير ممكنة

رياضياً، قد تكون النهاية موجودة ومنتهية، أو غير منتهية، صنف كل بداية من حيث كونها موجودة ومنتهية، أو غير منتهية، أو غير موجودة، وإذا كانت النهاية موجودة ومنتهية، فأوجد قيمتها.

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 4}{x^2 - x - 2} \quad (3) \quad \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x + 1}{x^2 - 1} \quad (2) \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^2 + 1} \quad (1)$$

موجودة: $\frac{4}{3}$

غير موجودة

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{-1}{x^4} \quad (5) \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin |x|}{x} \quad (4)$$

موجودة: 1

غير منتهية

غير موجودة

الفصل 8: النهايات والاستنتاج

9

الحصف، التلات التالوي

الاسم: _____ التاريخ: _____

8-1 تدرّيات حل المسألة تقدير النهايات بيانياً

(3) ارتفاع المقذوفات، افترض أن جسماً قذف إلى أعلى،

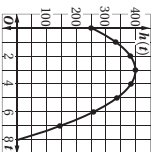
والدالة $h(t)$ تمثل ارتفاع المقذوف بعد t ثانية، وبيّن

الجدول الآتي ارتفاع القذيفة $h(t)$ بالأقدام بعد t ثانية

من قذفها.

t	$h(t)$	t	$h(t)$
0	256	4	384
1	336	5	336
2	384	6	256
3	400	7	144

(a) مثل البيانات، وارسم منحنى يمر بنقاط البيانات التي مثلتها للحصول على الدالة $h(t)$.



(b) استعمل التمثيل البياني لتقدير قيمة $\lim_{t \rightarrow 8^-} h(t)$ **قلم**

(4) النظرية النسبية، يُعبّر عن كتلة جسم متحرك بسرعة v نظرياً بالمعادلة: $m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$ ، حيث m_0 كتلة الجسم عند السكون، و c سرعة الضوء و v سرعة الجسم، فأوجد قيمة m $\lim_{v \rightarrow c^-}$

$$\lim_{v \rightarrow c^-} m = \infty$$

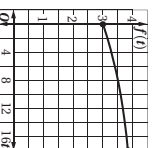
(5) كهرباء، وجد أحد معادلات فرق جهد دائرة كهربائية هي: $V(t) = 140 \sin \pi t$ ، وضح سبب كون $\lim_{t \rightarrow \infty} V(t)$ غير موجود.

زيادة t يندبب المنحني بين 140 و -140

(1) نمو البكتيريا، يعطى وزن مجتمع بكتيري بالمعادلة:

$$f(t) = \frac{4}{1 + 0.35e^{-0.2t}}$$

(a) مثل بيانياً منحنى الدالة $f(t)$ في الفترة $0 \leq t \leq 16$



(b) استعمل المنحني لتقدير وزن البكتيريا بعد 8 ساعات.

مقارباً إيجابياً إلى أقرب جزء من عشرة.

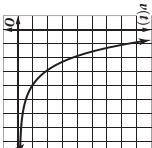
3.7 جرامات.

(c) قدر $\lim_{t \rightarrow \infty} f(t)$ إذا كانت موجودة، وفسّر معناها.

4 جرامات، الوزن الأقصى للبكتيريا سيمثل إلى 4 جرامات.

(2) سيارات، يبلغ ثمن سيارة 30000 ريال، وبعد t سنة من شرائها يصبح سعرها $v(t) = 30000(0.85)^t$.

(a) مثل الدالة $v(t)$ بيانياً على الفترة $0 \leq t \leq 8$.



(b) قدر قيمة السيارة بعد 10 سنوات من شرائها.

5906 ريالاً.

(c) قدر قيمة $v(t)$ إذا كانت موجودة، وفسّر معناها.

0: يهزور الوقت يصبح ثمن السيارة صفراً.

الفصل 8: النهايات والاستنتاج

8

الحصف، التلات التالوي

الاسم: التاريخ:

(تتمه)

8-2 تدريبات إعادة التعليم

حساب النهايات جبرياً

حساب النهايات عند اللانهاية

دوال المقارب	دوال كثيرات الحدود	دوال القوى
لاي عدد صحيح موجب n ، تكون $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{1}{x^n} = 0$	افترض أن P كثيرة حدود، $p(x) = a_n x^n + \dots + a_1 x + a_0$ ، فإن: $\lim_{x \rightarrow \infty} p(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} p(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} a_n x^n$ و $\lim_{x \rightarrow -\infty} p(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} a_n x^n$.	لاي عدد صحيح موجب n ، تكون $\lim_{x \rightarrow \infty} x^n = \infty$ $\lim_{x \rightarrow -\infty} x^n = \infty$ إذا كان n عدداً زوجياً. $\lim_{x \rightarrow -\infty} x^n = -\infty$ إذا كان n عدداً فردياً.

مثال 1 احسب كل نهاية ما يأتي.

(a) $\lim_{x \rightarrow -\infty} (x^5 - 6x + 1)$

نهاية دالة كثيرة حدود عند اللانهاية

$\lim_{x \rightarrow -\infty} (x^5 - 6x + 1) = \lim_{x \rightarrow -\infty} x^5 = -\infty$

نهاية دالة قوة عند اللانهاية

(b) $\lim_{x \rightarrow \infty} (2x^4 + 5x^2)$

نهاية دالة كثيرة حدود عند اللانهاية

$\lim_{x \rightarrow \infty} (2x^4 + 5x^2) = \lim_{x \rightarrow \infty} 2x^4 = 2 \lim_{x \rightarrow \infty} x^4 = 2 \cdot \infty = \infty$

خاصية الضرب في ثابت

نهاية دالة القوة عند اللانهاية

$= 2 \cdot \infty = \infty$

تقاربت

احسب كل نهاية ما يأتي:

(1) $\lim_{x \rightarrow -\infty} (-2x^3 + 5x)$

(2) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{5}{x^2}$

(3) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{6x-1}{10x+7}$

(4) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{6x^2 - 2x}{x^3 + 1}$

(5) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{5x^4 + 2x^3 - 1}{2x^3 + x^2 - 1}$

(6) $\lim_{x \rightarrow -\infty} (3x^3 + 5x - 1)$

(7) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3}{5}$

(8) $\lim_{x \rightarrow -\infty} -\infty$

الفصل 8: النهايات والاستنتاج

11

المصفوفة الثالث المتناهي

الاسم: التاريخ:

8-2 تدريبات إعادة التعليم

حساب النهايات جبرياً

حساب النهاية عند نقطة

مثال 1 أوجد: $\lim_{x \rightarrow -2} (-2x^4 + 3x^3 - 5x + 3)$ باستعمال التعويض المباشر إذا كان ممكناً.

أما كانت النهاية المطلوبة لكثيرة حدود، فإنه يمكننا إيجاد النهاية بالتعويض المباشر.

$\lim_{x \rightarrow -2} (-2x^4 + 3x^3 - 5x + 3) = -2(-2)^4 + 3(-2)^3 - 5(-2) + 3 = -32 - 24 + 10 + 3 = -43$

مثال 2 احسب: $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{x^2 - 9x + 20}{x - 4}$

حلل $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{x^2 - 9x + 20}{x - 4} = \lim_{x \rightarrow 4} \frac{(x-5)(x-4)}{(x-4)} = \lim_{x \rightarrow 4} (x-5) = 4-5 = -1$

اختصر العامل المشترك

عوض وبسط

مثال 3 احسب: $\lim_{x \rightarrow 16} \frac{\sqrt{x} - 4}{x - 16}$

ينتج عن التعويض المباشر: $\frac{\sqrt{16} - 4}{16 - 16} = \frac{0}{0}$ لذا اضرب في مرافق البسط قبل التحليل، واختصر العوامل المشتركة.

اضرب في المرافق

$\lim_{x \rightarrow 16} \frac{\sqrt{x} - 4}{x - 16} = \lim_{x \rightarrow 16} \frac{\sqrt{x} - 4}{x - 16} \cdot \frac{\sqrt{x} + 4}{\sqrt{x} + 4} = \lim_{x \rightarrow 16} \frac{x - 16}{(x - 16)(\sqrt{x} + 4)} = \lim_{x \rightarrow 16} \frac{1}{\sqrt{x} + 4} = \frac{1}{\sqrt{16} + 4} = \frac{1}{8}$

اختصر العامل المشترك

بسط

عوض وبسط

تقاربت

احسب كل نهاية ما يأتي:

(1) $\lim_{x \rightarrow 3} (2x^2 - 5x)$

(2) $\lim_{x \rightarrow 5} \sqrt{x^3 - 4}$

(3) $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^2 + 9x + 14}{x + 2}$

(4) $\lim_{x \rightarrow -4} \frac{\sqrt{x} - 2}{x - 4}$

(5) $\lim_{x \rightarrow -4} \left(\frac{1}{x} + x \right)$

(6) $\lim_{x \rightarrow -2} (-x^2 + 5x - 1)$

(7) $\frac{1}{4}$

(8) -4.25

الفصل 8: النهايات والاستنتاج

10

المصفوفة الثالث المتناهي

التاريخ: _____

الاسم: _____

8-2 التدرّيات الإثرائية

نظرية الشطيرة

في الدرس (8-1)، تعلمت أن $\lim_{x \rightarrow 0} \sin \frac{1}{x}$ غير موجودة، وذلك بسبب تذبذب الدالة بين -1 و1 كلما اقتربت x من 0.

ولكن، ماذا عن $\lim_{x \rightarrow 0} x^2 \sin \frac{1}{x}$ ؟ هل هذه النهاية غير موجودة لأن $\lim_{x \rightarrow 0} \sin \frac{1}{x}$ غير موجودة؟ تساعد نظرية الشطيرة على الإجابة عن هذا السؤال.

نظرية الشطيرة

إذا كان: $h(x) \leq g(x) \leq f(x)$ لجميع قيم x في فترة مفتوحة تحتوي c ، مع إمكانية استثناء c ، وكانت: $\lim_{x \rightarrow c} f(x) = L$ ، فإن $\lim_{x \rightarrow c} h(x) = L$ ، $\lim_{x \rightarrow c} g(x) = L$ موجودة وتساوي L .

لاحظ أن $1 \leq \sin \frac{1}{x} \leq -1$ لجميع قيم x باستثناء $x=0$ ، اضرب النهاية في x^2 لتحصل على $-\frac{1}{2} \leq x^2 \sin \frac{1}{x} \leq \frac{1}{2}$ ، $x^2 \sin \frac{1}{x} = x^2$ ، $g(x) = x^2$ ، $f(x) = x^2$ ، $h(x) = -x^2$ ، تعلمت في الدرس (8-2) أن $\lim_{x \rightarrow 0} x^2 = 0$ ، $\lim_{x \rightarrow 0} h(x) = 0$ ، $\lim_{x \rightarrow 0} g(x) = 0$ ، لذا فإن $\lim_{x \rightarrow 0} x^2 \sin \frac{1}{x} = 0$ حسب نظرية الشطيرة.

تدريبات

1) إذا كانت: $(2-x)^{-2} \leq g(x) \leq \sqrt{x-1} - 1$ ، فاستعمل نظرية الشطيرة لإيجاد $\lim_{x \rightarrow 2} g(x)$

استعمل نظرية الشطيرة لإيجاد النهاية في كلِّ ما يأتي:

$$(2) \lim_{x \rightarrow 0} x^4 \sin \frac{1}{x}$$

0

$$(3) \lim_{x \rightarrow 0} x^2 \cos \frac{1}{\sqrt{x}}$$

0

$$(4) \lim_{x \rightarrow 0} |x| \sin \frac{\pi}{x}$$

0

المفصل 8: النهايات والاشتقاق

13

المفصل: التمارين التآوي

التاريخ: _____

الاسم: _____

8-2 تدريبات حل المسألة

حساب النهايات جبرياً

1) بركة سباحة، صُحِّحَ لمحوّل يجري على 0.3 جرام من الكلورين لكل لتر ماء في بركة سباحة، إذا أُصْطِي تركيز الكلورين في البركة بالجرامات لكل لتر ماء بعد t ثانية بالمعادلة:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} C(t) = \frac{0.3t}{1000 + t}$$

أوجد $C(t)$ بجرام/لتر

48.5

حيث x السرعة بالأميال لكل ساعة، فأوجد $\lim_{x \rightarrow 70} v(x)$.

4) تصنيق، قبل المعادلة $20P + 3000 = c(P)$ تكلفة إنتاج P قطعة منتج معين بالريالات.

أوجد تكلفة إنتاج 100 قطعة.

5000

ب) بلغت تكلفة الإنتاج 21000 ريال في أحد الأيام، تكتم عدد القطع التي أنتجها الصانع في ذلك اليوم؟

900

ج) يمكن إيجاد متوسط تكلفة إنتاج القطعة بقسمة

$$\lim_{p \rightarrow 15000} \frac{c(p)}{p}$$

20.20

6) اقرون كهربائية، الدالة $f(x) = \frac{250x + 200000}{x}$

تُمثل متوسط تكلفة الفزن الكهربائي عند إنتاج x فزنًا،

$$\lim_{x \rightarrow 2000} f(x)$$

350

المفصل 8: النهايات والاشتقاق

12

المفصل: التمارين التآوي

2) تولّد، المعادلة $C = \frac{60000P}{100 - P}$ تمثل تكلفة إزالة $P\%$

من الملوثات التي يتسبب فيها أحد الصانع،

$$\lim_{p \rightarrow 100^-} C(p)$$

∞

3) سيارات، اشترى على سيارة بسعر 24000 ريال، إذا

كانت العلاقة $a(t) = 24(0.90)^t$ ، تعتبر عن سعر

السيارة بالآلاف بعد t سنة.

أ) أكمل الجدول، مقبلاً الإجابة إلى أقرب جزء من مئة.

السنة	1	3	5	6
القيمة	21.6	17.5	14.17	12.75

$$\lim_{t \rightarrow \infty} a(t)$$

0

الاسم: _____ التاريخ: _____

8-3 تدريبات إعادة التعليم

المماس والسرعة المتجهة

السرعة المتجهة اللحظية:

السرعة المتجهة اللحظية:

إذا أُعطِيَ موقع جسم متحرك (t) بوصفه دالة في الزمن، فإن سرعة الجسم المتجهة اللحظية $v(t)$ عند الزمن t تُعطى بالصيغة:
$$v(t) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(t+h) - f(t)}{h}$$
 بشرط أن تكون هذه النهاية موجودة.

أُسقط حجر من ارتفاع 1500 قدم، ويُعَيَّر من ارتفاعه بعد t ثانية من إسقاطه بالصيغة:

$f(t) = 1500 - 16t^2$ أوجد السرعة المتجهة اللحظية للحجر بعد 4 ثوانٍ.

مثال 1

$$v(t) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(t+h) - f(t)}{h} \quad \text{صيغة السرعة المتجهة اللحظية}$$

$$f(4+h) = 1500 - 16(4+h)^2, f(4) = 1500 - 16(4)^2 = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{[1500 - 16(4+h)^2] - [1500 - 16(4)^2]}{h}$$

$$\text{اضرب وبسط} \quad = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{-128h - 16h^2}{h}$$

$$\text{حلّ} \quad = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h(-128 - 16h)}{h}$$

$$\text{اختصر وعوّض.} \quad = -128 - 16(0)$$

$$\text{بسط} \quad = -128$$

أي أن السرعة اللحظية بعد 4 ثوانٍ هي -128 قدمًا في الثانية.

تعاريف

تُحلّ $s(t)$ بُد جسم متحرك عن نقطة ثابتة بالأقدام بعد t ثانية، أوجد السرعة المتجهة اللحظية للجسم عند الزمن المعطى في كل ما يأتي:

$$s(t) = -16t^2 + 1700; t = 5 \quad (2)$$

$$v(5) = -160 ft/s \quad (1)$$

$$s(t) = -16t^2 + 90t + 10; t = 2 \quad (4)$$

$$v(2) = 26 ft/s \quad (3)$$

الفصل 8: النهايات والاستنتاج

15

المصف: انتانت انتاوي

الاسم: _____ التاريخ: _____

8-3 تدريبات إعادة التعليم

المماس والسرعة المتجهة

المماس

معدل التغير اللحظي

يُعرَّف معدل التغير اللحظي لمُحى $f(x)$ عند النقطة $(x, f(x))$ على أنه ميل المماس لمُحى الدالة عند النقطة $(x, f(x))$ ، ويُعطى بالصيغة:
$$m = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$
 بشرط أن تكون النهاية موجودة.

مثال أوجد معادلة ميل منحنى الدالة $1 + 3x^2 = r$ عند أي نقطة عليه.

$$m = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \quad \text{صيغة معدل التغير اللحظي}$$

$$f(x+h) = 3(x+h)^2 + 1, f(x) = 3x^2 + 1 \quad m = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{[3(x+h)^2 + 1] - [3x^2 + 1]}{h}$$

$$\text{فك الأقواس} \quad m = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{[3x^2 + 6hx + 3h^2 + 1] - [3x^2 + 1]}{h}$$

$$\text{بسط وحلّ} \quad m = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{3h(2x + h)}{h}$$

$$\text{اختصر } h \quad m = \lim_{h \rightarrow 0} 3(2x + h)$$

$$\text{خواص النهايات} \quad m = 6x$$

أي أن معادلة ميل المنحنى عند أي نقطة عليه هي $m = 6x$.

تعاريف

أوجد معادلة ميل منحنى كل دالة ما يأتي عند أي نقطة عليه:

$$y = 4 - 7x \quad (2) \quad y = x^3 + 1 \quad (1)$$

$$m = -7 \quad m = 3x^2$$

$$y = \frac{4}{\sqrt{x}} \quad (4) \quad y = \frac{3}{x^2} \quad (3)$$

$$m = \frac{-2}{x\sqrt{x}} \quad m = \frac{-6}{x^3}$$

الفصل 8: النهايات والاستنتاج

14

المصف: انتانت انتاوي

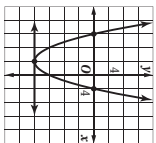
التاريخ: _____

الاسم: _____

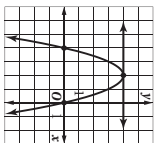
8-3 التدرّيات الإثرائية

المسائل والترووس

هل يمكنك استعمال معادلة ميل القطع الكافي الذي معادلته: $ax^2 + bx + c = 0$ عند أي نقطة لإيجاد رأس القطع؟
خطوة 1: مثلّ قطعين مكافئين معادلتهما $c + bx + ax^2 = 0$ ، بحيث يكون $a > 0$ لا محضاً، و $a < 0$ الآخر، ثم ارسم
عالم القطع عند رأسه، واكتب معادلة كل قطع تحت تخطيطه البياني.



$$y = x^2 + 2x - 3$$



$$y = -x^2 - 4x$$

خطوة 2: أوجد ميل عاقل كل قطع عند رأسه.

0

خطوة 3: أوجد معادلة ميل عاقل كل قطع عند أي نقطة عليه.

$$y = x^2 + 2x - 3 \text{ المقطع } m = 2x + 2, y = -x^2 - 4x \text{ المقطع } m = -2x - 4$$

خطوة 4: ساو كل معادلة ميل بالصفر، وحلّها بالنسبة لـ x فيكون الحل هو الإحداثي x للرأس.

$$2x + 2 = 0 \quad -2x - 4 = 0 \quad 2x = -2 \quad -2x = 4 \quad x = -1 \quad x = -2$$

خطوة 5: عوض الإحداثي x للرأس في معادلة القطع لإيجاد الإحداثي y للرأس.

$$y = x^2 + 2x - 3; x = -1 \quad y = -x^2 - 4x; x = -2 \quad y = (-1)^2 + 2(-1) - 3 \quad y = -(-2)^2 - 4(-2) \quad y = -4 \quad y = 4$$

خطوة 6: اكتب إحداثي رأس كل قطع.
القطع $-4x - x^2 = 0$ والرأس $(-1, -4)$ المقطع $-3 - 2x + x^2 = 0$ والرأس $(2, 4)$

تمارين

أوجد رأس القطع الكافي في كل عاقل:

$$\begin{aligned} (1) \quad y &= -x^2 - 6x - 9 & (2) \quad y &= 2x^2 - 4x + 2 & (3) \quad y &= 4x^2 - 25 \\ &(-3, 0) & (1, 0) & (0, -25) \end{aligned}$$

المفصل 8: التمارين والاشتقاق

17

المصف، التمارين التلوي

التاريخ: _____

الاسم: _____

8-3 تدرّيات حل المسألة

المعالم والسرعة المتجهة

(4) اسقوط الفص، المعادلة: $16t^2 - 15000 = h(t)$ تمثل ارتفاع عاقل بالأقدام بعد t ثانية من قفزه من الطاقه.
(a) أوجد السرعة المتجهة اللحظية للمعالي عند أي لحظة؟

$$v(t) = -32t$$

(b) ما ارتفاع العاقل بعد ثانيتين؟

$$14936 \text{ قدم}$$

(c) ما السرعة المتجهة اللحظية للمعالي بعد 4 ثوانٍ؟

$$128 \text{ قدم/ثانية}$$

(5) كرة قدم، يركل لاعب الكرة بسرعة ابتدائية قدرها 80 ft/s فتصل زفناً (9) يجرّ عنه بالمعادلة:
 $6.5 + 80t - 16t^2 = s(t)$ قدمًا بعد t ثانية.

(a) أوجد السرعة المتجهة اللحظية للكرة $v(t)$.

$$v(t) = -32t + 80$$

(b) ما سرعة الكرة المتجهة بعد 0.5 ثانية؟

$$64 \text{ قدم/ث}$$

(c) متى تصل الكرة إلى أقصى ارتفاع؟

$$2.5 \text{ ثانية}$$

(d) ما أقصى ارتفاع تبلغه الكرة؟

$$106.5 \text{ ft}$$

المفصل 8: التمارين والاشتقاق

16

المصف، التمارين التلوي

(1) جسم ساقط، أسقطت من كرة من عل سطح بناءة ارتفاعها 800، والدالة: $s(t) = -16t^2 + 800$ قدمًا بعد t ثانية من أسقاطها، أوجد السرعة المتجهة اللحظية لسقوط الكرة بعد ثانيتين؟

$$64 \text{ قدم/ثانية إلى أسفل}$$

(2) جسم ساقط، أسقطت من ارتفاع 1200 ft والدالة: $s(t) = -16t^2 + 1200$ قدمًا بعد t ثانية من أسقاطها، أوجد السرعة المتجهة اللحظية للحجر بعد 4 ثوانٍ من أسقاطه؟

(a) ما السرعة المتجهة اللحظية للحجر بعد 4 ثوانٍ من أسقاطه؟

$$128 \text{ ft/s إلى أسفل}$$

(b) متى يصل الحجر إلى سطح الأرض؟

$$5\sqrt{3} \text{ ثانية}$$

(c) أوجد صيغة سرعة الحجر اللحظية في أي لحظة.

$$v(t) = -32t$$

(d) أوجد سرعة الحجر عندما يصل إلى سطح الأرض.

$$160\sqrt{3} \text{ ft/s}$$

(3) افترض أن المعادلة: $h(t) = -16t^2 + 900$ تمثل ارتفاع يهولان عن سطح الأرض بعد قفزه من ارتفاع 900 قدم، أوجد السرعة المتجهة اللحظية للبهولان.

$$v(t) = -32t$$

الاسم: التاريخ:

8-4 تدريبات إعادة التعليم

(تتمه)

المشتقة

قاعدتا الضرب والقسمة استعمال القاعدتين الآتيتين لإيجاد مشتقة حاصل الضرب أو القسمة.

إذا كانت كل من الدالتين g, f قابلة للاشتقاق عند x ، فإن قاعدة مشتقة الضرب	$\frac{d}{dx}[f(x)g(x)] = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$
إذا كانت كل من الدالتين g, f قابلة للاشتقاق عند x ، وكان $g(x) \neq 0$ فإن قاعدة مشتقة القسمة	$\frac{d}{dx}\left[\frac{f(x)}{g(x)}\right] = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{[g(x)]^2}$

مثال 1

أوجد مشتقة الدالة: $h(x) = (x^2 - 2)(2x^3 + 5x)$

$$\begin{aligned} \text{افترض أن } h(x) &= x^2 - 2 \quad \text{و} \quad f(x) = 2x^3 + 5x \\ g'(x) &= 6x^2 + 5 \quad \text{قواعد الاشتقاق} \\ h'(x) &= f'(x)g(x) + f(x)g'(x) \\ &= (2x)(2x^3 + 5x) + (x^2 - 2)(6x^2 + 5) \\ &= 4x^4 + 10x^2 + 6x^4 + 5x^2 - 12x^2 - 10 \\ &= 10x^4 + 3x^2 - 10 \end{aligned}$$

مثال 2

أوجد مشتقة: $h(x) = \frac{(2x^2 + 4)}{(x^2 - 1)}$

$$\begin{aligned} \text{افترض أن } h(x) &= 2x^2 + 4 \quad \text{و} \quad f(x) = 2x^2 + 4 \\ g'(x) &= 2x \quad \text{قواعد الاشتقاق} \\ h'(x) &= \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{[g(x)]^2} \\ &= \frac{4x(x^2 - 1) - (2x^2 + 4)2x}{(x^2 - 1)^2} \\ &= \frac{4x^3 - 4x - 4x^3 - 8x}{(x^2 - 1)^2} \\ &= \frac{-12x}{(x^2 - 1)^2} \end{aligned}$$

تعاريف

أوجد مشتقة كل دالة ما يأتي:

$$\begin{aligned} (1) \quad h(x) &= (-4 + 2x^2)(2x + 3) & 12x^2 + 12x - 8 \\ (2) \quad m(x) &= (3x - 1)(x^2 + 5x) & 9x^2 + 28x - 5 \\ (3) \quad d(x) &= \frac{x^2 + 3}{x - 1} & \frac{x^2 - 2x - 3}{(x - 1)^2} \\ (4) \quad k(x) &= \frac{3x^3 + 4}{2x^2 - 1} & \frac{6x^4 - 9x^2 - 16x}{(2x^2 - 1)^2} \end{aligned}$$

الفصل 8: النهايات والاشتقاق

الصفحة الثالث الثانوي

الاسم: التاريخ:

8-4 تدريبات إعادة التعليم

المشتقة

المشتقات والقواعد الأساسية: استعملت النهايات في الدرس (3-8)، لإيجاد ميل تماس منحنى الدالة عند أي نقطة عليه، ونُسِّي هذه النهاية مشتقة الدالة.

يُرمز إلى مشتقة الدالة $f(x)$ بالرمز $f'(x)$ ويعبر عنها بالنهاية: $f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$ ، بشرط وجود النهاية، وهناك العديد من قواعد الاشتقاق التي يمكن استعمالها لإيجاد مشتقة دالة تحتوي على أكثر من حد.

اسم القاعدة	القاعدة	مثال
مشتقة القوة	إذا كان $f(x) = x^n$ ، حيث n عدد حقيقي، فإن $f'(x) = nx^{n-1}$.	إذا كان $f(x) = x^3$ ، فإن $f'(x) = 3x^2$.
مشتقة الثابت	فإن $f'(x) = 0$.	إذا كان $f(x) = 2$ ، فإن $f'(x) = 0$.
مشتقة مضاعفات	إذا كان $f(x) = cx^n$ ، حيث c ثابت و n عدد حقيقي، فإن $f'(x) = cnx^{n-1}$.	إذا كان $f(x) = 5x^3$ ، فإن $f'(x) = 15x^2$.
القوة	إذا كان $f(x) = g(x) \pm h(x)$ ، فإن $f'(x) = g'(x) \pm h'(x)$.	إذا كان $f(x) = 4x^2 + 3x$ ، فإن $f'(x) = 8x + 3$.
مشتقة المجموع والفرق		

مثال أوجد مشتقة كل دالة ما يأتي:

$$\begin{aligned} (a) \quad f(x) &= 3x^2 - 2x + 4 & f(x) &= 3x^2 - 2x + 4 \\ & & f'(x) &= 2 \cdot 3x^{2-1} - 2 \cdot 1x^{1-1} + 0 \\ & & &= 6x - 2 \\ (b) \quad f(x) &= x^4(4x^3 - 5) & f(x) &= x^4(4x^3 - 5) \\ & & f(x) &= 4x^7 - 5x^4 \\ & & f'(x) &= 4 \cdot 7x^{7-1} - 5 \cdot 4x^{4-1} \\ & & &= 28x^6 - 20x^3 \end{aligned}$$

تعاريف

أوجد مشتقة الدالة $f(x)$ في كل ما يأتي، ثم احسب قيمة المشتقة عند النقاط المعطاة:

$$\begin{aligned} (1) \quad f(x) &= -x^3 + 5x^2, x = 1, -4 & f(x) &= -x^3 + 5x^2 \\ (2) \quad f(x) &= -3x^2 + 10x; 7, -88 & f(x) &= -3x^2 + 10x \\ (3) \quad f(x) &= 3x^4 + x^3 - 2; x = -1, 2 & f(x) &= 3x^4 + x^3 - 2 \\ (4) \quad f(x) &= 12x^3 + 5x^4; -7, 176 & f(x) &= 12x^3 + 5x^4 \\ (5) \quad f(x) &= -3.4x^{x^4} + 0.6x^{x^{0.8}} & f(x) &= -3.4x^{x^4} + 0.6x^{x^{0.8}} \\ (6) \quad f(x) &= 12x - 3 & f'(x) &= 12 \\ (7) \quad f(x) &= 4x^{\frac{1}{2}} - 3x^{\frac{3}{2}} & f'(x) &= 2\sqrt{x} - 9\sqrt{x} \\ (8) \quad f(x) &= -4x^2 + 3x^3 - 14 & f'(x) &= -8x + 9x^2 \end{aligned}$$

الفصل 8: النهايات والاشتقاق

18

الصفحة الثالث الثانوي

الاسم: _____ التاريخ: _____

8-4 التدرّيات الإثرائية

اشتقاق متسلسلات القوى

يمكن كتابة بعض الدوال المائبة والأسية في صورة متسلسلة قوى، فمثلاً متسلسلة قوى الدالة الزوجية $\cos x$ $y =$ تحتوي على قوى الزوجية لـ x .

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \frac{x^8}{8!} - \dots$$

وأن متسلسلة قوى الدالة الفردية $\sin x$ $y =$ تحتوي على القوى الفردية لـ x :

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \frac{x^9}{9!} - \dots$$

يمكن اشتقاق متسلسلات القوى هذه.

1 (a) أوجد $(\sin x)'$ ، وذلك باستخدام حدود متسلسلة قوى $\sin x$ حدًا حدًا ثم ببسط النتيجة.

$$1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \frac{x^8}{8!} - \dots$$

2 (b) ما الدالة التي تمثلها المتسلسلة الأليائية الجديدة؟

$\cos x$

3 (c) أي أن: $(\sin x)' = \cos x$

4 (a) ماذا توقع أن تكون مشتقة الدالة $\cos x$ ؟ **تحذيف الإجابات.**

5 (b) أوجد $(\cos x)$ مستعملًا متسلسلة قوى $\cos x$

$$-x + \frac{x^3}{3!} - \frac{x^5}{5!} + \frac{x^7}{7!} - \frac{x^9}{9!} + \dots$$

6 (c) أي أن: $(\cos x)' = -\sin x$

7 (a) إذا كانت متسلسلة قوى الدالة $f(x)$ هي $1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \dots$ ، فأوجد $f'(x)$.

$$1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \dots$$

8 (b) ما العلاقة بين $f(x)$ ، $f'(x)$ ، $f''(x)$ ؟ **مسؤوليات**

9 (c) إذا عبرنا عن الدالة $f(x)$ بالشكل e^x ، فأوجد $f'(x)$.

استعمل النتائج التي حصلت عليها في المسائل 3-1؛ لإيجاد مشتقة كل دالة فيما يأتي:

$$f(x) = (\cos x)^2 \quad (6) \quad f(x) = \sin x + \cos x \quad (5) \quad f(x) = xe^x \quad (4)$$

$$-2 \cos x \sin x \quad \cos x - \sin x \quad xe^x + e^x$$

الفصل 8: النهايات والاشتقاق

21

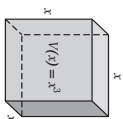
الحصف، التمارين التآوي

الاسم: _____ التاريخ: _____

8-4 تدرّيات حل المسألة

المشتقة

14 (a) حجم، الصيغة $V = x^3$ تمثل حجم مكعب طول ضلعه x . افرض أن x يتغير.



15 (a) أوجد معدل تغير الحجم $V(x)$ عندما يتغير x من 3.4 in إلى 3.2 in.

$$32.7$$

$$32.7$$

16 (b) أوجد معدل تغير الحجم $V(x)$ اللحظي عندما $x = 4$ in.

$$48$$

$$48$$

17 (c) روضح العلاقة بين صيغة حجم المكعب ومشتقها.

إجابة ممكنة: **مشتقة صيغة الحجم هي نصف المساحة السطحية للمكعب ($3x^2$)**

18 (5) حركة الكرة، أطلقت كرة إلى أعلى من نقطة ترتفع 6 ft عن سطح الأرض، بسرعة ابتدائية قدرها 80 ft/s. إذا كان ارتفاعها 6 + 80t - 16t² قدمًا بعد t ثانية.

19 (a) أوجد سرعة الكرة عند أي لحظة t.

$$v(t) = -32t + 80$$

$$16 \text{ ft/s}$$

20 (b) أوجد السرعة اللحظية للكرة عندما t = 2 ثانية.

$$16 \text{ ft/s}$$

الفصل 8: النهايات والاشتقاق

20

الحصف، التمارين التآوي

1 طيور، يمكن تمثيل ارتفاع طائر بالآقدام بعد t ثانية

$$s(t) = \frac{t^3}{3} + \frac{7t^2}{2} + 18t$$

2 الفترة [1, 10]، أوجد أقصى وأدنى ارتفاع للطائر.

$$\text{أقصى ارتفاع: } 75 \frac{1}{6} \text{ ft؛ أدنى ارتفاع: } 21 \frac{1}{6} \text{ ft}$$

3 غطس، قفز غطّاس من قمة منحدر ارتفاعه 192 قدمًا عن سطح الماء، ويعبر عن ارتفاع الغطاس بعد t ثانية

$$h(t) = -16t^2 + 192t$$

4 أوجد سرعة الغطاس عند أي لحظة t.

$$h'(t) = -32t + 192$$

$$h'(1) = -16 \text{ ft/s}$$

$$h'(1) = -16 \text{ ft/s}$$

5 أوجد الزمن الذي يستغرقه الغطاس للوصول إلى سطح الماء.

$$h(4) = -112 \text{ ft/s}$$

6 (d) ما سرعة الغطاس عند وصوله سطح الماء؟

$$h'(4) = -112 \text{ ft/s}$$

7 (3) هندسة، الصيغة $V = \pi r^2 h$ تمثل حجم الأسطوانة التي طول نصف قطرها r وارتفاعها h، افترض أن أسطوانة ارتفاعها 10 in، وطول نصف قطرها متغير.

8 (a) اكتب صيغة تمثل حجم الأسطوانة بدلالة طول نصف قطرها.

$$V(r) = 10\pi r^2$$

9 (b) أوجد صيغة تمثل معدل تغير حجم الأسطوانة بالنسبة إلى طول نصف قطرها.

$$V'(r) = 20\pi r$$

10 (c) أوجد $V'(r)$ عندما $r = 3$ in.

$$60\pi$$

الفصل 8: النهايات والاشتقاق

التاريخ: _____

الاسم: _____

(تمه)

8-5 تدريبات إعادة التعليم

المساحة تحت المنحنى والتكامل

التكامل

مساحة المنطقة المحصورة بين منحنى الدالة $f(x)$ والمحور x في الفترة $[a, b]$ هي:	التكامل المحدد
$\int_a^b f(x) dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n f(x_i) \Delta x$ ، حيث a و b الحدان السفلي والعلوي على الترتيب.	
$\Delta x = \frac{b-a}{n}$ ، $x_i = a + i\Delta x$	

استعمل النهايات لإيجاد مساحة المنطقة المحصورة بين منحنى $4x^2 = 0$ والمحور x في الفترة $[0, 5]$

مثال

$$\int_0^5 4x^2 dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n f(x_i) \Delta x = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n 4x_i^2 \Delta x$$

$$\begin{aligned} \Delta x &= \frac{b-a}{n} \\ \Delta x &= \frac{5-0}{n} \\ x_i &= a + i\Delta x \\ x_i &= 0 + i \frac{5}{n} = \frac{5i}{n} \\ a &= 0, \Delta x = \frac{5}{n} \end{aligned}$$

احسب التكامل المحدد الذي يعطي المساحة المطلوبة.

$$\begin{aligned} \int_0^5 4x^2 dx &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n f(x_i) \Delta x = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n 4x_i^2 \Delta x \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n 4 \left(\frac{5i}{n} \right)^2 \frac{5}{n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{20}{n^3} \sum_{i=1}^n i^2 \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{20}{n^3} \cdot \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{500}{6} \left(\frac{2n^2 + 3n + 1}{n^2} \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{500}{6} \left(2 + \frac{3}{n} + \frac{1}{n^2} \right) \\ &= \left(\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{500}{6} \right) \left(\lim_{n \rightarrow \infty} 2 + \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3}{n} + \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^2} \right) \\ &= \frac{500}{6} [2 + 3(0) + 0] \approx 166.67 \end{aligned}$$

خصائص النهايات

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^2} = 0$$

تقاربت

استعمل النهايات لإيجاد المساحة المحصورة بين منحنى $f(x)$ والمحور x والمطلة؛ بالتكامل المحدد في كل ما يأتي:

$$\begin{aligned} (1) \quad \int_0^2 x^3 dx &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n f(x_i) \Delta x = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n x_i^3 \Delta x \\ (2) \quad \int_2^4 (x^2 + 3) dx &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n (x_i^2 + 3) \Delta x \\ (3) \quad \int_1^4 (1+x) dx &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n (1 + x_i) \Delta x \\ (4) \quad \int_1^3 4x^3 dx &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n 4x_i^3 \Delta x \end{aligned}$$

الفصل 8: النهايات والاستنتاج

23

المصفوفة: انتاجات التناوبي

التاريخ: _____

الاسم: _____

8-5 تدريبات إعادة التعليم

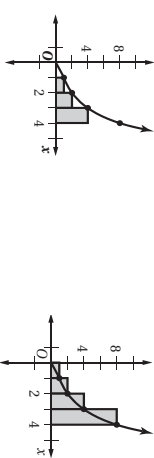
المساحة تحت المنحنى والتكامل

المساحة تحت منحنى: يمكنك استعمال مساحات مستطيلات لتقريب المساحة المحصورة بين منحنى دالة $f(x)$ والمحور x على الفترة $[a, b]$ ، الواقعة في مجال $f(x)$.

تقرب مساحة المنطقة المحصورة بين منحنى $f(x) = \frac{1}{x^2}$ والمحور x في الفترة $[0, 4]$ ، باستعمال مستطيلات عرض كل واحد منها وحدة واحدة، استعمل الأطراف اليمنى ثم اليسرى لتقديرات المستطيلات لتحديد ارتفاعها ثم احسب الوسط للتقريبين.

عند استعمال الأطراف اليمنى لتقديرات المستطيلات تنتج أربعة مستطيلات عرض كل منها وحدة واحدة. (الشكل A)، وعند استعمال الأطراف اليسرى للمستطيلات، تنتج أربعة مستطيلات عرض كل منها وحدة واحدة. (الشكل B).

مثال



الشكل B

الشكل A

المساحة باستعمال الأطراف اليسرى

$$\begin{aligned} R_1 &= 1 \cdot f(0) = 0 \\ R_2 &= 1 \cdot f(1) = 0.5 \\ R_3 &= 1 \cdot f(2) = 0.25 \\ R_4 &= 1 \cdot f(3) = 0.11 \dots \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} R_1 &= 1 \cdot f(1) = 0.5 \\ R_2 &= 1 \cdot f(2) = 0.25 \\ R_3 &= 1 \cdot f(3) = 0.11 \dots \\ R_4 &= 1 \cdot f(4) = 0.0625 \end{aligned}$$

أي أن المساحة باستعمال الأطراف اليمنى أو اليسرى هي 15 أو 7 وحدة مربعة على الترتيب، وهذا يعطي تقديراً أعلى وآخر أدنى للمساحة؛ $15 < \text{المساحة} < 7$. وبأخذ متوسط التقريبتين، فإن 11 يُعَدُّ تقريباً أفضل للمساحة.

تقاربت

(1) تقرب مساحة المنطقة المحصورة بين منحنى $f(x) = 3x^2 + 1$ والمحور x في الفترة $[0, 4]$ ، باستعمال مستطيلات عرض كل واحد منها وحدة واحدة، استعمل الأطراف اليمنى ثم اليسرى لتقديرات المستطيلات لتحديد ارتفاعها ثم احسب الوسط للتقريبين.

94 وحدة مربعة، 46 وحدة مربعة، 69.5 وحدة مربعة.

(2) تقرب مساحة المنطقة المحصورة بين منحنى $f(x) = -x^2 + 5x + 6$ والمحور x في الفترة $[1, 4]$ ، باستعمال مستطيلات عرض كل واحد منها وحدة واحدة، استعمل الأطراف اليمنى ثم اليسرى لتقديرات المستطيلات لتحديد ارتفاعها ثم احسب الوسط للتقريبين.

40 وحدة مربعة، 44 وحدة مربعة، 42 وحدة مربعة.

الفصل 8: النهايات والاستنتاج

22

المصفوفة: انتاجات التناوبي

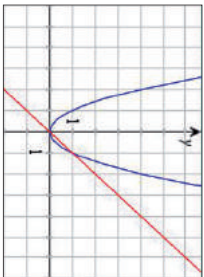
التاريخ: _____

الاسم: _____

8-5 التدريبات الإثرائية

إيجاد المساحة المحصورة بين منحنيين

إيجاد المساحة المحصورة بين منحنيين:
تعلّمت إيجاد المساحة المحصورة بين منحنى دالة والحور x .
أجب عن الأسئلة الآتية لإيجاد المساحة المحصورة بين دائرتين.



1 مثل كلًا من الدائرتين $y = x^2$ ، $y = x$

2 أوجد نقاط التقاطع بين الدائرتين: $y = x^2$ ، $y = x$

(0, 0), (1, 1)

3 أوجد الدائرتين أكبر في الفترة (0, 1)؟

$y = x$

4 أوجد كلًا من $\int_0^1 x dx$ ، $\int_0^1 x^2 dx$

$\frac{1}{2}$ ، $\frac{1}{3}$

5 أوجد كلًا من $\int_0^1 x dx$ ، $\int_0^1 x^2 dx$

$\frac{1}{6}$

6 ماذا يمثل الناتج في سؤال 6؟

مساحة المنطقة المحصورة بين الدائرتين.

7 أوجد $\int_0^1 (x^2 - x^3) dx$

$\frac{1}{6}$

8 قس الخطوط لإيجاد المساحة المحصورة بين دائرتين.

مسائل

انظر إجابات الطلاب

الفصل 8: النهايات والاستنتاج

25

الفصل 8: النهايات التناوبية

التاريخ: _____

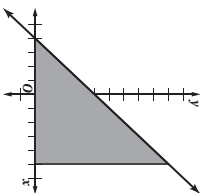
الاسم: _____

8-5 تدريبات حل المسألة

المساحة تحت المنحنى والتكامل

14 منطقة مثلثية، ارسم المثلث الكبر من الحور x والمستقيمين $x = 5$ و $x = x + 4$ ، $y = x$ على المستوى الإحداثي.

15 ظلّل المنطقة الداخلية للمثلث.



إجابة ممكنة:

16 أوجد طول القاعدة، وارتفاع المثلث، واستعملهما لحساب مساحة المثلث.

40.5: 9: 9 وحدة مربعة

17 أوجد مساحة المثلث بحساب التكامل

$$\int_0^5 (x + 4) dx$$

40.5 وحدة مربعة

18 يبدو بني علي زراعة حديقة منزله بالبدور، فإذا كانت مساحة الحديقة التي بني علي زراعتها بالإشارة

المربعة، تتعين بالتكامل: $\int_1^7 (-x^2 + 8x - 7) dx$ ،

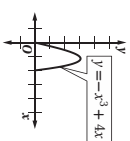
وكانت البدور التي يحوزها كمية لزراعة $35 m^2$ ، فهل

كففي البدور لزراعتها؟ وضح إجاباتك.

19 إجابة ممكنة: يحتاج إلى المزيد من البدور لزراعة $35 m^2$ ، $36 m^2$ ، في حين يوجد لديه بدور تكفي لزراعة $35 m^2$ فقط.

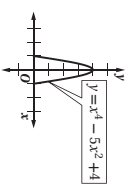
1 مدخل، مدخل، باب لعبة له الشكل الظاهر أدناه، في

مساحة المدخل إذا كانت x بالأقدام؟



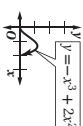
4 أقدام مربعة

2 متاهم، يتخذ مدخل متهم للفهم الشكل الظاهر أدناه، في مساحة المدخل إذا كانت x بالأتار؟



$\frac{1}{15}$ أمتار مربعة

3 سدود، يتخذ سطح سد الماء الشكل الظاهر أدناه، في مساحة سطح السد إذا كانت x بالكيلو متر؟



$\frac{1}{3}$ كيلومتر مربع

الفصل 8: النهايات والاستنتاج

24

الفصل 8: النهايات التناوبية

الاسم: التاريخ:

(تتمه)

8-6 تدريبات إعادة التعليم

النظرية الأساسية في التكامل والتفاضل في التكامل
النظرية الأساسية في التكامل والتفاضل، يُعرف التكامل غير المحدد للدالة $f(x)$ على أنه $C + F(x) = \int f(x) dx$ ، حيث $F(x)$ دالة أصلية للدالة $f(x)$ ؛ أي $F'(x) = f(x)$ و C ثابت.

إذا كانت دالة أصلية للدالة المتصلة $f(x)$ فإن $F(b) - F(a) = \int_a^b f(x) dx$	النظرية الأساسية في التكامل والتفاضل
ويمكن كتابة الطرف الأيمن للمعادلة في الصورة $F(x) \Big _a^b$	

أحسب كل تكامل عايلي:

مثال

(a) $\int (3x^2 + 4x - 1) dx = \frac{3x^{2+1}}{2+1} + \frac{4x^{1+1}}{1+1} - \frac{x^{0+1}}{0+1} + C$
قواعد الدالة الأصلية (ضرب القوة في عدد)

بسيط
بسيط
 $= \frac{3x^3}{3} + \frac{4x^2}{2} - x + C$
 $= x^3 + 2x^2 - x + C$

(b) $\int_2^4 (x^3 - 1) dx = \left(\frac{x^4}{4} - x \right) \Big|_2^4$
النظرية الأساسية في التكامل والتفاضل
 $= \left(\frac{4^4}{4} - 4 \right) - \left(\frac{2^4}{4} - 2 \right)$
 $= 60 - 2 = 58$
بسيط
 $b = 4; a = 2$

تقارنين

أوجد كل تكامل عايلي:

(1) $\int (3x^7 - x^2) dx = \frac{3x^{7+1}}{7+1} - \frac{x^{2+1}}{2+1} + C$
(2) $\int_1^2 (x^2 + 1) dx = \frac{x^3}{3} + x \Big|_1^2$
(3) $\int_1^2 (x^2 - 1) dx = \frac{x^3}{3} - x \Big|_1^2$
(4) $\int_{-1}^1 (x^3 - 2x + 1) dx = \frac{x^4}{4} - x^2 + x \Big|_{-1}^1$

الفصل 8: النهايات والاستنتاج

27

الصفحة: الثالث الثانوي

الاسم: التاريخ:

8-6 تدريبات إعادة التعليم

الدوال الأصلية وتكامل غير المحدد:
يُقال إن الدالة $F(x)$ هي دالة أصلية للدالة المعطاة $f(x)$ ، إذا كان $F'(x) = f(x)$.

قواعد الدوال الأصلية	
إذا كان $f(x) = x^n$ حيث n عدد حقيقي لا يساوي -1 ، فإن $F(x) = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C$	قاعدة القوة
إذا كان $f(x) = kx^n$ حيث n عدد حقيقي لا يساوي -1 ، فإن $F(x) = \frac{kx^{n+1}}{n+1} + C$	ضرب القوة في عدد
إذا كان $f(x) = G(x) \pm H(x)$ دالتين أصليتين للدالتين $f(x)$ و $g(x)$ على الترتيب، فإن $F(x) = G(x) \pm H(x)$	الجمع والطرح

أوجد جميع الدوال الأصلية لكل دالة عايلي:

مثال 1

(a) $f(x) = -3x^5$
الدالة المعطاة
قاعدة ضرب دالة القوة في عدد
 $f(x) = -3x^{5+1} = -\frac{3x^6}{6} + C = -\frac{1}{2}x^6 + C$

(b) $f(x) = x^3 + 4x^2 - 2$
الدالة المعطاة
إعادة كتابة الدالة
قواعد الدالة الأصلية
 $f(x) = x^3 + 4x^2 - 2x^0$
 $F(x) = \frac{x^{3+1}}{3+1} + \frac{4x^{2+1}}{2+1} - \frac{2x^{0+1}}{0+1} = \frac{1}{4}x^4 + \frac{4}{3}x^3 - 2x + C$
بسيط

تقارنين

أوجد جميع الدوال الأصلية لكل دالة عايلي:

(1) $f(x) = 2x^4 + 3x^2 - 5$
(2) $g(x) = \frac{2}{x^3} = 2x^{-3}$
(3) $l(x) = \frac{3}{4}x^6 - \frac{1}{2}x^3$
(4) $n(x) = \sqrt{x} - 2 = x^{\frac{1}{2}} - 2$
 $\frac{5}{6}x^{\frac{6}{5}} - 2x + C$

الفصل 8: النهايات والاستنتاج

26

الصفحة: الثالث الثانوي

الاسم: التاريخ:

8-6 التدرّيات الإثرائية

بعض خصائص التكامل

بعض خصائص التكامل،

اتبع الخطوات التالية للوصول إلى بعض خصائص التكامل المحدد:

$$\int_1^2 (2x^2 + 1) dx, \int_2^3 (2x^2 + 1) dx, \int_1^3 (2x^2 + 1) dx$$

أوجد كلًا من التكاملات الآتية: $\int_1^2 (2x^2 + 1) dx$

$$\int_1^2 (2x^2 + 1) dx + \int_2^3 (2x^2 + 1) dx = \int_1^3 (2x^2 + 1) dx$$

هل تعتقد أن هذه النتيجة صحيحة دائمًا؟

نعم

عُدم النتيجة التي توصلت لها في السؤال 2.

$$\int_a^b f(x) dx + \int_b^c f(x) dx = \int_a^c f(x) dx$$

$$\int_1^2 (2x^2 + 1) dx, \int_2^3 (2x^2 + 1) dx, \int_1^3 (2x^2 + 1) dx$$

أوجد $\int_1^2 (2x^2 + 1) dx$

$$\int_1^2 (2x^2 + 1) dx = - \int_2^1 (2x^2 + 1) dx$$

عُدم النتيجة التي توصلت لها في السؤال 6

$$\int_a^b f(x) dx = - \int_b^a f(x) dx$$

$$\int_2^3 (2x^2 + 1) dx = 0$$

$$\int_a^a f(x) dx = 0$$

$$\int_1^2 (5x^3 + 7) dx + \int_2^3 (2x + 4) dx + \int_3^5 (2x + 4) dx$$

الفصل 8 : النهايات والاستنتاج

29

الفصل 8 : النهايات والتناوب

الاسم: التاريخ:

8-6 تدريبات حل المسألة

الانظرية الأساسية في التفاضل والتكامل

1) اوجد المعالي، تدرّب محمود على الرّيب العالي في حصة

الزّرية الرياضية، فتمكن وصف سرعته في أثناء الوثبة

بالمعادلة: $s(t) = -32t + 24$ ، حيث t بالثواني والسّرع

بالأقدام لكل ثانية.

$$\int_0^3 \pi(x^2)^2 dx$$

أوجد دالة موقع محمود $s(t)$ ، فمقرّصًا أن $s(0) = 0$ ،

$$s(t) = -16t^2 + 24t$$

عندما $t = 0$.

ب) عندما وثب محمود، كم استغرق من الوقت

$$s(t) = -16t^2 + 24t$$

للوصول إلى الأرض؟

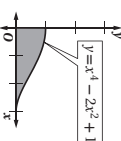
1.5 ثانية

إعلان: الشكل أدناه يمثّل شعارًا لشركة جديدة، ما

المساحة التي سيمثلها الشعار إذا قررت الشركة

وضعه على قمصان تابعة لها؟ علّم بأن x بالبرصات

وتقع بين 0 و 1؟



$$\frac{8}{15} \text{ بوصة مربعة}$$

3) شدّ زيفرف، يُعبر عن الشغل بالجول اللازم لشدّ زيفرف لك

مسافة 36 m وضعه الطبيعي بالمعادلة:

$$\int_0^3 80x dx$$

$$360 \text{ جول}$$

الفصل 8 : النهايات والاستنتاج

28

الفصل 8 : النهايات والتناوب