



وزارة التربية والتعليم
Ministry of Education
المملكة العربية السعودية

الرياضيات

للف الثاني الثانوي

مصادر المعلم للأنشطة الصفية

الفصل السادس: المتتابعات والمتسلسلات

Glencoe Mathematics © 2010
CHAPTER RESOURCE MASTERS
Algebra 2

الرياضيات - الصف الثاني الثانوي
مصادر المعلم للأنشطة الصفية
أعدت النسخة العربية: شركة العبيكان للأبحاث والتطوير

www.obeikaneducation.com



English Edition Copyright © the McGraw-Hill Companies, Inc.
All rights reserved.

Arabic Edition is published by Obeikan under agreement with
The McGraw-Hill Companies, Inc. © 2008.



حقوق الطبع الإنجليزية محفوظة لشركة ماجروهل ©.

الطبعة العربية: مجموعة العبيكان للاستثمار
وفقاً لاتفاقيتها مع شركة ماجروهل © ٢٠٠٨م / ١٤٢٩هـ.

لا يسمح بإعادة إصدار هذا الكتاب أو نقله في أي شكل أو واسطة، سواء أكانت إلكترونية أو ميكانيكية، بما في ذلك التصوير بالنسخ «فوتوكوبي»، أو التسجيل، أو التخزين والاسترجاع، دون إذن خطي من الناشر.

بِسْمِ اللَّهِ الرَّحْمَنِ الرَّحِيمِ

الحمد لله والصلاة والسلام على نبينا محمد وعلى آله وصحبه أجمعين، وبعد:

عزيزي المعلم / عزيزتي المعلمة

يسرنا أن نقدم هذه المجموعة من التدريبات المساندة، التي تراعي الفروق الفردية بين الطلاب. حيث نطمح أن يساعدك التنوع في هذه التدريبات على الوصول إلى جميع الطلاب في الصف، مهما تباينت مستوياتهم.

وقد تم تخصيص صفحة أو أكثر لكل نوع من هذه التدريبات؛ لتغطي درسًا من دروس كتاب الطالب. حيث يمكنك أن تكلف الطلاب حل صفحة التدريبات المقابلة لكل درس بحسب مستوى كل منهم؛ سواء في داخل الصف أم في المنزل. وليست هذه التدريبات بديلاً عن كتاب التمارين، ولكنها مساندة ومكملة له. وتشمل هذه التدريبات الأنواع التالية:

تدريبات إعادة التعليم

تركز هذه التدريبات على محتوى الدروس في كتاب الطالب، وتقدمه بأسلوب تدريسي ومعالجة يختلفان عن كتابي الطالب والتمارين. وهي موجهة إلى الطلاب ذوي المستوى دون المتوسط. ولأهمية حل المسألة تم تخصيص صفحتين من تدريبات إعادة التعليم لكل درس من دروس حل المسألة؛ للتركيز على كيفية اختيار الخطة وتنفيذها، بالإضافة إلى مجموعة من التدريبات المناسبة لتطبيق تلك الخطة.

تدريبات المهارات

تركز هذه التدريبات غالباً على المهارات الحسابية الموجودة في الدرس، وتتضمن تدريبات إضافية وسائل تركز على تلك المهارات. وهي موجهة إلى الطلاب ذوي المستوى المتوسط.

التدريبات الإثرائية

تساعد هذه التدريبات على التوسع في مفاهيم الدرس، كما تؤدي إلى توسيع مدارك الطلاب حول تعلم الرياضيات بشكل عام. وهذه التدريبات موجهة إلى الطلاب ذوي المستوى فوق المتوسط.

ملحق الإجابات:

يتضمن هذا المصدر في آخره ملحقاً بالإجابات، حيث تظهر باللون الأسود الغامق على صفحات مصفّرة.

المقدمة 4

الدرس 6-1 المتتابعات بوصفها دوال

تدريبات إعادة التعليم	6
تدريبات المهارات	8
تدريبات حل المسألة	9
التدريبات الإثرائية	10

الدرس 6-4 المتسلسلات الهندسية غير المنتهية

تدريبات إعادة التعليم	21
تدريبات المهارات	23
تدريبات حل المسألة	24
التدريبات الإثرائية	25

الدرس 6-2 المتتابعات والمتسلسلات الحسابية

تدريبات إعادة التعليم	11
تدريبات المهارات	13
تدريبات حل المسألة	14
التدريبات الإثرائية	15

الدرس 6-5 نظرية ذات الحدين

تدريبات إعادة التعليم	26
تدريبات المهارات	28
تدريبات حل المسألة	29
التدريبات الإثرائية	30

الدرس 6-3 المتتابعات والمتسلسلات الهندسية

تدريبات إعادة التعليم	16
تدريبات المهارات	18
تدريبات حل المسألة	19
التدريبات الإثرائية	20

الدرس 6-6 البرهان بالاستقراء الرياضي

تدريبات إعادة التعليم	31
تدريبات المهارات	33
تدريبات حل المسألة	34
التدريبات الإثرائية	35
ملحق الإجابات	36

تدريبات إعادة التعليم

6-1

المتتابعات بوصفها دوال

المتتابعات الحسابية: المتتابعة الحسابية هي متتابعة من الأعداد ينتج كل حد فيها من إضافة أساس المتتابعة (الفرق المشترك) إلى الحد السابق له.

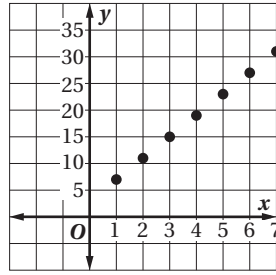
الحد النوني في متتابعة حسابية	حيث a_1 هو الحد الأول، d : أساس المتتابعة، n : أي عدد صحيح موجب.
-------------------------------	--

مثال أوجد الحدود الأربعة التالية في المتتابعة الحسابية ... 7, 11, 15، ثم مثل الحدود السبعة الأولى للمتتابعة بيانياً.

أوجد أساس المتتابعة عن طريق طرح حدين متتاليين.
 $11 - 7 = 4$ و $15 - 11 = 4$ ، لذا فإن $d = 4$.

الآن اجمع 4 للحد الثالث من المتتابعة، ثم واصل الجمع بإضافة 4 حتى تجد الحدود الأربعة المطلوبة. الحدود الأربعة التالية هي: 19, 23, 27, 31.

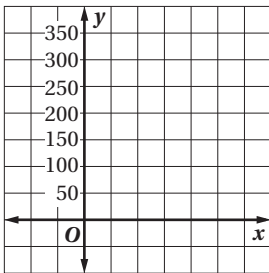
عين كل نقطة من النقاط (1,7), (2, 11), (3,15), (4, 19), (5,23), (6, 27), (7,31) على المستوى الإحداثي.



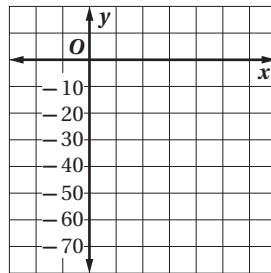
تمارين

أوجد الحدود الأربعة التالية في كل من المتتابعات الحسابية الآتية. ثم مثل المتتابعة بيانياً:

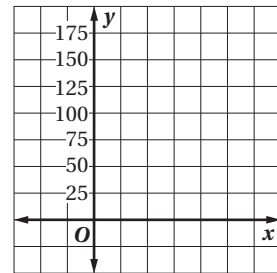
(3) 207, 194, 181, ...



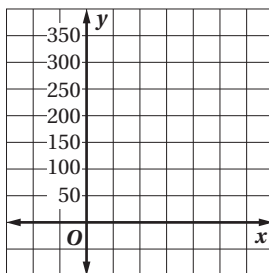
(2) -28, -31, -34, ...



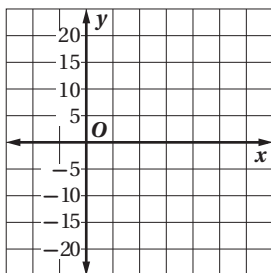
(1) 106, 111, 116, ...



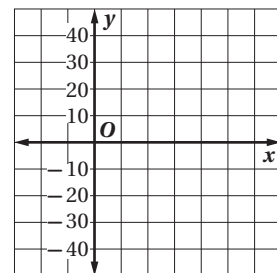
(6)



(5)



(4)



6-1

تدريبات إعادة التعليم

(تتمة)

المتتابعات بوصفها دوال

المتتابعات الهندسية

المصطلح	التعريف	مثال
أساس المتتابعة الهندسية	$r = a_{n+1} \div a_n$	الأساس في متتابعة هندسية حدودها المتتالية $\dots, 5, 10, \dots$ هو $10 \div 5 = 2$
الحد النوني في المتتابعة الهندسية	$a_n = a_1 (r^{n-1})$ حيث a_1 الحد الأول، و r الأساس.	الحد الرابع في متتابعة هندسية الحد الأول منها 5، وأساسها 2 هو $5(2^{4-1}) = 40$

مثال

أوجد الحدود الثلاثة التالية في المتتابعة الهندسية $2, 6, 18, \dots$ ، ثم مثل المتتابعة بيانيًا.

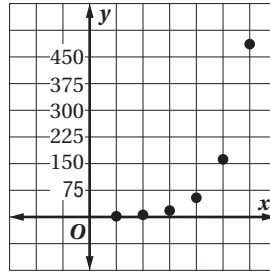
أوجد الأساس بقسمة حدين متتاليين.

 $6 \div 2 = 3$ و $18 \div 6 = 3$ ، لذا فإن $r = 3$

الآن اضرب الحد الثالث للمتتابعة في العدد 3، ثم واصل الضرب في العدد 3 حتى تجد الحدود الثلاثة المطلوبة.

الحدود الثلاثة التالية هي 54، 162، 486

أوجد المجال والمدى للحدود الستة الأولى في المتتابعة.

المجال: $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ المدى: $\{2, 6, 18, 54, 162, 486\}$ 

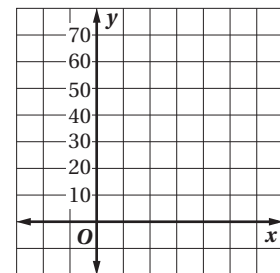
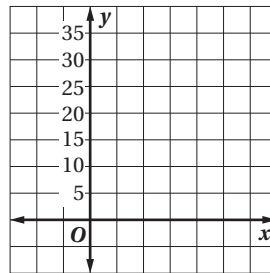
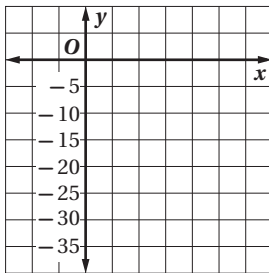
تمارين

أوجد الحدود الثلاثة التالية في كل من المتتابعات الهندسية الآتية، ثم مثل المتتابعة بيانيًا:

(9) $-24, -12, -6, \dots$

(8) $20, 4, \frac{4}{5}, \dots$

(7) $\frac{1}{16}, \frac{1}{4}, 1, \dots$



تدريبات المهارات

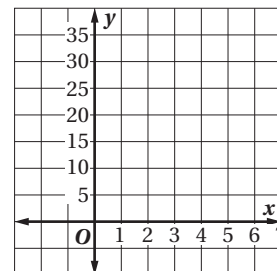
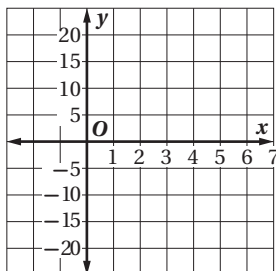
6-1

المتتابعات بوصفها دوال

أوجد الحدود الأربعة التالية في كل من المتتابعات الحسابية الآتية، ثم مثل المتتابعة بيانياً.

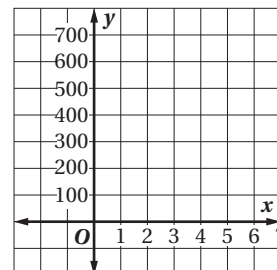
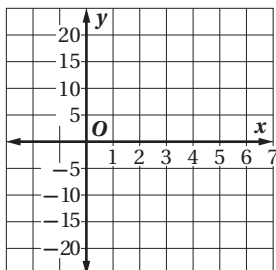
(2) $-10, -5, 0, \dots$

(1) $7, 11, 15, \dots$



(4) $15, 7, -1, \dots$

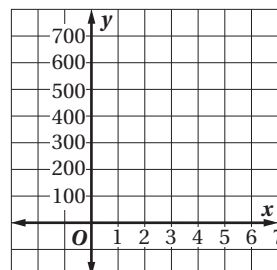
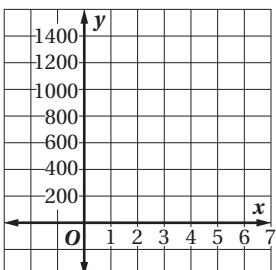
(3) $101, 202, 303, \dots$



أوجد الحدود الثلاثة التالية في كل من المتتابعات الهندسية الآتية، ثم مثل المتتابعة بيانياً.

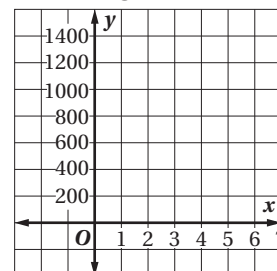
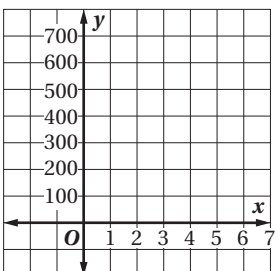
(6) $\frac{2}{5}, 2, 10, \dots$

(5) $\frac{1}{2}, 2, 8, \dots$



$13, 26, 52, \dots$

$6\frac{1}{3}, 19, 57, \dots$



6-1

تدريبات حل المسألة

المنتabعات بوصفها دوال

(1) **توفير:** وفّر خالد 370 ريالاً ليشترى دراجة، واستمر بتوفير 10 ريالات كل أسبوع. أوجد مجموع ما وفّره بعد 7 أسابيع.

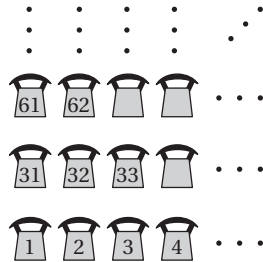
(2) **نمو الشعر:** في شهر فبراير كان طول شعر سعاد

47.0 سم، فواظبت على قياس طول شعرها كل شهر؛ لتتابع نموّه، فوجدت أن طوله بلغ 50.1 سم في مارس؛ وفي إبريل 53.2 سم، وفي مايو 56.3 سم، وفي يونيو 59.4 سم. استعمل متسلسلة حسابية، وأوجد أساسها، وحدّد معدل نموّ شعرها الشهري.

(3) **بكتيريا:** بكتيريا ستريتوكوكس بنيمونيا أحد أنواع

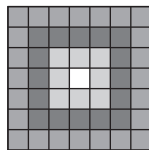
البكتيريا التي تسبّب مرض ذات الرئة. ويمكن أن تضاعف هذه البكتيريا عددها خلال 20 دقيقة. إذا بدأت عينة عددها 300 بكتيريا، وتضاعفت كل 20 دقيقة، فاستخدم متسلسلة هندسية لإيجاد عدد البكتيريا في العينة بعد 80 دقيقة.

(4) **جلوس:** تحاول خلود إيجاد مقعدها في مسرح. والمقاعد مرقّمة بالتتابع من اليسار إلى اليمين. وفي كل صف 30 مقعداً.



يبين الشكل أعلاه بعض المقاعد في الزاوية اليسرى بالقرب من المنصة. تقف خلود عند المقعد 129، وعليها أن تجد المقعد 219. لاحظت أن أرقام المقاعد في العمود الواحد تشكل متتابة حسابية. ما أرقام المقاعد الأربعة التالية في العمود الذي يقع فيه المقعد 129 إذا تحركنا إلى أعلى بعيداً عن المنصة؟ وأين يتعين أن تذهب لتجد مقعدها؟ في أي صف وأي عمود سيكون مقعدها؟

(5) **حلقات:** ما عدد المربعات الصغيرة في الحلقات الثلاث الأولى في الشكل؟



(a) إذا تكرر النمط، فاكتب صيغة لعدد المربعات في الحلقة رقم n .

(b) ما طول ضلع الحلقة رقم n ؟

تدريبات إثرائية

6-1

متابعة فيبوناشي

اكتشف ليوناردو فيبوناشي متابعة الأعداد التي سُميت باسمه في أثناء دراسته على الأرانب. وأراد أن يعرف عدد أزواج الأرانب التي يمكن أن تنتج في n شهرًا، بداية من زوج واحد من الأرانب الحديثة الولادة. ولقد وضع الافتراضات التالية.

- (1) تصبح الأرانب حديثة الولادة بالغة خلال شهر واحد.
- (2) ينتج كل زوج من الأرانب زوجًا واحدًا كل شهر.
- (3) عدم وفاة أي أرنب.

لتكن F_n عدد الأرانب في نهاية n شهر. إذا بدأت بزواج واحد من الأرانب الحديثة الولادة، $F_0 = F_1 = 1$ ، وهذا الزوج قد ينتج زوجًا جديدًا في نهاية الشهر الثاني، لذا فإن $F_2 = 1 + 1 = 2$. وسينتج الزوج الأول زوجًا آخر في نهاية الشهر الثالث، لذا فإن $F_3 = 2 + 1 = 3$.

يبين الجدول أدناه عدد الأرانب في كل شهر لعدة أشهر.

الشهر	عدد الأزواج البالغين	عدد الأزواج الحديثي الولادة	الإجمالي
F_0	0	1	1
F_1	1	0	1
F_2	1	1	2
F_3	2	1	3
F_4	3	2	5
F_5	5	3	8

تمارين

- (1) بدءًا بزواج واحد من الأرانب الحديثة الولادة، ما عدد أزواج الأرانب في نهاية 12 شهر؟

اكتب الحدود العشرة الأولى في المتابعة التي فيها:

$$F_n = F_{n-2} + F_{n-1} \text{ و } F_1 = 3, F_2 = 4 \quad (2)$$

$$F_n = F_{n-2} + F_{n-1} \text{ و } F_1 = 1, F_2 = 5 \quad (3)$$

6-2

تدريبات إعادة التعليم

المتتابعات والمتسلسلات الحسابية

المتتابعة الحسابية

المصطلح	التعريف	مثال
أساس المتتابعة الحسابية (الفرق المشترك)	$d = a_{n+1} - a_n$	الأساس في المتتابعة الحسابية ... 5, 7, ... هو $7 - 5 = 2$
الحد النوني في متتابعة حسابية	هو أساس المتتابعة، و n هو أي عدد صحيح موجب. حيث $a_n = a_1 + (n-1)d$	الحد الرابع في المتتابعة الحسابية التي تبدأ بالعدد 3 وأساسها 2 هو: $3 + (3 \times 2) = 9$

مثال 1

أوجد الحد الثالث عشر في المتتابعة الحسابية التي فيها $a_1 = 21$ و $d = -6$.

استعمل صيغة الحد النوني في المتتابعة الحسابية بتعويض $n = 13$ ، $a_1 = 21$ و $d = -6$.

صيغة الحد النوني

$$a_n = a_1 + (n-1)d$$

$$n = 13, a_1 = 21, d = -6$$

$$a_{13} = 21 + (13-1)(-6)$$

المتتابعة

$$a_{13} = -51$$

مثال 2

اكتب صيغة للحد النوني في المتتابعة الحسابية ... 13, 4, -5, -14.

في هذه المتتابعة $a_1 = -14$ و $d = 9$.

باستخدام صيغة a_n لكتابة معادلة

$$a_n = a_1 + (n-1)d$$

$$a_1 = -17, d = 9$$

$$a_n = -14 + (n-1)9$$

خاصية التوزيع

$$a_n = -14 + 9n - 9$$

بالتبسيط

$$a_n = 9n - 23$$

تمارين

أوجد قيمة الحد المطلوب في كل متتابعة حسابية مما يأتي:

(1) الحد العشرون في المتتابعة الحسابية التي فيها $a_1 = 15$ و $d = 4$.

(2) الحد السابع في المتتابعة الحسابية التي فيها $a_1 = -81$ و $d = 12$.

(3) a_{31} في المتتابعة الحسابية ... 18, 15, 12, 9, ...

(4) a_{100} في المتتابعة الحسابية ... -63, -58, -53, -48, ...

اكتب صيغة للحد النوني في كل متتابعة حسابية مما يأتي:

$$a_1 = 15 \text{ و } d = 38 \quad (5)$$

$$a_1 = 72 \text{ و } d = -13 \quad (6)$$

$$-56, -39, -22, -5, \dots \quad (7)$$

$$-94, -52, -10, 32, \dots \quad (8)$$

6-2

تدريبات إعادة التعليم

(تتمة)

المتابعات والمتسلسلات الحسابية

المتسلسلة الحسابية: يستخدم الحرف اللاتيني Σ لتمثيل المتسلسلة. رمز المجموع للمتسلسلة $6+12+18+24+30$

$$\sum_{n=1}^5 6n \text{ هو}$$

المجموع الجزئي للمتسلسلة الحسابية	مجموع أول n حدًا (S_n) من متسلسلة حسابية يُعطى بالعلاقة $S_n = \frac{n}{2}(a_1 + a_n)$ ، أو $S_n = \frac{n}{2}[2a_1 + (n-1)d]$
--------------------------------------	---

$$\sum_{k=1}^{18} (3k + 4) \text{ أوجد قيمة}$$

مثال 2

أوجد S_n للمتسلسلة الحسابية التي فيها

$$a_1 = 14, a_n = 101, n = 30$$

مثال 1

استخدم صيغة مجموع المتسلسلة الحسابية

$$\text{صيغة المجموع} \quad S_n = \frac{n}{2}(a_1 + a_n)$$

$$n = 30, a_1 = 14, a_n = 101 \quad S_{30} = \frac{30}{2}(14 + 101)$$

$$\text{بالتبسيط} \quad = 15(115)$$

$$\text{بالضرب} \quad = 1725$$

مجموع المتسلسلة هو 1725

المجموع هو متسلسلة حسابية أساسها 3، بتعويض

$$k = 1 \text{ و } k = 18 \text{ في العبارة } 3k + 4$$

تحصل على

$$a_{18} = 3(18) + 4 = 58 \text{ و } a_1 = 3(1) + 4 = 7$$

هناك 18 حدًا في المتسلسلة، لذا $n = 18$. استخدم

صيغة مجموع المتسلسلة الحسابية.

$$\text{صيغة المجموع} \quad S_n = \frac{n}{2}(a_1 + a_n)$$

$$n = 18, a_1 = 7, a_n = 58 \quad S_{18} = \frac{18}{2}(7 + 58)$$

$$\text{بالتبسيط} \quad = 9(65)$$

$$\text{بالضرب} \quad = 585$$

$$\sum_{k=1}^{18} (3k + 4) = 585 \text{ إذن}$$

تمارين

أوجد مجموع حدود كل متسلسلة حسابية مما يأتي:

$$(1) \quad a_1 = 12, a_n = 100,$$

$$(2) \quad a_1 = 50, a_n = -50,$$

$$n = 12$$

$$n = 15$$

$$(3) \quad a_1 = 20, d = 4,$$

$$(4) \quad a_1 = 180, d = -8,$$

$$a_n = 112$$

$$a_n = 68$$

$$(5) \quad a_1 = 42, n = 8, d = 6$$

$$(6) \quad a_1 = 4, n = 20, d = 2\frac{1}{2}$$

$$(8) \quad 16 + 22 + 28 + \dots + 112$$

$$(7) \quad 8 + 6 + 4 + \dots + -10$$

$$(10) \quad \sum_{n=20}^{50} (3n + 4)$$

$$(9) \quad \sum_{n=18}^{42} (4n - 9)$$

تدريبات المهارات

6-2

المتتابعات والمتسلسلات الحسابية

أوجد قيمة الحد المطلوب في كلٍّ من المتتابعات الحسابية الآتية:

(1) $a_1 = 56, d = 13, n = 73$

(2) a_{19} في المتتابعة $16, 32, 48, \dots$

اكتب صيغة الحد النوني في كل متتابعة حسابية فيما يأتي:

(3) $64, 78, 92, 106, \dots$

(4) $-416, -323, -230, -137, \dots$

أوجد الأوساط الحسابية في كل من المتتابعات الحسابية الآتية:

(5) $17, _, _, _, 41$

(6) $235, _, _, _, _, _, 32$

أوجد مجموع كل من المتسلسلات الحسابية الآتية:

(8) $5 + 8 + 11 + 14 + \dots + 32$

(7) $1 + 4 + 7 + 10 + \dots + 43$

(10) $-2 + (-5) + (-8) + \dots + (-20)$

(9) $3 + 5 + 7 + 9 + \dots + 19$

(12) $\sum_{n=1}^{18} (10 + 3n)$

(11) $\sum_{n=1}^5 (2n - 3)$

(14) $\sum_{n=5}^{12} (4 - 3n)$

(13) $\sum_{n=2}^{10} (4n + 1)$

أوجد الحدود الثلاثة الأولى في كل من المتتابعات الحسابية الآتية:

(16) $a_1 = -3, a_n = 41, S_n = 228$

(15) $a_1 = 4, a_n = 31, S_n = 175$

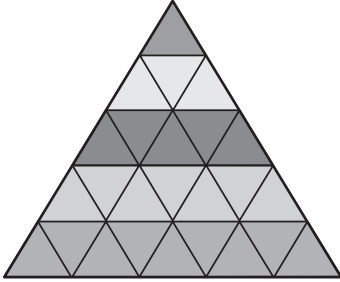
(18) $n = 19, a_n = 85, S_n = 760$

(17) $n = 10, a_n = 41, S_n = 230$

تدريبات حل المسألة

المتتابعات والمتسلسلات الحسابية

(4) مثلثات؛ صُمِّمَ مثلث من عدد من المثلثات المتطابقة الأضلاع كما في الشكل.



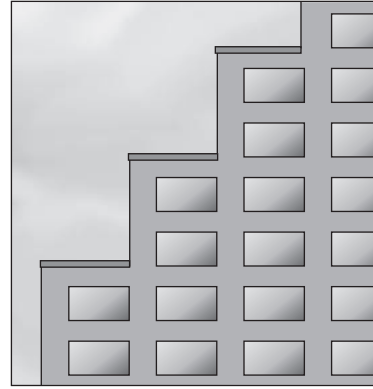
(a) بدءًا من القمة يحتوي كل صف على مثلثات أكثر من الصف الذي قبله. اكتب صيغة لعدد المثلثات في الصف n .

(b) إذا احتوى الشكل على N صف من المثلثات الصغيرة، فما عدد المثلثات الصغيرة التي استخدمت في تكوينه؟ اكتب إجابتك مستخدمًا رمز المجموع.

(c) أوجد قيمة المجموع الذي كتبت في الفرع b .

(1) نوافذ: أحد جوانب مبنى مصمَّم على شكل درج.

نوافذه مرتبة في أعمدة. يحتوي العمود الأول على نافذتين. والعمود الثاني على 4، والعمود الثالث على 6 وهكذا. ما عدد النوافذ على جانب البناية إذا كان فيها 15 عمودًا؟



(2) كتل: يمتلك عبدالله مجموعة أثقال لجهاز الرياضة المنزلي. كتلها بالكيلوجرامات تشكل المتتابعة: 5, 10, 15, ..., 80، إذا كان لديه ثقلان من كل كتلة، فما كتلة الأثقال التي يمتلكها جميعها؟

(3) تدريب: يتدرب محمد ليشارك في الماراثون. إذا ركض مسافة 20 ميلًا في أسبوعه الأول من التدريب، وكان عدد الأميال التي يركضها يزيد بمقدار 4 أميال في كل أسبوع عن الأسبوع السابق له، فما عدد الأميال التي يركضها في 8 أسابيع من التدريب؟

6-2

تدريبات إثرائية

المتسلسلات الحسابية في برامج الكمبيوتر

تستعمل المتسلسلات الحسابية في تحليل فاعلية برامج الكمبيوتر. وأجهزة الكمبيوتر، وبدون جهد يذكر تُشغل المهام التي تستهلك الوقت أوتوماتيكياً، والمهام المتكررة تكون عمليات جمع الأعداد وضربها غالباً. تنفذ هذه المهام المتكررة باستخدام عبارة (حلقة) تكتب بإحدى لغات البرمجة لتنفيذ الحسابات. وتكرر العبارة الحسابات عادة، ويتبعها عبارة تعيين (تخصيص)، التي تخصص العدد لمكان معين في ذاكرة الكمبيوتر.

افترض أنك كنت تكتب برنامجاً لحساب مجموع الأعداد من 1 إلى 10، أي $1+2+3+4+5+6+7+8+9+10$. يمكن استخدام خوارزميتين لحساب هذه المتسلسلة، يبينها الجدول وفق تسلسل خطوات الخوارزمية في العمود الأيمن.

الخوارزمية	رقم الخطوة
خصص في الذاكرة $s = 1$	1
خصص $j = 2$	2
إذا كان $j < 11$ ، فنقذ الخطوتين 4 و 5	3
خصص $s = s + j$	4
خصص $j = j + 1$	5

1) اكتب جزءاً من الخوارزمية بالرموز (كما في الجدول). ولقيم معطاة للرموز a و d و n الدالة على الحد الأول

$$\sum_{i=0}^n (a + id)$$

والأساس، وعدد الحدود على الترتيب، لحساب مجموع المتسلسلة الحسابية

2) يستعمل المجموع الثنائي في تحليل حلقات متضمنة (حلقة داخل حلقة). احسب المجموع الثنائي أدناه. ابدأ بالمجموع الداخلي أولاً، ثم أكمل إلى المجموع الخارجي.

$$\sum_{i=1}^4 \sum_{j=1}^3 ij = \sum_{i=1}^4 (i + 2i + 3i) = \sum_{i=1}^4 6i = 6 + 12 + 18 + 24 = 60$$

وتذكر أيضاً أن مجموع المتسلسلة الحسابية يساوي $\frac{n}{2}(a_1 + a_n)$ ، حيث n عدد الحدود في المتسلسلة، a_1 الحد الأول في المتسلسلة و a_n الحد الأخير. والآن احسب قيمة:

$$\sum_{i=1}^2 \sum_{j=1}^2 (2i + 3j)$$

6-3

تدريبات إعادة التعليم

المتتابعات والمتسلسلات الهندسية

المتتابعة الهندسية: المتتابعة الهندسية هي المتتابعة التي يكون فيها كل حد بعد الحد الأول حاصل ضرب الحد السابق بعدد ثابت يسمى أساس المتتابعة (النسبة المشتركة).

الحد النوني في متتابعة هندسية	حيث $a_n = a_1 r^{n-1}$ هو الحد الأول، r أساس المتتابعة الهندسية، و n هو أي عدد صحيح موجب.
-------------------------------	--

مثال 1

أوجد الحدين التاليين في المتتابعة

الهندسية ... 1200, 480, 192

بما أن $\frac{192}{480} = 0.4$ و $\frac{480}{1200} = 0.4$ ، فإن أساس المتتابعة هو 0.4. والحدين التاليين في المتتابعة

هما $192(0.4) = 76.8$ و $76.8(0.4) = 30.72$

مثال 2

اكتب معادلة الحد النوني في المتتابعة

الهندسية ... 3.6, 10.8, 32.4

في هذه المتتابعة $a_1 = 3.6$ و $r = 3$. استخدم صيغة الحد النوني n في كتابة المعادلة.

$$a_n = a_1 r^{n-1}$$

$$a_1 = 3.6, r = 3 \quad = 3.6(3)^{n-1}$$

معادلة الحد النوني هي $a_n = 3.6(3)^{n-1}$

تمارين:

أوجد a_n في كل متتابعة هندسية مما يأتي:

$$(1) \quad a_1 = -10, r = 4, n = 2 \quad (2) \quad a_1 = -6, r = -\frac{1}{2}, n = 8 \quad (3) \quad a_3 = 9, r = -3, n = 7$$

$$(4) \quad a_4 = 16, r = 2, n = 10 \quad (5) \quad a_4 = -54, r = -3, n = 6 \quad (6) \quad a_1 = 8, r = \frac{2}{3}, n = 5$$

$$(7) \quad a_1 = 7, r = 3, n = 5 \quad (8) \quad a_1 = 46875, r = \frac{1}{5}, n = 7 \quad (9) \quad a_1 = -34816, r = \frac{1}{2}, n = 6$$

اكتب معادلة الحد النوني في كل من المتتابعات الهندسية الآتية:

$$(10) \quad 500, 350, 245, \dots \quad (11) \quad 8, 32, 128, \dots$$

$$(12) \quad 11, -24.2, 53.24, \dots \quad (13) \quad 9, 54, 324, 1944, \dots$$

$$(14) \quad 17, 187, 2057, 22627, \dots \quad (15) \quad -53, -424, -3392, -27136, \dots$$

تدريبات إعادة التعليم

المتتابعات والمتسلسلات الهندسية

المتسلسلة الهندسية: المتسلسلة الهندسية هي مجموع حدود متتابعة هندسية. يرمز لمجموع أول n من الحدود في المتسلسلة بالرمز S_n .

<p>مجموع أول n حد S_n لقيم معطاة لـ a_1 و n يعطى بالصيغة:</p> $S_n = \frac{a_1 - a_1 r^n}{1 - r}, r \neq 1$ <p>مجموع أول n حد S_n لقيم معطاة لـ a_1 و n يعطى بالصيغة:</p> $S_n = \frac{a_1 - a_n r}{1 - r}, r \neq 1$	<p>المجموع الجزئي لمتسلسلة هندسية</p>
---	---

أوجد a_1 في المتسلسلة الهندسية التي

مثال 2

فيها $r=2$ ، $n=8$ ، $S_n = 1530$

صيغة المجموع $S_n = \frac{a_1 - a_1 r^n}{1 - r}$

$S_n = 1530, r = 2, n = 8$ $1530 = \frac{a_1 - a_1(2)^8}{1 - 2}$

خاصية التوزيع $1530 = \frac{a_1(1 - 2^8)}{1 - 2}$

بالطرح $1530 = \frac{-255a_1}{-1}$

بالتبسيط $1530 = 255a_1$

بقسمة كل طرف على 255 $6 = a_1$

أوجد $\sum_{n=2}^7 5(3)^{n-1}$

مثال 1

أوجد r و n و a_1 في الحد الأول $n = 2$ و $a_1 = 5(3)^{2-1} = 15$ و أساس الدالة الأسية هو r ، لذا فإن $r = 3$. هناك حدود عددها $7-2+1=6$ لذا فإن $n = 6$.

صيغة المجموع $S_n = \frac{a_1 - a_1 r^n}{1 - r}$

$a_1 = 15, r = 3, n = 6$ $= \frac{15 - 15(3)^6}{1 - 3}$

باستعمال الآلة الحاسبة $= 5460$

تمارين:

أوجد مجموع كل من المتسلسلات الهندسية الآتية:

(3) $\sum_{k=3}^{10} 4(-1)^{k-1}$

(2) $\sum_{k=1}^5 (-3)(4)^{k-1}$

(1) $\sum_{k=4}^6 2(-3)^{k-1}$

(6) $\sum_{k=2}^{10} 3(3)^{k-1}$

(5) $\sum_{k=5}^{15} (-10)(-1)^{k-1}$

(4) $\sum_{k=3}^7 (-1)(5)^{k-1}$

أوجد قيمة a_1 في كل من المتسلسلات الهندسية الآتية:

(8) $S_n = 29127, n = 9, r = 4$

(7) $S_n = 720, n = 4, r = 3$

(10) $S_n = -936, r = 5, a_n = -750$

(9) $S_n = -6552, r = 3, a_n = -4374$

تدريبات المهارات

6-3

المتتابعات والمتسلسلات الهندسية

أوجد a_n في كل من المتتابعات الهندسية الآتية:

(2) $a_1 = 18, r = 3, n = 6$

(1) $a_1 = 5, r = 2, n = 6$

(4) $a_1 = -20, r = -2, n = 9$

(3) $a_1 = -3, r = -2, n = 5$

(6) $a_1 = -78125, r = \frac{1}{5}, n = 9$

(5) $a_1 = 65536, r = \frac{1}{4}, n = 6$

اكتب معادلة الحد النوني في كل من المتتابعات الهندسية الآتية:

(8) $-1, -3, -9, \dots$

(7) $3, 9, 27, \dots$

(10) $5, 10, 20, \dots$

(9) $2, -6, 18, \dots$

(12) $32768, 4096, 512, 64, \dots$

(11) $12, 36, 108, 324, \dots$

(14) $-16384, -8192, -4096, -2048, \dots$

(13) $25, 175, 1225, 8575, \dots$

أوجد الأوساط الهندسية المطلوبة في كل من المتتابعات الهندسية الآتية:

(16) $1, _, _, _, 81$

(15) $4, _, _, _, 64$

(18) $51, _, 4131, _, 334611, \dots$

(17) $38, 228, _, 8208, 49248, \dots$

(20) $531441, _, _, _, _, 9, \dots$

(19) $-15, _, _, _, -240, \dots$

أوجد a_1 في كل من المتسلسلات الهندسية الآتية:

(22) $S_n = 1640, r = 3, n = 8$

(21) $S_n = 1295, r = 6, n = 4$

(24) $S_n = -342, a_n = -512, r = -2$

(23) $S_n = 218\frac{2}{5}, a_n = 1\frac{2}{5}, r = \frac{1}{5}$

6-3

تدريبات حل المسألة

المتتابعات والمتسلسلات الهندسية

(1) الأساس 10: عندما يكون الأساس في متسلسلة هندسية ما مساوياً 10، فمن السهل أحياناً حساب المجموع، لأننا نستخدم النظام العشري للأعداد. على سبيل المثال، ما مجموع $1 + 10 + 10^2 + 10^3 + 10^4 + 10^5$ ؟

(2) دعوات: تريد مريم أن تقيم حفلة، فدعت إليها 3 صديقات، وطلبت من كل صديقة أن تدعو 3 صديقات أخريات، وهكذا قامت كل واحدة بدعوة 3 صديقات أخريات. إذا استمرت عملية الدعوة على 5 مراحل، فما عدد المدعوات إلى الحفلة؟

(3) قانون مور: اقترح غوردون مور، المؤسس المساعد لإنترنت، أن يتضاعف عدد الترانزستورات على الإنش المربع من الدائرة المتكاملة في شركة الكمبيوتر كل 18 شهراً. بافتراض أن قانون مور صحيح، كم مرة تتوقع أن يتضاعف عدد الترانزستورات على الإنش المربع من الدائرة المتكاملة كل 18 شهر على مدى السنوات الست القادمة؟

(4) تعليم: يعلم معلم 8 طلاب كيف يطوون نموذج أوريغامي (origami). وسيعلم كل طالب من هؤلاء الطلاب 8 طلاب آخرين كيف يطوون نفس النموذج. إذا استمرت عملية التعليم هذه لعدد n من المراحل، فما عدد الأشخاص الذين سيعرفون كيف يطوون نموذج أوريغامي؟

(5) علم الأحياء: الانقسام المباشر هو عملية انقسام للخلايا ينتج عنه خليتان متماثلتان من كل خلية أم. يبين الجدول الآتي عدد الخلايا الناتجة بعد كل انقسام من أول 5 انقسامات للخلايا.

رقم الانقسام	0	1	2	3	4	5
عدد الخلايا الناتجة	1	2	4	8	16	32

(a) هل المدخلات في صف "عدد الخلايا الناتجة" يمثل متسلسلة هندسية؟ إذا كان كذلك، فأوجد قيمة r .

(b) اكتب عبارة لإيجاد الحد النوني في المتتابعة.

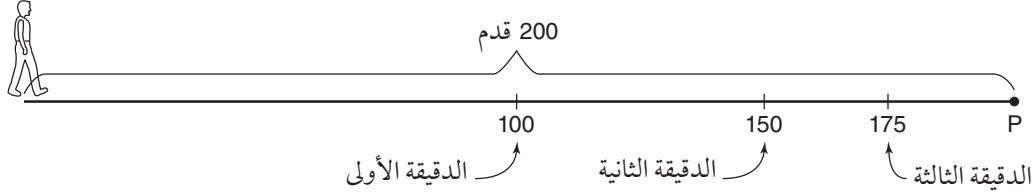
(c) أوجد عدد الخلايا بعد 100 انقسام

تدريبات إثرائية

6-3

نصف المسافة

افترض أنك على بعد 200 قدم من نقطة ثابتة P ، وافترض أيضًا أنك تستطيع أن تصل إلى نقطة المنتصف في دقيقة واحدة، وإلى نقطة منتصف الجزء المتبقي بعد دقيقة من ذلك، وهكذا



ستنتج متتابعة ملفتة للانتباه؛ لأنه تبعًا للمسألة، فأنت لن تصل النقطة P حقيقة، على الرغم من أنك تقترب منها بصورة كبيرة.

يمكنك أن تحسب كم ستحتاج لتكون ضمن مسافة معينة صغيرة من النقطة. أدخل إلى الآلة الحاسبة المسافة التي يتعين قطعها، ثم عدّ عدد مرات القسمة المتتابعة على 2 المطلوبة للوصول ضمن المسافة المرغوبة.

ما عدد الدقائق المطلوبة لتكون ضمن 0.1 قدم عن نقطة تبعد 200 قدم؟

مثال

عد عدد المرات التي تقسم بها على 2.

أدخل: $2 \div 2 \text{ ENTER } 2 \div 2 \text{ ENTER } 2 \div 2 \text{ ENTER } \dots$ وهكذا

النتيجة: 0.0976562

لقد قسمت على 2 إحدى عشرة مرة. الوقت المطلوب هو 11 دقيقة.

تمارين:

استخدم الطريقة الموضحة أعلاه لحل كل مسألة مما يأتي:

(1) إذا كانت المسافة بين مدينتين 2500 ميل، فما عدد الدقائق المطلوبة لتكون ضمن 0.1 ميل من المدينة الثانية؟ وكم سيكون بعدك عنها في ذلك الوقت؟

(2) إذا كانت المسافة حول الأرض 25000 ميل، فكم دقيقة تتطلب لتكون ضمن 0.5 ميل من الدورة الكاملة حول الأرض؟ وكم سيكون بعدك عن نقطة النهاية؟

(3) إذا كانت المسافة من الأرض إلى القمر 250000 ميل، فما عدد الدقائق المطلوبة لتكون ضمن 0.5 ميل عن القمر؟ وكم سيكون بعدك عن سطح القمر عندها؟

(4) إذا كانت المسافة بين جزيرتين 30000000 قدم، فما عدد الدقائق المطلوبة لتكون ضمن 1 قدم من الجزيرة الثانية؟ وكم سيكون بعدك عن الجزيرة الثانية في ذلك الوقت؟

6-4

تدريبات إعادة التعليم

المتسلسلات الهندسية غير المنتهية

المتسلسلات الهندسية غير المنتهية: يطلق على المتسلسلة الهندسية التي ليس لها نهاية متسلسلة هندسية غير منتهية. وبعض المتسلسلات الهندسية غير المنتهية لها مجموع، بينما البعض الآخر ليس لها مجموع؛ لأن المجاميع الجزئية تزداد دون أن تقترب من قيمة معينة.

مجموع متسلسلة هندسية غير منتهية	$S = \frac{a_1}{1-r}$ لكل $-1 < r < 1$ إذا كانت $ r \geq 1$ ، فإن المتسلسلة الهندسية غير المنتهية ليس لها مجموع.
---------------------------------	--

مثال 1

أوجد مجموع حدود كل من المتسلسلتين الآتيتين (إن وُجد):

(a) $75 + 15 + 3 + \dots$

أوجد أولاً قيمة r لتحديد ما إذا كان المجموع موجوداً. a_1

$a_2 = 15, r = \frac{15}{75} = \frac{1}{5}$ لذا $r = \frac{15}{75} = \frac{1}{5}$

بما أن $|r| < 1$ ، فإن المجموع موجود. الآن استخدم صيغة

مجموع المتسلسلة الهندسية غير المنتهية

صيغة المجموع $S = \frac{a_1}{(1-r)}$

$= \frac{75}{1 - \frac{1}{5}}$

بالتبسيط $= \frac{75}{\frac{4}{5}} = 93.75$ أو 93.75

إذن مجموع المتسلسلة هو 93.75

(b) $\sum_{n=1}^{\infty} 48 \left(-\frac{1}{3}\right)^{n-1}$

في هذه المتسلسلة الهندسية غير المنتهية $a_1 = 48$ و $r = -\frac{1}{3}$

صيغة المجموع $S = \frac{a_1}{1-r}$
 $= \frac{48}{1 - \left(-\frac{1}{3}\right)}$

$r = -\frac{1}{3}, a_1 = 48$

بالتبسيط $\frac{48}{\frac{4}{3}} = 36$

إذن $\sum_{n=1}^{\infty} 48 \left(-\frac{1}{3}\right)^{n-1} = 36$

تمارين

أوجد مجموع حدود كل من المتسلسلات الآتية (إن وُجد):

(3) $a_1 = 4, r = \frac{1}{2}$

(2) $1 + \frac{5}{4} + \frac{25}{16} + \dots$

(1) $a_1 = -7, r = \frac{5}{8}$

(6) $18 - 9 + 4\frac{1}{2} - 2\frac{1}{4} + \dots$

(5) $15 + 10 + 6\frac{2}{3} + \dots$

(4) $\frac{2}{9} + \frac{5}{27} + \frac{25}{162} + \dots$

(9) $6 - 12 + 24 - 48 + \dots$

(8) $1000 + 800 + 640 + \dots$

(7) $\frac{1}{10} + \frac{1}{20} + \frac{1}{40} + \dots$

(12) $\sum_{s=1}^{\infty} 24 \left(\frac{7}{12}\right)^{s-1}$

(11) $\sum_{k=1}^{\infty} 22 \left(-\frac{1}{2}\right)^{k-1}$

(10) $\sum_{n=1}^{\infty} 50 \left(\frac{4}{5}\right)^{n-1}$

6-4

تدريبات إعادة التعليم

(تتمة)

المتسلسلات الهندسية غير المنتهية

الكسور العشرية الدورية: الكسر العشري الدوري يمثل كسرًا اعتياديًا، ولإيجاد الكسر الاعتيادي، اكتب الكسر العشري على شكل متسلسلة هندسية غير منتهية، واستخدم صيغة المجموع.

مثال

اكتب كلاً من الكسرين العشريين الدوريين الآتيين في صورة كسر اعتيادي.

(b) $0.\overline{524}$

(a) $0.\overline{42}$

لتكن $S = 0.\overline{524}$

اكتب الكسر العشري الدوري على صورة مجموع

$$S = 0.5242424$$

$$0.\overline{42} = 0.42424242 \dots$$

بالكتابة في صورة

كسر عشري دوري

بضرب الطرفين في 10

بضرب الطرفين في 1000

بطرح المعادلة الثانية

من المعادلة الثالثة

$$10S = 5.24242424$$

$$1000S = 525.2424$$

$$990S = 519$$

$$S = \frac{519}{990} = \frac{173}{330}$$

$$0.\overline{524} = \frac{173}{330}$$

بالتبسيط

لذا فإن $0.\overline{524} = \frac{173}{330}$

$$= \frac{42}{100} + \frac{42}{10000} + \frac{42}{1000000} + \dots$$

$$r = \frac{1}{100}, a_1 = \frac{42}{100}$$

$$S = \frac{a_1}{1-r}$$

$$= \frac{\frac{42}{100}}{1 - \frac{1}{100}}$$

$$= \frac{\frac{42}{100}}{\frac{99}{100}}$$

$$= \frac{42}{99} = \frac{14}{33}$$

$$0.\overline{42} = \frac{14}{33}$$

بالطرح

بالتبسيط

تمارين

اكتب كلاً من الكسور العشرية الدورية الآتية في صورة كسر اعتيادي:

(4) $0.\overline{87}$

(3) $0.\overline{30}$

(2) $0.\overline{8}$

(1) $0.\overline{2}$

(8) $0.\overline{18}$

(7) $0.\overline{75}$

(6) $0.\overline{54}$

(5) $0.\overline{10}$

(12) $0.0\overline{45}$

(11) $0.0\overline{72}$

(10) $0.\overline{72}$

(9) $0.\overline{62}$

(16) $0.0\overline{81}$

(15) $0.0\overline{138}$

(14) $0.0\overline{138}$

(13) $0.0\overline{6}$

تدريبات المهارات

6-4

المتسلسلات الهندسية غير المنتهية

أوجد مجموع حدود كل من المتسلسلات الآتية (إن وُجد):

$$a_1 = 5, r = -\frac{2}{5} \quad (2)$$

$$a_1 = 1, r = \frac{1}{2} \quad (1)$$

$$a_1 = 6, r = \frac{1}{2} \quad (4)$$

$$a_1 = 8, r = 2 \quad (3)$$

$$540 - 180 + 60 - 20 + \dots \quad (6)$$

$$4 + 2 + 1 + \frac{1}{2} + \dots \quad (5)$$

$$-336 + 84 - 21 + \dots \quad (8)$$

$$5 + 10 + 20 + \dots \quad (7)$$

$$9 - 1 + \frac{1}{9} - \dots \quad (10)$$

$$125 + 25 + 5 + \dots \quad (9)$$

$$\frac{1}{3} + \frac{1}{9} + \frac{1}{27} + \dots \quad (12)$$

$$\frac{3}{4} + \frac{9}{4} + \frac{27}{4} + \dots \quad (11)$$

$$9 + 6 + 4 + \dots \quad (14)$$

$$5 + 2 + 0.8 + \dots \quad (13)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} 6 \left(-\frac{1}{3}\right)^{n-1} \quad (16)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} 10 \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} \quad (15)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(-\frac{4}{3}\right) \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1} \quad (18)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} 15 \left(\frac{2}{5}\right)^{n-1} \quad (17)$$

اكتب كلاً من الكسور العشرية الدورية الآتية في صورة كسر اعتيادي:

$$0.\overline{8} \quad (20)$$

$$0.\overline{4} \quad (19)$$

$$0.\overline{67} \quad (22)$$

$$0.\overline{27} \quad (21)$$

$$0.\overline{375} \quad (24)$$

$$0.\overline{54} \quad (23)$$

$$0.\overline{171} \quad (26)$$

$$0.\overline{641} \quad (25)$$

6-4

تدريبات حل المسألة

المتسلسلات الهندسية غير المنتهية

(4) أقساط: اقترض خالد محمدًا كمية من الذهب الخالص كتلتها 100 جرام لمدة سنة. ويريد بعد سنة أن يبدأ باسترجاع الذهب. وبعد سنة بدأ محمد إرجاع الذهب إلى خالد بإعطائه 1 جرام من الذهب في اليوم الأول. وفي اليوم التالي أعاد له محمد 0.99 جرام من الذهب وفي اليوم الذي تلاه أعاد $(0.99)^2$ جرام أو 0.981 جرام من الذهب. وفي كل يوم لاحق كان محمد يعيد 0.99 مما كان يعيده في اليوم السابق.

(a) كم استرجع خالد من الذهب بعد 10 أيام؟
100 يوم؟ عدد لانتهائي من الأيام؟ قرب إجابتك إلى أقرب جزء من المئة من الجرام.

(b) هل ستعود كمية الذهب كلها لخالد في يوم معين في المستقبل؟ وضح إجابتك.

(1) مفارقة: إذا استعملت صيغة مجموع المتسلسلة الهندسية غير المنتهية على المتسلسلة التي حدّها الأول 1 وأساسها 2، ستكون النتيجة المعادلة:
$$-1 = 1 + 2 + 2^2 + 2^3 + \dots$$
هل هذه المساواة صحيحة؟ اذكر السبب وفسره.

(2) قواعد: الكسر العشري الدوري غير المنتهي $0.999\dots$ يساوي 1، ويمكن إثبات ذلك باستخدام مجموع متسلسلة هندسية أساسها $\frac{1}{10}$ ، وحدّها الأول $\frac{9}{10}$.
أوجد مجموع المتسلسلة الهندسية غير المنتهية
 $\frac{b-1}{b} + \frac{b-1}{b^2} + \frac{b-1}{b^3} + \dots$ حيث b عدد صحيح موجب أكبر من 1.

(3) تسلُّق: صُمِّم رجل آلي بحيث يتسلَّق مُرتفعًا في كل مرة يُضغَط فيها على زر بعد التشغيل. وعندما ضُغِط على الزر لأول مرة، تسلَّق الرجل الآلي 10 أقدام. وفي كل مرة بعدها كان يتسلَّق 75% مما تسلَّقه في المرة السابقة. ما أعلى ارتفاع يمكن أن يتسلَّقه الرجل الآلي؟

6-4

تدريبات إثرائية

الكسور المستمرة بلانهاية

$$x = 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \dots}}}}$$

بعض العبارات غير المنتهية هي في الواقع مساوية لأعداد حقيقية.

الكسر المستمر بلانهاية المجاور هو أحد الأمثلة.

إذا استعملت x للدلالة على الكسر المستمر بلانهاية، فإن مقام

الكسر الأول يساوي x أيضًا.

هذه الملاحظة تؤدي إلى المعادلة التالية:

$$x = 1 + \frac{1}{x}$$

اكتب كسرًا عشريًا لكل كسر مستمر مما يأتي:

$$(1) \quad 1 + \frac{1}{1}$$

$$(2) \quad 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1}}$$

$$(3) \quad 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1}}}$$

$$(5) \quad 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1}}}}}$$

$$(4) \quad 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1}}}}$$

(6) كلما أضفت حدودًا أكثر للكسور أعلاه، كلما اقتربت قيمتها من قيمة الكسر المستمر بلانهاية. ما القيمة التي يبدو أن الكسر يقترب منها؟

(7) أعد كتابة المعادلة $x = 1 + \frac{1}{x}$ في صورة معادلة من الدرجة الثانية، وأوجد قيمة x .

تدريبات إعادة التعليم

6-5

نظرية ذات الحدين

مثلث باسكال : مثلث باسكال نمط المعاملات لقوى ذات الحدين معروضة على شكل مثلث. يبدأ كل سطر وينتهي بالعدد 1 ، وكل عدد هو مجموع للعددين الواقعين فوقه في الصف السابق.

	$(a + b)^0$
	$(a + b)^1$
	$(a + b)^2$
	$(a + b)^3$
	$(a + b)^4$
	$(a + b)^5$
	مثلث باسكال

استعمل مثلث باسكال في إيجاد عدد الحالات الممكنة التي تحتوي على a^3 و b^2 .

مثال 1

المعامل 10 للحد a^3b^2 في مفكوك $(a+b)^5$ يعطي عدد الحالات التي تحتوي على a^3 و b^2

تمارين

أوجد مفكوك كل مما يأتي:

(1) $(a + 5)^4$

(2) $(x - 2y)^6$

(3) $(j - 3k)^5$

(4) $(2r + t)^7$

(5) $(2p + 3m)^6$

(6) $\left(a - \frac{b}{2}\right)^4$

(7) رمي القطع النقدية: يرمي عبد الرحمن قطعة نقدية 15 مرة. ما عدد الحالات المختلفة لرمي القطعة التي تتضمن ظهور 4 كتابة و 11 شعاراً؟

6-5

تدريبات إعادة التعليم

نظرية ذات الحدين

(تتمة)

نظرية ذات الحدين

نظرية ذات الحدين	إذا كانت n عددًا طبيعيًا، فإن:
	$(a + b)^n = {}_nC_0 a^n b^0 + {}_nC_1 a^{n-1} b^1 + {}_nC_2 a^{n-2} b^2 + \dots +$ ${}_nC_n a^0 b^n = \sum_{k=0}^n \frac{n!}{k!(n-k)!} a^{n-k} b^k$

أوجد مفكوك $(a-3b)^4$

مثال

$$\begin{aligned}
 (a - 3b)^4 &= \sum_{k=0}^4 \frac{4!}{(4-k)!k!} a^{4-k} (-3b)^k \\
 &= \frac{4!}{4!0!} a^4 + \frac{4!}{3!1!} a^3 (-3b)^1 + \frac{4!}{2!2!} a^2 (-3b)^2 + \frac{4!}{1!3!} a (-3b)^3 + \frac{4!}{0!4!} (-3b)^4 \\
 &= a^4 - 12a^3b + 54a^2b^2 - 108ab^3 + 81b^4
 \end{aligned}$$

تمارين

أوجد مفكوك كل مما يأتي.

(1) $(a - 3)^6$

(2) $(r + 2t)^7$

(3) $(4x + y)^4$

(4) $\left(2 - \frac{m}{2}\right)^5$

أوجد الحد المطلوب في كل مما يأتي:

(6) الحد الخامس في مفكوك $(a+1)^7$

(5) الحد الثالث في مفكوك $(3x-y)^5$

(8) الحد السادس في مفكوك $(10-3t)^7$

(7) الحد الرابع في مفكوك $(j+2k)^8$

(10) الحد السابع في مفكوك $(5x-2)^{11}$

(9) الحد الثاني في مفكوك $\left(m + \frac{2}{3}\right)^9$

6-5

تدريبات المهارات
نظرية ذات الحدين

أوجد مفكوك كل مما يأتي:

(2) $(a + b)^5$

(1) $(x - y)^3$

(4) $(m + 1)^4$

(3) $(g - h)^4$

(6) $(a - 5)^4$

(5) $(r + 4)^3$

(8) $(d + 2)^5$

(7) $(y - 7)^3$

(10) $(2a + b)^4$

(9) $(x - 1)^4$

(12) $(2a + 3)^3$

(11) $(c - 4d)^3$

أوجد الحد المطلوب في كل مما يأتي:

(14) الحد الخامس في مفكوك $(x-3y)^6$

(13) الحد الرابع في مفكوك $(6x+5)^5$

(16) الحد الثاني عشر في مفكوك $(13x-4y)^{11}$

(15) الحد الثالث في مفكوك $(11x+3y)^6$

(18) الحد السابع في مفكوك $(x-y)^8$

(17) الحد الرابع في مفكوك $(m+n)^{10}$

(20) الحد السادس في مفكوك $(r-2)^9$

(19) الحد الثالث في مفكوك $(b+6)^5$

(22) الحد الثاني في مفكوك $(3x-y)^7$

(21) الحد الخامس في مفكوك $(2a+3)^6$

6-5

تدريبات حل المسألة

نظرية ذات الحدين

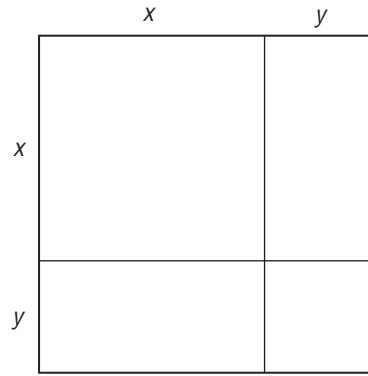
(1) مساحة: طول ضلع المربع المرسوم $x + y$ لذا فإن

مساحته تساوي:

$$(x+y)^2 = x^2 + xy + xy + y^2$$

يمثل كل حد من الحدود الأربعة جزءاً معيَّناً من

المساحة. ضع كل حد في المنطقة التي تخصه من مساحة المربع



(2) قوى: تنص نظرية ذات الحدين على أن:

$$(x + y)^n = \sum_{k=0}^n \frac{n!}{k!(n-k)!} x^{n-k} y^k$$

وضَّح ما الذي ستؤول إليه قوى العدد 2 إذا عوضت

عن $x=y=1$ في المعادلة.

(3) المحكمة العليا: يوجد في المحكمة العليا تسعة قضاة،

وتتطلب معظم الأحكام رأي الأغلبية. ما عدد

مجموعات التصويت المحتملة للوصول إلى الأغلبية؟

مساعدة: الأغلبية تعني 5 أو 6 أو 7 أو 8 أو 9 أصوات.

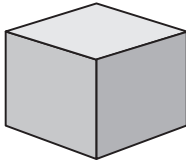
(4) تماثل: تقرأ الأعداد في كل صف في مثلث باسكال من

اليسار إلى اليمين، وهو مماثل لقراءتها من اليمين إلى

اليسار. وضَّح سبب هذه الحالة؟

(5) حجم: طول كل حرف من المكعب التالي هو $x+y$

وحدة.



أوجد مفكوك $(x+y)^3$ مستخدماً نظرية ذات الحدين.

تدريبات إثرائية

6-5

الأنماط في مثلث باسكال

لقد درست أن المعاملات في مفكوك $(x+y)^n$ تنتج نمطاً من الأعداد يُسمى **مثلث باسكال**.

1								صف 1 ←
1	1							صف 2 ←
1	2	1						صف 3 ←
1	3	3	1					صف 4 ←
1	4	6	4	1				صف 5 ←
1	5	10	10	5	1			صف 6 ←
1	6	15	20	15	6	1		صف 7 ←

يمكن إضافة صفوف لقاعدة الهرم بالعدد الذي تريده.

يستكشف هذا النشاط بعض الخصائص المثيرة للانتباه في نمط الأعداد المشهور هذا.

(1) اختر أحد صفوف مثلث باسكال.

(a) ما مجموع الأعداد في كل الصفوف الواقعة فوق الصف الذي اخترته.

(b) ما مجموع كل الأعداد في الصف الذي اخترته.

(c) ما العلاقة بين إجاباتك للفرعين **a** , **b** ؟

(d) كرر الفروع من **a** إلى **c** على الأقل لثلاثة صفوف أخرى في مثلث باسكال. ما التعميم الذي يبدو أنه صحيح؟

(e) حاول أن تثبت صحة تعميمك.

(2) اختر أحد صفوف مثلث باسكال التي تأتي بعد الصف الأول.

(a) ابدأ من النهاية اليسرى للصف، ثم اجمع الأعداد الأول والثالث والخامس وهكذا. واكتب الناتج.

(b) اجمع الأعداد الثاني والرابع في نفس الصف وهكذا. واكتب الناتج.

(c) قارن بين النواتج في الفرعين **a** , **b**.

(d) كرر الفروع من **a** إلى **c** على الأقل لثلاثة صفوف أخرى في مثلث باسكال. ما التعميم الذي يبدو أنه صحيح؟

6-6

تدريبات إعادة التعليم

البرهان بالاستقراء الرياضي

الاستقراء الرياضي: الاستقراء الرياضي طريقة برهان تُستخدم لإثبات جمل حول الأعداد الطبيعية.

البرهان بالاستقراء الرياضي	<p>الخطوة 1: برهن على أن الجملة صحيحة عندما $n = 1$.</p> <p>الخطوة 2: افترض أن الجملة صحيحة عند العدد الطبيعي k هذا الفرض يُسمى فرضية الاستقراء.</p> <p>الخطوة 3: برهن على أن الجملة صحيحة للعدد الطبيعي التالي $k+1$.</p>
----------------------------	---

مثال

أثبت أن $5+11+17+...+(6n-1)=3n^2+2n$

الخطوة 1: عندما $n=1$ ، يكون الحد الأيسر من المعادلة المعطاة هو $5-1=6$ ، والحد الأيمن هو $5=2(1)+3(1)^2$. لذا فإن المعادلة صحيحة في حالة $n=1$.

الخطوة 2: افترض أن $5+11+17+...+(6k-1)=3k^2+2k$ ، حيث k عدد طبيعي.

الخطوة 3: برهن على أن الجملة صحيحة للعدد $n=k+1$. أضف $[6(k+1)-1]$ إلى كلا الطرفين.

$$5+11+17+...+(6k-1)+[6(k+1)-1]=3k^2+2k+[6(k+1)-1]$$

$$= 3k^2 + 2k + 6k + 5$$

$$= 3k^2 + 6k + 3 + 2k + 2$$

$$= 3(k^2 + 2k + 1) + 2(k + 1)$$

$$= 3(k+1)^2 + 2(k+1)$$

العبارة الأخيرة أعلاه هي الطرف الأيمن من المعادلة المراد إثباتها، حيث استبدلت n بـ $k+1$ ، لذا فإن المعادلة صحيحة عندما $n=k+1$.

وهذا يثبت أن $5+11+17+...+(6n-1)=3n^2+2n$ لكل الأعداد الطبيعية n .

تمارين:

برهن صحة كل من الجمل الآتية للأعداد الطبيعية جميعها:

$$3 + 7 + 11 + \dots + (4n - 1) = 2n^2 + n \quad (1)$$

$$500 + 100 + 20 + \dots + 4 \times 5^{4-n} = 625 \left(1 - \frac{1}{5^n}\right) \quad (2)$$

6-6

تدريبات إعادة التعليم

(تتمة)

الإثبات بالاستقراء الرياضي

أمثلة مضادة: لإثبات أن صيغة أو تعميماً غير صحيحين، أوجد مثلاً مضاداً، وذلك بتعويض قيم للمتغير.

أوجد مثلاً مضاداً لنفي صحة الجملة $2n^2 + 2n + 3 = 2^{n+2} - 1$.

مثال 1

تحقق من الأعداد الصحيحة الموجبة الأولى.

n	صيغة الطرف الأيسر	صيغة الطرف الأيمن	
1	$2(1)^2 + 2(1) + 3 = 2 + 2 + 3 = 7$	$2^{1+2} - 1 = 2^3 - 1 = 7$	صحيحة
2	$2(2)^2 + 2(2) + 3 = 8 + 4 + 3 = 15$	$2^{2+2} - 1 = 2^4 - 1 = 15$	صحيحة
3	$2(3)^2 + 2(3) + 3 = 18 + 6 + 3 = 27$	$2^{3+2} - 1 = 2^5 - 1 = 31$	خطأ

أوجد مثلاً مضاداً لنفي صحة العبارة « $x^2 + 4$ أولية أو قابلة للقسمة على 4».

مثال 2

n	$x^2 + 4$	صحيحة؟		n	$x^2 + 4$	صحيحة؟
1	$1 + 4 = 5$	أولية		6	$36 + 4 = 40$	تقسم على 4
2	$4 + 4 = 8$	تقسم على 4		7	$49 + 4 = 53$	أولية
3	$9 + 4 = 13$	أولية		8	$64 + 4 = 68$	تقسم على 4
4	$16 + 4 = 20$	تقسم على 4		9	$81 + 4 = 85$	كلاهما خطأ
5	$25 + 4 = 29$	أولية				

قيمة $n = 9$ تعطي مثلاً مضاداً.

تمارين

أعط مثلاً يبيّن خطأ كل من الجمل الآتية:

$$1 + 5 + 9 + \dots + (4n - 3) = 4n - 3 \quad (1)$$

$$100 + 110 + 120 + \dots + (10n + 90) = 5n^2 + 95 \quad (2)$$

$$900 + 300 + 100 + \dots + 100(3^3 - n) = 900 \cdot \frac{2n}{n+1} \quad (3)$$

$$n^2 + n + 1 \text{ عدد أولي} \quad (4)$$

$$2n + 1 \text{ عدد أولي} \quad (5)$$

$$7n - 5 \text{ عدد أولي} \quad (6)$$

$$\frac{1}{2} + 1 + \frac{3}{2} + \dots + \frac{n}{2} = n - \frac{1}{2} \quad (7)$$

$$5n^2 + 1 \text{ تقبل القسمة على } 3 \quad (8)$$

$$n^2 - 3n + 1 \text{ عدد أولي لكل } n > 2 \quad (9)$$

$$4n^2 - 1 \text{ تقبل القسمة على } 3 \text{ أو } 5 \quad (10)$$

6-6

تدريبات المهارات

البرهان بالاستقراء الرياضي

برهن صحة كل من الجمل الآتية للأعداد الطبيعية جميعها.

$$1 + 3 + 5 + \dots + (2n - 1) = n^2 \quad (1)$$

$$2 + 4 + 6 + \dots + 2n = n^2 + n \quad (2)$$

$$6^n - 1 \text{ قابل للقسمة على } 5 \quad (3)$$

$$1 + 4 + 8 + \dots + 2n = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \quad (4) \text{ أعط مثلاً مضاداً يبيّن خطأ الجملة:}$$

6-6

تدريبات حل المسألة

البرهان بالاستقراء الرياضي

(1) أعداد: يدعي زيد أنه يوجد أربعة أزواج فقط من

الأعداد الأولية الفردية المتتالية، هي

(3, 5), (5, 7), (11, 13), (17, 19) هل هذا صحيح

أم خطأ؟ وإذا كان صحيحاً فأثبت ذلك، وإذا كان خطأً فأعط مثلاً مضاداً.

(2) البرهان: كتب المعلم عبدالله البرهان التالي على

السطور. وطلب إلى طلابه التحقق من صحته:

لكل الأعداد الطبيعية n

$$2+4+6+\dots+(2n)=n^2+n+1$$

برهان المعلم عبدالله هو:

"افترض أن المتطابقة صحيحة لـ $n=k$ أي أن

$$2+4+6+\dots+(2k)=k^2+k+1$$

بإضافة $2k+2$ إلى الطرفين.

$$2+4+6+\dots+(2k)+(2k+2)=$$

$$k^2+k+1+(2k+2)$$

$$=k^2+2k+1+k+1+1$$

$$=(k+1)^2+(k+1)+1$$

المساواة الأخيرة تظهر أن المتطابقة صحيحة

لـ $n=k+1$ أيضاً، وأخيراً عن طريق الاستقراء نجد

أن المتطابقة صحيحة لكل n ، ما الاستجابة التي يتعين

أن يعطيها الطلاب؟

(3) الاستقراء: طلب إلى محمد إثبات صحة جملة ما،

فقام بإثبات صحتها عند $n=1$ ، ثم افترض أن الجملة

صحيحة عندما $n=k$ ، وأثبت صحتها عند $n=2k$

و $n=k-1$. هل الجملة صحيحة لكل الأعداد الطبيعية n ؟

(4) التماثل: يمكن أن تكون الأعداد فردية أو زوجية. وإذا

كان العدد يقبل القسمة على 2 فهو زوجي. وإلا فهو

فردى، وإحدى حقائق التماثل هي n^2-n عدد زوجي

لكل الأعداد الطبيعية n ، لاحظ أن $1^2-1=0$ فالجملة

صحيحة لـ $n=1$. افترض أن الجملة صحيحة عندما

$n=k$ ، وأثبت أنها صحيحة أيضاً عندما $n=k+1$.

تدريبات إثرائية

6-6

المزيد من البرهان بالاستقراء الرياضي

الاستقراء الرياضي طريقة مفيدة عندما تريد أن تثبت أن الجملة صحيحة لكل الأعداد الطبيعية.

الخطوات الثلاث لاستخدام الاستقراء هي:

(1) أثبت أن الجملة صحيحة عندما $n=1$.

(2) أثبت أنه إذا كانت الجملة صحيحة للعدد الطبيعي n ، فإنها تكون صحيحة أيضًا لـ $n+1$.

(3) استنتج أن الجملة صحيحة لكل الأعداد الطبيعية.

اتبع الخطوات السابقة لإكمال البرهان الآتي:

نظرية: يبين أن $a^n - b^n$ قابل للقسمة على $a - b$ لجميع الأعداد الطبيعية n .

(1) يبين أن النظرية صحيحة عندما $n=1$.

(2) العبارة $a^{n+1} - b^{n+1}$ يمكن كتابتها على الشكل $a(a^n - b^n) + b^n(a - b)$. تحقق من صحة ذلك.

(3) افترض أن $a - b$ عامل لـ $a^n - b^n$ ، واستعمل النتيجة من السؤال 2 لتبين أن $a - b$ يتعين أن تكون عاملاً لـ $a^{n+1} - b^{n+1}$ أيضًا.

(4) لخص النتائج للأسئلة 1-3.

ملحق الإجابات

الاسم: التاريخ:

الاسم: التاريخ:

(تتمه)

6-1 تدريبات إعادة التعليم المتتابعات بوصفها دوال

المتتابعات الهندسية

المصطلح	التعريف	أمثلة
أسس المتتابة الهندسية	$r = a_{n+1} \div a_n$	الأساس في متتابة هندسية حدودها المتتالية $5, 10, \dots$ هو $2 = 10 \div 5$
الحلد الوزني في المتتابة الهندسية	$a_n = a_1(r^{n-1})$ حيث a_n الحلد الأول، و r الأساس.	الحلد الرابع في متتابة هندسية الحلد الأول منها 5، وأساسها 2 هو $5(2^{4-1}) = 40$

أوجد الحدود الثلاثة التالية في المتتابة الهندسية $2, 6, 18, \dots$ ثم ممل المتتابة بيانيًا.

أوجد الأساس بقسمة حلين متتاليين.

$$r = 3 \div 6 = 2 \div 3 = 1,8 \div 2,7 = 1,5$$

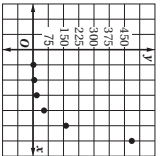
الآن احسب الحدود الثلاثة التالية في العدد 3، ثم واصل الضرب في العدد 3 حتى تجد الحدود الثلاثة المطلوبة.

الحدود الثلاثة التالية هي 54، 162، 486

أوجد المجال والذي للحدود الستة الأولى في المتتابة.

المجال: $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

الذي: $\{2, 6, 18, 54, 162, 486\}$.



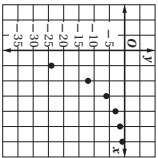
تعاريف

أوجد الحدود الثلاثة التالية في كل من المتتابعات الهندسية الآتية، ثم ممل المتتابة بيانيًا:

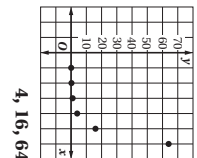
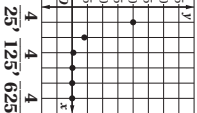
(7) $20, 4, \frac{4}{5}, \dots$

(8) $\frac{1}{16}, \frac{1}{4}, 1, \dots$

(9) $-24, -12, -6, \dots$



(10) $-3, -1,5, -0,75, \dots$



الفصل ٦ : المتتابعات والمتسلاات

7

الصفحة : الثاني المتناوي

الاسم: التاريخ:

الاسم: التاريخ:

6-1 تدريبات إعادة التعليم المتتابعات بوصفها دوال

المتتابعات الحسابية : المتتابة الحسابية هي متتابة من الأعداد ينتج كل أحد فيها من إضافة أساس المتتابة (الفرق المشترك) إلى الحلد السابق له.

الحلد الوزني في متتابة حسابية	الصيغة
أي عدد	$a_n = a_1 + (n-1)d$ حيث a_n هو الحلد الأول، و d أساس المتتابة، أي عدد صحيح موجب.

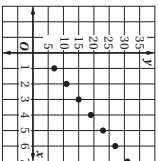
أوجد الحدود الأربعة التالية في المتتابة الحسابية $7, 11, 15, \dots$ ثم ممل الحدود السبعة الأولى للمتتابة بيانيًا.

أوجد أساس المتتابة عن طريق طرح حلين متتاليين.

$$d = 11 - 7 = 4 \text{ و } 15 - 11 = 4 \text{ لذا فإن } d = 4.$$

الآن اجمع 4 للحد الثالث من المتتابة، ثم واصل الجميع بإضافة 4 حتى تجد الحدود الأربعة المطلوبة. الحدود الأربعة التالية هي: $19, 23, 27, 31$.

عش كل نقطة من النقط $(1, 7), (2, 11), (3, 15), (4, 19), (5, 23), (6, 27), (7, 31)$ على المستوى الإحداثي.



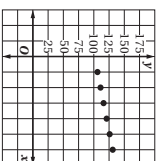
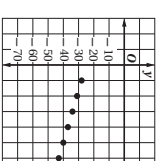
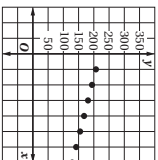
تعاريف

أوجد الحدود الأربعة التالية في كل من المتتابعات الحسابية الآتية، ثم ممل المتتابة بيانيًا:

(1) $106, 111, 116, \dots$

(2) $-28, -31, -34, \dots$

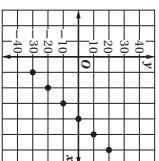
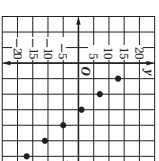
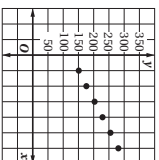
(3) $207, 194, 181, \dots$



(4) $121, 126, 131, 136, \dots$

(5) $-37, -40, -43, -46, \dots$

(6) $168, 155, 142, 129, \dots$



(7) $229, 255, 281, 307, \dots$

(8) $-5, -11, -17, -23, \dots$

(9) $0, 10, 20, 30, \dots$

الفصل ٦ : المتتابعات والمتسلاات

6

الصفحة : الثاني المتناوي

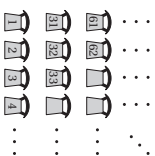
التاريخ: _____

الاسم: _____

6-1 تدريبات حل المسألة

الانتباعات بوصفها دوال

- (4) جلوس، تحاول خلوص إيجاد مقعدها في مسرح، والمقاعد مرقّمة بالتتابع من اليسار إلى اليمين. وفي كل صف 30 مقعداً.



يبين الشكل أعداد بعض المقاعد في الزاوية اليسرى بالقرب من المنصة. توقف جلوس عند المقعد 129، وعليها أن تجد المقعد 219. لاحظت أن أرقام المقاعد في العمود الواحد تشكل متتابعة حسابية. ما أرقام المقاعد الأربعة التالية في العمود الذي يقع فيه المقعد 129 إذا تحركنا إلى أعلى بعيداً عن المنصة؟ وأين يتعين أن نذهب لتجد مقعدها؟ في أي صف وأي عمود سيكون مقعدها؟

159, 189, 219, 249 تتحرك جلوس 3 صفوف إلى

الخلف؛ الصف الثامن، العمود التاسع.

(5) حلقات، ما عدد الربعات الصغيرة في الحلقات الثلاث الأولى في الشكل؟



8, 16, 24

(a) إذا تكرر النمط، فاكذب صيغة لعدد الربعات في

الطائفة رقم n .

$8n$

(b) ما طول ضلع الحلقة رقم n ؟

$2n+1$

الفصل ٦، المنتهيات والمتسلسلات

9

التاريخ: _____

الاسم: _____

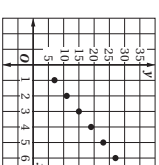
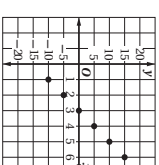
6-1 تدريبات المهارات

الانتباعات بوصفها دوال

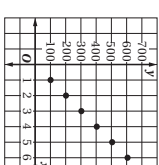
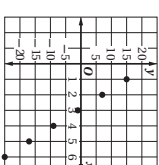
أوجد الحدود الأربعة التالية في كل من المتابعات الحسابية الآتية، ثم مِلّ المتابعة بيانياً.

5, 10, 15, 20 $-10, -5, 0, \dots$ (2)

19, 23, 27, 31 7, 11, 15, \dots (1)



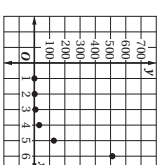
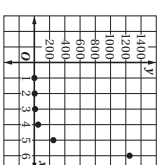
$-9, -17, -25, -33$ 15, 7, $-1, \dots$ (4) 404, 505, 606, 707 101, 202, 303, \dots (3)



أوجد الحدود الثلاثة التالية في كل من المتابعات الهندسية الآتية، ثم مِلّ المتابعة بيانياً.

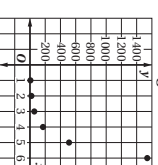
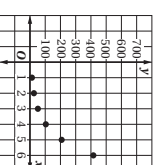
50, 250, 1250 $\frac{2}{3}, 2, 10, \dots$ (6)

32, 128, 512 $\frac{1}{2}, 2, 8, \dots$ (5)



104, 208, 416 13, 26, 52, \dots

171, 513, 1539 $6\frac{1}{3}, 19, 57, \dots$



الفصل ٦، المنتهيات والمتسلسلات

8

الفصل ٦، المتالي المتناوبي

التاريخ:

الاسم:

6-2 تدريبات إعادة التعليم المتتابعات والمتسلسلات الحسابية

المتتابعة الحسابية

المصطلح	التعريف	أمثلة
أساس المتتابعة الحسابية (النقطة للفرق n)	$d = a_{n+1} - a_n$	الأساس في المتتابعة الحسابية $5, 7, \dots$ $7 - 5 = 2$
الحد n في متتابعة حسابية	$a_n = a_1 + (n-1)d$ حيث a_1 هو أساس المتتابعة، و n هو أي عدد صحيح موجب.	الحد الرابع في المتتابعة الحسابية التي تبدأ بالعدد 3 وأساسها 2 هو: $3 + (3 \times 2) = 9$

أوجد الحد الثالث عشر في المتتابعة الحسابية التي فيها $a_1 = 21$ و $d = -6$.

استعمل صيغة الحد n في المتتابعة الحسابية بتعويض $n = 13$ ، و $a_1 = 21$ ، و $d = -6$.

صيغة الحد n في

$$a_n = a_1 + (n-1)d$$

$$n = 13, a_1 = 21, d = -6 \quad a_{13} = 21 + (13-1)(-6)$$

المتابعة

$$a_{13} = -51$$

أكتب صيغة للحد n في المتتابعة الحسابية... $13, 4, -5, -14, \dots$

في هذه المتتابعة $d = -14$ و $a_1 = 13$.

بإستخدام صيغة a اكتب: معادلة

$$a_n = a_1 + (n-1)d$$

$$a_1 = -17, d = 9$$

خاصية التوزيع

$$a_n = -14 + 9(n-1)$$

بالتبسيط

$$a_n = 9n - 23$$

تمارين

أوجد قيمة الحد المطلوب في كل متتابعة حسابية على ما يلي:

$$1) \text{ الحد العشرون في المتتابعة الحسابية التي فيها } a_1 = 15 \text{ و } d = 4.$$

$$2) \text{ الحد السابع في المتتابعة الحسابية التي فيها } a_1 = -81 \text{ و } d = 12.$$

$$3) \text{ في المتتابعة الحسابية } \dots, 9, 12, 15, 18, \dots \text{ اكتب } a_{31}.$$

$$4) \text{ في المتتابعة الحسابية } \dots, -48, -53, -58, -63, \dots \text{ اكتب } a_{100}.$$

اكتب صيغة للحد n في كل متتابعة حسابية على ما يلي:

$$1) \text{ } a_1 = 15 \text{ و } d = 38 \text{ } a_n = 38n - 23$$

$$2) \text{ } a_1 = 72 \text{ و } d = -13 \text{ } a_n = -13n + 85$$

$$3) \text{ } a_1 = -5, \dots, -22, -39, -56, -73 \text{ } a_n = 17n - 73$$

$$4) \text{ } a_1 = 8, \dots, 32, -10, -52, -94, -136 \text{ } a_n = 42n - 136$$

التاريخ:

الاسم:

6-1 تدريبات إثرائية ممتابقة فيبوناتشي

اكتشف ليوناردو فيبوناتشي متتابعة الأعداد التي سُميت باسمه في أثناء دراسته على الأرناب. وأراد أن يعرف عدد أزواج الأرانب التي يمكن أن تنتج في n شهرًا، بدايةً من زوج واحد من الأرانب الحدية الولادة.

ولقد وضع الاقتراضات التالية:

1) تصبح الأرانب حديدية الولادة بآلية خلال شهر واحد.

2) ينتج كل زوج من الأرانب زوجًا واحدًا كل شهر.

3) عدم وفاة أي أرنب.

لكن F_n عدد الأرانب في نهاية n شهر. إذا بدأت بزوج واحد من الأرانب الحدية الولادة، $F_1 = 1$ ، $F_2 = 1$ ، وهذا الزوج قد ينتج زوجًا جديدًا في نهاية الشهر الثاني، لذا فإن $F_3 = 2$ و $F_4 = 3$ وستنتج الزوج الأول زوجًا آخر في نهاية الشهر الثالث، لذا فإن $F_5 = 5$ و $F_6 = 8$.

بين الجدول أدناه عدد الأرانب في كل شهر لعدة أشهر.

الشهر	عدد الأرانب البالغين	عدد الأزواج الحديية الولادة	الإجمالي
F_1	0	1	1
F_2	1	0	1
F_3	1	1	2
F_4	2	1	3
F_5	3	2	5
F_6	5	3	8

تمارين

1) بدءًا بزوج واحد من الأرانب الحدية الولادة، ما عدد أزواج الأرانب في نهاية 12 شهرًا؟

233

اكتب الحدود العشرة الأولى في المتتابعة التي فيها:

$$1) F_1 = 3, F_2 = 4 \text{ و } F_{n-1} + F_{n-2} = F_n.$$

$$2) 199, 123, 76, 47, 29, 18, 11, 7, 4, 3.$$

$$3) F_1 = 5, F_2 = 1 \text{ و } F_{n-1} + F_{n-2} = F_n.$$

$$4) 191, 118, 73, 45, 28, 17, 11, 6, 5, 1.$$

الاسم: _____ التاريخ: _____

6-2 تدريبات المهارات

المتتاليات والمتسلسلات الحسابية

أوجد قيمة الحد الطرب في كل من المتتاليات الحسابية الآتية:

(1) $a_1 = 56, d = 13, n = 73$

(2) a_n في المتتالية: $304, 16, 32, 48, \dots$

اكتب صيغة الحد النوني في كل متتالية حسابية فيما يأتي:

(3) $a_n = 14n + 50$ $64, 78, 92, 106, \dots$

(4) $a_n = 93n - 509$ $-416, -323, -230, -137, \dots$

أوجد الأوساط الحسابية في كل من المتتاليات الحسابية الآتية:

(5) $23, 29, 35, 17, \dots$

(6) $206, 177, 148, 119, 90, 61, 235, \dots$

أوجد مجموع كل من المتسلسلات الحسابية الآتية:

(7) $1 + 4 + 7 + 10 + \dots + 43$

(8) $5 + 8 + 11 + 14 + \dots + 32$

(9) $3 + 5 + 7 + 9 + \dots + 19$

(10) $-2 + (-5) + (-8) + \dots + (-20)$

(11) $\sum_{n=1}^5 (2n - 3)$

(12) $\sum_{n=1}^{18} (10 + 3n)$

(13) $\sum_{n=2}^{10} (4n + 1)$

(14) $\sum_{n=5}^{12} (4 - 3n)$

أوجد الحدود الثلاثة الأولى في كل من المتتاليات الحسابية الآتية:

(15) $a_1 = -3, a_n = 41, S_n = 228$

(16) $a_1 = 4, a_n = 31, S_n = 175$

(17) $n = 10, a_n = 41, S_n = 230$

(18) $n = 19, a_n = 85, S_n = 760$

(19) $-5, 0, 5$

(20) $-3, 1, 5$

الفصل ٦، المتتاليات والمتسلسلات

13

الصفحة الثاني الثانوي

الاسم: _____ التاريخ: _____

6-2 تدريبات إعادة التعليم

المتتاليات والمتسلسلات الحسابية

المتسلسلة الحسابية: يستخدم الحرف اللاتيني Σ لتمثيل المتسلسلة. رمز المجموع للمتسلسلة $30 + 24 + 18 + 12 + 6$

هو $\sum_{n=1}^5 6n$

المجموع البرني للمتسلسلة الحسابية	مجموع أول n حداً (S_n) من متسلسلة حسابية يُعطى بالعلاقة $S_n = \frac{n}{2}(a_1 + a_n)$ أو $S_n = \frac{n}{2}[2a_1 + (n-1)d]$
-----------------------------------	--

مثال 2

أوجد قيمة $\sum_{k=1}^{18} (3k + 4)$

مثال 1

أوجد S_n للمتسلسلة الحسابية التي فيها $a_1 = 14, a_n = 101, n = 30$

المجموع هو متسلسلة حسابية أساسها 3، يعوض

$3k + 4$ في العبارة $k = 18$ و $k = 1$

نحصل على

$a_{18} = 3(18) + 4 = 58$ و $a_1 = 3(1) + 4 = 7$

هناك 18 حداً في المتسلسلة، لذا $n = 18$ ، استخدم

صيغة مجموع المتسلسلة الحسابية.

صيغة مجموع $S_n = \frac{n}{2}(a_1 + a_n)$

$n = 18, a_1 = 7, a_n = 58$ $S_{18} = \frac{18}{2}(7 + 58)$

بالتعويض $= 9(65)$

بالضرب $= 585$

إذن $\sum_{k=1}^{18} (3k + 4) = 585$

تدريبات

أوجد مجموع حدود كل متسلسلة حسابية ما يأتي:

(1) $a_1 = 50, a_n = -50, n = 15$

(2) $a_1 = 180, d = -8, n = 12$

(3) $a_1 = 180, d = -8, n = 12$

(4) $a_1 = 180, d = -8, n = 12$

(5) $a_1 = 4, n = 20, d = 2\frac{1}{2}$

(6) $a_1 = 4, n = 20, d = 2\frac{1}{2}$

(7) $-10 + 8 + 6 + 4 + \dots + -10$

(8) $16 + 22 + 28 + \dots + 112$

(9) $\sum_{n=18}^{42} (4n - 9)$

(10) $\sum_{n=20}^{50} (3n + 4)$

الفصل ٦، المتتاليات والمتسلسلات

12

الصفحة الثاني الثانوي

التاريخ:

الاسم:

6-2 تدريبات إثرائية

اتسلسلات ارجسية في برامج الكمبيوتر

تستعمل التسلسلات الحسابية في تحليل فاعلية برامج الكمبيوتر. وأجهزة الكمبيوتر، وبدون جهد يذكر تُنتج المهام التي تستهلك الوقت أوتوماتيكيًا، والمهام المكررة تكون عمليات جمع الأعداد وضربها غالبًا. تتخذ هذه المهام المكررة باستخدام عبارة (حلقة) ككتب يأخذ ثبات البرجة لتنفيذ الحسابات، وتكرر العبارة الحسابات عادةً، ويتمتعها عبارة تعيين (تخصص)، التي تخصص العدد لكان معين في ذاكرة الكمبيوتر.

افترض أنك كتبت برنامجًا لحساب مجموع الأعداد من 1 إلى 10، أي $10+9+8+7+6+5+4+3+2+1$. يمكن استخدام خوارزمتين لحساب هذه التسلسلة، يبينها الجدول وفق تسلسل خطوات الخوارزمية في العمود الأيمن.

رقم الخطوة	الخوارزمية
1	تخصص في الذاكرة $s = 1$
2	تخصص $j = 2$
3	إذا كان $11 < j$ ، فتقد
4	الخطوتين 4 و 5
5	تخصص $s = s + j$
	تخصص $j = j + 1$

1) اكتب جزءًا من الخوارزمية بالرموز (كما في الجدول). وقيم معطاة للرموز a و d و n الناتجة على الجد الأول

والأساس، وعدد الحدود على الترتيب، لحساب مجموع التسلسلة الحسابية $\sum_{i=0}^n (a + id)$

(المجموع) $sum = a$

(قيمة) $for i = 0 to n$

(المجموع) $sum = a + id$

(القيمة التالية لـ i) $next i$

2) يستعمل المجموع الثاني في تحليل حلقات متقسمة (حلقة داخل حلقة). احسب المجموع الثاني أدناه. أبدأ بالمجموع الداخلي أولاً، ثم أكمل إلى المجموع الخارجي.

$$\sum_{i=1}^4 \sum_{j=1}^3 i = \sum_{i=1}^4 (i + 2i + 3i) = \sum_{i=1}^4 6i = 6 + 12 + 18 + 24 = 60$$

ونذكر أيضًا أن مجموع التسلسلة الحسابية يساوي $\sum_{i=1}^n (a_1 + a_i)$ حيث n عدد الحدود في التسلسلة، a_1 الحد الأول في التسلسلة و a_n الحد الأخير. ولأن احسب قيمة:

$$\sum_{i=1}^2 \sum_{j=1}^2 (2i + 3j)$$

30

الفصل ٦، اختبارات واتسلسلات

15

العصف، الثاني المتناوي

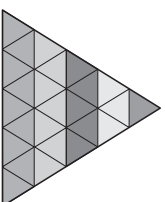
التاريخ:

الاسم:

6-2 تدريبات حل المسألة

اختبارات واتسلسلات ارجسية

14) مثلثات، صُمم مثلث من عدد من المثلثات المتطابقة (الصياح كما في الشكل).



a) بدءًا من القيمة يحتوي كل صف على مثلثات أكثر

من الصف الذي قبله. اكتب صيغة لعدد المثلثات

في الصف n .

$$a_n = 2n - 1$$

b) إذا احتوى الشكل على N صف من المثلثات

الصغيرة، فما عدد المثلثات الصغيرة التي

استخدمت في تكوينه؟ اكتب إجابات مستخدما

رمز المجموع.

$$\sum_{n=1}^N 2n - 1$$

c) أوجد قيمة المجموع الذي كتبه في النسخ b .

$$N^2$$

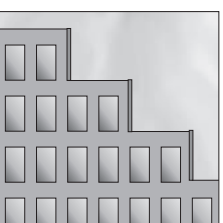
1) نوافذ، أحد جوانب مبنى مصمّم على شكل درج.

نوافذه مرتبة في أعمدة: يحتوي العمود الأول على

ثلاثين. والعمود الثاني على 4، والعمود الثالث على 6

وهكذا. ما عدد النوافذ على جانب البناية إذا كان فيها

15 عمودًا؟



240

2) كتل، يمتلك عبدالله مجموعة أكتال جهاز الرياضية

الزئبق. كتبها بالكيلو جرامات تشكل المتابعة:

80, ..., 15, 10, 5، إذا كان لديه تقاد من كل كتلة، فما

كتلة الأكتال التي يمتلكها جميعها؟

$$1360 \text{ كيلوجرام}$$

3) تدريب، يتدرب محمد إيلدارك في الماراثون. إذا ركض

مسافة 20 ميلاً في أسبوعه الأول من التدريب، وكان

عدد الأميال التي يركضها يزيد بمقدار 4 أميال في كل

أسبوع عن الأسبوع السابق له، فما عدد الأميال التي

ركضها في 8 أسابيع من التدريب؟

$$272 \text{ ميلاً}$$

الفصل ٦، اختبارات واتسلسلات

14

العصف، الثاني المتناوي

الاسم: _____ التاريخ: _____ (تتمه)

6-3 تدريبات إعادة التعليم

اتسلسلة هوندسية ، اتسلسلة الهندسية هي مجموع حدود متتابعة هندسية ، يرمز لمجموع أول n من الحدود في اتسلسلة بالرمز S_n .

المجموع الجبرئي لتسلسلة هندسية	مجموع أول n حد S_n لقيم معطاة لـ a_1 و r يعطى بالصيغة: $S_n = \frac{a_1 - a_1 r^n}{1 - r}, r \neq 1$ مجموع أول n حد S_n لقيم معطاة لـ a_1 و r يعطى بالصيغة: $S_n = \frac{a_1 - a_1 r^n}{1 - r}, r \neq 1$
-----------------------------------	---

أوجد a_1 في التسلسلة الهندسية التي

$$r=2, n=8, S_n=1530$$

$$S_n = \frac{a_1 - a_1 r^n}{1 - r}$$

صيغة المجموع

$$S_n = 1530, r = 2, n = 8$$

$$1530 = \frac{a_1 - a_1 (2)^8}{1 - 2}$$

$$1530 = \frac{a_1 (1 - 2^9)}{1 - 2}$$

$$1530 = \frac{-255a_1}{-1}$$

$$1530 = 255a_1$$

$$6 = a_1$$

بالصيغة

بقسمة كل طرف على 255

مثال 2

$$\sum_{n=2}^7 5(3)^{n-1}$$

مثال 1

$$n$$

$$a_1 = 5(3)^{2-1} = 15$$

$$r = 3$$

$$n = 6$$

$$a_1 = 15, r = 3, n = 6$$

$$= \frac{15 - 15(3)^6}{1 - 3}$$

$$= 5460$$

بالتعويض الآخر لعلمية

تعاريف:

أوجد مجموع كل من التسلسلات الهندسية الآتية:

$$\sum_{k=3}^{10} 4(-1)^{k-1} \quad (3) \quad \sum_{k=1}^5 (-3)(4)^{k-1} \quad (2) \quad \sum_{k=4}^6 2(-3)^{k-1} \quad (1)$$

$$0 \quad -1023 \quad -378$$

$$\sum_{k=2}^{10} 3(3)^{k-1} \quad (6) \quad \sum_{k=3}^{15} (-10)(-1)^{k-1} \quad (5) \quad \sum_{k=3}^7 (-1)(5)^{k-1} \quad (4)$$

$$88569 \quad -10 \quad 19525$$

$$S_n = 29127, n = 9, r = 4 \quad (8)$$

$$S_n = 720, n = 4, r = 3 \quad (7)$$

$$S_n = -936, r = 5, a_n = -750 \quad (10)$$

$$S_n = -6552, r = 3, a_n = -4374 \quad (9)$$

$$-6 \quad -18$$

الفصل ٩ ، المتتابعات والتسلسلات

17

الصفحة ، التالي ، التالي

الاسم: _____ التاريخ: _____

6-3 تدريبات إعادة التعليم

اتسلسلة هوندسية ، اتسلسلة الهندسية هي التسلسلة التي يكرن فيها كل حد بعد الحد الأول حاصل ضرب الحد السابق بعدد ثابت يسمى أساس التسلسلة (النسبة المقلبة 15).

الحد النوني في متتابعة هندسية	الحد النوني في متتابعة هندسية حيث $a_n = a_1 r^{n-1}$ ، حيث a_1 هو الحد الأول ، r أساس التسلسلة الهندسية ، و n هو أي عدد صحيح موجب .
-------------------------------	---

اكتب معادلة الحد النوني في التسلسلة

$$3, 6, 10, 8, 32, 4, \dots$$

$$r = 3, a_1 = 3$$

$$r = 3, a_1 = 3$$

$$r = 3, a_1 = 3$$

$$r = 3, a_1 = 3$$

$$r = 3, a_1 = 3$$

$$r = 3, a_1 = 3$$

$$r = 3, a_1 = 3$$

$$r = 3, a_1 = 3$$

$$r = 3, a_1 = 3$$

$$r = 3, a_1 = 3$$

$$r = 3, a_1 = 3$$

$$r = 3, a_1 = 3$$

$$r = 3, a_1 = 3$$

$$r = 3, a_1 = 3$$

$$r = 3, a_1 = 3$$

$$r = 3, a_1 = 3$$

$$r = 3, a_1 = 3$$

$$r = 3, a_1 = 3$$

$$r = 3, a_1 = 3$$

$$r = 3, a_1 = 3$$

$$r = 3, a_1 = 3$$

$$r = 3, a_1 = 3$$

$$r = 3, a_1 = 3$$

$$r = 3, a_1 = 3$$

$$r = 3, a_1 = 3$$

$$r = 3, a_1 = 3$$

$$r = 3, a_1 = 3$$

$$r = 3, a_1 = 3$$

$$r = 3, a_1 = 3$$

$$r = 3, a_1 = 3$$

$$r = 3, a_1 = 3$$

$$r = 3, a_1 = 3$$

الاسم: التاريخ:

6-4 تدريبات إعادة التعليم

اتسلسلات الهندسية غير المنتهية

اتسلسلات الهندسية غير المنتهية، يطلق على التسلسلات الهندسية التي ليس لها نهاية متسلسلة هندسية غير منتهية. وبعض التسلسلات الهندسية غير المنتهية لها مجموع، بينما البعض الآخر ليس لها مجموع؛ لأن المجاميع الجزئية تزداد دون أن تقترب من قيمة معينة.

$S = \frac{a_1}{1-r}$ لكل $r < 1$	جميع متسلسلة هندسية غير منتهية
إذا كانت $ r \geq 1$ ، فإن التسلسلة الهندسية غير المنتهية ليس لها مجموع.	

مثال 1 أوجد مجموع حدود كل من التسلسلين الآتيين (ان وُجد):

(a) $75 + 15 + 3 + \dots$ (b) $\sum_{n=1}^{\infty} 48 \left(-\frac{1}{3}\right)^{n-1}$

أوجد أولاً قيمة r لتحديد ما إذا كان المجموع موجوداً، a_1 في هذه التسلسلة الهندسية غير المنتهية $a_1 = 48$ و $r = -\frac{1}{3}$ صيغة المجموع

$$S = \frac{a_1}{1-r} = \frac{48}{1 - \left(-\frac{1}{3}\right)} = \frac{48}{1 + \frac{1}{3}} = \frac{48}{\frac{4}{3}} = 36$$

بالتبسيط $S = \frac{a_1}{1-r} = \frac{48}{1 - \left(-\frac{1}{3}\right)} = \frac{48}{1 + \frac{1}{3}} = \frac{48}{\frac{4}{3}} = 36$

بالتبسيط $S = \frac{a_1}{1-r} = \frac{48}{1 - \left(-\frac{1}{3}\right)} = \frac{48}{1 + \frac{1}{3}} = \frac{48}{\frac{4}{3}} = 36$

إذن مجموع التسلسلة هو 36.75

تقارنين

أوجد مجموع حدود كل من التسلسلات الآتية (ان وُجد):

(1) $a_1 = -7, r = \frac{5}{8}$ (2) $a_1 = 4, r = \frac{1}{2}$

(3) $1 + \frac{5}{4} + \frac{25}{16} + \dots$ (4) $18 - 9 + 4\frac{1}{2} - 2\frac{1}{4} + \dots$

(5) $15 + 10 + 6\frac{2}{3} + \dots$ (6) $1000 + 800 + 640 + \dots$

(7) $\frac{1}{10} + \frac{1}{20} + \frac{1}{40} + \dots$ (8) 5000

(9) $6 - 12 + 24 - 48 + \dots$ (10) $\sum_{k=1}^{\infty} 22 \left(-\frac{1}{2}\right)^{k-1}$

(11) $\sum_{n=1}^{\infty} 50 \left(\frac{4}{5}\right)^{n-1}$ (12) $\sum_{s=1}^{\infty} 24 \left(\frac{7}{12}\right)^{s-1}$

(13) $57\frac{3}{5}$ (14) $14\frac{2}{3}$

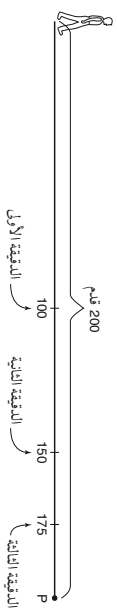
الفصل ٦، المتتابعات والتسلسلات الصفحة: الثاني، الثاني 21

الاسم: التاريخ:

6-3 تدريبات إثرائية

نصف المسافة

افترض أنك على بعد 200 قدم من نقطة ثابتة P ، واقترض أيضًا أنك تستطيع أن تصل إلى نقطة المنتصف في دقيقة واحدة، وإلى نقطة منتصف الجزء البقي بعد دقيقة من ذلك، وهكذا.



ستنتج بتتبعه ملقطة لاثباته لأنه يتقارب للمسألة، فأنت لن تصل النقطة P حقيقة، على الرغم من أنك تقترب منها بصورة كبيرة.

يمكنك أن تحسب كم ستحتاج لتكون ضمن مسافة معينة صغيرة من النقطة، أدخل إلى الآلة الحاسبة المسافة التي يتعين قطعها، ثم عُد عدد مرات القسمة المتتالية على 2 للنقطة للوصول ضمن المسافة المطلوبة.

مثال ما عدد الدقائق المطلوبة لتكون ضمن 0.1 قدم من نقطة تبعد 200 قدم؟

عد عدد المرات التي تقسم بها على 2. أدخل: $200 \div 2$ ENTER $\div 2$ ENTER $\div 2$ ENTER وهكذا.

النتيجة: 0.0976562. لقد قسمت على 2 إحدى عشرة مرة. الوقت المطلوب هو 11 دقيقة.

تقارنين

استخدم الطريقة الوضحة أعلاه على كل مسألة مما يأتي:

(1) إذا كانت المسافة بين مدينتين 2500 ميل، فما عدد الدقائق المطلوبة لتكون ضمن 0.1 ميل من المدينة الثانية؟ وكم سيكون بعدك عنها في ذلك الوقت؟

15 دقيقة، 0.0762934 ميل

(2) إذا كانت المسافة حول الأرض 25000 ميل، فكم دقيقة تتطلب لتكون ضمن 0.5 ميل من الدورة الكاملة حول الأرض؟ وكم سيكون بعدك عن نقطة النهاية؟

16 دقيقة، 0.3814697 ميل

(3) إذا كانت المسافة من الأرض إلى القمر 250000 ميل، فما عدد الدقائق المطلوبة لتكون ضمن 0.5 ميل من القمر؟ وكم سيكون بعدك عن سطح القمر عندما؟

19 دقيقة، 0.4768372 ميل

(4) إذا كانت المسافة بين جزيرتين 3000000 قدم، فما عدد الدقائق المطلوبة لتكون ضمن 1 قدم من الجزيرة الثانية؟ وكم سيكون بعدك عن الجزيرة الثانية في ذلك الوقت؟ 25 دقيقة، 0.8940697 ميل

الفصل ٦، المتتابعات والتسلسلات الصفحة: الثاني، الثاني 20

التاريخ:

الاسم:

6-4 تدريبات المهارات

اتسلسلات الهندسية غير المنتهية

أوجد مجموع حدود كل من التسلسلات الآتية (إن وُجد):

(1) 25 $a_1 = 5, r = -\frac{2}{3}$ (2) 2 $a_1 = 1, r = \frac{1}{2}$

(3) 12 $a_1 = 6, r = \frac{1}{2}$ (4) 4 $a_1 = 8, r = 2$ غير موجود

(5) 405 $540 - 180 + 60 - 20 + \dots$ (6) 8 $4 + 2 + 1 + \frac{1}{2} + \dots$

(7) -268.8 $-336 + 84 - 21 + \dots$ (8) 5 $5 + 10 + 20 + \dots$ غير موجود

(9) $\frac{81}{10}$ $9 - 1 + \frac{1}{9} - \dots$ (10) 156.25 $125 + 25 + 5 + \dots$

(11) $\frac{1}{2}$ $\frac{1}{3} + \frac{1}{9} + \frac{1}{27} + \dots$ (12) 3 $\frac{9}{4} + \frac{9}{4} + \frac{27}{4} + \dots$ غير موجود

(13) 27 $9 + 6 + 4 + \dots$ (14) $\frac{25}{3}$ $5 + 2 + 0.8 + \dots$

(15) $\frac{9}{2}$ $\sum_{n=1}^{\infty} 6 \left(-\frac{1}{3}\right)^{n-1}$ (16) 20 $\sum_{n=1}^{\infty} 10 \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$

(17) -2 $\sum_{n=1}^{\infty} \left(-\frac{4}{3}\right) \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}$ (18) 25 $\sum_{n=1}^{\infty} 15 \left(\frac{2}{5}\right)^{n-1}$

اكتب كلاً من الكسور المشربة الدورية الآتية في صورة كسر اعتيادي:

(19) $0.\bar{4}$ $\frac{4}{9}$ (20) $0.\bar{8}$ $\frac{8}{9}$

(21) $0.2\bar{7}$ $\frac{3}{11}$ (22) $0.6\bar{7}$ $\frac{67}{99}$

(23) $0.5\bar{4}$ $\frac{6}{11}$ (24) $0.3\bar{7}5$ $\frac{125}{333}$

(25) $0.6\bar{4}1$ $\frac{641}{999}$ (26) $0.1\bar{7}1$ $\frac{19}{111}$

الفصل ٦، اختبارات والتسلسلات

23

المصف، الثاني، الثاني

التاريخ:

الاسم:

6-4 تدريبات إعادة التعليم

اتسلسلات الهندسية غير المنتهية

اكتب كلاً من الكسور المشربة الدورية، الكسر المشري الدوري يمثل كسراً اعتيادياً، وإيجاد الكسر الاعتيادي، اكتب الكسر العشري على شكل متسلسلة هندسية غير منتهية، واستخدم صيغة المجموع.

مثال اكتب كلاً من الكسرين المشربين الدوريين الآتيين في صورة كسر اعتيادي.

(a) $0.\bar{4}2$ (b) $0.\bar{5}24$ لكن $S=0.\bar{5}24$

اكتب الكسر العشري الدوري على صورة مجموع $S=0.5242424 \dots$

بالكتابة في صورة

كسر عشري دوري

يعطى الطرفان في 10

يعطى الطرفان في 1000

يُطرح المبدأ الثاني

من المعادلة الناتجة

$10S = 5.242424$
 $1000S = 525.2424$
 $990S = 519$
 $S = \frac{519}{990} = \frac{173}{330}$

بالتبسيط

$a_1 = \frac{42}{100}, r = \frac{1}{100}$
 $S = \frac{a_1}{1-r} = \frac{\frac{42}{100}}{1-\frac{1}{100}} = \frac{42}{99} = \frac{14}{33}$

بالضرب

$S = \frac{a_1}{1-r}$
 $S = \frac{\frac{42}{100}}{1-\frac{1}{100}} = \frac{42}{99} = \frac{14}{33}$

لذا فإن $0.\bar{4}2 = \frac{14}{33}$

تفاهير

اكتب كلاً من الكسور المشربة الدورية الآتية في صورة كسر اعتيادي:

(1) $0.\bar{2}$ (2) $0.\bar{8}$ (3) $0.\bar{3}0$ (4) $0.8\bar{7}$

(5) $0.1\bar{0}$ (6) $0.5\bar{4}$ (7) $0.7\bar{5}$ (8) $0.1\bar{8}$

(9) $0.6\bar{2}$ (10) $0.7\bar{2}$ (11) $0.0\bar{7}2$ (12) $0.0\bar{4}5$

(13) $0.0\bar{6}$ (14) $0.0\bar{1}3\bar{8}$ (15) $0.0\bar{1}3\bar{8}$ (16) $0.0\bar{8}1$

(17) $0.0\bar{6}2$ (18) $0.0\bar{4}5$ (19) $0.0\bar{7}2$ (20) $0.0\bar{4}5$

الفصل ٦، اختبارات والتسلسلات

22

المصف، الثاني، الثاني

الاسم: التاريخ:

6-5 تدريبات حل المسألة

نظرية ذات الجدين

1) مساحة طول ضلع المربع $x + y$ لدينا فإن

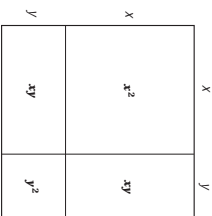
مساحته تساوي:

$$x^2 + xy + xy + y^2 = (x+y)^2$$

يمثل كل حد من الحدود الأربعة جزءًا معينًا من

المساحة، ضاع كل حد في المنطقة التي تحده من مساحة

المربع



4) نقارن، نترأ الأعداد في كل صف في مثلث باسكال من اليسار إلى اليمين، وهو عائل لقراءتها من اليمين إلى اليسار. وضح سبب هذه الحالة؟

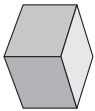
$$9C_0 = 256, 9C_1 = 256, 9C_2 = 256, 9C_3 = 256, 9C_4 = 256, 9C_5 = 256, 9C_6 = 256, 9C_7 = 256, 9C_8 = 256, 9C_9 = 256$$

إجابة ممكنة: إذا بدأت مع x في نظرية ذات الجدين،

فإن المعاملات سينفكس ترتيبها، ولأن

$$r^n = (x+y)^n = (y+x)^n$$

5) حجم، طول كل حرف من المكعب التالي هو $x + y$ وحدة.



أوجد مكعب $(x+y)^3$ مستخدمًا نظرية ذات الجدين.

$$x^3 + 3x^2y + 3xy^2 + y^3$$

الفصل ٦، المتباينات والمتسلسلات

29

المصف: الثاني، الثانوي

الاسم: التاريخ:

6-5 تدريبات المهارات

نظرية ذات الجدين

أوجد مكعب كل عائل:

$$(x-y)^3 = x^3 - 3x^2y + 3xy^2 - y^3$$

$$a^5 + 5a^4b + 10a^3b^2 + 10a^2b^3 + 5ab^4 + b^5$$

$$(m+1)^4$$

$$m^4 + 4m^3 + 6m^2 + 4m + 1$$

$$(a-5)^4$$

$$a^4 - 20a^3 + 150a^2 - 500a + 625$$

$$d^4 - 10d^3 + 40d^2 + 80d + 32$$

$$d^5 + 10d^4 + 40d^3 + 80d^2 + 80d + 32$$

$$16a^4 + 32a^3b + 24a^2b^2 + 8ab^3 + b^4$$

$$8a^3 + 36a^2 + 54a + 27$$

$$(2a+3)^3$$

$$8a^3 + 36a^2 + 54a + 27$$

$$1215x^2y^4$$

$$1215x^2y^4$$

$$4194304y^{11}$$

$$13x - 4y$$

$$13x - 4y$$

$$13x - 4y$$

$$13x - 4y$$

$$13x - 4y$$

$$13x - 4y$$

$$13x - 4y$$

$$13x - 4y$$

$$13x - 4y$$

$$13x - 4y$$

$$13x - 4y$$

$$13x - 4y$$

$$13x - 4y$$

$$13x - 4y$$

$$13x - 4y$$

$$13x - 4y$$

$$13x - 4y$$

$$13x - 4y$$

$$13x - 4y$$

$$13x - 4y$$

$$13x - 4y$$

$$13x - 4y$$

$$13x - 4y$$

$$13x - 4y$$

$$13x - 4y$$

$$13x - 4y$$

$$13x - 4y$$

التاريخ:

الاسم:

6-6 تدريبات إعادة التعليم البرهان بالاستقراء الرياضي

الاستقراء الرياضي، الاستقراء الرياضي طريقة برهان تُستخدم لإثبات جمل حول الأعداد الطبيعية.

الخطوة 1: برهن على أن الجملة صحيحة عندما $n = 1$.	الخطوة 2: افترض أن الجملة صحيحة عند العدد الطبيعي k . هذا الفرض يُسمى فرضية الاستقراء.
البرهان بالاستقراء الرياضي	الخطوة 3: برهن على أن الجملة صحيحة للعدد الطبيعي التالي $k+1$.

الخطوة 1: عندما $n=1$ ، يكون الحد الأيسر من المعادلة المطاة هو $5 = 1 - 6$ ، والحد الأيمن هو $5 = 1 + 2 + 3$.
لذا فإن المعادلة صحيحة في حالة $n=1$.

الخطوة 2: افترض أن $3k^2 + 2k = 1 - 6(k-1) + 5 + 11 + 17 + \dots$ ، حيث k عدد طبيعي.
الخطوة 3: برهن على أن الجملة صحيحة للعدد $n=k+1$. أضف 1 إلى كلا الطرفين.

$$\begin{aligned} 5 + 11 + 17 + \dots + (6k-1) + [6(k+1) - 1] &= 3k^2 + 2k + 6(k+1) - 1 \\ &= 3k^2 + 2k + 6k + 5 \\ &= 3k^2 + 6k + 3 + 2k + 2 \\ &= 3(k^2 + 2k + 1) + 2(k+1) \\ &= 3(k+1)^2 + 2(k+1) \end{aligned}$$

المعادلة الأخيرة أعلاه هي الطرف الأيمن من المعادلة المراد إثباتها، حيث استبدلت n بـ $k+1$ ، لذا فإن المعادلة صحيحة عندما $n=k+1$.
وهذا يثبت أن $3n^2 + 2n = 1 - 6(n-1) + 5 + 11 + 17 + \dots$ لكل الأعداد الطبيعية n .

تعاريف:

برهن صحة كل من الجمل الآتية للأعداد الطبيعية جميعها:

$$1. \quad n + 2n^2 = 2n^2 + 3 + 7 + 11 + \dots + (4n-1)$$

$$2. \quad 1 + 3 + 5 + \dots + (2k-1) = k^2$$

$$3. \quad 1 + 3 + 5 + \dots + (2k-1) = k^2$$

$$4. \quad 1 + 3 + 5 + \dots + (2k-1) = k^2$$

$$5. \quad 1 + 3 + 5 + \dots + (2k-1) = k^2$$

$$6. \quad 1 + 3 + 5 + \dots + (2k-1) = k^2$$

$$7. \quad 1 + 3 + 5 + \dots + (2k-1) = k^2$$

$$8. \quad 1 + 3 + 5 + \dots + (2k-1) = k^2$$

$$9. \quad 1 + 3 + 5 + \dots + (2k-1) = k^2$$

$$10. \quad 1 + 3 + 5 + \dots + (2k-1) = k^2$$

$$11. \quad 1 + 3 + 5 + \dots + (2k-1) = k^2$$

$$12. \quad 1 + 3 + 5 + \dots + (2k-1) = k^2$$

$$13. \quad 1 + 3 + 5 + \dots + (2k-1) = k^2$$

$$14. \quad 1 + 3 + 5 + \dots + (2k-1) = k^2$$

$$15. \quad 1 + 3 + 5 + \dots + (2k-1) = k^2$$

الفصل ٦، المتباينات والمتسلاات

31

التاريخ:

الاسم:

6-5 تدريبات إثرائية الأنماط في مثلث باسكال

لقد درست أن المعاملات في مفكوك " $(x+y)^n$ " تتبع نمطاً من الأعداد يُسمى مثلث باسكال.

صف 1	1
صف 2	1 1
صف 3	1 2 1
صف 4	1 3 3 1
صف 5	1 4 6 4 1
صف 6	1 5 10 10 5 1
صف 7	1 6 15 20 15 6 1

يمكن إضافة صفوف لقاعدة الهرم بالمعد الذي تريد.

يستكشف هذا النشاط بعض الخصائص البيرة للانتباه في نمط الأعداد المشهور هذا.

1) اختر أحد صفوف مثلث باسكال.

انظر أعمال الطلاب.

2) ما مجموع كل الأعداد في الصف الذي اخترته.

انظر أعمال الطلاب.

3) ما العلاقة بين إجاباتك للترعين a، b، c؟

4) أجب الفقرة التالية بمقدار 1 عن أجابة الفقرة a.

5) كرر الفروع من a إلى c على الأقل ثلاثة صفوف أخرى في مثلث باسكال. ما التعميم الذي يبدو أنه صحيح؟

6) يبدو أن مجموع الأعداد في كل صف في مثلث باسكال يزيد بمقدار 1 عن مجموع الأعداد في الصف السابق له كلها.

7) حاول أن تثبت صحة تعميمك.

8) مجموع الأعداد في الصف n هو 2^{n-1} ؛ وفق صيغة مجموع المتسلسلة الهندسية يكون

$$1 + 2 + 2^2 + \dots + 2^{n-1} = 2^n - 1$$

9) اختر أحد صفوف مثلث باسكال التي تأتي بعد الصف الأول.

a) اجمع الأعداد اليسرى للصف، ثم اجمع الأعداد الأولى والثالث والخامس وهكذا. واكتب الناتج.

انظر أعمال الطلاب.

b) اجمع الأعداد الثانية في الصف وهكذا. واكتب الناتج.

انظر أعمال الطلاب.

c) قارن بين النتائج في الفروع a، b.

الجموعتان متساويتان.

d) كرر الفروع من a إلى c على الأقل ثلاثة صفوف أخرى في مثلث باسكال. ما التعميم الذي يبدو أنه صحيح؟

يكون مجموع الحدود ذات الترتيب الفردي مساوياً لمجموع الحدود ذات الترتيب الزوجي في أي صف من مثلث باسكال.

بعد الصف الأول.

الفصل ٦، المتباينات والمتسلاات

30

الصف، الثاني والثالث

الاسم: التاريخ:

6-6 تدريبات المهارات

البرهان بالاستقراء الرياضي

برهن صحة كل من الجمل الآتية للأعداد الطبيعية جميعها.

$$(1) \quad n^2 = 1 + 3 + 5 + \dots + (2n - 1)$$

الخطوة 1: عندما $n=1$ يكون $1^2=1=2(1)-1$ ، إذن الجملة صحيحة عندما $n=1$.

الخطوة 2: افترض أن $k^2 = 2k - 1$ صحيحة، حيث k عدد طبيعي.

الخطوة 3: برهن أن الجملة صحيحة عندما $n=k+1$

$$\begin{aligned} 1 + 3 + 5 + \dots + (2k - 1) + [2(k + 1) - 1] &= k^2 + [2(k + 1) - 1] \\ &= k^2 + 2k + 1 \\ &= (k + 1)^2 \end{aligned}$$

إذن الجملة صحيحة عندما $n=k+1$ ، فهي صحيحة لكل الأعداد الطبيعية.

$$(2) \quad n^2 + n = 2 + 4 + 6 + \dots + 2n$$

الخطوة 1: عندما $n=1$ يكون $1^2+1=2=2(1)$ ، إذن الجملة صحيحة عندما $n=1$.

الخطوة 2: افترض أن $k^2 + k = 2 + 4 + 6 + \dots + 2k$ صحيحة، حيث k عدد طبيعي.

الخطوة 3: برهن أن الجملة صحيحة عندما يكون $n=k+1$.

$$\begin{aligned} 2 + 4 + 6 + \dots + 2k + 1 + 2(k + 1) &= k^2 + k + 2(k + 1) \\ &= (k^2 + 2k + 1) + (k + 1) \\ &= (k + 1)^2 + (k + 1) \end{aligned}$$

إذن الجملة صحيحة عندما $n=k+1$ ، فهي صحيحة لكل الأعداد الطبيعية.

3) $6^n - 1$ قابل للقسمة على 5

الخطوة 1: عندما $n=1$ يكون $6^1 - 1 = 5$ ، وهو يقبل القسمة على 5، إذن الجملة صحيحة عندما $n=1$.

الخطوة 2: افترض أن $6^k - 1$ يقبل القسمة على 5، حيث k عدد طبيعي.

الخطوة 3: برهن أن الجملة صحيحة عندما يكون $n=k+1$.

$$\begin{aligned} 6^k - 1 &= 5r \\ 6^k &= 5r + 1 \\ 6(6^k) &= 6(5r + 1) \\ 6^{k+1} &= 30r + 6 \\ 6^{k+1} - 1 &= 30r + 5 \\ 6^{k+1} - 1 &= 5(6r + 1) \end{aligned}$$

وهو يقبل القسمة على 5، إذن الجملة صحيحة عندما $n=k+1$ ، فهي صحيحة لكل الأعداد الطبيعية.

$$\begin{aligned} 4) \quad \text{أعط متلاً مضاعفاً يُعَيِّن خطأ الجملة:} \quad 1 + 4 + 8 + \dots + 2n = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \\ \text{إجابة ممكنة: } n = 2 \end{aligned}$$

الفصل ٦، المتباينات والمتسلاطات

33

الصفحة الثاني الثانوي

الاسم: التاريخ:

6-6 تدريبات إعادة التعليم

الإثبات بالاستقراء الرياضي

أتمله مضادة، لإثبات أن صيغة أو تعبيراً غير صحيحين، أوجد متلاً مضاداً، وذلك بتعويض قيم للمتغير.

$$2n^2 + 2n + 3 = 2^{n+2} - 1$$

أوجد متلاً مضاداً لنفي صحة الجملة الأولى.

n	صيغة الطرف الأيسر	صيغة الطرف الأيمن	نتيجة
1	$2(1)^2 + 2(1) + 3 = 2 + 2 + 3 = 7$	$2^{1+2} - 1 = 2^3 - 1 = 7$	صحيحة
2	$2(2)^2 + 2(2) + 3 = 8 + 4 + 3 = 15$	$2^{2+2} - 1 = 2^4 - 1 = 15$	صحيحة
3	$2(3)^2 + 2(3) + 3 = 18 + 6 + 3 = 27$	$2^{3+2} - 1 = 2^5 - 1 = 31$	خطأ

أوجد متلاً مضاداً لنفي صحة العبارة $4n^2 + 2n^2$ أو قابلة للقسمة على 4.

n	$x^2 + 4$	صحيحة؟	n	$x^2 + 4$	صحيحة؟
1	$1 + 4 = 5$	أولية	6	$36 + 4 = 40$	تقسم على 4
2	$4 + 4 = 8$	تقسم على 4	7	$49 + 4 = 53$	أولية
3	$9 + 4 = 13$	أولية	8	$64 + 4 = 68$	تقسم على 4
4	$16 + 4 = 20$	تقسم على 4	9	$81 + 4 = 85$	كلها خطأ
5	$25 + 4 = 29$	أولية			

قيمة $n=9$ تعطي متلاً مضاداً.

تعاريف

أعط متلاً يُعَيِّن خطأ كل من الجمل الآتية:

$$\begin{aligned} n=2 \quad 1 + 5 + 9 + \dots + (4n - 3) &= 4n - 3 \\ n=2 \quad 100 + 110 + 120 + \dots + (10n + 90) &= 5n^2 + 95 \\ n=3 \quad 900 + 300 + 100 + \dots + 100(3^3 - 1) &= 900 \cdot \frac{2n}{n+1} \\ n=4 \quad n^2 + n + 1 &= 4 \\ n=4 \quad \text{عدد أولي} &= 4 \\ n=2 \quad \text{عدد أولي} &= 2 \\ n=3 \quad 1 + 1 + \frac{3}{2} + \dots + \frac{n}{2} &= n - \frac{1}{2} \\ n=3 \quad 5n^2 + 1 &= 3 \\ n=9 \quad n^2 - 3n + 1 &= 9 \\ n=6 \quad 4n^2 - 1 &= 3 \end{aligned}$$

الفصل ٦، المتباينات والمتسلاطات

32

الصفحة الثاني الثانوي

