وزارة التربية والتعليم
Ministry of Education
المملكة العربية السعودية

الرياضيات

للصف الثاني الثانوي

مصادر المعلم للأنشطة الصفية

الفصل الثالث: كثيرات الحدود ودوالها

McGraw Hill Education

العبيكان Obeikan

١٤٣٤ هـ - ٢٠١٣ م

الرياضيات ـ الصف الثاني الثانوي

مصادر المعلم للأنشطة الصفية

أعدَّ النسخة العربية: شركة العبيكان للتعليم

Glencoe Mathematics © 2010

CHAPTER RESOURCE MASTERS

Algebra 2

www.obeikaneducation.com

McGraw Hill Education

العبيكان Obeikan

Arabic Edition is published by Obeikan under agreement with
The McGraw-Hill Companies, Inc. © 2008.

الطبعة العربية: مجموعة العبيكان للاستثمار
وفقًا لاتفاقيتها مع شركة ماجروهل© ٢٠٠٨م/ ١٤٢٩هـ.

بِسْمِ اللَّهِ الرَّحْمَٰنِ الرَّحِيمِ

المقدمة

الحمد لله والصلاة والسلام على نبينا محمد وعلى آله وصحبه أجمعين، وبعد:

عزيزي المعلم / عزيزتي المعلمة

يسرنا أن نقدم هذه المجموعة من التدريبات المساندة، التي تراعي الفروق الفردية بين الطلاب. حيث نطمح أن يساعدك التنوع في هذه التدريبات على الوصول إلى جميع الطلاب في الصف، مهما تباينت مستوياتهم.

وقد تم تخصيص صفحة أو أكثر لكل نوعٍ من هذه التدريبات؛ لتغطي درسًا من دروس كتاب الطالب. حيث يمكنك أن تكلف الطلاب حل صفحة التدريبات المقابلة لكل درس بحسب مستوى كل منهم؛ سواء في داخل الصف أم في المنزل. وليست هذه التدريبات بديلًا عن كتاب التمارين، ولكنها مساندة ومكملة له.

وتشمل هذه التدريبات الأنواع التاليه:

تدريبات إعادة التعليم

تركِّز هذه التدريبات على محتوى الدروس في كتاب الطالب، وتقدمه بأسلوب تدريسي ومعالجة يختلفان عن كتابي الطالب والتمارين. وهي موجّهة إلى الطلاب ذوي المستوى دون المتوسط.

ولأهمية حل المسألة تم تخصيص صفحتين من تدريبات إعادة التعليم لكل درس من دروس حل المسألة؛ للتركيز على كيفية اختيار الخطة وتنفيذها، بالإضافة إلى مجموعة من التدريبات المناسبة لتطبيق تلك الخطة.

تدريبات المهارات

تركِّز هذه التدريبات غالبًا على المهارات الحسابية الموجودة في الدرس، وتتضمن تدريبات إضافية وسائل تركز على تلك المهارات. وهي موجّهة إلى الطلاب ذوي المستوى المتوسط.

التدريبات الإثرائية

تساعد هذه التدريبات على التوسُّع في مفاهيم الدرس، كما تؤدي إلى توسيع مدارك الطلاب حول تعلم الرياضيات بشكل عام. وهذه التدريبات موجَّهة إلى الطلاب ذوي المستوى فوق المتوسط.

ملحق الإجابات:

يتضمن هذا المصدر في آخره ملحقًا بالإجابات، حيث تظهر باللون الأسود الغامق على صفحات مصغَّرة.

الفهرس

3-1 تدريبات إعادة التعليم

الأعداد المركبة

الأعداد التخيلية البحتة: الجذر التربيعي للعدد n هو عدد مربعه n. وإذا كان a,b عددين حقيقيين غير سالبين فإن: $\sqrt{ab}=\sqrt{a}\ .\sqrt{b}$ و $\sqrt{\frac{a}{b}}=\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$ حيث $b \neq 0$.

- تُعرَّف **الوحدة التخيلية** $(\boldsymbol{i})$ على أنها تحقق الخاصية: $\boldsymbol{i}^2=-1$
- تبسيط العبارات التي تتضمن جذورًا تربيعية يعني أن هذه العبارات لا تحوي جذورًا في المقام، وأي عدد يبقى داخل الجذر التربيعي لا يتضمن عاملًا مربعًا كاملًا غير العدد 1.

مثال 1

a) بسِّط $\sqrt{-48}$.

$$\sqrt{-48}=\sqrt{16\cdot(-3)}$$
$$=\sqrt{16}\cdot\sqrt{3}\cdot\sqrt{-1}$$
$$=4\boldsymbol{i}\sqrt{3}$$

b) بسِّط $\sqrt{-63}$.

$$\sqrt{-63}=\sqrt{-1\cdot7\cdot9}$$
$$=\sqrt{-1}\cdot\sqrt{7}\cdot\sqrt{9}$$
$$=3\boldsymbol{i}\sqrt{7}$$

مثال 2

a) بَسِّط $-3\boldsymbol{i}.4\boldsymbol{i}$.

$$-3\boldsymbol{i}\ .\ 4\boldsymbol{i}=-12\boldsymbol{i}^2$$
$$=-12(-1)$$
$$=12$$

b) بَسِّط $\sqrt{-3}\cdot\sqrt{-15}$.

$$\sqrt{-3}\cdot\sqrt{-15}=\boldsymbol{i}\sqrt{3}\cdot\boldsymbol{i}\sqrt{15}$$
$$=\boldsymbol{i}^2\sqrt{45}$$
$$=-1\cdot\sqrt{9}\cdot\sqrt{5}$$
$$=-3\sqrt{5}$$

مثال 3 حل المعادلة $x^2+5=0$

$x^2+5=0$	المعادلة الأصلية
$x^2=-5$	بطرح 5 من كلا الطرفين
$x=\pm\sqrt{5}\boldsymbol{i}$	خاصية الجذر التربيعي

تمارين:

بسط كلًا مما يأتي:

1) $\sqrt{-72}$

2) $\sqrt{-24}$

3) $\sqrt{-84}$

4) $(2+\boldsymbol{i})(2-\boldsymbol{i})$

حل كل معادلة مما يأتي:

5) $5x^2+45=0$

6) $4x^2+24=0$

7) $-9x^2=9$

8) $7x^2+84=0$

الاسم: ______________ التاريخ: ______

3-1 تدريبات إعادة التعليم
(تتمة)

الأعداد المركبة

العمليات على الأعداد المركبة.

العدد المركب	العدد المركب هو أي عدد يكتب على الصورة $a+bi$ حيث a,b عددان حقيقيان، و i الوحدة التخيلية ($i^2=-1$). يسمى a الجزء الحقيقي من العدد المركب، و b الجزء التخيلي.
جمع الأعداد المركبة وطرحها	دمج الحدود المتشابهة $(a+bi)+(c+di)=(a+c)+(b+d)i$ $(a+bi)-(c+di)=(a-c)+(b-d)i$
ضرب الأعداد المركبة	استعمل تعريف i^2، وقانون التوزيع: $(a+bi)(c+di)=(ac-bd)+(ad+bc)i$
مرافق العدد المركب	يسمى العددان $a+bi$ و $a-bi$ مركبان مترافقان. وناتج ضربهما عدد حقيقي دائمًا.

للقسمة على عدد مركب. أولًا اضرب كلًا من المقسوم والمقسوم عليه بمرافق المقسوم عليه.

مثال 1 بَسِّط $(6+i)+(4-5i)$

$(6+i)+(4-5i)$

$=(6+4)+(1-5)i$

$=10-4i$

مثال 2 بسط $(8+3i)-(6-2i)$

$(8+3i)-(6-2i)$

$=(8-6)+[(3-(-2))]i$

$=2+5i$

مثال 3 بَسِّط $(2-5i)\cdot(-4+2i)$

$(2-5i)\cdot(-4+2i)$

$=2(-4)+2(2i)+(-5i)(-4)+(-5i)(2i)$

$=-8+4i+20i-10i^2$

$=-8+24i-10(-1)$

$=2+24i$

مثال 4 بَسِّط

$$\frac{3-i}{2+3i}=\frac{3-i}{2+3i}\cdot\frac{2-3i}{2-3i}$$

$$=\frac{6-9i-2i+3i^2}{4-9i^2}$$

$$=\frac{3-11i}{13}$$

$$=\frac{3}{13}-\frac{11}{13}i$$

تمارين:

بسط كلًا مما يأتي:

1) $(-4+2i)+(6-3i)$
2) $(5-i)-(3-2i)$
3) $(6-3i)+(4-2i)$
4) $(-11+4i)-(1-5i)$
5) $(8+4i)+(8-4i)$
6) $(5+2i)-(-6-3i)$
7) $(2+i)(3-i)$
8) $(5-2i)(4-i)$
9) $(4-2i)(1-2i)$
10) $\frac{5}{3+i}$
11) $\frac{7-13i}{2i}$
12) $\frac{6-5i}{3i}$

3-1 تدريبات المهارات

الأعداد المركبة

بسط كلًا مما يأتي:

1) $\sqrt{99}$

2) $\sqrt{\frac{27}{49}}$

3) $\sqrt{52x^3y^5}$

4) $\sqrt{-108x^7}$

5) $\sqrt{-81x^6}$

6) $\sqrt{-23}\cdot\sqrt{-46}$

7) $(3\boldsymbol{i})(-2\boldsymbol{i})(5\boldsymbol{i})$

8) $\boldsymbol{i}^{11}$

9) $\boldsymbol{i}^{65}$

10) $(7-8\boldsymbol{i})+(-12-4\boldsymbol{i})$

11) $(-3+5\boldsymbol{i})+(18-7\boldsymbol{i})$

12) $(10-4\boldsymbol{i})-(7+3\boldsymbol{i})$

13) $(7-6\boldsymbol{i})(2-3\boldsymbol{i})$

14) $(3+4\boldsymbol{i})(3-4\boldsymbol{i})$

15) $\frac{8-6\boldsymbol{i}}{3\boldsymbol{i}}$

16) $\frac{3\boldsymbol{i}}{4+2\boldsymbol{i}}$

حل كل معادلة مما يأتي:

17) $3x^2+3=0$

18) $5x^2+125=0$

19) $4x^2+20=0$

20) $-x^2-16=0$

21) $x^2+18=0$

22) $8x^2+96=0$

أوجد قيم $\boldsymbol{l}$ و $\boldsymbol{m}$ التي تجعل المعادلة صحيحة فيما يأتي:

23) $20-12\boldsymbol{i}=5\ell+(4m)\boldsymbol{i}$

24) $\ell-16\boldsymbol{i}=3-(2m)\boldsymbol{i}$

25) $(4+\ell)+(2m)\boldsymbol{i}=9+14\boldsymbol{i}$

26) $(3-m)+(7\ell-14)\boldsymbol{i}=1+7\boldsymbol{i}$

3-1 تدريبات حل المسألة

الأعداد المركبة

1) أخطاء الإشارات: حصل عماد وناصر على إجابات مختلفة لحاصل الضرب: $(4-\boldsymbol{i})(4+\boldsymbol{i})$، وكتبوا إجاباتهم على صورة أعداد مركبة، فكانت إجابة عماد 17، وإجابة ناصر 15. أيهما كانت إجابته صحيحة؟ فسر إجابتك.

2) المركبان المترافقان: لقد وجدتَ أن حاصل ضرب عددين مركبين مترافقين عدد حقيقي. بيِّن أن مجموع عددين مركبين مترافقين عدد حقيقي أيضًا.

3) ثلاثيات فيثاغورس: إذا حققت ثلاثة أعداد صحيحة المعادلة: $a^2+b^2=c^2$ ، فإنها تُسمى ثلاثية فيثاغورس، إفترض أن الأعداد a, b, c ثلاثية فيثاغورس، وبيِّن أن الجزء الحقيقي والجزء التخيلي للعبارة $(a+b\boldsymbol{i})^2$ تكوِّن مع c^2 ثلاثية فيثاغورس.

4) دوران: يمكن استعمال الأعداد المركبة لتعيين الإحداثيات الناتجة عن الدوران حول نقطة الأصل في المستوى الإحداثي. الجزءان الحقيقي والتخيلي في العبارة $\boldsymbol{i}(x+y\boldsymbol{i})$ يمثلان الإحداثي الأفقي والإحداثي الرأسي لصورة النقطة (x,y) نتيجة دوران حول نقطة الأصل بزاوية قياسها 90° باتجاه عكس عقارب الساعة. ما الجزءان الحقيقي والتخيلي للعبارة $\boldsymbol{i}(x+y\boldsymbol{i})$.

5) هندسة الكهرباء: التيار الكهربائي المتردد (AC) هو دائرة كهربائية يمكن وصفها باستخدام الأعداد المركبة. في أي دائرة كهربائية، يرتبط فرق الجهد V، وشدة التيار C، والمعاوقة I، بالصيغة $V=C.I$ (فرق الجهد الكهربائي النموذجي في أوروبا 220 فولت).

أجب عن الأسئلة التالية التي يتضمن كلٌّ منها دائرة كهربائية أوروبية نموذجية (فرق الجهد $V=220$ فولت).

a) أوجد المعاوقة إذا كانت شدة التيار $22-11\boldsymbol{i}$ أمبير.

b) أوجد شدة التيار إذا كانت المعاوقة $10-5\boldsymbol{i}$ واط.

c) أوجد المعاوقة إذا كانت شدة التيار $20\boldsymbol{i}$ أمبير.

3-1 التدريبات الإثرائية

المركبان المترافقان والقيمة المطلقة

غالبًا ما يُمثَّل العدد المركب بمتغير واحد في دراسة الأعداد المركبة، فمثلًا، نرمز للعدد $x+y\boldsymbol{i}$ بالرمز z، وعندها نرمز للعدد المركب المترافق للعدد z بالرمز $\bar{z}$ ، أي $\bar{z}=x-y\boldsymbol{i}$

وتُعرَّف القيمة المطلقة للعدد المركب على الصورة $|z|=|x+y\boldsymbol{i}|=\sqrt{x^2+y^2}$ ، وتوجد علاقات كثيرة مهمة تتضمن الأعداد المترافقة والقيمة المطلقة للأعداد المركبة.

مثال 1 **بيِّن أن $|z|^2=z\bar{z}$ لأي عدد مركب z.**

افرض أن $z=x+y\boldsymbol{i}$ فإن:

$$\begin{aligned} z\bar{z} &= (x+y\boldsymbol{i})(x-y\boldsymbol{i}) \\ &= x^2+y^2 \\ &= \sqrt{(x^2+y^2)^2} \\ &= |z|^2 \end{aligned}$$

مثال 2 **بيِّن أن $\frac{\bar{z}}{|z|^2}$ هو النظير الضربي لأي عدد مركب z حيث $z \neq 0$.**

تعلم أن $|z|^2=\bar{z}z$.

إذا كان $z \neq 0$ فإن $z\left(\frac{\bar{z}}{|z|^2}\right)=1$

وعليه يكون $\frac{\bar{z}}{|z|^2}$ نظير ضربي للعدد z.

تمارين:

أوجد القيمة المطلقة والنظير الضربي لكل عددٍ مركب فيما يأتي:

1) $2\boldsymbol{i}$

2) $-4-3\boldsymbol{i}$

3) $12-5\boldsymbol{i}$

4) $5-12\boldsymbol{i}$

5) $1+\boldsymbol{i}$

6) $\sqrt{3}-\boldsymbol{i}$

7) $\frac{\sqrt{3}}{3}+\frac{\sqrt{3}}{3}\boldsymbol{i}$

8) $\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}\boldsymbol{i}$

9) $\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}\boldsymbol{i}$

الاسم: ________________ التاريخ: ________

3-2 تدريبات إعادة التعليم

القانون العام والمميز

القانون العام: يستخدم القانون العام في حل أي معادلة تربيعية مكتوبة على الصورة $ax^2+bx+c=0$.

القانون العام	حل المعادلة التربيعية $ax^2+bx+c=0$ حيث $a \neq 0$ يُعطى بالقانون: $x=\dfrac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$

مثال حل المعادلة $x^2-5x=14$ مستعملًا القانون العام.

أعد كتابة المعادلة على الصورة $x^2-5x-14=0$

$x=\dfrac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$ القانون العام

$=\dfrac{-(-5)\pm\sqrt{(-5)^2-4(1)(-14)}}{2(1)}$ بالتعويض: $a=1$ و $b=-5$ و $c=-14$

$=\dfrac{5\pm\sqrt{81}}{2}$ بالتبسيط

$=\dfrac{5\pm9}{2}$

$=7$ أو -2

إذن، حلّا المعادلة هما: -2 و 7.

تمارين:

حل كل معادلة مما يأتي مستعملًا القانون العام.

1) $x^2+2x-35=0$

2) $x^2+10x+24=0$

3) $x^2-11x+24=0$

4) $4x^2+19x-5=0$

5) $14x^2+9x+1=0$

6) $2x^2-x-15=0$

7) $3x^2+5x=2$

8) $2y^2+y-15=0$

9) $3x^2-16x+16=0$

10) $8x^2+6x-9=0$

11) $r^2-\dfrac{3r}{5}+\dfrac{2}{25}=0$

12) $x^2-10x-50=0$

13) $x^2+6x-23=0$

14) $4x^2-12x-63=0$

15) $x^2-6x+21=0$

الاسم: ____________ التاريخ: ____________

3-2 تدريبات إعادة التعليم

(تتمة)

القانون العام والمميز

الجذور والمميز

المميز	العبارة b^2-4ac تحت الجذر التربيعي في القانون العام يسمى المميز.

المميز	عدد الجذور وأنواعها
$b^2-4ac>0$ ومربع كامل	جذران نسبيان
$b^2-4ac>0$ وليس مربعًا كاملًا	جذران غير نسبيين
$b^2-4ac=0$	جذر نسبي مكرر مرتين
$b^2-4ac<0$	جذران مركبان

مثال **أوجد قيمة المميز لكل معادلة، ثم صف عدد الجذرو ونوعها.**

a) $2x^2+5x+3=0$

المميز b^2-4ac

$b^2-4ac=5^2-4(2)(3)$

$=25-24$

$=1$

المميز موجب ومربع كامل، لذا يوجد للمعادلة جذران نسبيان.

b) $3x^2-2x+5=0$

المميز b^2-4ac

$b^2-4ac=(-2)^2-4(3)(5)$

$=4-60$

$=-56$

المميز سالب، لذا يوجد للمعادلة جذران مركبان

تمارين:

حل الفروع $(a-c)$ لكل معادلة مما يأتي:

a) أوجد قيمة المميز.

b) صف عدد الجذور، وحدد أنواعها.

c) أوجد حلول المعادلة مستعملًا القانون العام.

1) $p^2+12p=-4$

2) $9x^2-6x+1=0$

3) $2x^2-7x-4=0$

4) $x^2+4x-4=0$

5) $5x^2-36x+7=0$

6) $4x^2-4x+11=0$

7) $x^2-7x+6=0$

8) $m^2-8m=-14$

9) $25x^2-40x=-16$

10) $4x^2+20x+29=0$

11) $6x^2+26x+8=0$

12) $4x^2-4x-11=0$

3-2 تدريبات المهارات

القانون العام والمميز

حل الفروع $(a-c)$ لكل معادلة مما يأتي:

a) أوجد قيمة المميز.

b) صف عدد الجذور، وحدّد أنواعها.

c) أوجد حلول المعادلة مستعملًا القانون العام.

1) $x^2-8x+16=0$

2) $x^2-11x-26=0$

3) $3x^2-2x=0$

4) $20x^2+7x-3=0$

5) $5x^2-6=0$

6) $x^2-6=0$

7) $x^2+8x+13=0$

8) $5x^2-x-1=0$

9) $x^2-2x-17=0$

10) $x^2+49=0$

11) $x^2-x+1=0$

12) $2x^2-3x=-2$

حل كل معادلة مما يأتي مستعملًا القانون العام.

13) $x^2=64$

14) $x^2-30=0$

15) $x^2-x=30$

16) $16x^2-24x-27=0$

17) $x^2-4x-11=0$

18) $x^2-8x-17=0$

19) $x^2+25=0$

20) $3x^2+36=0$

21) $2x^2+10x+11=0$

22) $2x^2-7x+4=0$

23) $8x^2+1=4x$

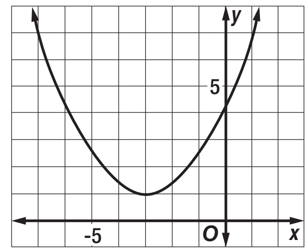
24) $2x^2+2x+3=0$

25) **القفز بالمظلات:** تُقدر المسافة $d(t)$ بالأقدام التي يقطعها مظلي بعد (t) ثانية من العلاقة $d(t)=16t^2$، مع إهمال مقاومة الرياح. وإذا قفز مظلي من طائرة، وقطع مسافة 1100 قدم قبل فتح المظلة. فكم ثانية تكون قد مرت قبل أن يفتح المظلة.

3-2 تدريبات حل المسألة

القانون العام والمميز

1) **قطع مكافئ:** يبيّن الشكل التالي التمثيل البياني للمعادلة التربيعية على الصورة: $y=ax^2+bx+c$



هل مميز المعادلة موجب أم سالب أم صفر؟

2) **المماس:** يحاول عبد العزيز إيجاد قيمة b في المعادلة $y=x^2+bx+4$ على أن يكون المحور x مماسًا للقطع المكافئ الذي يمثل المعادلة. فوجد أن $b=4$. هل هي القيمة الوحيدة لـ b؟ فسِّر إجابتك.

3) **أمثلة:** أعطِ مثالًا لدالة تربيعية $f(x)$ تحقق الخواص التالية:

a) مميز f يساوي صفرًا.

b) لا توجد حلول حقيقية للمعادلة $f(x)=10$
مثِّل الدالة $f(x)$ بيانيًا.

4) **مماسات:** منحنى $y=x^2$ قطع مكافئ يمر بالنقطة $(1,1)$. والمستقيم الذي معادلته $y=mx-m+1$ حيث m ثابت يمر بالنقطة $(1,1)$ أيضًا.

a) لإيجاد نقطة تقاطع المستقيم $y=mx-m+1$ والقطع المكافئ $y=x^2$، ضع $x^2=mx-m+1$ وحل المعادلة، وبإعادة ترتيب الحدود تصبح المعادلة $x^2-mx+m-1=0$.
ما المميز لهذه المعادلة؟

b) ما قيمة m لكي تكون هناك نقطة تقاطع واحدة؟ فسِّر إجابتك مستعينًا بالمستقيم والقطع المكافئ المذكورين في (a).

الاسم: ______________________ التاريخ: ______________

3-2 التدريبات الإثرائية

مجموع الجذرين وحاصل ضربهما

تعرف جذور المعادلة التربيعية دون أن تعرف المعادلة نفسها أحيانًا، وباستعمال معرفتك السابقة في التحليل إلى العوامل لحل معادلة، يمكنك العمل عكسيًا لإيجاد المعادلة. والقاعدة التالية تمكنك من إيجاد مجموع جذري معادلة تربيعية وحاصل ضربهما.

مجموع الجذرين وحاصل ضربهما	إذا كان s_1 وs_2 جذري المعادلة التربيعية $ax^2+bx+c=0$ و $a \neq 0$، فإن $s_1+s_2=-\frac{b}{a}$ و $s_1 \cdot s_2=\frac{c}{a}$

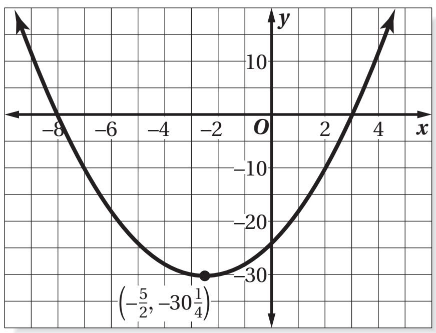
مثال **اكتب المعادلة التربيعية التي جذراها 3 و8−**

جذرا المعادلة هما 3 و8−

$3+-8=-5$ اجمع الجذرين

$3(-8) = -24$ اضرب الجذرين

إذن، المعادلة: $x^2+5x-24=0$



تمارين:

اكتب المعادلة التربيعية المعطاة جذورها في كل مما يأتي:

(1 $-9, 6$ **(2** $-1, 5$ **(3** $6, 6$

(4 $4\pm\sqrt{3}$ **(5** $-\frac{2}{5}, \frac{2}{7}$ **(6** $\frac{-2\pm3\sqrt{5}}{7}$

أوجد k على أن يكون العدد المعطى جذرًا للمعادلة.

(7 7؛ $2x^2+ kx-21=0$ **(8** -2؛ $x^2-13x+k=0$

3-3 تدريبات إعادة التعليم

العمليات على كثيرات الحدود

ضرب وحيدات الحد وقسمتها: الأسس السالبة وسيلة للتعبير عن الضرب بمعكوس العدد.

الأسس سالبة	$a^{-n}=\frac{1}{a^n}$ و $\frac{1}{a^{-n}}=a^n$ لأي عدد حقيقي $a \neq 0$ ولأي عدد صحيح n.

عندما تبسط عبارة فإنك تعيد كتابتها على أن لا تتضمن قوة لقوة أو أقواس أو أسس سالبة. ويظهر كل أساس مرة واحدة، وتكون الكسور في أبسط صورة. والخصائص التالية مفيدة في تبسيط العبارات.

ضرب القوى	$a^m \cdot a^n = a^{m+n}$ لأي عدد حقيقي a وأعداد صحيحة m و n.
قسمة القوى	$\frac{a^m}{a^n}=a^{m-n}$ لأي عدد حقيقي $a \neq 0$ وأعداد صحيحة m و n.
خصائص القوى	لأي عددين حقيقين a, b وعددين صحيحين m, n: $(a^m)^n=a^{mn}$ $(ab)^m=a^m b^m$ $\left(\frac{a}{b}\right)^n=\frac{a^n}{b^n}, b \neq 0$ $\left(\frac{a}{b}\right)^{-n}=\left(\frac{b}{a}\right)^n=\frac{b^n}{a^n}, a \neq 0, b \neq 0$

مثال بسط. افترض أن المتغيرات لا تساوي صفرًا.

a) $(3m^4n^{-2})(-5mn)^2$

$$(3m^4n^{-2})(-5mn)^2 = 3m^4n^{-2}25m^2n^2$$
$$= 75m^4m^2n^{-2}n^2$$
$$= 75m^{4+2}n^{-2+2}$$
$$= 75m^6$$

b) $\frac{(-m^4)^3}{(2m^2)^{-2}}$

$$\frac{(-m^4)^3}{(2m^2)^{-2}} = -\frac{m^{12}}{\frac{1}{4m^4}}$$
$$= -m^{12} \cdot 4m^4$$
$$= -4m^{16}$$

تمارين:

بسط مفترضًا أن المتغيرات لا تساوي صفرًا.

1) $c^{12}\, c^{-4}\, c^6$ 2) $\frac{b^8}{b^2}$ 3) $(a^4)^5$

4) $\frac{x^{-2}y}{x^4y^{-1}}$ 5) $\left(\frac{a^2b}{a^{-3}b^2}\right)^{-1}$ 6) $\left(\frac{x^2y}{xy^3}\right)^2$

7) $\frac{1}{2}(-5a^2b^3)^2(abc)^2$ 8) $m^7 \cdot m^8$ 9) $\frac{8m^3n^2}{4mn^3}$

10) $\frac{2^3c^4t^2}{2^2c^4t^2}$ 11) $4j(-j^{-2}k^2)(3j^3k^{-7})$ 12) $\frac{2mn^2(3m^2n)^2}{12m^3n^4}$

الاسم: ______________________ التاريخ: ______________

3-3 تدريبات إعادة التعليم

(تتمة)

العمليات على كثيرات الحدود

كثيرات الحدود	وحيدة حد أو مجموع وحيدات حد .
الحدود المتشابهة	الحدود التي لها المتغير نفسه مرفوع للقوة نفسها.

لجمع كثيرات حدود وطرحها أجرِ العلمية واجمع الحدود المتشابهة .

مثال 1 بسط $4xy^2 + 12xy - 7x^2y - (20xy + 5xy^2 - 8x^2y)$.

$4xy^2 + 12xy - 7x^2y - (20xy + 5xy^2 - 8x^2y)$

$= 4xy^2 + 12xy - 7x^2y - 20xy - 5xy^2 + 8x^2y$ توزيع إشارة الطرح .

$= (-7x^2y + 8x^2y) + (4xy^2 - 5xy^2) + (12xy - 20xy)$ تجميع الحدود المتشابه .

$= x^2y - xy^2 - 8xy$ دمج الحدود المتشابهة أو جمعها.

تستعمل الصيغة المختصرة لخاصية التوزيع في ضرب ثنائيتي حد بطريقة التوزيع بالترتيب الآتية:

فك الأقواس	لضرب ثنائيتي الحد (كثيرتي حدود كل منها من حدين) اجمع نواتج الضرب التالية : الحدين الأولين ، والحدين الطرفيين ، والحديين الأوسطين، الحدين الأخيرين.

مثال 2 أوجد ناتج $(6x - 5)(2x + 1)$.

$(6x - 5)(2x + 1) = 6x \cdot 2x + 6x \cdot 1 + (-5) \cdot 2x + (-5) \cdot 1$

الأولين الطرفين الأوسطين الأخيرين

$= 12x^2 + 6x - 10x - 5$ بضرب ثنائيتي الحد .

$= 12x^2 - 4x - 5$ بجمع الحدود المتشابهة.

تمارين:

بسط كلًا مما يأتي.

1) $(6x^2 - 3x + 2) - (4x^2 + x - 3)$

2) $(7y^2 + 12xy - 5x^2) + (6xy - 4y^2 - 3x^2)$

3) $(-4m^2 - 6m) - (6m + 4m^2)$

4) $27x^2 - 5y^2 + 12y^2 - 14x^2$

5) $\frac{1}{4}x^2 - \frac{3}{8}xy + \frac{1}{2}y^2 - \frac{1}{2}xy + \frac{1}{4}y^2 - \frac{3}{8}x^2$

6) $24p^3 - 15p^2 + 3p - 15p^3 + 13p^2 - 7p$

أوجد ناتج الضرب في كل مما يأتي.

7) $2x(3x^2 - 5)$

8) $7a(6 - 2a - a^2)$

9) $(x^2 - 2)(x^2 - 5)$

10) $(x + 1)(2x^2 - 3x + 1)$

11) $(2n^2 - 3)(n^2 + 5n - 1)$

12) $(x - 1)(x^2 - 3x + 4)$

الاسم: ____________________ التاريخ: ____________

3-3 تدريبات المهارات

العمليات على كثيرات الحدود

بسط مفترضًا أن المتغيرات لا تساوي صفرًا.

1) $b^4 \cdot b^3$

2) $c^5 \cdot c^2 \cdot c^2$

3) $a^{-4} \cdot a^{-3}$

4) $x^5 \cdot x^{-4} \cdot x$

5) $(2x)^2(4y)^2$

6) $-2gh(g^3h^5)$

7) $10x^2y^3(10xy^8)$

8) $\dfrac{24wz^7}{3w^3z^5}$

9) $\dfrac{-6a^4bc^8}{36a^7b^2c}$

10) $\dfrac{-10pt^4r}{-5p^3t^2r}$

11) $(g+5)+(2g+7)$

12) $(5d+5)-(d+1)$

13) $(x^2-3x-3)+(2x^2+7x-2)$

14) $(-2f^2-3f-5)+(-2f^2-3f+8)$

15) $-5(2c^2-d^2)$

16) $x^2(2x+9)$

17) $(a-5)^2$

18) $(2x-3)(3x-5)$

19) $(r-2t)(r+2t)$

20) $(3y+4)(2y-3)$

21) $(3-2b)(3+2b)$

22) $(3w+1)^2$

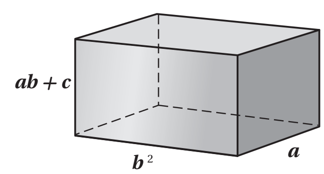
3-3 تدريبات حل المسألة

العمليات على كثيرات الحدود

1) الأرض: يقدر طول قطر الكرة الأرضية بـ 1.2756×10^4 كيلو متر تقريبًا، ويمكن إيجاد مساحة سطح الكرة الأرضية باستعمال القانون $SA = 4\pi r^2$.

فما مساحة سطح الأرض التقريبية ؟

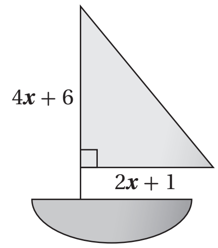
2) الحجم : يعطى حجم متوازي المستطيلات من خلال ضرب الطول في العرض في الارتفاع. فإذا كان لدى خالد صندوقًا على شكل متوازي مستطيلات طوله b^2 وحدة، وعرضه a وحدة وارتفاعه $ab + c$ وحدة.



فما حجم صندوق خالد؟ ضع إجابتك في أبسط صورة.

3) إنشاء: بُني رصيف مستطيل الشكل حول بركة مربعة طول ضلعها s وحدة، فإذا كان طول الرصيف يزيد 5 وحدات عن مثلي طول ضلع البركة وعرضه يزيد 3 وحدات عن طول ضلع البركة، فما مساحة الرصيف بدلالة s؟

4) قوارب: طلب جمال من صانع أشرعة القوارب أن يصنع شراعًا لقاربه، فإذا كانت قاعدة شراعه مثلثة الشكل بطول $2x + 1$ وارتفاع $4x + 6$.



a) أوجد مساحة الشراع .

b) إذا أراد جمال أن يضع قماشًا مختلفًا في كل جهة من جهتي الشراع، فاكتب كثيرة حدود تمثل مجموع كمية القماش المستعمل في صنع الشراع.

c) إذا قرر جمال أن يضع شريطًا على طول وتر الشراع فاكتب عبارة تصف كمية الشريط الذي يحتاجه.

3-3 التدريبات الإثرائية

كثيرات حدود بمعاملات كسرية

قد يكون لحدود كثيرات الحدود معاملات على صورة كسور ما دام لا يوجد متغيرات في المقام. وتجرى الحسابات على كثيرات الحدود بوجود معاملات كسرية بالطريقة المستخدمة في حسابات الأعداد الكلية.

بسط. اكتب جميع المعاملات في صورة كسور.

1) $\left(\frac{3}{5}m - \frac{2}{7}p - \frac{1}{3}n\right) - \left(\frac{7}{3}p - \frac{5}{2}m - \frac{3}{4}n\right)$

2) $\left(\frac{3}{2}x - \frac{4}{3}y - \frac{5}{4}z\right) + \left(-\frac{1}{4}x + y + \frac{2}{5}z\right) + \left(-\frac{7}{8}x - \frac{6}{7}y + \frac{1}{2}z\right)$

3) $\left(\frac{1}{2}a^2 - \frac{1}{3}ab + \frac{1}{4}b^2\right) + \left(\frac{5}{6}a^2 + \frac{2}{3}ab - \frac{3}{4}b^2\right)$

4) $\frac{1}{2}a^2 - \frac{1}{3}ab + \frac{1}{4}b^2 - \left(\frac{1}{3}a^2 - \frac{1}{2}ab + \frac{5}{6}b^2\right)$

5) $\left(\frac{1}{2}a^2 - \frac{1}{3}ab + \frac{1}{4}b^2\right) \cdot \left(\frac{1}{2}a - \frac{2}{3}b\right)$

6) $\left(\frac{2}{3}\mathrm{a}^2 - \frac{1}{5}\mathrm{a} + \frac{2}{7}\right) \cdot \left(\frac{2}{3}\mathrm{a}^3 + \frac{1}{5}\mathrm{a}^2 - \frac{2}{7}\mathrm{a}\right)$

7) $\left(\frac{2}{3}x^2 - \frac{3}{4}x - 2\right) \cdot \left(\frac{4}{5}x - \frac{1}{6}x^2 - \frac{1}{2}\right)$

8) $\left(\frac{1}{6} + \frac{1}{3}x + \frac{1}{6}x^4 - \frac{1}{2}x^2\right) \cdot \left(\frac{1}{6}x^3 - \frac{1}{3} - \frac{1}{3}x\right)$

3-4 تدريبات إعادة التعليم

قسمة كثيرات الحدود

القسمة الطويلة : لقسمة كثيرة حدود على وحيدة حد، استعمل المهارات التي تعلمتها في الدرس السابق، ولقسمة كثيرة حدود على كثيرة حدود، استعمل القسمة الطويلة. تذكر أن الحدود المتشابهة هي التي يمكن جمعها أو طرحها.

مثال 1 بسط $\dfrac{12p^3t^2r - 21p^2qtr^2 - 9p^3tr}{3p^2tr}$

$$\frac{12p^3t^2r - 21p^2qtr^2 - 9p^3tr}{3p^2tr} = \frac{12p^3t^2r}{3p^2tr} - \frac{21p^2qtr^2}{3p^2tr} - \frac{9p^3tr}{3p^2tr}$$

$$= \frac{12}{3}p^{(3-2)}t^{(2-1)}r^{(1-1)} - \frac{21}{3}p^{(2-2)}qt^{(1-1)}r^{(2-1)} - \frac{9}{3}p^{(3-2)}t^{(1-1)}r^{(1-1)}$$

$$= 4pt - 7qr - 3p$$

مثال 2 استعمل القسمة الطويلة في إيجاد $(x^3 - 8x^2 + 4x - 9) \div (x - 4)$

$$\begin{array}{r}
x^2 - 4x - 12 \\
x - 4 \overline{) x^3 - 8x^2 + 4x - 9} \\
\underline{(-)\ x^3 - 4x^2} \quad\quad\quad \\
-4x^2 + 4x \quad\ \\
\underline{(-) -4x^2 + 16x} \quad\ \\
-12x - 9 \\
\underline{(-) -12x + 48} \\
-57
\end{array}$$

ناتج القسمة يساوي $x^2 - 4x - 12$ ، والباقي -57.

إذن $\dfrac{x^3 - 8x^2 + 4x - 9}{x - 4} = x^2 - 4x - 12 - \dfrac{57}{x - 4}$

تمارين:

بسط:

1) $\dfrac{18a^3 + 30a^2}{3a}$

2) $\dfrac{24mn^6 + 40m^2n^3}{4m^2n^3}$

3) $\dfrac{60a^2b^3 - 48b^4 + 84a^5b^2}{12ab^2}$

4) $(2x^2 - 5x - 3) \div (x - 3)$

5) $(m^2 - 3m - 7) \div (m + 2)$

6) $(p^3 - 6) \div (p - 1)$

7) $(t^3 - 6t^2 + 1) \div (t + 2)$

8) $(x^5 - 1) \div (x - 1)$

9) $(2x^3 - 5x^2 + 4x - 4) \div (x - 2)$

3-4 تدريبات إعادة التعليم

(تتمة)

قسمة كثيرات الحدود

القسمة التركيبية

القسمة التركيبية	هي أسلوب لقسمة كثيرة حدود على ثنائية حد باستعمال معاملات المقسوم وقيمة r في المقسوم عليه $x - r$

استعمل القسمة التركيبية لإيجاد ناتج $(2x^3 - 5x^2 + 5x - 2) \div (x - 1)$.

الخطوة 1:	اكتب حدود المقسوم بحيث ترتب درجات الحدود تنازليًا، ثم اكتب المعاملات.	$2x^3 - 5x^2 + 5x - 2$ $2 \quad -5 \quad 5 \quad -2$
الخطوة 2:	اكتب الثابت r في المقسوم عليه $x - r$ إلى اليسار وفي هذا السؤال $r = 1$. وانزل المعامل الأول في المقسوم وهو 2 أسفل الخط الأفقي.	$1 \mid 2 \quad -5 \quad 5 \quad -2$ 2
الخطوة 3:	اضرب المعامل الأول في r: $1 \cdot 2 = 2$، واكتب الناتج أسفل المعامل الذي يليه، ثم اجمع ناتج الضرب مع معامل الحد الذي فوقه: $-5 + 2 = -3$.	$1 \mid 2 \quad -5 \quad 5 \quad -2$ 2 $2 \quad -3$
الخطوة 4:	اضرب المجموع -3 في r: $1 \cdot -3 = -3$، واكتب الناتج تحت الحد التالي ثم اجمع: $5 + (-3) = 2$.	$1 \mid 2 \quad -5 \quad 5 \quad -2$ $2 \quad -3$ $2 \quad -3 \quad 2$
الخطوة 5:	اضرب المجموع 2 في r: $2 \cdot 1 = 2$، واكتب ناتج الضرب تحت الحد التالي واجمع: $-2 + 2 = 0$ الباقي 0.	$1 \mid 2 \quad -5 \quad 5 \quad -2$ $2 \quad -3 \quad 2$ $2 \quad -3 \quad 2 \quad 0$

إذن، $(2x^3 - 5x^2 + 5x - 2) \div (x - 1) = 2x^2 - 3x + 2$.

تمارين:

بسط:

1) $(3x^3 - 7x^2 + 9x - 14) \div (x - 2)$

2) $(5x^3 + 7x^2 - x - 3) \div (x + 1)$

3) $(2x^3 + 3x^2 - 10x - 3) \div (x + 3)$

4) $(x^3 - 8x^2 + 19x - 9) \div (x - 4)$

5) $(2x^3 + 10x^2 + 9x + 38) \div (x + 5)$

6) $(3x^3 - 8x^2 + 16x - 1) \div (x - 1)$

7) $(x^3 - 9x^2 + 17x - 1) \div (x - 2)$

8) $(4x^3 - 25x^2 + 4x + 20) \div (x - 6)$

9) $(6x^3 + 28x^2 - 7x + 9) \div (x + 5)$

10) $(x^4 - 4x^3 + x^2 + 7x - 2) \div (x - 2)$

11) $(12x^4 + 20x^3 - 24x^2 + 20x + 35) \div (3x + 5)$

الاسم: ________________ التاريخ: ________

3-4 تدريبات المهارات

قسمة كثيرات الحدود

بسط:

(1 $\dfrac{10c+6}{2}$

(2 $\dfrac{12x+20}{4}$

(3 $\dfrac{15y^3+6y^2+3y}{3y}$

(4 $\dfrac{12x^2-4x-8}{4x}$

(5 $(15q^6+5q^2)(5q^4)^{-1}$

(6 $(4f^5-6f^4+12f^3-8f^2)(4f^2)^{-1}$

(7 $(6j^2k-9jk^2)\div 3jk$

(8 $(4a^2h^2-8a^3h+3a^4)\div(2a^2)$

(9 $(n^2+7n+10)\div(n+5)$

(10 $(d^2+4d+3)\div(d+1)$

(11 $(2t^2+13t+15)\div(t+5)$

(12 $(6y^2+y-2)(2y-1)^{-1}$

(13 $(4g^2-9)\div(2g+3)$

(14 $(2x^2-5x-4)\div(x-3)$

(15 $\dfrac{u^2+5u-12}{u-3}$

(16 $\dfrac{2x^2-5x-4}{x-3}$

(17 $(3v^2-7v-10)(v-4)^{-1}$

(18 $(3t^4+4t^3-32t^2-5t-20)(t+4)^{-1}$

(19 $\dfrac{y^3-y^2-6}{y+2}$

(20 $\dfrac{2x^3-x^2-19x+15}{x-3}$

(21 $(4p^3-3p^2+2p)\div(p-1)$

(22 $(3c^4+6c^3-2c+4)(c+2)^{-1}$

(23 هندسة: تعطى مساحة مستطيل بالعبارة $x^3+8x^2+13x-12$ وحدة مربعه. إذا كان عرض المستطيل يساوي $x+4$ وحدة مربعه. فأوجد طوله؟

3-4 تدريبات حل المسألة

قسمة كثيرات الحدود

1) **البواقي:** قسم نعمان $x^4+3x^3-9x^2-23x+12$ على $p(x)$ بالأمس، ولكنه في هذا اليوم لم يكن على ما يرام، فلم يتمكن من قراءة $p(x)$ ، والجزء الذي تمكن من قراءته هو الباقي $x + 4$ وناتج القسمة x^2+3x-1 . ولكن المعلم أراد أن يجد $p(-3)$، فما هي $p(-3)$؟

2) **القسمة الطويلة :** استعملت هبة القسمة الطويلة لقسمة $x^4 + x^3 + x^2 + x + 1$ على $x + 2$. وبدأت عملها كالآتي:

$$\begin{array}{r l}
 & x^3 - x^2 + 3x - 5 \\
x + 2 \big) & x^4 + x^3 + x^2 + x + 1 \\
(-) & \underline{x^4 + 2x^3} \\
 & -x^3 + A \\
(-) & \underline{-x^3 - 2x^2} \\
 & 3x^2 + x \\
(-) & \underline{3x^2 + B} \\
 & -5x + 1 \\
(-) & \underline{-5x - 10} \\
 & C
\end{array}$$

فما قيم A, B, C؟

3) **معدلات:** يريد ليث أن يجد معدل $n + 1$ من الأعداد، فإذا كان n^3 و 2 عددين من هذه الأعداد، وكل عدد من الأعداد الباقية وعددها $n - 1$ يساوي 1، فما معدل هذه الأعداد؟

4) **الحجم:** إذا كان حجم عمود برج إحدى القلاع يعطى بالعبارة $\pi(x^3 + 32x^2 - 304x + 640)$. وكان ارتفاع ذلك العمود يساوي $x + 40$ قدم، فأوجد مساحة قاعدة العمود بدلالة x و π.

5) **نظرية الأعداد:** يعمل طلاب فصل المعلم صلاح بكثيرات الحدود، والقوى، وقد كتب على السبورة أن العدد 1111 يكتب باستعمال القوى بالشكل $B^3 + B^2 + B + 1$. ثم أعطى طلابه الأسئلة التالية.

a) إذا علمت أن العدد 11 يكتب بالشكل $B + 1$. فما قيمة 1111 مقسومًا على 11 بدلالة B؟

b) قيمة 111 بدلالة B تساوي $B^2 + B + 1$. ما قيمة 1111 مقسومًا على 111 بدلالة B؟

3-4 التدريبات الإثرائية

خطوط التقارب المائلة

يسمى المستقيم $y = ax + b$ حيث $a \neq 0$ ، خط تقارب مائل للدالة $y = f(x)$ إذا اقترب منحنى f أكثر فأكثر من هذا المستقيم مع اقتراب $x \to \infty$ أو $x \to -\infty$. حيث ∞ يرمز الى ما لا نهاية. للدالة $f(x) = 3x + 4 + \frac{2}{x}$ خط تقارب مائل هو المستقيم $y = 3x + 4$ ؛ لأن $\frac{2}{x} \to 0$ مع إقتراب $x \to \infty$ أو $x \to -\infty$. وبعبارة أخرى مع زيادة $|x|$ بلا حدود فإن قيمة $\frac{2}{x}$ تصغر لتقترب من الصفر.

مثال أوجد خط التقارب المائل للدالة $f(x) = \frac{x^2 + 8x + 15}{x + 2}$.

$$\begin{array}{r|rrr} -2 & 1 & 8 & 15 \\ & & -2 & -12 \\ \hline & 1 & 6 & 3 \end{array}$$

باستعمال القسمة التركيبية

$$y = \frac{x^2 - 8x + 15}{x + 2} = x + 6 + \frac{3}{x + 2}$$

ومع زيادة $|x|$ فإن قيمة $\frac{3}{x+2}$ تصغر، وبعبارة أخرى وبما أن

$\frac{3}{x+2} \to 0$ عندما $x \to \infty$ أو $x \to -\infty$، فإن $y = x + 6$ محاذي مائل .

تمارين:

استعمل القسمة التركيبية لإيجاد خط تقارب مائل لكل دالة فيما يلي.

1) $y = \frac{8x^2 - 4x + 11}{x + 5}$

2) $y = \frac{x^2 + 3x - 15}{x - 2}$

3) $y = \frac{x^2 - 2x - 18}{x - 3}$

4) $y = \frac{ax^2 + bx + c}{x - d}$

5) $y = \frac{ax^2 + bx + c}{x + d}$

الاسم: ______________________ التاريخ: ____________

3-5 تدريبات إعادة التعليم

دوال كثيرات الحدود

كثيرات الحدود في متغير واحد	كثيرة الحدود في متغير واحد من الدرجة n تكتب على الصورة $a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + \dots + a_2x^2 + a_1x + a_0,$ حيث معاملات الحدود $a_n, a_{n-1}, a_{n-2}, a_{n-3}, \dots, a_0$ أعداد حقيقية، a_n ليس صفرًا، n عدد صحيح غير سالب.

درجة كثيرة الحدود في متغير واحد هي أكبر أس للمتغير فيها. **والمعامل الرئيس** هو معامل الحد الذي له أكبر أس.

دالة كثيرة الحدود	يمكن وصف دالة كثيرة الحدود من الدرجة n بمعادلة على الصورة $P(x) = a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + \dots + a_2x^2 + a_1x + a_0,$ حيث المعاملات $a_n, a_{n-1}, a_{n-2}, a_{n-3}, \dots, a_0$ أعداد حقيقية و a_n لا يساوي صفرًا, و n عدد صحيح غير سالب.

مثال 1 **ما درجة كثيرة الحدود $3x^2 - 2x^4 - 7 + x^3$ ، وما المعامل الرئيس فيها؟**

أعد كتابة العبارة على أن تكون قوى x في ترتيب تنازلي.

$$-2x^4 + x^3 + 3x^2 - 7$$

وهذه كثيرة حدود بمتغير واحد. درجتها 4 والمعامل الرئيس فيها -2.

مثال 2 **أوجد $f(-5)$ إذا كان: $f(x) = x^3 + 2x^2 - 10x + 20$**

$f(x) = x^3 + 2x^2 - 10x + 20$ الدالة الأصلية

$f(-5) = (-5)^3 + 2(-5)^2 - 10(-5) + 20$ بتعويض -5 بدلًا من x.

$= -125 + 50 + 50 + 20$ إيجاد القيمة .

$= -5$ بالتبسيط.

مثال 3 **أوجد قيمة $g(a^2 - 1)$ إذا كان $g(x) = x^2 + 3x - 4$:**

$g(x) = x^2 + 3x - 4$ الدالة الأصلية

$g(a^2 - 1) = (a^2 - 1)^2 + 3(a^2 - 1) - 4$ بتعويض $a^2 - 1$ بدلًا من x

$= a^4 - 2a^2 + 1 + 3a^2 - 3 - 4$ إيجاد القيمة.

$= a^4 + a^2 - 6$ بالتبسيط.

تمارين:

اذكر الدرجة والمعامل الرئيس لكل كثيرة حدود بمتغير واحد، وإذا لم تكن كثيرة حدود بمتغير واحد، فاذكر السبب.

1) $3x^4 + 6x^3 - x^2 + 12$

2) $100 - 5x^3 + 10x^7$

3) $4x^6 + 6x^4 + 8x^8 - 10x^2 + 20$

4) $4x^2 - 3xy + 16y^2$

5) $8x^3 - 9x^5 + 4x^2 - 36$

6) $\frac{x^2}{18} - \frac{x^6}{25} + \frac{x^3}{36} - \frac{1}{72}$

أوجد $f(2)$ و $f(-5)$ لكل دالة فيما يلي:

7) $f(x) = x^2 - 9$

8) $f(x) = 4x^3 - 3x^2 + 2x - 1$

9) $f(x) = 9x^3 - 4x^2 + 5x + 7$

3-5 تدريبات إعادة التعليم

(تتمة)

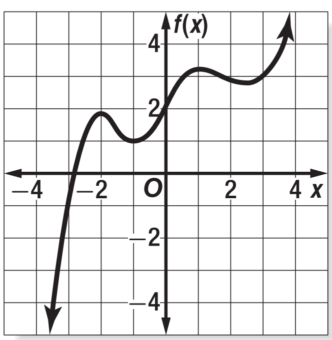
دوال كثيرات الحدود

تمثيل دوال كثيرات الحدود بيانيًا

سلوك طرفي التمثيل البياني لدالة كثيرة الحدود	إذا كانت درجة الدالة زوجية والمعامل الرئيس موجبًا، فإن: $f(x) \to +\infty$ عندما $x \to -\infty$ ، $f(x) \to +\infty$ عندما $x \to +\infty$ إذا كانت درجة الدالة زوجية والمعامل الرئيس سالبًا، فإن: $f(x) \to -\infty$ عندما $f(x) \to -\infty$ ، $x \to -\infty$ عندما $x \to +\infty$ إذا كانت درجة الدالة فردية والمعامل الرئيس موجبًا، فإن: $f(x) \to -\infty$ عندما $f(x) \to +\infty$ ، $x \to -\infty$ عندما $x \to +\infty$ إذا كانت درجة الدالة فردية والمعامل الرئيس سالبًا، فإن : $f(x) \to +\infty$ عندما $f(x) \to -\infty$ ، $x \to -\infty$ عندما $x \to +\infty$
الأصفار الحقيقية لدوال كثيرات الحدود	أكبر عدد من الأصفار لدالة كثيرة حدود يساوي درجة تلك الدالة، ويمثل صفر الدالة الحقيقي نقطة التقاء التمثيل البياني للدالة مع المحور x. يحسب عدد الأصفار على التمثيل البياني للدالة بعدد مرات تقاطع الرسم أو تماسه مع المحور x.

مثال حدد فيما إذا كان التمثيل البياني يمثل دالة درجتها زوجية أو فردية واذكر عدد الأصفار الحقيقية.

عندما $x \to -\infty$، فإن $f(x) \to -\infty$ وعندما $x \to +\infty$، فإن $f(x) \to +\infty$، لذا فهي كثيرة حدود درجتها فردية. يقطع التمثيل البياني للدالة محور x في نقطة واحدة، لذا فللدالة صفر حقيقي واحد.



تمارين:

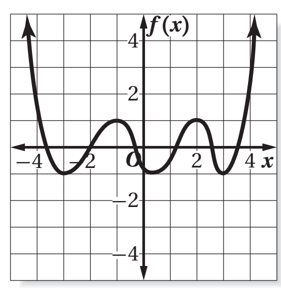
لكل تمثيل بياني فيما يأتي، أجب عن:

a) صف سلوك طرفي التمثيل البياني.

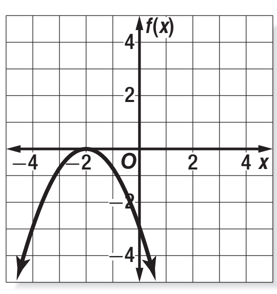
b) حدد فيما إذا كان يمثل دالة درجتها فردية أو زوجية .

c) اذكر عدد الأصفار الحقيقية .

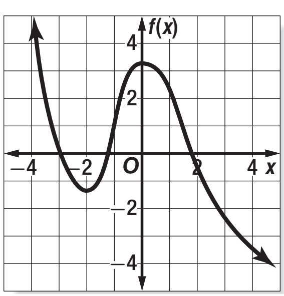
1)



2)



3)



الاسم: ______________________ التاريخ: ____________

3-5 تدريبات المهارات

دوال كثيرات الحدود

اذكر الدرجة والمعامل الرئيس لكل دالة كثيرة حدود في متغير واحد. وإن لم تكن كثيرة حدود بمتغير واحد، فاذكر السبب.

1) $a + 8$

2) $(2x - 1)(4x^2 + 3)$

3) $-5x^5 + 3x^3 - 8$

4) $18 - 3y + 5y^2 - y^5 + 7y^6$

5) $u^3 + 4u^2t^2 + t^4$

6) $2r - r^2 + \frac{1}{r^2}$

أوجد $p(-1)$ و $p(2)$ لكل دالة مما يأتي:

7) $p(x) = 4 - 3x$

8) $p(x) = 3x + x^2$

9) $p(x) = 2x^2 - 4x + 1$

10) $p(x) = -2x^3 + 5x + 3$

11) $p(x) = x^4 + 8x^2 - 10$

12) $p(x) = \frac{1}{3}x^2 - \frac{2}{3}x + 2$

إذا كان $p(x) = 4x^2 - 3$ و $r(x) = 1 + 3x$ ، فأوجد قيمة كل مما يأتي:

13) $p(a)$

14) $r(2a)$

15) $3r(a)$

16) $-4p(a)$

17) $p(a^2)$

18) $r(x + 2)$

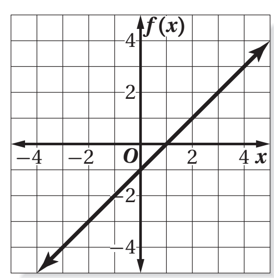
لكل تمثيل بياني فيما يأتي، أجب عن :

a) صف سلوك طرفي التمثيل البياني .

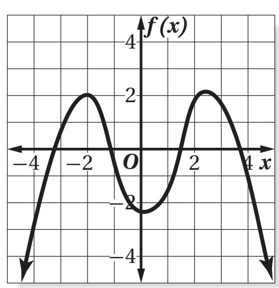
b) حدد فيما إذا كان يمثل دالة درجتها زوجية أم فردية .

c) اذكر عدد الأصفار الحقيقية .

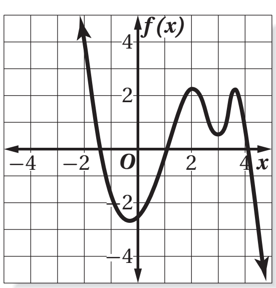
19)



20)



21)

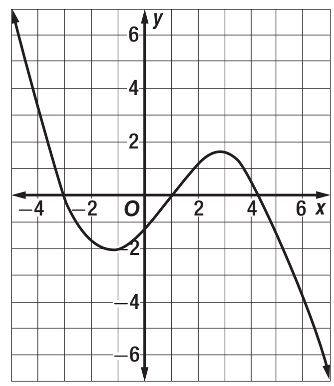


3-5 تدريبات حل المسألة

دوال كثيرات الحدود

1) **التصنيع:** تم تشكيل قطعة معدنية على شكل منحنى الدالة $f(x) = x^4 - 9x^2$. فما درجة كثيرة الحدود هذه؟

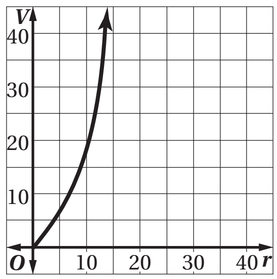
2) **تمثيل بياني:** رسمت فاطمة التمثيل البياني التالي للدالة $f(x)$.



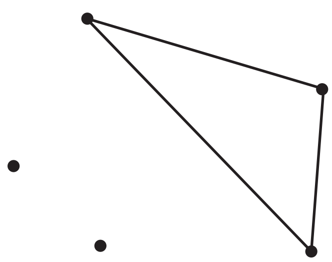
اعتمد على الرسم، وصف سلوك طرفي التمثيل البياني، وحدّد ما إذا كانت درجة دالة كثيرة الحدود فردية أم زوجية، ثم اكتب عدد الأصفار الحقيقية للدالة.

3) **الأعداد الخماسية:** يعطى العدد الخماسي النوني بالعبارة $\dfrac{n(3n-1)}{2}$. ما درجة كثيرة الحدود هذه؟ وما العدد الخماسي السابع.

4) **كثيرة الحدود الممثلة في الشكل أدناه تبيِّن العلاقة بين حجم حفرة (v) حُفرت بمقدح، ونصف قطر الحفرة (r)، صف سلوك طرفي التمثيل البياني، وحدد ما إذا كانت درجة كثيرة الحدود فردية أم زوجية.**



5) **مثلثات:** رسم سامر n من النقط على أن لا تقع أي 3 منها على خط مستقيم.
وتمثل الدالة $f(n) = \frac{1}{6}(n^3 - 3n^2 + 2n)$
عدد المثلثات التي يمكن تكوينها باستخدام النقط كرؤوس لها:



a) ما درجة f؟

b) إذا رسم سامر 15 نقطة، فكم مثلثًا يمكن أن يكوّن؟

3-5 التدريبات الإثرائية

التقريب من خلال دوال كثيرات الحدود

تنتج العديد من التجارب أزواجًا من القيم $(x, f(x))$ التي يمكن أن ترتبط بقانون، فإذا شكلت هذه الأزواج دالة فإنك تستطيع ربط كثيرة حدود بهذه الأزواج بطريقة واحدة فقط .

افرض الأزواج المبينة بالجدول التالي:

x	1	2	4	7
$f(x)$	6	11	39	−54

افرض أن كثيرة الحدود من الدرجة الثالثة. عوض قيم الأزواج في العبارة الآتية:.

$$f(x) = A + B(x - x_0) + C(x - x_0)(x - x_1) + D(x - x_0)(x - x_1)(x - x_2)$$

ستحصل على نظام من المعادلات الآتية. ويمكنك حلها، واستعمال قيم A, B, C, D لإيجاد كثيرة الحدود المطلوبة.

$$6 = A$$
$$11 = A + B(2 - 1) = A + B$$
$$39 = A + B(4 - 1) + C(4 - 1)(4 - 2) = A + 3B + 6C$$
$$-54 = A + B(7 - 1) + C(7 - 1)(7 - 2) + D(7 - 1)(7 - 2)(7 - 4) = A + 6B + 30C + 90D$$

حل كلًا مما يأتي:

1) حل نظام المعادلات السابق لقيم A, B, C, D.

2) أوجد كثيرة الحدود التي تمثل أزواج النقاط الأربعة أعلاه. اكتب إجابتك على الصورة
$y = a + bx + cx^2 + dx^3$

3) أوجد كثيرة الحدود التي تحقق الأزواج المرتبة التالية:

x	8	12	15	20
$f(x)$	−207	169	976	3801

4) قاس عالم حجم غاز ثاني أكسيد الكربون $f(x)$ الذي يمكن أن يمتصه الفحم تحت ضغط مقداره x.
أوجد قيم A, B, C, D.

x	120	340	534	698
$f(x)$	3.1	5.5	7.1	8.3

الاسم: ________________ التاريخ: ________

3-6 تدريبات إعادة التعليم

حل معادلات كثيرات الحدود

تحليل كثيرات الحدود

طرق تحليل كثيرات الحدود	لأي عدد من الحدود: ابحث عن العامل المشترك الأكبر.
	لأي حدين: ابحث عن: الفرق بين مربعين $a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)$ مجموع مكعبين $a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 - ab + b^2)$ الفرق بين مكعبين $a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2)$
	لثلاثة حدود: ابحث عن: كثيرة حدود ثلاثية تشكل مربعًا كاملًا. $a^2 + 2ab + b^2 = (a + b)^2$ $a^2 - 2ab + b^2 = (a - b)^2$ صورة عامة لكثيرة حدود ثلاثية. $acx^2 + (ad + bc)x + bd = (ax + b)(cx + d)$
	لأربعة حدود أو أكثر ابحث عن تجميع مناسب للحدود $ax + bx + ay + by = x(a + b) + y(a + b)$ $= (a + b)(x + y)$

مثال **حلل إلى العوامل $24x^2 - 42x - 45$.**

أولًا أخرج العامل المشترك لتحصل على $24x^2 - 42x - 45 = 3(8x^2 - 14x - 15)$. لتجد عوامل الحدود التي تتضمن x عليك أن تبحث عن عددين حاصل ضربهما ، $8\ (-15) = -120$ ومجموعهما -14. فالمعاملان هما -20 و 6. أعد كتابة العبارة باستعمال $-20x$ و $6x$ ، ثم حل بتجميع الحدود.

$8x^2 - 14x - 15 = 8x^2 - 20x + 6x - 15$ بالتجميع لإخراج العامل المشترك الأكبر.

$= 4x(2x - 5) + 3(2x - 5)$ بإخراج العامل المشترك الأكبر لكل تجميع.

$= (4x + 3)(2x - 5)$ خاصية التوزيع

إذن، $24x^2 - 42x - 45 = 3(4x + 3)(2x - 5)$.

تمارين:

حلل كل كثيرة حدود مما يأتي تحليلًا تامًا، وإذا لم يكن ذلك ممكنًا، فاكتب كثيرة حدود أولية.

(1 $14x^2y^2 + 42xy^3$ **(2** $6mn + 18m - n - 3$ **(3** $2x^2 + 18x + 16$

(4 $x^4 - 1$ **(5** $35x^3y^4 - 60x^4y$ **(6** $2r^3 + 250$

(7 $100m^8 - 9$ **(8** $x^2 + x + 1$ **(9** $c^4 + c^3 - c^2 - c$

الاسم: ______________________ التاريخ: __________

3-6 تدريبات إعادة التعليم

(تتمة)

حل معادلات كثيرات الحدود

حل معادلات كثيرات الحدود: إذا أمكن كتابة كثيرة الحدود في صورة تربيعية، فطبق عليها ما تعلمته في حل المعادلات التربيعية لحل معادلة كثيرة الحدود المرتبطة.

مثال 1 حل المعادلة $x^2 - x - 20 = 0$.

$x^2 - x - 20 = 0$			المعادلة الأصلية
$(x-5)(x+4) = 0$			بالتحليل إلى العوامل
$x - 5 = 0$	أو	$x + 4 = 0$	خاصية الضرب الصفري
$x = 5$	أو	$x = -4$	بالتبسيط

الحلان هما $-4, 5$.

مثال 2 حل المعادلة $x^4 - 40x^2 + 144 = 0$.

$x^4 - 40x^2 + 144 = 0$							المعادلة الأصلية
$(x^2)^2 - 40(x^2) + 144 = 0$							بكتابة العبارة على صورة تربيعية .
$(x^2 - 4)(x^2 - 36) = 0$							بالتحليل .
$x^2 - 4 = 0$	أو	$x^2 - 36 = 0$					خاصية الضرب الصفري
$(x-2)(x+2) = 0$	أو	$(x-6)(x+6) = 0$					بالتحليل إلى العوامل
$x - 2 = 0$	أو	$x + 2 = 0$	أو	$x - 6 = 0$	أو	$x + 6 = 0$	خاصية الضرب الصفري
$x = 2$	أو	$x = -2$	أو	$x = 6$	أو	$x = -6$	بالتبسيط

الحلول هي ± 2 و ± 6.

تمارين:

حل كل معادلة مما يأتي.

1) $x^4 = 49$

2) $x^4 - 6x^2 = -8$

3) $x^4 - 3x^2 = 54$

4) $3t^6 - 48t^2 = 0$

5) $m^6 - 16m^3 + 64 = 0$

6) $y^4 - 5y^2 + 4 = 0$

7) $x^4 - 29x^2 + 100 = 0$

8) $4x^4 - 73x^2 + 144 = 0$

9) $x^3 - 3x = 0$

3-6 تدريبات المهارات

حل معادلات كثيرات الحدود

حلل كل كثيرة حدود مما يأتي تحليلًا تامًا، وإذا لم يكن ذلك ممكنًا، فاكتب كثيرة حدود أولية.

1) $7x^2 - 14x$

2) $19x^3 - 38x^2$

3) $21x^3 - 18x^2y + 24xy^2$

4) $8j^3k - 4jk^3 - 7$

5) $a^2 + 7a - 18$

6) $2ak - 6a + k - 3$

7) $b^2 + 8b + 7$

8) $z^2 - 8z + 20$

9) $4f^2 - 64$

10) $d^2 - 12d + 36$

11) $9x^2 + 25$

12) $y^2 + 18y + 81$

13) $n^3 - 125$

14) $m^4 - 1$

اكتب كل عبارة فيما يأتي على الصورة التربيعية إن كان ذلك ممكنًا.

15) $5x^4 + 2x^2 - 8$

16) $3y^8 - 4y^2 + 3$

17) $100a^6 + a^3$

18) $x^8 + 4x^4 + 9$

19) $12x^4 - 7x^2$

20) $6b^5 + 3b^3 - 1$

حل كل معادلة مما يأتي:

21) $a^3 - 9a^2 + 14a = 0$

22) $x^3 = 3x^2$

23) $t^4 - 3t^3 - 40t^2 = 0$

24) $b^3 - 8b^2 + 16b = 0$

الاسم: ______________ التاريخ: ______________

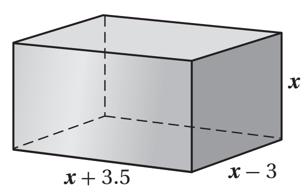
3-6 تدريبات حل المسألة

حل معادلات كثيرات الحدود

1) **ترميز:** يحاول سالم أن يكتشف الرقم السري لحقيبة، وبعد بحث وتقصٍّ طويلين اكتشف أن الرقم السري للحقيبة هو عدد يتكون من رقمين مختلفين ويمثل أحد حلول معادلة كثيرة الحدود
$x^4 - 68x^3 + 1557x^2 - 13770x + 37800 = 0$.
وبعد جهد توصل إلى أن:
$x^4 - 68x^3 + 1557x^2 - 13770x + 37800 = (x-5)(x-12)(x-21)(x-30)$.
فما الرقم السري للقفل؟

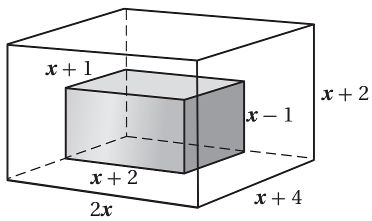
2) **نواتج:** يعمل سلطان في مجال الهندسة الميكانيكية، ويتطلب أحد مشاريعة حل معادلة كثيرة الحدود
$m^6 + 5m^3 - 10 = 0$.
اكتب كثيرة الحدود $m^6 + 5m^3 - 10$ على الصورة التربيعية.

3) **حجم:** يبلغ ارتفاع صندوق للشحن x بوصة، ويزيد طوله 3.5 بوصات عن ارتفاعه، كما يقل عرضه 3 بوصات عن ارتفاعه، فإذا كان حجمه 561 بوصة مكعبة، فما قيمة x؟



4) **روبوت:** يقطع جسم يتحرك آليًّا مسافة تعطى بكثيرة الحدود
$t^5 - 29t^3 + 100t$, حيث t الزمن بالساعات حلل كثيرة الحدود إلى عواملها.

5) **تغليف:** وضع صندوق صغير داخل صندوق أكبر، وكانت أبعاد الصندوق الصغير تعطى بالعبارات
$x - 1 \,,\, x + 2 \,,\, x + 1$.
وأبعاد الصندوق الكبير تعطى بالعبارات
$x + 2 \,,\, x + 4 \,,\, 2x$.



a) اكتب عبارة لحجم الفراغ داخل الصندوق الكبير، وخارج الصندوق الصغير.

b) إذا كان حجم الفراغ داخل الصندوق الكبير وخارج الصندوق الصغير يعطى بالعبارة $33x + 162$ وحدة مكعبة، فما قيمة x؟

c) ما حجم الصندوق الصغير؟

d) ما حجم الصندوق الكبير؟

الاسم: ____________________ التاريخ: __________

3-6 التدريبات الإثرائية

تاريخ المعادلات التربيعية

يُعتقد أن البابليين هم أول من حل معادلات تربيعية، وذلك حوالي 400 سنة قبل الميلاد، وجاء إقليدس الذي طور حلًا هندسيًا في حوالي 300 سنة قبل الميلاد، وفي الفترة حوالي 665–598 بعد الميلاد طور رياضي هندي يدعي براهما قبطا الأسلوب الحديث لحل المعادلات التربيعية. وأخيرًا وفي عام 800م أوجد العالم محمد بن موسى الخوارزمي تصنيفات للمعادلات التربيعية حيث وضعها في 6 أنواع، وكتب فصلًا عن كل نوع وجاءت معادلاته في 3 أنواع مختلفة من العبارات هي الجذر x ، ومربع الجذر (x^2) و الأعداد.

فمثلًا: كان تصنيفه الأول، المربعات تساوي الجذور، ومثال على ذلك كانت معادلته : $x^2 = 2x$.

والآن حل هذه المعادلة التربيعية.

$x^2 = 2x$

$x^2 - 2x = 0$ بطرح $2x$ من كل جهة .

$x(x-2) = 0$ بالتحليل إلى العوامل

$x = 0$ أو $x - 2 = 0$ خاصية الضرب الصفري

إذن، $x = 0$ أو $x=2$

اكتب عينة من المسائل عن كل نوع من الأنواع الخمسة الأخرى الآتية التي صنفها الخوارزمي وحلها.

1) المربعات تساوي الأعداد.

2) الجذور تساوي الأعداد.

3) المربعات والجذور تساوي أعداد.

4) مربعات وأعداد تساوي جذور.

5) جذور وأعداد تساوي مربعات.

الاسم: ______________________ التاريخ: ____________

3-7 تدريبات إعادة التعليم

نظريتا الباقي والعوامل

التعويض التركيبي

نظرية الباقي	باقي قسمة $f(x)$ على $(x-a)$ هو $f(a)$. $f(x)=q(x)\cdot(x-a)+f(a)$ حيث $q(x)$ كثيرة حدود تقل درجتها بواحد عن $f(x)$.

مثال 1 إذا كان $f(x)=3x^4+2x^3-5x^2+x-2$ ، فأوجد $f(-2)$.

الطريقة 1: التعويض التركيبي

من خلال نظرية الباقي $f(-2)$ يتعين أن يكون الباقي من قسمة كثيرة الحدود على $x+2$.

$$\begin{array}{r|rrrrr} -2 & 3 & 2 & -5 & 1 & -2 \\ & & -6 & 8 & -6 & 10 \\ \hline & 3 & -4 & 3 & -5 & 8 \end{array}$$

الباقي 8، إذن $f(-2)=8$.

الطريقة 2: التعويض المباشر

بتعويض -2 بدلًا من x.

$$f(x)=3x^4+2x^3-5x^2+x-2$$
$$f(-2)=3(-2)^4+2(-2)^3-5(-2)^2+(-2)-2$$
$$=48-16-20-2-2$$
$$=8$$

إذن $f(-2)=8$.

مثال 2 إذا كان $f(x)=5x^3+2x-1$، فأوجد $f(3)$.

من النظرية، $f(3)$ هو الباقي من قسمة كثيرة الحدود $f(x)$ على $x-3$ ومن خلال التعويض التركيبي.

$$\begin{array}{r|rrrr} 3 & 5 & 0 & 2 & -1 \\ & & 15 & 45 & 141 \\ \hline & 5 & 15 & 47 & 140 \end{array}$$

الباقي 140، إذا $f(3)=140$.

تمارين:

أوجد $f(-5)$ و $f(\frac{1}{2})$ لكل دالة مما يأتي مستعملًا التعويض التركيبي:.

1) $f(x)=-3x^2+5x-1$

2) $f(x)=4x^2+6x-7$

3) $f(x)=-x^3+3x^2-5$

4) $f(x)=x^4+11x^2-1$

أوجد $f(4)$ و $f(-3)$ لكل دالة مما يأتي مستعملًا التعويض التركيبي

5) $f(x)=2x^3+x^2-5x+3$

6) $f(x)=3x^3-4x+2$

7) $f(x)=5x^3-4x^2+2$

8) $f(x)=2x^4-4x^3+3x^2+x-6$

9) $f(x)=5x^4+3x^3-4x^2-2x+4$

10) $f(x)=3x^4-2x^3-x^2+2x-5$

11) $f(x)=2x^4-4x^3-x^2-6x+3$

12) $f(x)=4x^4-4x^3+3x^2-2x-3$

3-7 تدريبات إعادة التعليم

(تتمة)

نظريتا الباقي والعوامل

تحليل كثيرات الحدود: يمكن أن تساعدك نظرية العوامل في إيجاد عوامل كثيرة الحدود جميعها.

نظرية العوامل	ثنائية الحد $x - a$ عامل لكثيرة الحدود $f(x)$، إذا وفقط إذا كان $f(a) = 0$.

مثال **بين أن $x + 5$ عامل لكثيرة الحدود $x^3 + 2x^2 - 13x + 10$، ثم أوجد عواملها الأخرى.**

من نظرية العوامل يكون:

$x + 5$ عاملًا إذا كان -5 صفرًا لدالة كثيرة الحدود، وللتحقق استعمل التعويض التركيبي:

$$\begin{array}{r|rrrr} -5 & 1 & 2 & -13 & 10 \\ & & -5 & 15 & -10 \\ \hline & 1 & -3 & 2 & 0 \end{array}$$

وحيث أن الباقي يساوي صفرًا، فإن $x + 5$ عامل لكثيرة الحدود. ويمكن كتابة كثيرة الحدود $x^3 + 2x^2 - 13x + 10$ على النحو $(x + 5)(x^2 - 3x + 2)$. ويمكن تحليل كثيرة الحدود $x^2 - 3x + 2$ على الصورة $(x - 2)(x - 1)$.

إذن، $x^3 + 2x^2 - 13x + 10 = (x + 5)(x - 2)(x - 1)$.

تمارين:

في كل مما يأتي كثيرة حدود وأحد عواملها، أوجد عواملها الأخرى.

1) $x^3 + x^2 - 10x + 8;\ x - 2$

2) $x^3 - 4x^2 - 11x + 30;\ x + 3$

3) $x^3 + 15x^2 + 71x + 105;\ x + 7$

4) $x^3 - 7x^2 - 26x + 72;\ x + 4$

5) $2x^3 - x^2 - 7x + 6;\ x - 1$

6) $3x^3 - x^2 - 62x - 40;\ x + 4$

7) $12x^3 - 71x^2 + 57x - 10;\ x - 5$

8) $14x^3 + x^2 - 24x + 9;\ x - 1$

9) $x^3 + x + 10;\ x + 2$

10) $2x^3 - 11x^2 + 19x - 28;\ x - 4$

11) $3x^3 - 13x^2 - 34x + 24;\ x - 6$

12) $x^4 + x^3 - 11x^2 - 9x + 18;\ x - 1$

الاسم: ________________________ التاريخ: ____________

3-7 تدريبات المهارات

نظريتا الباقي والعوامل

أوجد $f(2)$ و $f(-1)$ لكل دالة مما يأتي مستعملًا التعويض التركيبي:

1) $f(x) = x^2 + 6x + 5$

2) $f(x) = x^2 - x + 1$

3) $f(x) = x^2 - 2x - 2$

4) $f(x) = x^3 + 2x^2 + 5$

5) $f(x) = x^3 - x^2 - 2x + 3$

6) $f(x) = x^3 + 6x^2 + x - 4$

7) $f(x) = x^3 - 3x^2 + x - 2$

8) $f(x) = x^3 - 5x^2 - x + 6$

9) $f(x) = x^4 + 2x^2 - 9$

10) $f(x) = x^4 - 3x^3 + 2x^2 - 2x + 6$

11) $f(x) = x^5 - 7x^3 - 4x + 10$

12) $f(x) = x^6 - 2x^5 + x^4 + x^3 - 9x^2 - 20$

في كل مما يأتي كثيرة حدود وأحد عواملها، أوجد عواملها الأخرى

13) $x^3 + 2x^2 - x - 2;\ x + 1$

14) $x^3 + x^2 - 5x + 3;\ x - 1$

15) $x^3 + 3x^2 - 4x - 12;\ x + 3$

16) $x^3 - 6x^2 + 11x - 6;\ x - 3$

17) $x^3 + 2x^2 - 33x - 90;\ x + 5$

18) $x^3 - 6x^2 + 32;\ x - 4$

19) $x^3 - x^2 - 10x - 8;\ x + 2$

20) $x^3 - 19x + 30;\ x - 2$

21) $2x^3 + x^2 - 2x - 1;\ x + 1$

22) $2x^3 + x^2 - 5x + 2;\ x + 2$

23) $3x^3 + 4x^2 - 5x - 2;\ 3x + 1$

24) $3x^3 + x^2 + x - 2;\ 3x - 2$

3-7 تدريبات حل المسألة

نظريتا الباقي والعوامل

1) ارتفاع: رميت كرة إلى أعلى في الهواء، فاتخذت مسارها على شكل قطع مكافئ، ارتفاعها h بعد t ثانية تمثله كثيرة حدود من الدرجة الثانية المعامل الرئيس فيها يساوي -16. باستعمال التعويض التركيبي، وُجد أن الكرة وصلت إلى الأرض عندما كان $t=0$, $t=4$، فما كثيرة الحدود التي تمثل ارتفاع الكرة على صورة دالة في t؟

2) التعويض التركيبي: وجد أحمد قيمة الدالة كثيرة الحدود $p(x) = x^3 - 5x^2 + 3x + 5$ عند عدد ما مستعملًا التعويض التركيبي. وأسلوب عمله موضح تاليًا مع إخفاء العدد والحل لسقوط الحبر عليهما.

	1	−5	3	5
		11	66	759
	1	6	69	

ما العدد الذي استخدمه، وما الحل؟

3) أرباح: يمكن تمثيل أرباح إحدى الشركات بكثيرة الحدود $P(y) = y^4 - 4y^3 + 2y^2 + 10y - 200$ حيث تمثل y عدد السنوات بعد أن باشرت الشركة عملها. أراد مديرها أن يعرف $P(10)$. استعمل التعويض التركيبي لتجد $P(10)$. ووضح خطوات حلك.

4) أسس: الدالة الأسية $t = e^x$ هي دالة خاصة ستتعلمها لاحقًا. فهي ليست كثيرة حدود. ومع هذا فإنه لقيم x الصغيرة يمكن تقريبها لدالة كثيرة الحدود $e(x) = \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{2}x^2 + x + 1$.
أوجد $e(0.1)$ مستعملًا التعويض التركيبي. وبيّن خطوات حلك.

5) حجم: حجم بركة بالأقدام المكعبة يعطى بكثيرة الحدود $v(x) = \pi(x^3 - 5x^2 - 86x + 360)$.

a) بين أن $x - 4$ عامل من عوامل $v(x)$ مستعملًا التعويض التركيبي. وضح خطوات عملك.

b) حلل $v(x)$ إلى العوامل تحليلًا تامًّا.

c) ما قيمة $v(10)$؟

الاسم: ______________________ التاريخ: ______________

3-7 التدريبات الإثرائية

رمز الجذر

في عام 1494 م صدرت أول طبعة من *Summa* ، وهو كتاب إيطالي يعرف الآن باسم سوما (*Suma*) ، وقد كتب المؤلف الإيطالي (لوكا باكيلو) الكتاب على صورة ملخص لما كان يعرف عن الرياضيات في ذلك الوقت، وقد استعمل رموزًا شبيهة بالرموز المستخدمة حاليًا، فمثلًا لتمثيل الجذور استعمل العبارة التالية:

$6 \cdot p \cdot R \cdot 10$

وفي تعبيرنا اليوم نكتب p حيث p الحرف الأول من كلمة زائد "*plus*" ، و R من كلمة "*radical*". لذا، $6 \cdot p \cdot R \cdot 10$ تعني $6 + \sqrt{10}$.

1) ما الحرف الذي تتوقعه لتمثيل الطرح؟

2) ترجم الرموز التالية إلى الرموز الحالية.

a) $18 \cdot m \cdot R \cdot 90$

b) $108 \cdot m \cdot R \cdot 3240 \cdot p \cdot R \cdot 3240 \cdot m \cdot R \cdot 900$

c) $10 \cdot R \cdot 5 \cdot p \cdot 2 \cdot R \cdot 3$

3) ترجم الرموز الحديثة التالية إلى رموز كانت تستعمل قبل عام 1494 .

a) $32\sqrt{10}$

b) $21\sqrt{6} + 3\sqrt{3}$

c) $5\sqrt{2} - 2 + 7\sqrt{11}$

3-8 تدريبات إعادة التعليم

الجذور والأصفار

العبارات التالية متكافئة لأية دالة كثيرة حدود $f(x)$.

- c صفرًا لدالة كثيرة الحدود $f(x)$.
- c جذرًا أو حلًا لمعادلة كثيرة الحدود $f(x) = 0$.
- $(x - c)$ عامل من عوامل كثيرة الحدود $f(x)$.
- إذا كانت c عددًا حقيقيًا، فإن $(c , 0)$ نقطة تقاطع منحنى $f(x)$مع محور x.

النظرية الأساسية في الجبر	كل معادلة كثيرة حدود درجتها أكبر من الصفر لها جذر واحد على الأقل في مجموعة الأعداد المركبة.
نتيجة للنظرية الأساسية في الجبر	يكون لمعادلة كثيرة الحدود من الدرجة n على الصورة $P(x) = 0$ العدد n من الجذور المركبة بما في ذلك الجذور المكررة.
قانون ديكارت للإشارات	إذا كانت $P(x)$ كثيرة حدود معاملات حدودها أعداد حقيقية. وحدودها مرتبة ترتيبًا تنازليًا وفق درجاتها فإن: • عدد الأصفار الحقيقية الموجبة للدالة $y = P(x)$ يساوي عدد مرات تغير إشارة معاملات الحدود أو أقل منه بعدد زوجي. • عدد الأصفار الحقيقية السالبة للدالة $y = P(x)$ يساوي عدد مرات تغير إشارة معاملات حدود $P(-x)$ أو اقل منه بعدد زوجي.

مثال 1

حل المعادلة $6x^3 + 3x = 0$. واذكر عدد الجذور وأنواعها .

$3x(2x^2 + 1) = 0$

باستعمال خاصية الضرب الصفري.

$3x = 0$ أو $2x^2 + 1 = 0$

$x = 0$ أو $2x^2 = -1$

$x = \pm i\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

للمعادلة جذر حقيقي واحد هو الصفر وجذران تخيليان هما $\pm i\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

مثال 2

اذكر العدد الممكن للأصفار الحقيقية الموجبة، والحقيقية السالبة، والتخيلية للدالة $p(x) = 4x^4 - 3x^3 - x^2 + 2x - 5$.

بما أن الدالة $p(x)$ من الدرجة الرابعة فلها 4 أصفار.

وبما أن هنالك 3 تغيرات في الإشارة، فللدالة 3 أصفار حقيقية موجبة أو صفر حقيقي موجب واحد.

أوجد $p(-x)$ واوجد عدد مرات تغير إشارة المعاملات.

$$p(-x) = 4(-x)^4 - 3(-x)^3 + (-x)^2 + 2(-x) - 5$$
$$= 4x^4 + 3x^3 + x^2 - 2x - 5$$

وبما أنه يوجد تغير واحد في الإشارة، فهناك جذر حقيقي سالب واحد، لذا يوجد 3 أصفار حقيقية موجبة، وصفر حقيقي سالب. أو جذر حقيقي موجب وجذر حقيقي سالب وجذران تخيليان.

تمارين:

حل كل معادلة مما يأتي واذكر عدد جذورها، وأنواعها.

1) $x^2 + 4x - 21 = 0$

2) $2x^3 - 50x = 0$

3) $12x^3 + 100x = 0$

اذكر العدد الممكن للأصفار الحقيقية الموجبة، والحقيقية السالبة، والتخيلية لكل دالة مما يأتي:

4) $f(x) = 3x^3 + x^2 - 8x - 12$

5) $f(x) = 3x^5 - x^4 - x^3 + 6x^2 - 5$

3-8 تدريبات إعادة التعليم

(تتمة)

الجذور والأصفار

أوجد الأصفار

نظرية مرافق العدد المركب	إذا كانت a و b أعدادًا حقيقية، $b \neq 0$. وكان $a + bi$ صفرًا لدالة كثيرة حدود معاملات حدودها أعداد حقيقية فإن $a - bi$ صفر آخر للدالة.

مثال 1 أوجد جميع أصفار الدالة $f(x) = x^4 - 15x^2 + 38x - 60$.

بما أن $f(x)$ من الدرجة الرابعة، فإن للدالة 4 أصفار.

$f(x) = x^4 - 15x^2 + 38x - 60$ ، $f(-x) = x^4 - 15x^2 - 38x - 60$

وبما أن هنالك 3 تغيرات في الإشارات للدالة $f(x)$، فإن للدالة 3 أصفار حقيقية موجبة أو صفر حقيقي موجب واحد، وبما أن تغير الإشارة في الدالة $f(-x)$ مرة واحدة، فإنه يوجد صفر حقيقي سالب واحد. استعمل التعويض التركيبي لاختبار الأصفار الممكنة.

$$\begin{array}{r|rrrrr} 2 & 1 & 0 & -15 & 38 & -60 \\ & & 2 & 4 & -22 & 32 \\ \hline & 1 & 2 & -11 & 16 & -28 \end{array}$$

$$\begin{array}{r|rrrrr} 3 & 1 & 0 & -15 & 38 & -60 \\ & & 3 & 9 & -18 & 60 \\ \hline & 1 & 3 & -6 & 20 & 0 \end{array}$$

إذن، 3 هو صفر للدالة كثيرة الحدود. جرب التعويض التركيبي ثانية، لإيجاد صفر لكثيرة الحدود $(x^3+3x^2-6x+20)$ التي تمثل ناتج قسمة $f(x)$ على $x-3$.

$$\begin{array}{r|rrrr} -2 & 1 & 3 & -6 & 20 \\ & & -2 & -2 & 16 \\ \hline & 1 & 1 & -8 & 36 \end{array}$$

$$\begin{array}{r|rrrr} -4 & 1 & 3 & -6 & 20 \\ & & -4 & 4 & 8 \\ \hline & 1 & -1 & -2 & 28 \end{array}$$

$$\begin{array}{r|rrrr} -5 & 1 & 3 & -6 & 20 \\ & & -5 & 10 & -20 \\ \hline & 1 & -2 & 4 & 0 \end{array}$$

إذن، -5 هو صفر آخر للدالة. ثم استعمل القانون العام لحل المعادلة التربيعية $x^2 - 2x + 4$ ، فتجد أن $1 \pm i\sqrt{3}$ هما الصفران الآخران .

إذن، للدالة صفران حقيقيان هما 3 ,-5 وصفران تخيليان هما $1 \pm i\sqrt{3}$.

تمارين:

أوجد جميع أصفار كل دالة مما يأتي:

(1 $f(x) = x^3 + x^2 + 9x + 9$

(2 $f(x) = x^3 - 3x^2 + 4x - 12$

(3 $p(a) = a^3 - 10a^2 + 34a - 40$

(4 $p(x) = x^3 - 5x^2 + 11x - 15$

(5 $f(x) = x^3 + 6x + 20$

(6 $f(x) = x^4 - 3x^3 + 21x^2 - 75x - 100$

3-8 تدريبات المهارات

الجذور والأصفار

حل كل معادلة مما يأتي واذكر عددجذورها، وأنواعها:

1) $5x + 12 = 0$

2) $x^2 - 4x + 40 = 0$

3) $x^5 + 4x^3 = 0$

4) $x^4 - 625 = 0$

5) $4x^2 - 4x - 1 = 0$

6) $x^5 - 81x = 0$

اذكر العدد الممكن للأصفار الحقيقية الموجبة، والحقيقة السالبة، والتخيلية لكل دالة مما يأتي:

7) $g(x) = 3x^3 - 4x^2 - 17x + 6$

8) $h(x) = 4x^3 - 12x^2 - x + 3$

9) $f(x) = x^3 - 8x^2 + 2x - 4$

10) $p(x) = x^3 - x^2 + 4x - 6$

11) $q(x) = x^4 + 7x^2 + 3x - 9$

12) $f(x) = x^4 - x^3 - 5x^2 + 6x + 1$

أوجد جميع أصفار كل دالة مما يأتي.

13) $h(x) = x^3 - 5x^2 + 5x + 3$

14) $g(x) = x^3 - 6x^2 + 13x - 10$

15) $h(x) = x^3 + 4x^2 + x - 6$

16) $q(x) = x^3 + 3x^2 - 6x - 8$

17) $g(x) = x^4 - 3x^3 - 5x^2 + 3x + 4$

18) $f(x) = x^4 - 21x^2 + 80$

اكتب دالة كثيرة حدود درجتها أقل ما يمكن، ومعاملات حدودها أعداد صحيحة، إذا كانت الأعداد المعطاة في كل مما يأتي من أصفارها.

19) $-3, -5, 1$

20) $3\boldsymbol{i}$

21) $-5 + \boldsymbol{i}$

22) $-1, \sqrt{3}, -\sqrt{3}$

23) $\boldsymbol{i}, 5\boldsymbol{i}$

24) $-1, 1, \boldsymbol{i}\sqrt{6}$

الاسم: ______________________ التاريخ: ____________

3-8 تدريبات حل المسألة

الجذور والأصفار

1) **جداول:** صممت انتصار جدول قيم لدالة كثيرة حدود كما هو موضح.

x	$p(x)$
-4	-3
-3	-1
-2	0
-1	2
0	0
1	4
2	0
3	2
4	5

اكتب 3 جذور للدالة $p(x)$.

2) **جذور:** يعمل حمد مهندسًا كهربائيًا ويقوم بحل معادلات كثيرة حدود غالبًا ليتعرف خصائص الدوائر الكهربائية التي يعملها، وكان عليه أن يجد لإحدى الدوائر جذور كثيرة الحدود $p(x)$. وقد وجد أن $p(2-3i)=0$. أوجد جذرين مختلفين للدالة $p(x)$.

3) **جذور حقيقية:** يوجد في العالم ما يزيد على 1000 عجلة دوّارة، ويمكن لمهندسي العجلات الدوارة أن يستعملوا دوال كثيرة حدود لتمثيل الشكل الممكن لتصميمها. يدرس غانم كثيرة الحدود $f(x)=x^6-14x^4+49x^2-36$. وهو يعرف أن جميع جذور $f(x)$ حقيقية، فكم جذرًا حقيقيًا موجبًا وكم جذرًا حقيقيًا سالبًا للدالة؟

4) **الجذور المركبة:** يعمل عمر في مجال الإحصاء، وفي أثناء عمله حاول أن يجد ما يطلق عليه القيم العددية للمصفوفة، والتي تشابه إيجاد جذور كثيرة الحدود x^4+6x^2+25 تمامًا. فإذا كان أحد جذور كثيرة الحدود يساوي $1+2i$. فما الجذور الثلاثة الأخرى؟

5) **الأشكال الرباعية:** رسمت عبير الرؤوس الأربعة لشكل رباعي في المستوى المركب، وافترضت هذه النقط جذورًا لكثيرة الحدود $p(x)$ حيث.
$p(x)=x^4-9x^3+27x^2+23x-150$.

a) للدالة $p(x)$ جذر حقيقي وحيد موجب وهو عدد صحيح. أوجده.

b) أوجد الجذر/ الجذور الحقيقية السالبة للدالة $p(x)$.

c) أوجد الجذور التخيلية للدالة $p(x)$.

3-8 التدريبات الإثرائية

أسلوب التنصيف لتقريب الأصفار الحقيقية

يمكن أن يستعمل التنصيف لتقريب أصفار دوال كثيرات الحدود مثل $f(x) = x^3 + x^2 - 3x - 3$.

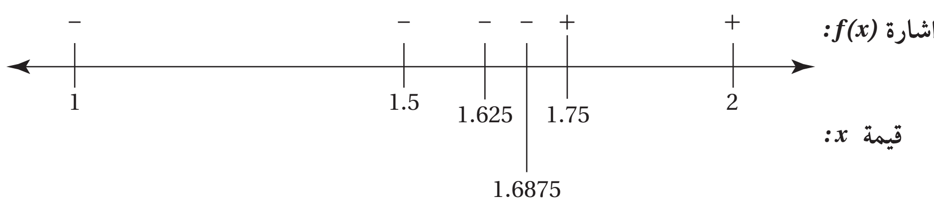
بما أن $f(1) = -4$ و $f(2) = 3$، فإن هناك صفر واحد بين 1 و 2، على الأقل ومنتصف الفترة بينهما هو:

$1.5 = \dfrac{1+2}{2}$، وبما أن $f(1.5) = -1.875$ فإن الصفر يقع بين 1.5 و 2، ومنتصف الفترة هو $1.75 = \dfrac{1.5+2}{2}$.

وبما أن $f(1.75)$ تساوي 0.172 تقريبًا، فالصفر يقع بين 1.5 و 1.75 ومنتصف هذه الفترة هو $1.625 = \dfrac{1.5+1.75}{2}$
وبما أن $f(1.625)$ هي -0.94. تقريبًا، لذا يقع الصفر بين 1.625 و 1.75. ومنتصف هذه الفترة هو $1.6875 = \dfrac{1.625+1.75}{2}$.

وبما أن قيمة $f(1.6875)$ تساوي -0.41، تقريبًا، فإن صفر الدالة يقع بين 1.6875 و 1.75 إذن، صفر الدالة يساوي 1.7 لأقرب عشر.

ويلخص الشكل الآتي النتائج التي تم التوصل إليها.



استعمل أسلوب التنصيف لتقريب صفر كل دالة فيما يأتي لأقرب عُشر.

1) $f(x) = x^3 - 4x^2 - 11x + 2, f(0) = 2, f(1) = -12$

2) $f(x) = 2x^4 + x^2 - 15, f(1) = -12, f(2) = 21$

3) $f(x) = x^5 - 2x^3 - 12, f(1) = -13, f(2) = 4$

4) $f(x) = 4x^3 - 2x + 7, f(-2) = -21, f(-1) = 5$

5) $f(x) = 3x^3 - 14x^2 - 27x + 126, f(4) = -14, f(5) = 16$

الاسم: ________________________ التاريخ: ____________

3-9 تدريبات إعادة التعليم

نظرية الصفر النسبي

تحديد الأصفار النسبية

نظرية الصفر النسبي	افرض أن $f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$ دالة كثيرة حدود معاملات حدودها أعداد صحيحة، فإن أي صفر نسبي للدالة $f(x)$ سيكون على صورة العدد النسبي $\frac{P}{q}$ في أبسط صورة، حيث P أحد عوامل الحد الثابت، q أحد عوامل المعامل الرئيس.
نتيجة (نظرية الصفر الصحيح)	إذا كانت معاملات حدود كثيرة الحدود أعدادًا صحيحة، وكان $a_n = 1$ و $a_0 \neq 0$، فإن أي صفر نسبي للدالة يتعين أن يكون من عوامل a_0.

مثال اكتب جميع الأصفار النسبية الممكنة لكلٍّ من الدالتين التاليتين:

a) $f(x) = 3x^4 - 2x^2 + 6x - 10$

إذا كان $\frac{p}{q}$ صفر نسبي، فإن p عامل للعدد -10 و q عامل للعدد 3. القيم الممكنة لـ p هي $\pm1, \pm2, \pm5, \pm10$. والقيم الممكنة لـ q هي ±1 و ±3. لذا، فإن جميع الأصفار الممكنة هي: $\frac{p}{q} = \pm1, \pm2, \pm5, \pm10, \pm\frac{1}{3}, \pm\frac{2}{3}, \pm\frac{5}{3} \pm\frac{10}{3}$.

b) $q(x) = x^3 - 10x^2 + 14x - 36$

بما أن معامل x^3 يساوي 1, فإن الأصفار الممكنة يتعين أن تكون من معاملات العدد -36. لذا فالأصفار الممكنة هي :

$\pm1, \pm2, \pm3, \pm4, \pm6, \pm9, \pm12, \pm18, \pm36$.

تمارين:

اكتب جميع الأصفار النسبية الممكنة لكل دالة مما يأتي:

1) $f(x) = x^3 + 3x^2 - x + 8$

2) $g(x) = x^5 - 7x^4 + 3x^2 + x - 20$

3) $h(x) = x^4 - 7x^3 - 4x^2 + x - 49$

4) $p(x) = 2x^4 - 5x^3 + 8x^2 + 3x - 5$

5) $q(x) = 3x^4 - 5x^3 + 10x + 12$

6) $r(x) = 4x^5 - 2x + 18$

7) $f(x) = x^7 - 6x^5 - 3x^4 + x^3 + 4x^2 - 120$

8) $g(x) = 5x^6 - 3x^4 + 5x^3 + 2x^2 - 15$

9) $h(x) = 6x^5 - 3x^4 + 12x^3 + 18x^2 - 9x + 21$

10) $p(x) = 2x^7 - 3x^6 + 11x^5 - 20x^2 + 11$

3-9 تدريبات إعادة التعليم

(تتمة)

نظرية الصفر النسبي

إيجاد الأصفار النسبية

مثال 1 أوجد جميع الأصفار النسبية للدالة $f(x) = 5x^3 + 12x^2 - 29x + 12$.

من نتيجة النظرية السابقة في الجبر تعلم أنه يوجد 3 أصفار مركبة، وفق قانون ديكارت في الإشارات، هناك صفران حقيقيان أو صفر واحد من الأصفار الحقيقية الموجبة، وصفر حقيقي سالب واحد. والأصفار الممكنة هي

$\pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 4, \pm 6, \pm 12, \pm\frac{1}{5}, \pm\frac{2}{5}, \pm\frac{3}{5}, \pm\frac{4}{5}, \pm\frac{6}{5}, \pm\frac{12}{5}$

كوِّن جدولًا للقسمة التركيبية، واختبر الأصفار النسبية الممكنة.

$\frac{p}{q}$	5	12	−29	12
1	5	17	−12	0

بما أن $f(1) = 0$، فإن $x = 1$ صفر للدالة، حلِّل كثيرة الحدود الناتجة عن قسمة كثيرة الحدود الأصلية على $x-1$ وهي $5x^2 + 17x - 12$، ويمكن تحليلها على الصورة $(5x - 3)(x + 4)$.

ومن خاصية الضرب الصفري تكون العبارة مساوية للصفر عندما $x = \frac{3}{5}$ أو $x = -4$.

لذا، فالأصفار النسبية هي $-4, \frac{3}{5}, 1$.

مثال 2 أوجد جميع أصفار الدالة $f(x) = 8x^4 + 2x^3 + 5x^2 + 2x - 3$.

هنالك 4 أصفار مركبة، صفر حقيقي موجب واحد، و 3 أو 1 أصفار حقيقة سالبة، أما الأصفار الممكنة فهي: $\pm 1, \pm 3, \pm\frac{1}{2}, \pm\frac{1}{4}, \pm\frac{1}{8}, \pm\frac{3}{2}, \pm\frac{3}{4}, \pm\frac{3}{8}$.

كوِّن جدولًا، واختبر بعض القيم الممكنة.

$\frac{p}{q}$	8	2	5	2	−3
1	8	10	15	17	14
2	8	18	41	84	165
$\frac{1}{2}$	8	6	8	6	0

وبما أن $f\left(\frac{1}{2}\right) = 0$، فإن $x = \frac{1}{2}$ جذر.

إذن، أصفار الدالة $f(x)$ هي $\frac{1}{2}, -\frac{3}{4}, \pm i$.

حلِّل كثيرة الحدود الناتجة عن قسمة كثيرة الحدود الأصلية على $x - \frac{1}{2}$ وهي $8x^3 + 6x^2 + 8x + 6$.

واستعمل التعويض التركيبي مرة أخرى، علمًا أن الجذور الأخرى المتبقية سالبة.

$\frac{p}{q}$	8	6	8	6
$-\frac{1}{4}$	8	4	7	$4\frac{1}{4}$
$-\frac{3}{4}$	8	0	8	0

$x = -\frac{3}{4}$ جذر آخر، ثم حلِّل كثيرة الحدود الناتجة عن قسمة $8x^3+6x^2+8x+6$ على $x + \frac{3}{4}$ وهي $8x^2 + 8$، وصفراها $\pm i$.

تمارين:

أوجد جميع الأصفار النسبية لكل من الدوال الآتية:

(1 $f(x) = x^3 + 4x^2 - 25x - 28$

(2 $f(x) = x^3 + 6x^2 + 4x + 24$

أوجد جميع الأصفار النسبية لكل من الدوال الآتية:

(3 $f(x) = x^4 + 2x^3 - 11x^2 + 8x - 60$

(4 $f(x) = 4x^4 + 5x^3 + 30x^2 + 45x - 54$

3-9 تدريبات المهارات

نظرية الصفر النسبي

اكتب جميع الأصفار النسبية الممكنة لكل من الدوال الآتية.

1) $n(x) = x^2 + 5x + 3$

2) $h(x) = x^2 - 2x - 5$

3) $w(x) = x^2 - 5x + 12$

4) $f(x) = 2x^2 + 5x + 3$

5) $q(x) = 6x^3 + x^2 - x + 2$

6) $g(x) = 9x^4 + 3x^3 + 3x^2 - x + 27$

أوجد جميع الأصفار النسبية لكل دالة مما يأتي.

7) $f(x) = x^3 - 2x^2 + 5x - 4$

8) $g(x) = x^3 - 3x^2 - 4x + 12$

9) $p(x) = x^3 - x^2 + x - 1$

10) $z(x) = x^3 - 4x^2 + 6x - 4$

11) $h(x) = x^3 - x^2 + 4x - 4$

12) $g(x) = 3x^3 - 9x^2 - 10x - 8$

13) $g(x) = 2x^3 + 7x^2 - 7x - 12$

14) $h(x) = 2x^3 - 5x^2 - 4x + 3$

15) $p(x) = 3x^3 - 5x^2 - 14x - 4$

16) $q(x) = 3x^3 + 2x^2 + 27x + 18$

17) $q(x) = 3x^3 - 7x^2 + 4$

18) $f(x) = x^4 - 2x^3 - 13x^2 + 14x + 24$

19) $p(x) = x^4 - 5x^3 - 9x^2 - 25x - 70$

20) $n(x) = 16x^4 - 32x^3 - 13x^2 + 29x - 6$

أوجد جميع الأصفار لكل دالة مما يأتي.

21) $f(x) = x^3 + 5x^2 + 11x + 15$

22) $q(x) = x^3 - 10x^2 + 18x - 4$

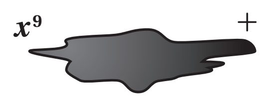
23) $m(x) = 6x^4 - 17x^3 + 8x^2 + 8x - 3$

24) $g(x) = x^4 + 4x^3 + 5x^2 + 4x + 4$

3-9 تدريبات حل المسألة

نظرية الصفر النسبي

1) **الجذور:** يتصفح حامد كتابًا في الجبر، وقد وصل إلى دالة كثيرة حدود لم يظهر منها غير الحدين الأول والأخير كما هو مبين في الشكل.



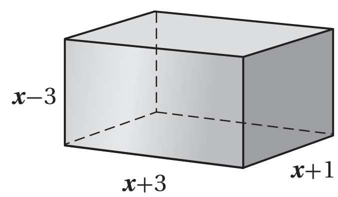
ما الأصفار النسبية الممكنة لهذه الدالة؟

2) **الثوابت غير النسبية:** طُلب إلى صالح أن يسجل دالة كثيرة حدود حدها الثابت $\sqrt{2}$. فهل من الممكن أن يكون لمثل هذه الدالة صفر نسبي؟ إذا كانت الإجابة لا، فسر لماذا، وإذا كان ذلك ممكنًا، فأعطِ مثالًا لكثيرة حدود شبيهة ولها جذر نسبي.

3) تعمل سارة في تدريس الرياضيات، وتختص بالاحتمالات، وفي أثناء عملها أرادت أن تجد أصفار كثيرة الحدود $p(x) = 288x^4 - 288x^3 + 106x^2 - 17x + 1$.
فما هي أصفار الدالة $p(x)$؟

4) **أهرامات:** أكبر أهرامات الجيزة في مصر قاعدته مربع طول ضلعه $5x$ ياردة وارتفاعه $4x - 50$ ياردة، إذا كان حجمه 3125000 ياردة مكعبة، فاستعمل الحاسبة لإيجاد قيمة x وأبعاد الهرم.

5) **صناديق:** عمل صالح صندوقًا عرضه $x + 1$، وطوله $x + 3$، وارتفاعه $x - 3$.



a) أوجد حجم صندوق صالح على صورة دالة في x؟

b) ما قيمة x إذا كان حجم الصندوق 1001 بوصة مكعبة .

c) ما قيمة x إذا كان حجم الصندوق $14\frac{5}{8}$ بوصة مكعبة؟

3-9 التدريبات الإثرائية

الأعداد غير النسبية

اعتقد أحد الفلاسفة ويدعى هباسيوس أنه اكتشف أن $\sqrt{2}$ ليس عددًا نسبيًا، وقد أنكر الرياضيون الذين عاصروه وجود أعداد غير نسبية وقتلوه، لأنهم لم يقتنعوا بفكرة وجود عدد لا يمكن تمثيله على صورة نسبة بين عددين صحيحين.

الطريقة النموذجية لبرهنة أن $\sqrt{2}$ عدد غير نسبي هي باستعمال التناقض، وبالإعتماد على بعض الحقائق البسيطة يمكن برهنتها بسهولة. حيث يفترض البرهان أنه عدد نسبي، ثم يتوصل إلى تناقض مع هذا الفرض.

نظرية : $\sqrt{2}$ عدد غير نسبي

البرهان: افترض أن $\sqrt{2}$ عدد نسبي، لذا $\sqrt{2}=\frac{a}{b}$, حيث a و b عددان أوليان فيما بينهما، أي ليس بينهما عوامل مشتركة غير الواحد الصحيح. لذلك $\frac{a}{b}$ في أبسط صورة، وهذه هي الحالة المسؤولة عن التناقض، فإذا ربعنا طرفي المعادلة $\frac{a}{b}=\sqrt{2}$ نحصل على $\frac{a^2}{b^2}=2$. وهذا يعني أن a^2. عدد زوجي، وإذا كانت a^2 عددًا زوجيًا ، و $b^2=\frac{a^2}{2}$ ، فإن b عدد زوجي أيضا. نستنتج من هذا أن a و b بينهما عامل مشترك غير العدد الواحد وبالذات العدد 2 ، فهما ليسا أوليين فيما بينهما، وهذا تناقض.
نظرية الصفر النسبي تقدم برهانًا مباشرًا لذلك.

تمارين:

1) استعمل نظرية الصفر النسبي لبرهنة أن $\sqrt{2}$ عدد غير نسبي .

2) بين أن مربع العدد الزوجي هو عدد زوجي .

3) بين أن أي عدد صحيح يمثل صفرًا لدالة كثيرة حدود يتعين أن يكون من عوامل الحد الثابت a_0.

ملحق الإجابات

3-1 تدريبات إعادة التعليم

الأعداد المركبة

الأعداد التخيلية البحتة : الجذر التربيعي للعدد n هو عدد مربعه n. وإذا كان a,b عددين حقيقيين غير سالبين فإن: $\sqrt{ab}=\sqrt{a}\cdot\sqrt{b}$ و $\sqrt{\frac{a}{b}}=\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$ حيث $b\neq 0$.

- تُعرَّف **الوحدة التخيلية (i)** على أنها تحقق الخاصية: $i^2=-1$
- تبسيط العبارات التي تتضمن جذورًا تربيعية يعني أن هذه العبارات لا تحوي جذورًا في المقام، وأي عدد يبقى داخل الجذر التربيعي لا يتضمن عاملًا مربعًا كاملًا غير العدد 1.

مثال 1

a) بسِّط $\sqrt{-48}$.

$\sqrt{-48}=\sqrt{16\cdot(-3)}$

$=\sqrt{16}\cdot\sqrt{3}\cdot\sqrt{-1}$

$=4i\sqrt{3}$

b) بسِّط $\sqrt{-63}$.

$\sqrt{-63}=\sqrt{-1\cdot 7\cdot 9}$

$=\sqrt{-1}\cdot\sqrt{7}\cdot\sqrt{9}$

$=3i\sqrt{7}$

مثال 2

a) بسِّط $-3i.4i$.

$-3i\,.\,4i=-12i^2$

$=-12(-1)$

$=12$

b) بسِّط $\sqrt{-3}\cdot\sqrt{-15}$.

$\sqrt{-3}\cdot\sqrt{-15}=i\sqrt{3}\cdot i\sqrt{15}$

$=i^2\sqrt{45}$

$=-1\cdot\sqrt{9}\cdot\sqrt{5}$

$=-3\sqrt{5}$

مثال 3 حل المعادلة $x^2+5=0$

$x^2+5=0$	المعادلة الأصلية
$x^2=-5$	بطرح 5 من كلا الطرفين
$x=\pm\sqrt{5}i$	خاصية الجذر التربيعي

تمارين:

بسط كلًا مما يأتي:

1) $\sqrt{-72}$ **$6i\sqrt{2}$**

2) $\sqrt{-24}$ **$2i\sqrt{6}$**

3) $\sqrt{-84}$ **$2i\sqrt{21}$**

4) $(2+i)(2-i)$ **5**

حل كل معادلة مما يأتي:

5) $5x^2+45=0$ **$\pm 3i$**

6) $4x^2+24=0$ **$\pm i\sqrt{6}$**

7) $-9x^2=9$ **$\pm i$**

8) $7x^2+84=0$ **$\pm 2i\sqrt{3}$**

3-1 تدريبات إعادة التعليم

(تتمة)

الأعداد المركبة

العمليات على الأعداد المركبة.

العدد المركب	العدد المركب هو أي عدد يكتب على الصورة $a+bi$ حيث a,b عددان حقيقيان، و i الوحدة التخيلية $(i^2=-1)$. يسمى a الجزء الحقيقي من العدد المركب، و b الجزء التخيلي.
جمع الأعداد المركبة وطرحها	دمج الحدود المتشابهة $(a+bi)+(c+di)=(a+c)+(b+d)i$ $(a+bi)-(c+di)=(a-c)+(b-d)i$
ضرب الأعداد المركبة	استعمل تعريف i^2، وقانون التوزيع: $(a+bi)(c+di)=(ac-bd)+(ad+bc)i$
مرافق العدد المركب	يسمى العددان $a+bi$ و $a-bi$ مركبان مترافقان. وناتج ضربهما عدد حقيقي دائمًا.

للقسمة على عدد مركب. أولًا اضرب كلًا من المقسوم والمقسوم عليه بمرافق المقسوم عليه.

مثال 1 بَسِّط $(6+i)+(4-5i)$

$(6+i)+(4-5i)$

$=(6+4)+(1-5)i$

$=10-4i$

مثال 2 بسط $(8+3i)-(6-2i)$

$(8+3i)-(6-2i)$

$=(8-6)+[(3-(-2))]i$

$=2+5i$

مثال 3 بَسِّط $(2-5i)\cdot(-4+2i)$

$(2-5i)\cdot(-4+2i)$

$=2(-4)+2(2i)+(-5i)(-4)+(-5i)(2i)$

$=-8+4i+20i-10i^2$

$=-8+24i-10(-1)$

$=2+24i$

مثال 4 بَسِّط $\frac{3-i}{2+3i}$

$\frac{3-i}{2+3i}=\frac{3-i}{2+3i}\cdot\frac{2-3i}{2-3i}$

$=\frac{6-9i-2i+3i^2}{4-9i^2}$

$=\frac{3-11i}{13}$

$=\frac{3}{13}-\frac{11}{13}i$

تمارين:

بسط كلًا مما يأتي:

1) $(-4+2i)+(6-3i)$ **$2-i$**

2) $(5-i)-(3-2i)$ **$2+i$**

3) $(6-3i)+(4-2i)$ **$10-5i$**

4) $(-11+4i)-(1-5i)$ **$-12+9i$**

5) $(8+4i)+(8-4i)$ **16**

6) $(5+2i)-(-6-3i)$ **$11+5i$**

7) $(2+i)(3-i)$ **$7+i$**

8) $(5-2i)(4-i)$ **$18-13i$**

9) $(4-2i)(1-2i)$ **$-10i$**

10) $\frac{5}{3+i}$ **$\frac{3}{2}-\frac{1}{2}i$**

11) $\frac{7-13i}{2i}$ **$-\frac{13}{2}-\frac{7}{2}i$**

12) $\frac{6-5i}{3i}$ **$-\frac{5}{3}-2i$**

3-1 تدريبات المهارات

الأعداد المركبة

بسط كلًا مما يأتي:

1) $\sqrt{99}$ **$3\sqrt{11}$**

2) $\sqrt{\frac{27}{49}}$ **$\frac{3\sqrt{3}}{7}$**

3) $\sqrt{52x^3y^5}$ **$2|x|y^2\sqrt{13xy}$**

4) $\sqrt{-108x^7}$ **$6i|x^3|\sqrt{3x}$**

5) $\sqrt{-81x^6}$ **$9i|x^3|$**

6) $\sqrt{-23}\cdot\sqrt{-46}$ **$-23\sqrt{2}$**

7) $(3i)(-2i)(5i)$ **$30i$**

8) i^{11} **$-i$**

9) i^{65} **i**

10) $(7-8i)+(-12-4i)$ **$-5-12i$**

11) $(-3+5i)+(18-7i)$ **$15-2i$**

12) $(10-4i)-(7+3i)$ **$3-7i$**

13) $(7-6i)(2-3i)$ **$-4-33i$**

14) $(3+4i)(3-4i)$ **25**

15) $\frac{8-6i}{3i}$ **$-2-2\frac{2}{3}i$**

16) $\frac{3i}{4+2i}$ **$\frac{3}{10}+\frac{3}{5}i$**

حل كل معادلة مما يأتي:

17) $3x^2+3=0$ **$\pm i$**

18) $5x^2+125=0$ **$\pm 5i$**

19) $4x^2+20=0$ **$\pm i\sqrt{5}$**

20) $-x^2-16=0$ **$\pm 4i$**

21) $x^2+18=0$ **$\pm 3i\sqrt{2}$**

22) $8x^2+96=0$ **$\pm 2i\sqrt{3}$**

أوجد قيم l و m التي تجعل المعادلة صحيحة فيما يأتي:

23) $20-12i=5\ell+(4m)i$ **$4, -3$**

24) $\ell-16i=3-(2m)i$ **$3, 8$**

25) $(4+\ell)+(2m)i=9+14i$ **$5, 7$**

26) $(3-m)+(7\ell-14)i=1+7i$ **$3, 2$**

3-1 تدريبات حل المسألة

الأعداد المركبة

1) **أخطاء الإشارات:** حصل عماد وناصر على إجابات مختلفة لحاصل الضرب: $(4+i)(4-i)$، وكتبوا إجاباتهم على صورة أعداد مركبة، فكانت إجابة عماد 17، وإجابة ناصر 15. أيهما كانت إجابته صحيحة؟ فسر إجابتك.

إجابة عماد صحيحة،

$$(4+i)(4-i)=$$
$$16+4i-4i-i^2$$
$$=16-(-1)=16+1=17$$

2) **المركبان المترافقان:** لقد وجدتَ أن حاصل ضرب عددين مركبين مترافقين عدد حقيقي. بيِّن أن مجموع عددين مركبين مترافقين عدد حقيقي أيضًا.

$a+bi$, $a-bi$ مركبان مترافقان مجموعهما $2a$ وهو عدد حقيقي

3) **ثلاثيات فيثاغورس:** إذا حققت ثلاثة أعداد صحيحة المعادلة: $a^2+b^2=c^2$، فإنها تُسمى ثلاثية فيثاغورس، إفترض أن الأعداد a, b, c ثلاثية فيثاغورس، وبيِّن أن الجزء الحقيقي والجزء التخيلي للعبارة $(a+bi)^2$ تكوِّن مع c^2 ثلاثية فيثاغورس.

$$(a+bi)^2=a^2-b^2+2abi;$$

a^2-b^2 و $2ab$ أعداد صحيحة، و

$$(a^2-b^2)^2+(2ab)^2=$$
$$a^4-2a^2b^2+b^4+4a^2b^2=$$
$$a^4+2a^2b^2+b^4=(a^2+b^2)^2=$$
$$=(c^2)^2$$

4) **دوران:** يمكن استعمال الأعداد المركبة لتعيين الإحداثيات الناتجة عن الدوران حول نقطة الأصل في المستوى الإحداثي. الجزءان الحقيقي والتخيلي في العبارة $i(x+yi)$ يمثلان الإحداثي الأفقي والإحداثي الرأسي لصورة النقطة (x,y) نتيجة دوران حول نقطة الأصل بزاوية قياسها $90°$ باتجاه عكس عقارب الساعة. ما الجزءان الحقيقي والتخيلي للعبارة $i(x+yi)$.

الجزء الحقيقي $-y$، الجزء التخيلي x

5) **هندسة الكهرباء:** التيار الكهربائي المتردد (AC) هو دائرة كهربائية يمكن وصفها باستخدام الأعداد المركبة. في أي دائرة كهربائية، يرتبط فرق الجهد V، وشدة التيار C، والمعاوقة I، بالصيغة $V=C.I$ (فرق الجهد الكهربائي النموذجي في أوروبا 220 فولت).
أجب عن الأسئلة التالية التي يتضمن كلٌ منها دائرة كهربائية أوروبية نموذجية (فرق الجهد $V=220$ فولت).

a) أوجد المعاوقة إذا كانت شدة التيار $22-11i$ أمبير.
$8+4i$

b) أوجد شدة التيار إذا كانت المعاوقة $10-5i$ واط.
$17.6+8.8i$ أمبير

c) أوجد المعاوقة إذا كانت شدة التيار $20i$ أمبير.
$-11i$

الاسم: ________ التاريخ: ________

3-1 التدريبات الإثرائية

المركبان المترافقان والقيمة المطلقة

غالبًا ما يُمثَّل العدد المركب بمتغير واحد في دراسة الأعداد المركبة، فمثلًا، نرمز للعدد $x+y\boldsymbol{i}$ بالرمز z، وعندها نرمز للعدد المركب المترافق للعدد z بالرمز $\bar{z}$ ، أي $\bar{z}=x-y\boldsymbol{i}$

وتُعرَّف القيمة المطلقة للعدد المركب على الصورة $|z|=|x+y\boldsymbol{i}|=\sqrt{x^2+y^2}$ ، وتوجد علاقات كثيرة مهمة تتضمن الأعداد المترافقة والقيمة المطلقة للأعداد المركبة.

مثال 1 بيِّن أن $|z|^2=z\bar{z}$ لأي عدد مركب z.

افرض أن $z=x+y\boldsymbol{i}$ فإن:

$$z\bar{z}=(x+y\boldsymbol{i})(x-y\boldsymbol{i})$$
$$=x^2+y^2$$
$$=\sqrt{(x^2+y^2)^2}$$
$$=|z|^2$$

مثال 2 بيِّن أن $\frac{\bar{z}}{|z|^2}$ هو النظير الضربي لأي عدد مركب z حيث $z\neq 0$.

تعلم أن $|z|^2=\bar{z}z$.

إذا كان $z\neq 0$ فإن $z\left(\frac{\bar{z}}{|z|^2}\right)=1$

وعليه يكون $\frac{\bar{z}}{|z|^2}$ نظير ضربي للعدد z.

تمارين:

أوجد القيمة المطلقة والنظير الضربي لكل عددٍ مركب فيما يأتي:

1) $2i$ $\quad$ $\mathbf{2; \frac{-i}{2}}$

2) $-4-3i$ $\quad$ $\mathbf{5; \frac{-4+3i}{25}}$

3) $12-5i$ $\quad$ $\mathbf{13; \frac{12+5i}{169}}$

4) $5-12i$ $\quad$ $\mathbf{13; \frac{5+12i}{169}}$

5) $1+i$ $\quad$ $\mathbf{\sqrt{2}; \frac{1-i}{2}}$

6) $\sqrt{3}-i$ $\quad$ $\mathbf{2; \frac{\sqrt{3}+i}{4}}$

7) $\frac{\sqrt{3}}{3}+\frac{\sqrt{3}}{3}i$ $\quad$ $\mathbf{\frac{\sqrt{6}}{3}; \frac{\sqrt{3}-i\sqrt{3}}{2}}$

8) $\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}i$ $\quad$ $\mathbf{1; \frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}i}$

9) $\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i$ $\quad$ $\mathbf{1; \frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i}$

الاسم: ________ التاريخ: ________

3-2 تدريبات إعادة التعليم

القانون العام والمميز

القانون العام: يستخدم القانون العام في حل أي معادلة تربيعية مكتوبة على الصورة $ax^2+bx+c=0$.

القانون العام	حل المعادلة التربيعية $ax^2+bx+c=0$ حيث $a\neq 0$ يُعطى بالقانون: $x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$

مثال حل المعادلة $x^2-5x=14$ مستعملًا القانون العام.

أعد كتابة المعادلة على الصورة $x^2-5x-14=0$

$$x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$ القانون العام

$$=\frac{-(-5)\pm\sqrt{(-5)^2-4(1)(-14)}}{2(1)}$$ بالتعويض: $a=1$ و $b=-5$ و $c=-14$

$$=\frac{5\pm\sqrt{81}}{2}$$ بالتبسيط

$$=\frac{5\pm 9}{2}$$

$= 7$ أو -2

إذن، حلّا المعادلة هما: -2 و 7.

تمارين:

حل كل معادلة مما يأتي مستعملًا القانون العام.

1) $x^2+2x-35=0$ $\quad$ $\mathbf{5, -7}$

2) $x^2+10x+24=0$ $\quad$ $\mathbf{-4, -6}$

3) $x^2-11x+24=0$ $\quad$ $\mathbf{3, 8}$

4) $4x^2+19x-5=0$ $\quad$ $\mathbf{\frac{1}{4}, -5}$

5) $14x^2+9x+1=0$ $\quad$ $\mathbf{-\frac{1}{2}, -\frac{1}{7}}$

6) $2x^2-x-15=0$ $\quad$ $\mathbf{3, -\frac{5}{2}}$

7) $3x^2+5x=2$ $\quad$ $\mathbf{-2, \frac{1}{3}}$

8) $2y^2+y-15=0$ $\quad$ $\mathbf{\frac{5}{2}, -3}$

9) $3x^2-16x+16=0$ $\quad$ $\mathbf{4, \frac{4}{3}}$

10) $8x^2+6x-9=0$ $\quad$ $\mathbf{-\frac{3}{2}, \frac{3}{4}}$

11) $r^2-\frac{3r}{5}+\frac{2}{25}=0$ $\quad$ $\mathbf{\frac{2}{5}, \frac{1}{5}}$

12) $x^2-10x-50=0$ $\quad$ $\mathbf{5\pm 5\sqrt{3}}$

13) $x^2+6x-23=0$ $\quad$ $\mathbf{-3\pm 4\sqrt{2}}$

14) $4x^2-12x-63=0$ $\quad$ $\mathbf{\frac{3\pm 6\sqrt{2}}{2}}$

15) $x^2-6x+21=0$ $\quad$ $\mathbf{3\pm 2i\sqrt{3}}$

الاسم: ____________ التاريخ: ____________

3-2 تدريبات إعادة التعليم

(تتمة)

القانون العام والمميز

الجذور والمميز

المميز	العبارة b^2-4ac تحت الجذر التربيعي في القانون العام يسمى المميز.

المميز	عدد الجذور وأنواعها
$b^2-4ac>0$ ومربع كامل	جذران نسبيان
$b^2-4ac>0$ وليس مربعًا كاملًا	جذران غير نسبيين
$b^2-4ac=0$	جذر نسبي مكرر مرتين
$b^2-4ac<0$	جذران مركبان

مثال أوجد قيمة المميز لكل معادلة، ثم صف عدد الجذور ونوعها.

a) $2x^2+5x+3=0$

المميز b^2-4ac

$b^2-4ac=5^2-4(2)(3)$

$=25-24$

$=1$

المميز موجب ومربع كامل، لذا يوجد للمعادلة جذران نسبيان.

b) $3x^2-2x+5=0$

المميز b^2-4ac

$b^2-4ac=(-2)^2-4(3)(5)$

$=4-60$

$=-56$

المميز سالب، لذا يوجد للمعادلة جذران مركبان

تمارين:

حل الفروع $(a-c)$ لكل معادلة مما يأتي:

a) أوجد قيمة المميز.

b) صف عدد الجذور، وحدد أنواعها.

c) أوجد حلول المعادلة مستعملًا القانون العام.

1) $p^2+12p=-4$ **128; جذران غير نسبيين** $-6\pm4\sqrt{2}$

2) $9x^2-6x+1=0$ **0 ;جذر نسبي واحد** $\frac{1}{3}$

3) $2x^2-7x-4=0$ **81; جذران نسبيان؛** $4, -\frac{1}{2}$

4) $x^2+4x-4=0$ **32; جذران غير نسبيين** $-2\pm2\sqrt{2}$

5) $5x^2-36x+7=0$ **1156; جذران نسبيان** $\frac{1}{5}, 7$

6) $4x^2-4x+11=0$ **-160 ; جذران مركبان** $\frac{1\pm i\sqrt{10}}{2}$

7) $x^2-7x+6=0$ **25; جذران نسبيان** $1, 6$

8) $m^2-8m=-14$ **8; جذران غير نسبيين** $4\pm\sqrt{2}$

9) $25x^2-40x=-16$ **0; جذر نسبي واحد** $\frac{4}{5}$

10) $4x^2+20x+29=0$ **-64; جذران مركبان** $-\frac{5}{2}\pm i$

11) $6x^2+26x+8=0$ **484; جذران نسبيان** $-4, -\frac{1}{3}$

12) $4x^2-4x-11=0$ **192; جذران غير نسبيين** $\frac{1}{2}\pm\sqrt{3}$

الاسم: ____________ التاريخ: ____________

3-2 تدريبات المهارات

القانون العام والمميز

حل الفروع $(a-c)$ لكل معادلة مما يأتي:

a) أوجد قيمة المميز.

b) صف عدد الجذور، وحدّد أنواعها.

c) أوجد حلول المعادلة مستعملًا القانون العام.

1) $x^2-8x+16=0$ **0؛ جذر نسبي واحد؛ 4**

2) $x^2-11x-26=0$ **225؛ جذران نسبيان؛ $-2, 13$**

3) $3x^2-2x=0$ **4؛ جذران نسبيان؛ $0, \frac{2}{3}$**

4) $20x^2+7x-3=0$ **289؛ جذران نسبيان؛ $\frac{1}{4}, -\frac{3}{5}$**

5) $5x^2-6=0$ **120؛ جذران غير نسبيين؛ $\pm\frac{\sqrt{30}}{5}$**

6) $x^2-6=0$ **24؛ جذران غير نسبيين؛ $\pm\sqrt{6}$**

7) $x^2+8x+13=0$ **12؛ جذران غير نسبيين؛ $-4\pm\sqrt{3}$**

8) $5x^2-x-1=0$ **21؛ جذران غير نسبيين؛ $\frac{1\pm\sqrt{21}}{10}$**

9) $x^2-2x-17=0$ **72؛ جذران غير نسبيين؛ $1\pm3\sqrt{2}$**

10) $x^2+49=0$ **-196؛ جذران مركبان؛ $\pm7i$**

11) $x^2-x+1=0$ **-3؛ جذران مركبان؛ $\frac{1\pm i\sqrt{3}}{2}$**

12) $2x^2-3x=-2$ **-7؛ جذران مركبان؛ $\frac{3\pm i\sqrt{7}}{4}$**

حل كل معادلة مما يأتي مستعملًا القانون العام.

13) $x^2=64$ **±8**

14) $x^2-30=0$ **$\pm\sqrt{30}$**

15) $x^2-x=30$ **$-5, 6$**

16) $16x^2-24x-27=0$ **$\frac{9}{4}, -\frac{3}{4}$**

17) $x^2-4x-11=0$ **$2\pm\sqrt{15}$**

18) $x^2-8x-17=0$ **$4\pm\sqrt{33}$**

19) $x^2+25=0$ **$\pm5i$**

20) $3x^2+36=0$ **$\pm2i\sqrt{3}$**

21) $2x^2+10x+11=0$ **$\frac{-5\pm\sqrt{3}}{2}$**

22) $2x^2-7x+4=0$ **$\frac{7\pm\sqrt{17}}{4}$**

23) $8x^2+1=4x$ **$\frac{1\pm i}{4}$**

24) $2x^2+2x+3=0$ **$\frac{-1\pm i\sqrt{5}}{2}$**

25) **القفز بالمظلات:** تُقدر المسافة $d(t)$ بالأقدام التي يقطعها مظلي بعد (t) ثانية من العلاقة $d(t)=16t^2$، مع إهمال مقاومة الرياح. وإذا قفز مظلي من طائرة، وقطع مسافة 1100 قدم قبل فتح المظلة. فكم ثانية تكون قد مرت قبل أن يفتح المظلة.

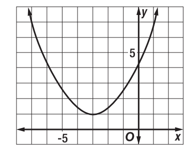
8.3 ثانية تقريبا

الاسم: ______________ التاريخ: ________

3-2 تدريبات حل المسألة

القانون العام والمميز

1) قطع مكافئ: يبيّن الشكل التالي التمثيل البياني للمعادلة التربيعية على الصورة: $y=ax^2+bx+c$



هل مميز المعادلة موجب أم سالب أم صفر؟

سالب.

2) المماس: يحاول عبد العزيز إيجاد قيمة b في المعادلة $y=x^2+bx+4$ على أن يكون المحور x مماسًا للقطع المكافئ الذي يمثل المعادلة. فوجد أن $b=4$. هل هي القيمة الوحيدة لـ b؟ فسّر إجابتك.

لا، $b=-4$ إجابة صحيحة أيضًا
لأن $b^2-16=0$ لها حلان
هما $b=4$ و $b=-4$

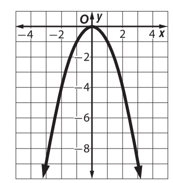
3) أمثلة: أعطِ مثالًا لدالة تربيعية $f(x)$ تحقق الخواص التالية:

a) مميز f يساوي صفرًا.

b) لا توجد حلول حقيقية للمعادلة $f(x)=10$

مثّل الدالة $f(x)$ بيانيًا.

إجابة ممكنة $f(x)=-x^2$



4) مماسات: منحنى $y=x^2$ قطع مكافئ يمر بالنقطة $(1,1)$. والمستقيم الذي معادلته $y=mx-m+1$ حيث m ثابت يمر بالنقطة $(1,1)$ أيضًا.

a) لإيجاد نقطة تقاطع المستقيم $y=mx-m+1$ والقطع المكافئ $y=x^2$، ضع $x^2=mx-m+1$ وحل المعادلة، وبإعادة ترتيب الحدود تصبح المعادلة $x^2-mx+m-1=0$.

ما المميز لهذه المعادلة؟

m^2-4m+4

b) ما قيمة m لكي تكون هناك نقطة تقاطع واحدة؟ فسّر إجابتك مستعينًا بالمستقيم والقطع المكافئ المذكورين في (a).

$m=2$ ؛ القطع المكافئ $y=x^2$ والمستقيم
$y=2x-1$ يتقاطعان في نقطة واحدة هي $(1,1)$
وعليه يكون المستقيم مماسًا للقطع المكافئ

الاسم: ______________ التاريخ: ________

3-2 التدريبات الإثرائية

مجموع الجذرين وحاصل ضربهما

تعرف جذور المعادلة التربيعية دون أن تعرف المعادلة نفسها أحيانًا، وباستعمال معرفتك السابقة في التحليل إلى العوامل لحل معادلة، يمكنك العمل عكسيًا لإيجاد المعادلة. والقاعدة التالية تمكنك من إيجاد مجموع جذري معادلة تربيعية وحاصل ضربها.

مجموع الجذرين وحاصل ضربهما	إذا كان s_1 و s_2 جذري المعادلة التربيعية $ax^2+bx+c=0$ و $a\neq 0$، فإن $s_1+s_2=-\frac{b}{a}$ و $s_1\cdot s_2=\frac{c}{a}$

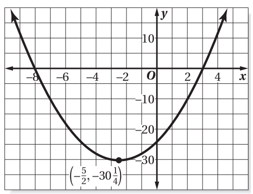
مثال اكتب المعادلة التربيعية التي جذراها 3 و-8

جذرا المعادلة هما 3 و-8

$3+-8=-5$ اجمع الجذرين

$3(-8)=-24$ اضرب الجذرين

إذن، المعادلة: $x^2+5x-24=0$



تمارين:

اكتب المعادلة التربيعية المعطاة جذورها في كل مما يأتي:

1) $-9, 6$ **$x^2+3x-54=0$**

2) $-1, 5$ **$x^2-4x-5=0$**

3) $6, 6$ **$x^2-12x+36=0$**

4) $4\pm\sqrt{3}$ **$x^2-8x+13=0$**

5) $-\frac{2}{5}, \frac{2}{7}$ **$35x^2+4x-4=0$**

6) $\frac{-2\pm 3\sqrt{5}}{7}$ **$49x^2+28x-41=0$**

أوجد k على أن يكون العدد المعطى جذرًا للمعادلة.

7) $2x^2+kx-21=0$ ؛ 7 **-11**

8) $x^2-13x+k=0$ ؛ -2 **-30**

الاسم: ________ التاريخ: ________

3-3 تدريبات إعادة التعليم

العمليات على كثيرات الحدود

ضرب وحيدات الحد وقسمتها: الأسس السالبة وسيلة للتعبير عن الضرب بمعكوس العدد.

الأسس سالبة	$a^{-n}=\frac{1}{a^n}$ و $\frac{1}{a^{-n}}=a^n$ لأي عدد حقيقي $a \neq 0$ ولأي عدد صحيح n.

عندما تبسط عبارة فإنك تعيد كتابتها على أن لا تتضمن قوة لقوة أو أقواس أو أسس سالبة. ويظهر كل أساس مرة واحدة، وتكون الكسور في أبسط صورة. والخصائص التالية مفيدة في تبسيط العبارات.

ضرب القوى	$a^m \cdot a^n = a^{m+n}$ لأي عدد حقيقي a وأعداد صحيحة m و n.
قسمة القوى	$\frac{a^m}{a^n}=a^{m-n}$ لأي عدد حقيقي $a \neq 0$ وأعداد صحيحة m و n.
خصائص القوى	لأي عددين حقيقين a, b وعددين صحيحين m, n: $(a^m)^n = a^{mn}$ $(ab)^m = a^m b^m$ $\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}, b \neq 0$ $\left(\frac{a}{b}\right)^{-n} = \left(\frac{b}{a}\right)^n = \frac{b^n}{a^n}, a \neq 0, b \neq 0$

مثال بسط. افترض أن المتغيرات لا تساوي صفرًا.

a) $\mathbf{(3m^4n^{-2})(-5mn)^2}$

$$(3m^4n^{-2})(-5mn)^2 = 3m^4n^{-2}25m^2n^2$$
$$= 75m^4m^2n^{-2}n^2$$
$$= 75m^{4+2}n^{-2+2}$$
$$= 75m^6$$

b) $\mathbf{\frac{(-m^4)^3}{(2m^2)^{-2}}}$

$$\frac{(-m^4)^3}{(2m^2)^{-2}} = -\frac{m^{12}}{\frac{1}{4m^4}}$$
$$= -m^{12} \cdot 4m^4$$
$$= -4m^{16}$$

تمارين:

بسط مفترضًا أن المتغيرات لا تساوي صفرًا.

1) $c^{12}\,c^{-4}\,c^6$ $\quad \mathbf{c^{14}}$

2) $\frac{b^8}{b^2}$ $\quad \mathbf{b^6}$

3) $(a^4)^5$ $\quad \mathbf{a^{20}}$

4) $\frac{x^{-2}y}{x^4y^{-1}}$ $\quad \mathbf{\frac{y^2}{x^6}}$

5) $\left(\frac{a^2b}{a^{-3}b^2}\right)^{-1}$ $\quad \mathbf{\frac{b}{a^5}}$

6) $\left(\frac{x^2y}{xy^3}\right)^2$ $\quad \mathbf{\frac{x^2}{y^4}}$

7) $\frac{1}{2}(-5a^2b^3)^2(abc)^2$ $\quad \mathbf{\frac{25}{2}a^6b^8c^2}$

8) $m^7 \cdot m^8$ $\quad \mathbf{m^{15}}$

9) $\frac{8m^3n^2}{4mn^3}$ $\quad \mathbf{\frac{2m^2}{n}}$

10) $\frac{2^3c^4t^2}{2^2c^4t^2}$ $\quad \mathbf{2}$

11) $4j(-j^{-2}k^2)(3j^3k^{-7})$ $\quad \mathbf{-\frac{12j}{k^5}}$

12) $\frac{2mn^2(3m^2n)^2}{12m^3n^4}$ $\quad \mathbf{\frac{3}{2}m^2}$

الاسم: ________ التاريخ: ________

3-3 تدريبات إعادة التعليم (تتمة)

العمليات على كثيرات الحدود

كثيرات الحدود	وحيدة حد أو مجموع وحيدات حد .
الحدود المتشابهة	الحدود التي لها المتغير نفسه مرفوع للقوة نفسها.

لجمع كثيرات حدود وطرحها أجرِ العلمية واجمع الحدود المتشابهة .

مثال 1 بسط $\mathbf{4xy^2 + 12xy - 7x^2y - (20xy + 5xy^2 - 8x^2y)}$.

$$4xy^2 + 12xy - 7x^2y - (20xy + 5xy^2 - 8x^2y)$$

توزيع إشارة الطرح . $\quad = 4xy^2 + 12xy - 7x^2y - 20xy - 5xy^2 + 8x^2y$

تجميع الحدود المتشابه . $\quad = (-7x^2y + 8x^2y) + (4xy^2 - 5xy^2) + (12xy - 20xy)$

دمج الحدود المتشابهة أو جمعها. $\quad = x^2y - xy^2 - 8xy$

تستعمل الصيغة المختصرة لخاصية التوزيع في ضرب ثنائيتي حد بطريقة التوزيع بالترتيب الآتية:

فك الأقواس	لضرب ثنائيتي الحد (كثيرتي حدود كل منها من حدين) اجمع نواتج الضرب التالية : الحدين الأولين ، والحدين الطرفيين ، والحدين الأوسطين، الحدين الأخيرين.

مثال 2 أوجد ناتج $\mathbf{(6x-5)(2x+1)}$.

$$(6x-5)(2x+1) = \underbrace{6x \cdot 2x}_{\text{الأولين}} + \underbrace{6x \cdot 1}_{\text{الطرفين}} + \underbrace{(-5) \cdot 2x}_{\text{الأوسطين}} + \underbrace{(-5) \cdot 1}_{\text{الأخيرين}}$$

بضرب ثنائيتي الحد . $\quad = 12x^2 + 6x - 10x - 5$

بجمع الحدود المتشابهة. $\quad = 12x^2 - 4x - 5$

تمارين:

بسط كلًا مما يأتي.

1) $(6x^2 - 3x + 2) - (4x^2 + x - 3)$ $\quad \mathbf{2x^2 - 4x + 5}$

2) $(7y^2 + 12xy - 5x^2) + (6xy - 4y^2 - 3x^2)$ $\quad \mathbf{3y^2 + 18xy - 8x^2}$

3) $(-4m^2 - 6m) - (6m + 4m^2)$ $\quad \mathbf{-8m^2 - 12m}$

4) $27x^2 - 5y^2 + 12y^2 - 14x^2$ $\quad \mathbf{13x^2 + 7y^2}$

5) $\frac{1}{4}x^2 - \frac{3}{8}xy + \frac{1}{2}y^2 - \frac{1}{2}xy + \frac{1}{4}y^2 - \frac{3}{8}x^2$ $\quad \mathbf{-\frac{1}{8}x^2 - \frac{7}{8}xy + \frac{3}{4}y^2}$

6) $24p^3 - 15p^2 + 3p - 15p^3 + 13p^2 - 7p$ $\quad \mathbf{9p^3 - 2p^2 - 4p}$

أوجد ناتج الضرب في كل مما يأتي.

7) $2x(3x^2 - 5)$ $\quad \mathbf{6x^3 - 10x}$

8) $7a(6 - 2a - a^2)$ $\quad \mathbf{42a - 14a^2 - 7a^3}$

9) $(x^2 - 2)(x^2 - 5)$ $\quad \mathbf{x^4 - 7x^2 + 10}$

10) $(x+1)(2x^2 - 3x + 1)$ $\quad \mathbf{2x^3 - x^2 - 2x + 1}$

11) $(2n^2 - 3)(n^2 + 5n - 1)$ $\quad \mathbf{2n^4 + 10n^3 - 5n^2 - 15n + 3}$

12) $(x-1)(x^2 - 3x + 4)$ $\quad \mathbf{x^3 - 4x^2 + 7x - 4}$

الاسم: ________ التاريخ: ________

3-3 تدريبات المهارات

العمليات على كثيرات الحدود

بسط مفترضًا أن المتغيرات لا تساوي صفرًا.

1) $b^4 \cdot b^3$
$\boldsymbol{b^7}$

2) $c^5 \cdot c^2 \cdot c^2$
$\boldsymbol{c^9}$

3) $a^{-4} \cdot a^{-3}$
$\boldsymbol{\frac{1}{a^7}}$

4) $x^5 \cdot x^{-4} \cdot x$
$\boldsymbol{x^2}$

5) $(2x)^2(4y)^2$
$\boldsymbol{64x^2y^2}$

6) $-2gh(g^3h^5)$
$\boldsymbol{-2g^4h^6}$

7) $10x^2y^3(10xy^8)$
$\boldsymbol{100x^3y^{11}}$

8) $\frac{24wz^7}{3w^3z^5}$
$\boldsymbol{\frac{8z^2}{w^2}}$

9) $\frac{-6a^4bc^8}{36a^7b^2c}$
$\boldsymbol{\frac{-c^7}{6a^3b}}$

10) $\frac{-10pt^4r}{-5p^3t^2r}$
$\boldsymbol{\frac{2t^2}{p^2}}$

11) $(g+5)+(2g+7)$
$\boldsymbol{3g+12}$

12) $(5d+5)-(d+1)$
$\boldsymbol{4d+4}$

13) $(x^2-3x-3)+(2x^2+7x-2)$
$\boldsymbol{3x^2+4x-5}$

14) $(-2f^2-3f-5)+(-2f^2-3f+8)$
$\boldsymbol{-4f^2-6f+3}$

15) $-5(2c^2-d^2)$
$\boldsymbol{-10c^2+5d^2}$

16) $x^2(2x+9)$
$\boldsymbol{2x^3+9x^2}$

17) $(a-5)^2$
$\boldsymbol{a^2-10a+25}$

18) $(2x-3)(3x-5)$
$\boldsymbol{6x^2-19x+15}$

19) $(r-2t)(r+2t)$
$\boldsymbol{r^2-4t^2}$

20) $(3y+4)(2y-3)$
$\boldsymbol{6y^2-y-12}$

21) $(3-2b)(3+2b)$
$\boldsymbol{9-4b^2}$

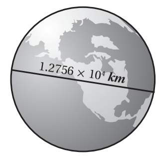
22) $(3w+1)^2$
$\boldsymbol{9w^2+6w+1}$

الاسم: ________ التاريخ: ________

3-3 تدريبات حل المسألة

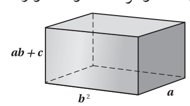
العمليات على كثيرات الحدود

1) **الأرض:** يقدر طول قطر الكرة الأرضية بـ 1.2756×10^4 كيلو متر تقريبًا، ويمكن إيجاد مساحة سطح الكرة الأرضية باستعمال القانون $SA = 4\pi r^2$.



فما مساحة سطح الأرض التقريبية ؟
$\boldsymbol{5.112 \times 10^8\ km^2}$

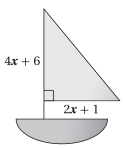
2) **الحجم :** يعطى حجم متوازي المستطيلات من خلال ضرب الطول في العرض في الارتفاع. فإذا كان لدى خالد صندوقًا على شكل متوازي مستطيلات طوله b^2 وحدة، وعرضه a وحدة وارتفاعه $ab + c$ وحدة.



فما حجم صندوق خالد؟ ضع إجابتك في أبسط صورة.
$\boldsymbol{a^2 b^3 + ab^2 c}$

3) **إنشاء:** بُني رصيف مستطيل الشكل حول بركة مربعة طول ضلعها s وحدة، فإذا كان طول الرصيف يزيد 5 وحدات عن مثلي طول ضلع البركة وعرضه يزيد 3 وحدات عن طول ضلع البركة، فما مساحة الرصيف بدلالة s؟
$\boldsymbol{2s^2 + 11s + 15}$

4) **قوارب:** طلب جمال من صانع أشرعة القوارب أن يصنع شراعًا لقاربه، فإذا كانت قاعدة شراعه مثلثة الشكل بطول $2x + 1$ وارتفاع $4x + 6$.



a) أوجد مساحة الشراع .
$\boldsymbol{4x^2 + 8x + 3}$

b) إذا أراد جمال أن يضع قماشًا مختلفًا في كل جهة من جهتي الشراع، فاكتب كثيرة حدود تمثل مجموع كمية القماش المستعمل في صنع الشراع.
$\boldsymbol{8x^2 + 16x + 6}$

c) إذا قرر جمال أن يضع شريطًا على طول وتر الشراع فاكتب عبارة تصف كمية الشريط الذي يحتاجه.
$\boldsymbol{\sqrt{20x^2 + 52x + 37}}$

الاسم: ______ التاريخ: ______

3-3 التدريبات الإثرائية

كثيرات حدود بمعاملات كسرية

قد يكون لحدود كثيرات الحدود معاملات على صورة كسور ما دام لا يوجد متغيرات في المقام. وتجرى الحسابات على كثيرات الحدود بوجود معاملات كسرية بالطريقة المستخدمة في حسابات الأعداد الكلية.

بسط. اكتب جميع المعاملات في صورة كسور.

1) $\left(\frac{3}{5}m - \frac{2}{7}p - \frac{1}{3}n\right) - \left(\frac{7}{3}p - \frac{5}{2}m - \frac{3}{4}n\right)$ $\quad \boldsymbol{\frac{31}{10}m + \frac{5}{12}n - \frac{55}{21}p}$

2) $\left(\frac{3}{2}x - \frac{4}{3}y - \frac{5}{4}z\right) + \left(-\frac{1}{4}x + y + \frac{2}{5}z\right) + \left(-\frac{7}{8}x - \frac{6}{7}y + \frac{1}{2}z\right)$ $\quad \boldsymbol{\frac{3}{8}x - \frac{25}{21}y - \frac{7}{20}z}$

3) $\left(\frac{1}{2}a^2 - \frac{1}{3}ab + \frac{1}{4}b^2\right) + \left(\frac{5}{6}a^2 + \frac{2}{3}ab - \frac{3}{4}b^2\right)$ $\quad \boldsymbol{\frac{4}{3}a^2 + \frac{1}{3}ab - \frac{1}{2}b^2}$

4) $\frac{1}{2}a^2 - \frac{1}{3}ab + \frac{1}{4}b^2 - \left(\frac{1}{3}a^2 - \frac{1}{2}ab + \frac{5}{6}b^2\right)$ $\quad \boldsymbol{\frac{1}{6}a^2 + \frac{1}{6}ab - \frac{7}{12}b^2}$

5) $\left(\frac{1}{2}a^2 - \frac{1}{3}ab + \frac{1}{4}b^2\right) \cdot \left(\frac{1}{2}a - \frac{2}{3}b\right)$ $\quad \boldsymbol{\frac{1}{4}a^3 - \frac{1}{2}a^2b + \frac{25}{72}ab^2 - \frac{1}{6}b^3}$

6) $\left(\frac{2}{3}a^2 - \frac{1}{5}a + \frac{2}{7}\right) \cdot \left(\frac{2}{3}a^3 + \frac{1}{5}a^2 - \frac{2}{7}a\right)$ $\quad \boldsymbol{\frac{4}{9}a^5 - \frac{1}{25}a^3 + \frac{4}{35}a^2 - \frac{4}{49}a}$

7) $\left(\frac{2}{3}x^2 - \frac{3}{4}x - 2\right) \cdot \left(\frac{4}{5}x - \frac{1}{6}x^2 - \frac{1}{2}\right)$ $\quad \boldsymbol{-\frac{1}{9}x^4 + \frac{79}{120}x^3 - \frac{3}{5}x^2 - \frac{49}{40}x + 1}$

8) $\left(\frac{1}{6} + \frac{1}{3}x + \frac{1}{6}x^4 - \frac{1}{2}x^2\right) \cdot \left(\frac{1}{6}x^3 - \frac{1}{3} - \frac{1}{3}x\right)$ $\quad \boldsymbol{\frac{1}{36}x^7 - \frac{5}{36}x^5 + \frac{7}{36}x^3 + \frac{1}{18}x^2 - \frac{1}{6}x - \frac{1}{18}}$

الاسم: ______ التاريخ: ______

3-4 تدريبات إعادة التعليم

قسمة كثيرات الحدود

القسمة الطويلة : لقسمة كثيرة حدود على وحيدة حد، استعمل المهارات التي تعلمتها في الدرس السابق، ولقسمة كثيرة حدود على كثيرة حدود، استعمل القسمة الطويلة. تذكر أن الحدود المتشابهة هي التي يمكن جمعها أو طرحها.

مثال 1 بسط $\boldsymbol{\frac{12p^3t^2r - 21p^2qtr^2 - 9p^3tr}{3p^2tr}}$

$$\frac{12p^3t^2r - 21p^2qtr^2 - 9p^3tr}{3p^2tr} = \frac{12p^3t^2r}{3p^2tr} - \frac{21p^2qtr^2}{3p^2tr} - \frac{9p^3tr}{3p^2tr}$$

$$= \frac{12}{3}p^{(3-2)}t^{(2-1)}r^{(1-1)} - \frac{21}{3}p^{(2-2)}qt^{(1-1)}r^{(2-1)} - \frac{9}{3}p^{(3-2)}t^{(1-1)}r^{(1-1)}$$

$$= 4pt - 7qr - 3p$$

مثال 2 استعمل القسمة الطويلة في إيجاد $\boldsymbol{(x^3 - 8x^2 + 4x - 9) \div (x - 4)}$

$$\begin{array}{r}
x^2 - 4x - 12 \\
x - 4\,\overline{)\,x^3 - 8x^2 + 4x - 9} \\
\underline{(-)\;x^3 - 4x^2} \\
-4x^2 + 4x \\
\underline{(-)\,-4x^2 + 16x} \\
-12x - 9 \\
\underline{(-)\,-12x + 48} \\
-57
\end{array}$$

ناتج القسمة يساوي $x^2 - 4x - 12$، والباقي -57.

إذن $\frac{x^3-8x^2+4x-9}{x-4} = x^2 - 4x - 12 - \frac{57}{x-4}$

تمارين:

بسط:

1) $\frac{18a^3 + 30a^2}{3a}$ $\quad \boldsymbol{6a^2 + 10a}$

2) $\frac{24mn^6 + 40m^2n^3}{4m^2n^3}$ $\quad \boldsymbol{\frac{6n^3}{m} - 10}$

3) $\frac{60a^2b^3 - 48b^4 + 84a^5b^2}{12ab^2}$ $\quad \boldsymbol{5ab - \frac{4b^2}{a} + 7a^4}$

4) $(2x^2 - 5x - 3) \div (x - 3)$ $\quad \boldsymbol{2x + 1}$

5) $(m^2 - 3m - 7) \div (m + 2)$ $\quad \boldsymbol{m - 5 + \frac{3}{m+2}}$

6) $(p^3 - 6) \div (p - 1)$ $\quad \boldsymbol{p^2 + p + 1 - \frac{5}{p-1}}$

7) $(t^3 - 6t^2 + 1) \div (t + 2)$ $\quad \boldsymbol{t^2 - 8t + 16 - \frac{31}{t+2}}$

8) $(x^5 - 1) \div (x - 1)$ $\quad \boldsymbol{x^4 + x^3 + x^2 + x + 1}$

9) $(2x^3 - 5x^2 + 4x - 4) \div (x - 2)$ $\quad \boldsymbol{2x^2 - x + 2}$

الاسم: ______ التاريخ: ______

3-4 تدريبات إعادة التعليم

قسمة كثيرات الحدود

(تتمة)

القسمة التركيبية

القسمة التركيبية	هي أسلوب لقسمة كثيرة حدود على ثنائية حد باستعمال معاملات المقسوم وقيمة r في المقسوم عليه $x - r$

استعمل القسمة التركيبية لإيجاد ناتج $(2x^3 - 5x^2 + 5x - 2) \div (x - 1)$.

الخطوة 1:	اكتب حدود المقسوم بحيث ترتب درجات الحدود تنازليًا، ثم اكتب المعاملات.	$2x^3 - 5x^2 + 5x - 2$ $2 \quad -5 \quad 5 \quad -2$
الخطوة 2:	اكتب الثابت r في المقسوم عليه $x - r$ إلى اليسار وفي هذا السؤال $r = 1$. وانزل المعامل الأول في المقسوم وهو 2 أسفل الخط الأفقي.	$\underline{1}\rvert \quad 2 \quad -5 \quad 5 \quad -2$ $\overline{\quad 2 \quad}$
الخطوة 3:	اضرب المعامل الأول في r: $2 = 2 \cdot 1$، واكتب الناتج أسفل المعامل الذي يليه، ثم اجمع ناتج الضرب مع معامل الحد الذي فوقه: $-3 = 2 + -5$.	$\underline{1}\rvert \quad 2 \quad -5 \quad 5 \quad -2$ 2 $\overline{2 \quad -3}$
الخطوة 4:	اضرب المجموع -3 في r: $-3 = 1 \cdot -3$، واكتب الناتج تحت الحد التالي ثم اجمع: $5 + (-3) = 2$.	$\underline{1}\rvert \quad 2 \quad -5 \quad 5 \quad -2$ $2 \quad -3$ $\overline{2 \quad -3 \quad 2}$
الخطوة 5:	اضرب المجموع 2 في r: $2 = 1 \cdot 2$، واكتب ناتج الضرب تحت الحد التالي واجمع: $0 = 2 + -2$ الباقي 0.	$\underline{1}\rvert \quad 2 \quad -5 \quad 5 \quad -2$ $2 \quad -3 \quad 2$ $\overline{2 \quad -3 \quad 2 \quad 0}$

إذن، $(2x^3 - 5x^2 + 5x - 2) \div (x - 1) = 2x^2 - 3x + 2$.

تمارين:

بسط:

1) $(3x^3 - 7x^2 + 9x - 14) \div (x - 2)$
$\mathbf{3x^2 - x + 7}$

2) $(5x^3 + 7x^2 - x - 3) \div (x + 1)$
$\mathbf{5x^2 + 2x - 3}$

3) $(2x^3 + 3x^2 - 10x - 3) \div (x + 3)$
$\mathbf{2x^2 - 3x - 1}$

4) $(x^3 - 8x^2 + 19x - 9) \div (x - 4)$
$\mathbf{x^2 - 4x + 3 + \frac{3}{x - 4}}$

5) $(2x^3 + 10x^2 + 9x + 38) \div (x + 5)$
$\mathbf{2x^2 + 9 - \frac{7}{x + 5}}$

6) $(3x^3 - 8x^2 + 16x - 1) \div (x - 1)$
$\mathbf{3x^2 - 5x + 11 + \frac{10}{x - 1}}$

7) $(x^3 - 9x^2 + 17x - 1) \div (x - 2)$
$\mathbf{x^2 - 7x + 3 + \frac{5}{x - 2}}$

8) $(4x^3 - 25x^2 + 4x + 20) \div (x - 6)$
$\mathbf{4x^2 - x - 2 + \frac{8}{x - 6}}$

9) $(6x^3 + 28x^2 - 7x + 9) \div (x + 5)$
$\mathbf{6x^2 - 2x + 3 - \frac{6}{x + 5}}$

10) $(x^4 - 4x^3 + x^2 + 7x - 2) \div (x - 2)$
$\mathbf{x^3 - 2x^2 - 3x + 1}$

11) $(12x^4 + 20x^3 - 24x^2 + 20x + 35) \div (3x + 5)$
$\mathbf{4x^3 - 8x + 20 + \frac{-65}{3x + 5}}$

الاسم: ______ التاريخ: ______

3-4 تدريبات المهارات

قسمة كثيرات الحدود

بسط:

1) $\frac{10c + 6}{2}$
$\mathbf{5c + 3}$

2) $\frac{12x + 20}{4}$
$\mathbf{3x + 5}$

3) $\frac{15y^3 + 6y^2 + 3y}{3y}$
$\mathbf{5y^2 + 2y + 1}$

4) $\frac{12x^2 - 4x - 8}{4x}$
$\mathbf{3x - 1 - \frac{2}{x}}$

5) $(15q^6 + 5q^2)(5q^4)^{-1}$
$\mathbf{3q^2 + \frac{1}{q^2}}$

6) $(4f^5 - 6f^4 + 12f^3 - 8f^2)(4f^2)^{-1}$
$\mathbf{f^3 - \frac{3f^2}{2} + 3f - 2}$

7) $(6j^2k - 9jk^2) \div 3jk$
$\mathbf{2j - 3k}$

8) $(4a^2h^2 - 8a^3h + 3a^4) \div (2a^2)$
$\mathbf{2h^2 - 4ah + \frac{3a^2}{2}}$

9) $(n^2 + 7n + 10) \div (n + 5)$
$\mathbf{n + 2}$

10) $(d^2 + 4d + 3) \div (d + 1)$
$\mathbf{d + 3}$

11) $(2t^2 + 13t + 15) \div (t + 5)$
$\mathbf{2t + 3}$

12) $(6y^2 + y - 2)(2y - 1)^{-1}$
$\mathbf{3y + 2}$

13) $(4g^2 - 9) \div (2g + 3)$
$\mathbf{2g - 3}$

14) $(2x^2 - 5x - 4) \div (x - 3)$
$\mathbf{2x + 1 - \frac{1}{x - 3}}$

15) $\frac{u^2 + 5u - 12}{u - 3}$
$\mathbf{u + 8 + \frac{12}{u - 3}}$

16) $\frac{2x^2 - 5x - 4}{x - 3}$
$\mathbf{2x + 1 - \frac{1}{x - 3}}$

17) $(3v^2 - 7v - 10)(v - 4)^{-1}$
$\mathbf{3v + 5 + \frac{10}{v - 4}}$

18) $(3t^4 + 4t^3 - 32t^2 - 5t - 20)(t + 4)^{-1}$
$\mathbf{3t^3 - 8t^2 - 5}$

19) $\frac{y^3 - y^2 - 6}{y + 2}$
$\mathbf{y^2 - 3y + 6 - \frac{18}{y + 2}}$

20) $\frac{2x^3 - x^2 - 19x + 15}{x - 3}$
$\mathbf{2x^2 + 5x - 4 + \frac{3}{x - 3}}$

21) $(4p^3 - 3p^2 + 2p) \div (p - 1)$
$\mathbf{4p^2 + p + 3 + \frac{3}{p - 1}}$

22) $(3c^4 + 6c^3 - 2c + 4)(c + 2)^{-1}$
$\mathbf{3c^3 - 2 + \frac{8}{c + 2}}$

23) **هندسة:** تعطى مساحة مستطيل بالعبارة $x^3 + 8x^2 + 13x - 12$ وحدة مربعة. إذا كان عرض المستطيل يساوي $x + 4$ وحدة مربعة. فأوجد طوله؟

$\mathbf{x^2 + 4x - 3}$ **وحدات**

الاسم: ________ التاريخ: ________

3-4 تدريبات حل المسألة

قسمة كثيرات الحدود

1) **البواقي:** قسم نعمان $x^4+3x^3-9x^2-23x+12$ على $p(x)$ بالأمس، ولكنه في هذا اليوم لم يكن على ما يرام، فلم يتمكن من قراءة $p(x)$ ، والجزء الذي تمكن من قراءته هو الباقي $x+4$ وناتج القسمة x^2+3x-1 . ولكن المعلم أراد أن يجد $p(-3)$، فما هي $p(-3)$؟

1

2) **القسمة الطويلة:** استعملت هبة القسمة الطويلة لقسمة $x^4+x^3+x^2+x+1$ على $x+2$. وبدأت عملها كالآتي:

$$
\begin{array}{r l}
 & x^3 - x^2 + 3x - 5 \\
x+2 \big) & x^4 + x^3 + x^2 + x + 1 \\
(-) & x^4 + 2x^3 \\
\hline
 & -x^3 + A \\
(-) & -x^3 - 2x^2 \\
\hline
 & 3x^2 + x \\
(-) & 3x^2 + B \\
\hline
 & -5x + 1 \\
(-) & -5x - 10 \\
\hline
 & C
\end{array}
$$

فما قيم A, B, C؟

$\boldsymbol{A = x^2;\ B = 6x;\ C = 11}$

3) **معدلات:** يريد ليث أن يجد معدل $n+1$ من الأعداد، فإذا كان n^3 و 2 عددين من هذه الأعداد، وكل عدد من الأعداد الباقية وعددها $n-1$ يساوي 1، فما معدل هذه الأعداد؟

$$\boldsymbol{n^2 - n + 2 - \frac{1}{n+1}}$$

4) **الحجم:** إذا كان حجم عمود برج إحدى القلاع يعطى بالعبارة $\pi(x^3+32x^2-304x+640)$. وكان ارتفاع ذلك العمود يساوي $x+40$ قدم، فأوجد مساحة قاعدة العمود بدلالة x و π.

$\boldsymbol{\pi(x^2 - 8x + 16)}$

5) **نظرية الأعداد:** يعمل طلاب فصل المعلم صلاح بكثيرات الحدود، والقوى، وقد كتب على السبورة أن العدد 1111 يكتب باستعمال القوى بالشكل B^3+B^2+B+1. ثم أعطى طلابه الأسئلة التالية.

a) إذا علمت أن العدد 11 يكتب بالشكل $B+1$. فما قيمة 1111 مقسومًا على 11 بدلالة B؟

$\boldsymbol{B^2 + 1}$

b) قيمة 111 بدلالة B تساوي B^2+B+1. ما قيمة 1111 مقسومًا على 111 بدلالة B؟

$$\boldsymbol{B + \frac{1}{B^2 + B + 1}}$$

الاسم: ________ التاريخ: ________

3-4 التدريبات الإثرائية

خطوط التقارب المائلة

يسمى المستقيم $y = ax + b$ حيث $a \neq 0$ ، خط تقارب مائل للدالة $y = f(x)$ إذا اقترب منحنى f أكثر فأكثر من هذا المستقيم مع اقتراب $x \to \infty$ أو $x \to -\infty$. حيث ∞ يرمز الى ما لا نهاية. للدالة $f(x) = 3x + 4 + \frac{2}{x}$ خط تقارب مائل هو المستقيم $y = 3x + 4$ ؛ لأن $\frac{2}{x} \to 0$ مع إقتراب $x \to \infty$ أو $x \to -\infty$. وبعبارة أخرى مع زيادة $|x|$ بلا حدود فإن قيمة $\frac{2}{x}$ تصغر لتقترب من الصفر.

مثال أوجد خط التقارب المائل للدالة $f(x) = \dfrac{x^2 + 8x + 15}{x + 2}$.

$$
\begin{array}{r|rrr}
-2 & 1 & 8 & 15 \\
 & & -2 & -12 \\
\hline
 & 1 & 6 & 3
\end{array}
$$

باستعمال القسمة التركيبية

$$y = \frac{x^2 - 8x + 15}{x + 2} = x + 6 + \frac{3}{x + 2}$$

ومع زيادة $|x|$ فإن قيمة $\frac{3}{x+2}$ تصغر، وبعبارة أخرى وبما أن

$\frac{3}{x+2} \to 0$ عندما $x \to \infty$ أو $x \to -\infty$، فإن $y = x + 6$ محاذي مائل .

تمارين:

استعمل القسمة التركيبية لإيجاد خط تقارب مائل لكل دالة فيما يلي.

1) $y = \dfrac{8x^2 - 4x + 11}{x + 5}$ $\quad \boldsymbol{y = 8x - 44}$

2) $y = \dfrac{x^2 + 3x - 15}{x - 2}$ $\quad \boldsymbol{y = x + 5}$

3) $y = \dfrac{x^2 - 2x - 18}{x - 3}$ $\quad \boldsymbol{y = x + 1}$

4) $y = \dfrac{ax^2 + bx + c}{x - d}$ $\quad \boldsymbol{y = ax + b + ad}$

5) $y = \dfrac{ax^2 + bx + c}{x + d}$ $\quad \boldsymbol{y = ax + b - ad}$

3-5 تدريبات إعادة التعليم

دوال كثيرات الحدود

كثيرات الحدود في متغير واحد	كثيرة الحدود في متغير واحد من الدرجة n تكتب على الصورة $a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_2x^2 + a_1x + a_0$، حيث معاملات الحدود $a_n, a_{n-1}, a_{n-2}, a_{n-3}, \ldots, a_0$ أعداد حقيقية، a_n ليس صفرًا، n عدد صحيح غير سالب.

درجة كثيرة الحدود في متغير واحد هي أكبر أس للمتغير فيها. **والمعامل الرئيس** هو معامل الحد الذي له أكبر أس.

دالة كثيرة الحدود	يمكن وصف دالة كثيرة الحدود من الدرجة n بمعادلة على الصورة $P(x) = a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_2x^2 + a_1x + a_0$، حيث المعاملات $a_n, a_{n-1}, a_{n-2}, a_{n-3}, \ldots, a_0$ أعداد حقيقية و a_n لا يساوي صفرًا، و n عدد صحيح غير سالب.

مثال 1 ما درجة كثيرة الحدود $3x^2 - 2x^4 - 7 + x^3$ ، وما المعامل الرئيس فيها؟

أعد كتابة العبارة على أن تكون قوى x في ترتيب تنازلي.

$-2x^4 + x^3 + 3x^2 - 7$

وهذه كثيرة حدود بمتغير واحد. درجتها 4 والمعامل الرئيس فيها -2.

مثال 2 أوجد $f(-5)$ إذا كان: $f(x) = x^3 + 2x^2 - 10x + 20$

$f(x) = x^3 + 2x^2 - 10x + 20$	الدالة الأصلية
$f(-5) = (-5)^3 + 2(-5)^2 - 10(-5) + 20$	بتعويض -5 بدلًا من x.
$= -125 + 50 + 50 + 20$	إيجاد القيمة.
$= -5$	بالتبسيط.

مثال 3 أوجد قيمة $g(a^2 - 1)$ إذا كان $g(x) = x^2 + 3x - 4$:

$g(x) = x^2 + 3x - 4$	الدالة الأصلية
$g(a^2 - 1) = (a^2 - 1)^2 + 3(a^2 - 1) - 4$	بتعويض $a^2 - 1$ بدلًا من x
$= a^4 - 2a^2 + 1 + 3a^2 - 3 - 4$	إيجاد القيمة.
$= a^4 + a^2 - 6$	بالتبسيط.

تمارين:

اذكر الدرجة والمعامل الرئيس لكل كثيرة حدود بمتغير واحد، وإذا لم تكن كثيرة حدود بمتغير واحد، فاذكر السبب.

1) $3x^4 + 6x^3 - x^2 + 12$ **4 ; 3**

2) $100 - 5x^3 + 10x^7$ **7 ; 10**

3) $4x^6+6x^4+8x^8-10x^2+20$ **8 ; 8**

4) $4x^2 - 3xy + 16y^2$ **ليست كثيرة حدود بمتغير واحد حيث يوجد متغيران**

5) $8x^3 - 9x^5 + 4x^2 - 36$ **5 ; −9**

6) $\frac{x^2}{18} - \frac{x^6}{25} + \frac{x^3}{36} - \frac{1}{72}$ **$6 ; -\frac{1}{25}$**

أوجد $f(2)$ و $f(-5)$ لكل دالة فيما يلي:

7) $f(x) = x^2 - 9$ **−5 ; 16**

8) $f(x) = 4x^3 - 3x^2 + 2x - 1$ **23 ; −586**

9) $f(x) = 9x^3 - 4x^2 + 5x + 7$ **73; −1243**

3-5 تدريبات إعادة التعليم

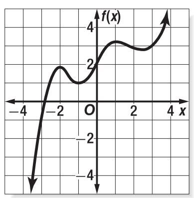
(تتمة)

دوال كثيرات الحدود

تمثيل دوال كثيرات الحدود بيانيًا

سلوك طرفي التمثيل البياني لدالة كثيرة الحدود	إذا كانت درجة الدالة زوجية والمعامل الرئيس موجبًا، فإن: $f(x) \to +\infty$ عندما $x \to -\infty$ ، $f(x) \to +\infty$ عندما $x \to +\infty$ إذا كانت درجة الدالة زوجية والمعامل الرئيس سالبًا، فإن: $f(x) \to -\infty$ عندما $x \to -\infty$ ، $f(x) \to -\infty$ عندما $x \to +\infty$ إذا كانت درجة الدالة فردية والمعامل الرئيس موجبًا، فإن: $f(x) \to -\infty$ عندما $x \to -\infty$ ، $f(x) \to +\infty$ عندما $x \to +\infty$ إذا كانت درجة الدالة فردية والمعامل الرئيس سالبًا، فإن : $f(x) \to +\infty$ عندما $x \to -\infty$ ، $f(x) \to -\infty$ عندما $x \to +\infty$
الأصفار الحقيقية لدوال كثيرات الحدود	أكبر عدد من الأصفار لدالة كثيرة حدود يساوي درجة تلك الدالة، ويمثل صفر الدالة الحقيقي نقطة التقاء التمثيل البياني للدالة مع المحور x. يحسب عدد الأصفار على التمثيل البياني للدالة بعدد مرات تقاطع الرسم أو تماسه مع المحور x.

مثال حدد فيما إذا كان التمثيل البياني يمثل دالة درجتها زوجية أو فردية واذكر عدد الأصفار الحقيقية.



عندما $x \to -\infty$، فإن $f(x) \to -\infty$ وعندما $x \to +\infty$، فإن $f(x) \to +\infty$، لذا فهي كثيرة حدود درجتها فردية. يقطع التمثيل البياني للدالة محور x في نقطة واحدة، لذا فللدالة صفر حقيقي واحد.

تمارين:

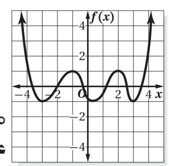
لكل تمثيل بياني فيما يأتي، أجب عن:

a) صف سلوك طرفي التمثيل البياني.

b) حدد فيما إذا كان يمثل دالة درجتها فردية أو زوجية .

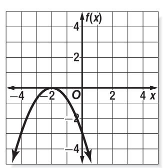
c) اذكر عدد الأصفار الحقيقية .

1)



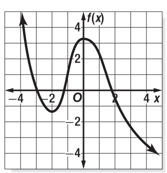
$f(x) \to +\infty$ عندما $x \to \pm\infty$
زوجية، 6

2)



$f(x) \to -\infty$ عندما $x \to \pm\infty$
زوجية، صفر مكرر

3)



$f(x) \to -\infty$ عندما $x \to +\infty$
$f(x) \to +\infty$ عندما $x \to -\infty$
فردية، 3

3-5 تدريبات المهارات

دوال كثيرات الحدود

اذكر الدرجة والمعامل الرئيس لكل دالة كثيرة حدود في متغير واحد. وإن لم تكن كثيرة حدود بمتغير واحد، فاذكر السبب.

1) $a + 8$ **1; 1**

2) $(2x - 1)(4x^2 + 3)$ **3; 8**

3) $-5x^5 + 3x^3 - 8$ **5; −5**

4) $18 - 3y + 5y^2 - y^5 + 7y^6$ **6; 7**

5) $u^3 + 4u^2t^2 + t^4$
لا؛ لأنها تحتوي على متغيرين t , u

6) $2r - r^2 + \frac{1}{r^2}$
ليست كثيرة حدود، لأن الحد $\frac{1}{r^2}$ لا يمكن كتابته على الصورة r^n ، حيث n عدد صحيح غير سالب

أوجد $p(-1)$ و $p(2)$ لكل دالة مما يأتي:

7) $p(x) = 4 - 3x$ **7; −2**

8) $p(x) = 3x + x^2$ **− 2; 10**

9) $p(x) = 2x^2 - 4x + 1$ **7; 1**

10) $p(x) = -2x^3 + 5x + 3$ **0; −3**

11) $p(x) = x^4 + 8x^2 - 10$ **−1; 38**

12) $p(x) = \frac{1}{3}x^2 - \frac{2}{3}x + 2$ **3; 2**

إذا كان $p(x) = 4x^2 - 3$ و $r(x) = 1 + 3x$ ، فأوجد قيمة كل مما يأتي:

13) $p(a)$ **$4a^2 - 3$**

14) $r(2a)$ **$1 + 6a$**

15) $3r(a)$ **$3 + 9a$**

16) $-4p(a)$ **$-16a^2 + 12$**

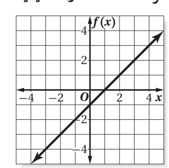
17) $p(a^2)$ **$4a^4 - 3$**

18) $r(x + 2)$ **$7 + 3x$**

لكل تمثيل بياني فيما يأتي، أجب عن :

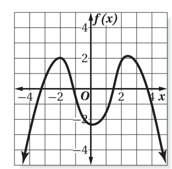
a) صف سلوك طرفي التمثيل البياني .
b) حدد فيما إذا كان يمثل دالة درجتها زوجية أم فردية .
c) اذكر عدد الأصفار الحقيقية .

19)



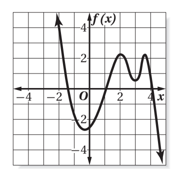
$f(x) \to +\infty$ عندما $x \to +\infty$
$f(x) \to -\infty$ عندما $x \to -\infty$
فردية؛ 1

20)



$f(x) \to -\infty$ عندما $x \to +\infty$
$f(x) \to -\infty$ عندما $x \to -\infty$
زوجية؛ 4

21)



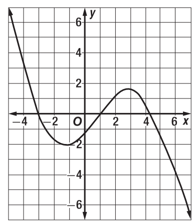
$f(x) \to -\infty$ عندما $x \to +\infty$
$f(x) \to +\infty$ عندما $x \to -\infty$
فردية؛ 3

3-5 تدريبات حل المسألة

دوال كثيرات الحدود

1) **التصنيع:** تم تشكيل قطعة معدنية على شكل منحنى الدالة $f(x) = x^4 - 9x^2$. فما درجة كثيرة الحدود هذه؟
4

2) **تمثيل بياني:** رسمت فاطمة التمثيل البياني التالي للدالة $f(x)$.

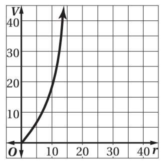


اعتمد على الرسم، وصف سلوك طرفي التمثيل البياني، وحدّد ما إذا كانت درجة دالة كثيرة الحدود فردية أم زوجية، ثم اكتب عدد الأصفار الحقيقية للدالة.

$f(x) \to -\infty$ عندما $x \to +\infty$
$f(x) \to +\infty$ عندما $x \to -\infty$
الدالة فردية الدرجة، 3 أصفار حقيقية.

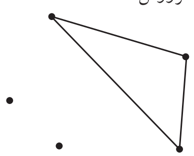
3) **الأعداد الخماسية:** يعطى العدد الخماسي النوني بالعبارة $\frac{n(3n-1)}{2}$. ما درجة كثيرة الحدود هذه؟ وما العدد الخماسي السابع.
2; 70

4) كثيرة الحدود الممثلة في الشكل أدناه تبيّن العلاقة بين حجم حفرة (v) حُفرت بمقدح، ونصف قطر الحفرة (r)، صف سلوك طرفي التمثيل البياني، وحدد ما إذا كانت درجة كثيرة الحدود فردية أم زوجية.



$V \to +\infty$ عندما $r \to +\infty$
الدرجة فردية.

5) **مثلثات:** رسم سامر n من النقط على أن لا تقع أي 3 منها على خط مستقيم.
وتمثل الدالة $f(n) = \frac{1}{6}(n^3 - 3n^2 + 2n)$
عدد المثلثات التي يمكن تكوينها باستخدام النقط كرؤوس لها:



a) ما درجة f؟
3

b) إذا رسم سامر 15 نقطة، فكم مثلثًا يمكن أن يكوّن؟
455

3-5 التدريبات الإثرائية

التقريب من خلال دوال كثيرات الحدود

تنتج العديد من التجارب أزواجًا من القيم $(x, f(x))$ التي يمكن أن ترتبط بقانون، فإذا شكلت هذه الأزواج دالة فإنك تستطيع ربط كثيرة حدود بهذه الأزواج بطريقة واحدة فقط .

افرض الأزواج المبينة بالجدول التالي:

x	1	2	4	7
$f(x)$	6	11	39	−54

افرض أن كثيرة الحدود من الدرجة الثالثة. عوض قيم الأزواج في العبارة الآتية:.

$$f(x) = A + B(x - x_0) + C(x - x_0)(x - x_1) + D(x - x_0)(x - x_1)(x - x_2)$$

ستحصل على نظام من المعادلات الآتية. ويمكنك حلها، واستعمال قيم A, B, C, D لإيجاد كثيرة الحدود المطلوبة.

$6 = A$

$11 = A + B(2 - 1) = A + B$

$39 = A + B(4 - 1) + C(4 - 1)(4 - 2) = A + 3B + 6C$

$-54 = A + B(7 - 1) + C(7 - 1)(7 - 2) + D(7 - 1)(7 - 2)(7 - 4) = A + 6B + 30C + 90D$

حل كلًا مما يأتي:

1) حل نظام المعادلات السابق لقيم A, B, C, D.

$\mathbf{A = 6, B = 5, C = 3, D = -2}$

2) أوجد كثيرة الحدود التي تمثل أزواج النقاط الأربعة أعلاه. اكتب إجابتك على الصورة
$y = a + bx + cx^2 + dx^3$

$\mathbf{y = 23 - 32x + 17x^2 - 2x^3}$

3) أوجد كثيرة الحدود التي تحقق الأزواج المرتبة التالية:

x	8	12	15	20
$f(x)$	−207	169	976	3801

$\mathbf{y = x^3 - 10x^2 - 10x + 1}$

4) قاس عالم حجم غاز ثاني أكسيد الكربون $f(x)$ الذي يمكن أن يمتصه الفحم تحت ضغط مقداره x.
أوجد قيم A, B, C, D.

x	120	340	534	698
$f(x)$	3.1	5.5	7.1	8.3

$\mathbf{A = 3.1, B = 0.01091, C = -0.00000643, D = 0.0000000066}$

3-6 تدريبات إعادة التعليم

حل معادلات كثيرات الحدود

تحليل كثيرات الحدود

طرق تحليل كثيرات الحدود	لأي عدد من الحدود: ابحث عن العامل المشترك الأكبر.
	لأي حدين: ابحث عن: الفرق بين مربعين $a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)$ مجموع مكعبين $a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 - ab + b^2)$ الفرق بين مكعبين $a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2)$
	لثلاثة حدود: ابحث عن: كثيرة حدود ثلاثية تشكل مربعًا كاملًا. $a^2 + 2ab + b^2 = (a + b)^2$ $a^2 - 2ab + b^2 = (a - b)^2$ صورة عامة لكثيرة حدود ثلاثية. $acx^2 + (ad + bc)x + bd = (ax + b)(cx + d)$
	لأربعة حدود أو أكثر ابحث عن تجميع مناسب للحدود $ax + bx + ay + by = x(a + b) + y(a + b)$ $= (a + b)(x + y)$

مثال حلل إلى العوامل $\mathbf{24x^2 - 42x - 45}$.

أولًا أخرج العامل المشترك لتحصل على $24x^2 - 42x - 45 = 3(8x^2 - 14x - 15)$. لتجد عوامل الحدود التي تتضمن x عليك أن تبحث عن عددين حاصل ضربها $8(-15) = -120$، ومجموعهما -14. فالمعاملان هما -20 و 6. أعد كتابة العبارة باستعمال $-20x$ و $6x$، ثم حل بتجميع الحدود.

$8x^2 - 14x - 15 = 8x^2 - 20x + 6x - 15$ بالتجميع لإخراج العامل المشترك الأكبر.

$= 4x(2x - 5) + 3(2x - 5)$ بإخراج العامل المشترك الأكبر لكل تجميع.

$= (4x + 3)(2x - 5)$ خاصية التوزيع

إذن، $24x^2 - 42x - 45 = 3(4x + 3)(2x - 5)$.

تمارين:

حلل كل كثيرة حدود مما يأتي تحليلًا تامًا، وإذا لم يكن ذلك ممكنًا، فاكتب كثيرة حدود أولية.

1) $14x^2y^2 + 42xy^3$
$\mathbf{14xy^2(x + 3y)}$

2) $6mn + 18m - n - 3$
$\mathbf{(6m - 1)(n + 3)}$

3) $2x^2 + 18x + 16$
$\mathbf{2(x + 8)(x + 1)}$

4) $x^4 - 1$
$\mathbf{(x^2 + 1)(x + 1)(x - 1)}$

5) $35x^3y^4 - 60x^4y$
$\mathbf{5x^3y(7y^3 - 12x)}$

6) $2r^3 + 250$
$\mathbf{2(r + 5)(r^2 - 5r + 25)}$

7) $100m^8 - 9$
$\mathbf{(10m^4 - 3)(10m^4 + 3)}$

8) $x^2 + x + 1$
أولية

9) $c^4 + c^3 - c^2 - c$
$\mathbf{c(c + 1)^2(c - 1)}$

3-6 تدريبات إعادة التعليم (تتمة)

حل معادلات كثيرات الحدود

حل معادلات كثيرات الحدود: إذا أمكن كتابة كثيرة الحدود في صورة تربيعية، فطبق عليها ما تعلمته في حل المعادلات التربيعية لحل معادلة كثيرة الحدود المرتبطة.

مثال 1 حل المعادلة $x^2 - x - 20 = 0$.

$x^2-x-20=0$			المعادلة الأصلية
$(x-5)(x+4)=0$			بالتحليل إلى العوامل
$x-5=0$	أو	$x+4=0$	خاصية الضرب الصفري
$x=5$	أو	$x=-4$	بالتبسيط

الحلان هما $-4, 5$.

مثال 2 حل المعادلة $x^4 - 40x^2 + 144 = 0$.

$x^4 - 40x^2 + 144 = 0$ المعادلة الأصلية

$(x^2)^2 - 40(x^2) + 144 = 0$ بكتابة العبارة على صورة تربيعية .

$(x^2-4)(x^2-36) = 0$ بالتحليل .

$x^2-4=0$		أو	$x^2-36=0$				خاصية الضرب الصفري
$(x-2)(x+2)=0$		أو	$(x-6)(x+6)=0$				بالتحليل إلى العوامل
$x-2=0$	أو $x+2=0$	أو	$x-6=0$	أو	$x+6=0$		خاصية الضرب الصفري
$x=2$	أو $x=-2$	أو	$x=6$	أو	$x=-6$		بالتبسيط

الحلول هي ±2 و ±6.

تمارين:

حل كل معادلة مما يأتي.

1) $x^4 = 49$ — $\pm\sqrt{7}, \pm i\sqrt{7}$

2) $x^4 - 6x^2 = -8$ — $\pm2, \pm\sqrt{2}$

3) $x^4 - 3x^2 = 54$ — $\pm3, \pm i\sqrt{6}$

4) $3t^6 - 48t^2 = 0$ — $0, \pm2, \pm2i$

5) $m^6 - 16m^3 + 64 = 0$ — $2, -1 \pm i\sqrt{3}$

6) $y^4 - 5y^2 + 4 = 0$ — $\pm1, \pm2$

7) $x^4 - 29x^2 + 100 = 0$ — $\pm5, \pm2$

8) $4x^4 - 73x^2 + 144 = 0$ — $\pm4, \pm\frac{3}{2}$

9) $x^3 - 3x = 0$ — $0, \pm\sqrt{3}$

3-6 تدريبات المهارات

حل معادلات كثيرات الحدود

حلل كل كثيرة حدود مما يأتي تحليلًا تامًا، وإذا لم يكن ذلك ممكنًا، فاكتب كثيرة حدود أولية.

1) $7x^2 - 14x$ — $7x(x-2)$

2) $19x^3 - 38x^2$ — $19x^2(x-2)$

3) $21x^3 - 18x^2y + 24xy^2$ — $3x(7x^2 - 6xy + 8y^2)$

4) $8j^3k - 4jk^3 - 7$ — **أولية**

5) $a^2 + 7a - 18$ — $(a+9)(a-2)$

6) $2ak - 6a + k - 3$ — $(2a+1)(k-3)$

7) $b^2 + 8b + 7$ — $(b+7)(b+1)$

8) $z^2 - 8z + 20$ — **أولية**

9) $4f^2 - 64$ — $4(f+4)(f-4)$

10) $d^2 - 12d + 36$ — $(d-6)^2$

11) $9x^2 + 25$ — **أولية**

12) $y^2 + 18y + 81$ — $(y+9)^2$

13) $n^3 - 125$ — $(n-5)(n^2+5n+25)$

14) $m^4 - 1$ — $(m^2+1)(m-1)(m+1)$

اكتب كل عبارة فيما يأتي على الصورة التربيعية إن كان ذلك ممكنًا.

15) $5x^4 + 2x^2 - 8$ — $5(x^2)^2 + 2(x^2) - 8$

16) $3y^8 - 4y^2 + 3$ — **غير ممكن**

17) $100a^6 + a^3$ — $100(a^3)^2 + (a^3)$

18) $x^8 + 4x^4 + 9$ — $(x^4)^2 + 4(x^4) + 9$

19) $12x^4 - 7x^2$ — $12(x^2)^2 - 7(x^2)$

20) $6b^5 + 3b^3 - 1$ — **غير ممكن**

حل كل معادلة مما يأتي:

21) $a^3 - 9a^2 + 14a = 0$ — $0, 7, 2$

22) $x^3 = 3x^2$ — $0, 3$

23) $t^4 - 3t^3 - 40t^2 = 0$ — $0, -5, 8$

24) $b^3 - 8b^2 + 16b = 0$ — $0, 4$

الاسم: ______ التاريخ: ______

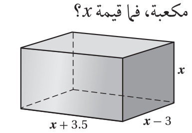
3-6 تدريبات حل المسألة

حل معادلات كثيرات الحدود

1) **ترميز:** يحاول سالم أن يكتشف الرقم السري لحقيبة، وبعد بحث وتقصٍّ طويلين اكتشف أن الرقم السري للحقيبة هو عدد يتكون من رقمين مختلفين ويمثل أحد حلول معادلة كثيرة الحدود
$x^4-68x^3+1557x^2-13770x+37800=0$.
وبعد جهد توصل إلى أن:
$x^4-68x^3+1557x^2-13770x+37800=$
$(x-5)(x-12)(x-21)(x-30)$.
فما الرقم السري للقفل؟
أحد الأعداد 12, 21, 30

2) **نواتج:** يعمل سلطان في مجال الهندسة الميكانيكية، ويتطلب أحد مشاريعه حل معادلة كثيرة الحدود
$m^6+5m^3-10=0$.
اكتب كثيرة الحدود m^6+5m^3-10 على الصورة التربيعية.
$$\boldsymbol{(m^3)^2+5(m^3)-10=0}$$

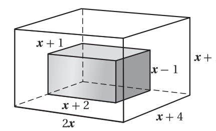
3) **حجم:** يبلغ ارتفاع صندوق للشحن x بوصة، ويزيد طوله 3.5 بوصات عن ارتفاعه، كما يقل عرضه 3 بوصات عن ارتفاعه، فإذا كان حجمه 561 بوصة مكعبة، فما قيمة x؟



8.5

4) **روبوت:** يقطع جسم يتحرك آليًّا مسافة تعطى بكثيرة الحدود
t^5-29t^3+100t، حيث t الزمن بالساعات حلل كثيرة الحدود إلى عواملها.
$$\boldsymbol{t(t-2)(t-5)(t+2)(t+5)}$$

5) **تغليف:** وضع صندوق صغير داخل صندوق أكبر، وكانت أبعاد الصندوق الصغير تعطى بالعبارات
$x-1$, $x+2$, $x+1$.
وأبعاد الصندوق الكبير تعطى بالعبارات
$x+2$, $x+4$, $2x$.



a) اكتب عبارة لحجم الفراغ داخل الصندوق الكبير، وخارج الصندوق الصغير.
$\boldsymbol{x^3+10x^2+17x+2}$

b) إذا كان حجم الفراغ داخل الصندوق الكبير وخارج الصندوق الصغير يعطى بالعبارة $33x+162$ وحدة مكعبة، فما قيمة x؟
4

c) ما حجم الصندوق الصغير؟
90 وحدة مكعبة

d) ما حجم الصندوق الكبير؟
384 وحدة مكعبة

الاسم: ______ التاريخ: ______

3-6 التدريبات الإثرائية

تاريخ المعادلات التربيعية

يُعتقد أن البابليين هم أول من حل معادلات تربيعية، وذلك حوالي 400 سنة قبل الميلاد، وجاء إقليدس الذي طور حلًا هندسيًا في حوالي 300 سنة قبل الميلاد، وفي الفترة حوالي 665–598 بعد الميلاد طور رياضي هندي يدعى براهما قبطا الأسلوب الحديث لحل المعادلات التربيعية. وأخيرًا وفي عام 800م أوجد العالم محمد بن موسى الخوارزمي تصنيفات للمعادلات التربيعية حيث وضعها في 6 أنواع، وكتب فصلًا عن كل نوع وجاءت معادلاته في 3 أنواع مختلفة من العبارات هي الجذر x، ومربع الجذر (x^2) و الأعداد.

فمثلًا: كان تصنيفه الأول، المربعات تساوي الجذور، ومثال على ذلك كانت معادلته : $x^2=2x$.

والآن حل هذه المعادلة التربيعية.

$x^2=2x$	
$x^2-2x=0$	بطرح $2x$ من كل جهة .
$x(x-2)=0$	بالتحليل إلى العوامل
$x=0$ أو $x-2=0$	خاصية الضرب الصفري
إذن، $x=0$ أو $x=2$	

اكتب عينة من المسائل عن كل نوع من الأنواع الخمسة الأخرى الآتية التي صنفها الخوارزمي وحلها.

1) المربعات تساوي الأعداد.
إجابة ممكنة: $\boldsymbol{x^2=25; x=-5, 5}$

2) الجذور تساوي الأعداد.
إجابة ممكنة: $\boldsymbol{2x=20; x=10}$

3) المربعات والجذور تساوي أعداد.
إجابة ممكنة: $\boldsymbol{x^2+10x=39; x=-13, x=3}$

4) مربعات وأعداد تساوي جذور.
إجابة ممكنة: $\boldsymbol{x^2+21=10x; x=3, x=7}$

5) جذور وأعداد تساوي مربعات.
إجابة ممكنة: $\boldsymbol{3x+4=x^2; x=-1, x=4}$

3-7 تدريبات إعادة التعليم

نظريتا الباقي والعوامل

التعويض التركيبي

نظرية الباقي	باقي قسمة $f(x)$ على $(x-a)$ هو $f(a)$. $f(x) = q(x)\cdot(x-a) + f(a)$ حيث $q(x)$ كثيرة حدود تقل درجتها بواحد عن $f(x)$.

مثال 1 إذا كان $f(x) = 3x^4 + 2x^3 - 5x^2 + x - 2$ ، فأوجد $f(-2)$.

الطريقة 1: التعويض التركيبي

من خلال نظرية الباقي $f(-2)$ يتعين أن يكون الباقي من قسمة كثيرة الحدود على $x + 2$.

$\underline{-2}\rfloor$	3	2	−5	1	−2
		−6	8	−6	10
	3	−4	3	−5	8

الباقي 8، إذن $f(-2) = 8$.

الطريقة 2: التعويض المباشر

بتعويض 2− بدلًا من x.

$f(x) = 3x^4 + 2x^3 - 5x^2 + x - 2$

$f(-2) = 3(-2)^4 + 2(-2)^3 - 5(-2)^2 + (-2) - 2$

$= 48 - 16 - 20 - 2 - 2$

$= 8$

إذن $f(-2) = 8$.

مثال 2 إذا كان $f(x) = 5x^3 + 2x - 1$ ، فأوجد $f(3)$.

من النظرية، $f(3)$ هو الباقي من قسمة كثيرة الحدود $f(x)$ على $x - 3$ ومن خلال التعويض التركيبي.

$\underline{3}\rfloor$	5	0	2	−1
		15	45	141
	5	15	47	140

الباقي 140، إذا $f(3) = 140$.

تمارين:

أوجد $f(-5)$ و $f(\frac{1}{2})$ لكل دالة مما يأتي مستعملًا التعويض التركيبي:.

1) $f(x) = -3x^2 + 5x - 1$ **$-101; \frac{3}{4}$**

2) $f(x) = 4x^2 + 6x - 7$ **$63; -3$**

3) $f(x) = -x^3 + 3x^2 - 5$ **$195; -\frac{35}{8}$**

4) $f(x) = x^4 + 11x^2 - 1$ **$899; \frac{29}{16}$**

أوجد $f(4)$ و $f(-3)$ لكل دالة مما يأتي مستعملًا التعويض التركيبي

5) $f(x) = 2x^3 + x^2 - 5x + 3$ **$127; -27$**

6) $f(x) = 3x^3 - 4x + 2$ **$178; -67$**

7) $f(x) = 5x^3 - 4x^2 + 2$ **$258; -169$**

8) $f(x) = 2x^4 - 4x^3 + 3x^2 + x - 6$ **$302; 288$**

9) $f(x) = 5x^4 + 3x^3 - 4x^2 - 2x + 4$ **$1404; 298$**

10) $f(x) = 3x^4 - 2x^3 - x^2 + 2x - 5$ **$627; 277$**

11) $f(x) = 2x^4 - 4x^3 - x^2 - 6x + 3$ **$219; 282$**

12) $f(x) = 4x^4 - 4x^3 + 3x^2 - 2x - 3$ **$805; 462$**

3-7 تدريبات إعادة التعليم

(تتمة)

نظريتا الباقي والعوامل

تحليل كثيرات الحدود: يمكن أن تساعدك نظرية العوامل في إيجاد عوامل كثيرة الحدود جميعها.

نظرية العوامل	ثنائية الحد $x - a$ عامل لكثيرة الحدود $f(x)$ ، إذا وفقط إذا كان $f(a) = 0$.

مثال بين أن $x + 5$ عامل لكثيرة الحدود $x^3 + 2x^2 - 13x + 10$، ثم أوجد عواملها الأخرى.

من نظرية العوامل يكون:

$x + 5$ عاملًا إذا كان 5− صفرًا لدالة كثيرة الحدود، وللتحقق استعمل التعويض التركيبي:

$\underline{-5}\rfloor$	1	2	−13	10
		−5	15	−10
	1	−3	2	0

وحيث أن الباقي يساوي صفرًا، فإن $x + 5$ عامل لكثيرة الحدود. ويمكن كتابة كثيرة الحدود $x^3 + 2x^2 - 13x + 10$ على النحو $(x + 5)(x^2 - 3x + 2)$. ويمكن تحليل كثيرة الحدود $x^2 - 3x + 2$ على الصورة $(x - 2)(x - 1)$.

إذن، $x^3 + 2x^2 - 13x + 10 = (x + 5)(x - 2)(x - 1)$.

تمارين:

في كل مما يأتي كثيرة حدود وأحد عواملها، أوجد عواملها الأخرى.

1) $x^3 + x^2 - 10x + 8; x - 2$ **$(x+4)(x-1)$**

2) $x^3 - 4x^2 - 11x + 30; x + 3$ **$(x-5)(x-2)$**

3) $x^3 + 15x^2 + 71x + 105; x + 7$ **$(x+3)(x+5)$**

4) $x^3 - 7x^2 - 26x + 72; x + 4$ **$(x-2)(x-9)$**

5) $2x^3 - x^2 - 7x + 6; x - 1$ **$(2x-3)(x+2)$**

6) $3x^3 - x^2 - 62x - 40; x + 4$ **$(3x+2)(x-5)$**

7) $12x^3 - 71x^2 + 57x - 10; x - 5$ **$(4x-1)(3x-2)$**

8) $14x^3 + x^2 - 24x + 9; x - 1$ **$(7x-3)(2x+3)$**

9) $x^3 + x + 10; x + 2$ **(x^2-2x+5)**

10) $2x^3 - 11x^2 + 19x - 28; x - 4$ **$(2x^2-3x+7)$**

11) $3x^3 - 13x^2 - 34x + 24; x - 6$ **$(3x^2+5x-4)$**

12) $x^4 + x^3 - 11x^2 - 9x + 18; x - 1$ **$(x+2)(x+3)(x-3)$**

الاسم: ______ التاريخ: ______

3-7 تدريبات المهارات

نظريتا الباقي والعوامل

أوجد $f(2)$ و $f(-1)$ لكل دالة مما يأتي مستعملًا التعويض التركيبي:

1) $f(x) = x^2 + 6x + 5$
21, 0

2) $f(x) = x^2 - x + 1$
3, 3

3) $f(x) = x^2 - 2x - 2$
−2, 1

4) $f(x) = x^3 + 2x^2 + 5$
21, 6

5) $f(x) = x^3 - x^2 - 2x + 3$
3, 3

6) $f(x) = x^3 + 6x^2 + x - 4$
30, 0

7) $f(x) = x^3 - 3x^2 + x - 2$
−4, −7

8) $f(x) = x^3 - 5x^2 - x + 6$
−8, 1

9) $f(x) = x^4 + 2x^2 - 9$
15, −6

10) $f(x) = x^4 - 3x^3 + 2x^2 - 2x + 6$
2, 14

11) $f(x) = x^5 - 7x^3 - 4x + 10$
−22, 20

12) $f(x) = x^6 - 2x^5 + x^4 + x^3 - 9x^2 - 20$
−32, −26

في كل مما يأتي كثيرة حدود وأحد عواملها، أوجد عواملها الأخرى

13) $x^3 + 2x^2 - x - 2;\ x + 1$
$\boldsymbol{x-1, x+2}$

14) $x^3 + x^2 - 5x + 3;\ x - 1$
$\boldsymbol{x-1, x+3}$

15) $x^3 + 3x^2 - 4x - 12;\ x + 3$
$\boldsymbol{x-2, x+2}$

16) $x^3 - 6x^2 + 11x - 6;\ x - 3$
$\boldsymbol{x-1, x-2}$

17) $x^3 + 2x^2 - 33x - 90;\ x + 5$
$\boldsymbol{x+3, x-6}$

18) $x^3 - 6x^2 + 32;\ x - 4$
$\boldsymbol{x-4, x+2}$

19) $x^3 - x^2 - 10x - 8;\ x + 2$
$\boldsymbol{x+1, x-4}$

20) $x^3 - 19x + 30;\ x - 2$
$\boldsymbol{x+5, x-3}$

21) $2x^3 + x^2 - 2x - 1;\ x + 1$
$\boldsymbol{2x+1, x-1}$

22) $2x^3 + x^2 - 5x + 2;\ x + 2$
$\boldsymbol{x-1, 2x-1}$

23) $3x^3 + 4x^2 - 5x - 2;\ 3x + 1$
$\boldsymbol{x-1, x+2}$

24) $3x^3 + x^2 + x - 2;\ 3x - 2$
$\boldsymbol{x^2+x+1}$

الاسم: ______ التاريخ: ______

3-7 تدريبات حل المسألة

نظريتا الباقي والعوامل

1) **ارتفاع:** رميت كرة إلى أعلى في الهواء، فاتخذت مسارها على شكل قطع مكافئ، ارتفاعها h بعد t ثانية تمثله كثيرة حدود من الدرجة الثانية المعامل الرئيس فيها يساوي -16. باستعمال التعويض التركيبي، وُجد أن الكرة وصلت إلى الأرض عندما كان $t=4$، $t=0$، فما كثيرة الحدود التي تمثل ارتفاع الكرة على صورة دالة في t؟
$\boldsymbol{h = -16t^2 + 64t}$

2) **التعويض التركيبي:** وجد أحمد قيمة الدالة كثيرة الحدود $p(x) = x^3 - 5x^2 + 3x + 5$ عند عدد ما مستعملًا التعويض التركيبي. وأسلوب عمله موضح تاليًا مع إخفاء العدد والحل لسقوط الحبر عليهما.

	1	−5	3	5
		11	66	759
	1	6	69	

ما العدد الذي استخدمه، وما الحل؟
11; 764

3) **أرباح:** يمكن تمثيل أرباح إحدى الشركات بكثيرة الحدود $P(y) = y^4 - 4y^3 + 2y^2 + 10y - 200$ حيث تمثل y عدد السنوات بعد أن باشرت الشركة عملها. أراد مديرها أن يعرف $P(10)$. استعمل التعويض التركيبي لتجد $P(10)$. ووضح خطوات حلك.

10	1	−4	2	10	−200
		10	60	620	6300
	1	6	62	630	6100

P(10)=6100

4) **أسس:** الدالة الأسية $t = e^x$ هي دالة خاصة ستتعلمها لاحقًا. فهي ليست كثيرة حدود. ومع هذا فإنه لقيم x الصغيرة يمكن تقريبها لدالة كثيرة الحدود $e(x) = \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{2}x^2 + x + 1$.
أوجد $e(0.1)$ مستعملًا التعويض التركيبي. وبيّن خطوات حلك.

0.1	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{2}$	1	1
		$\frac{1}{60}$	$\frac{31}{600}$	$\frac{631}{6000}$
	$\frac{1}{6}$	$\frac{31}{60}$	$\frac{631}{600}$	$\frac{6631}{6000}$

$\boldsymbol{1\frac{631}{6000}}$

5) **حجم:** حجم بركة بالأقدام المكعبة يعطى بكثيرة الحدود $v(x) = \pi(x^3 - 5x^2 - 86x + 360)$.

a) بين أن $x - 4$ عامل من عوامل $v(x)$ مستعملًا التعويض التركيبي. وضح خطوات عملك.
انظر عمل الطلاب

b) حلل $v(x)$ إلى العوامل تحليلًا تامًّا.
$\boldsymbol{\pi(x-4)(x+9)(x-10)}$

c) ما قيمة $v(10)$؟
0

الاسم: ________ التاريخ: ________

3-7 التدريبات الإثرائية

رمز الجذر

في عام 1494 م صدرت أول طبعة من *Summa*، وهو كتاب إيطالي يعرف الآن باسم سوما (*Suma*)، وقد كتب المؤلف الإيطالي (لوكا باكيلو) الكتاب على صورة ملخص لما كان يعرف عن الرياضيات في ذلك الوقت، وقد استعمل رموزًا شبيهة بالرموز المستخدمة حاليًا، فمثلًا لتمثيل الجذور استعمل العبارة التالية:

$6 \cdot p \cdot R \cdot 10$

وفي تعبيرنا اليوم نكتب p حيث p الحرف الأول من كلمة زائد "*plus*"، و R من كلمة "*radical*". لذا، $6 \cdot p \cdot R \cdot 10$ تعني $6+\sqrt{10}$.

1) ما الحرف الذي تتوقعه لتمثيل الطرح؟

$\boldsymbol{m}$

2) ترجم الرموز التالية إلى الرموز الحالية.

a) $18 \cdot m \cdot R \cdot 90$

$\mathbf{18-\sqrt{90}}$

b) $108 \cdot m \cdot R \cdot 3240 \cdot p \cdot R \cdot 3240 \cdot m \cdot R \cdot 900$

$\mathbf{108-\sqrt{3240}+\sqrt{3240}-\sqrt{900}}$

c) $10 \cdot R \cdot 5 \cdot p \cdot 2 \cdot R \cdot 3$

$\mathbf{10\sqrt{5}+2\sqrt{3}}$

3) ترجم الرموز الحديثة التالية إلى رموز كانت تستعمل قبل عام 1494 .

a) $32\sqrt{10}$

$\mathbf{32 \,.\, R \,.\, 10}$

b) $21\sqrt{6}+3\sqrt{3}$

$\mathbf{21 \,.\, R \,.\, 6 \,.\, p \,.\, 3 \,.\, R \,.\, 3}$

c) $5\sqrt{2}-2+7\sqrt{11}$

$\mathbf{5 \,.\, R \,.\, 2 \,.\, m \,.\, 2 \,.\, p \,.\, 7 \,.\, R \,.\, 11}$

الاسم: ________ التاريخ: ________

3-8 تدريبات إعادة التعليم

الجذور والأصفار

العبارات التالية متكافئة لأية دالة كثيرة حدود $f(x)$.

- c صفرًا لدالة كثيرة الحدود $f(x)$.
- c جذرًا أو حلًا لمعادلة كثيرة الحدود $f(x)=0$.
- $(x-c)$ عامل من عوامل كثيرة الحدود $f(x)$.
- إذا كانت c عددًا حقيقيًا، فإن $(c, 0)$ نقطة تقاطع منحنى $f(x)$ مع محور x.

النظرية الأساسية في الجبر	كل معادلة كثيرة حدود درجتها أكبر من الصفر لها جذر واحد على الأقل في مجموعة الأعداد المركبة.
نتيجة للنظرية الأساسية في الجبر	يكون لمعادلة كثيرة الحدود من الدرجة n على الصورة $P(x)=0$ العدد n من الجذور المركبة بما في ذلك الجذور المكررة.
قانون ديكارت للإشارات	إذا كانت $P(x)$ كثيرة حدود معاملات حدودها أعداد حقيقية. وحدودها مرتبة ترتيبًا تنازليًا وفق درجاتها فإن: • عدد الأصفار الحقيقية الموجبة للدالة $y=P(x)$ يساوي عدد مرات تغير إشارة معاملات الحدود أو أقل منه بعدد زوجي. • عدد الأصفار الحقيقية السالبة للدالة $y=P(x)$ يساوي عدد مرات تغير إشارة معاملات حدود $P(-x)$ أو أقل منه بعدد زوجي.

مثال 1

حل المعادلة $6x^3+3x=0$. واذكر عدد الجذور وأنواعها .

$3x(2x^2+1)=0$

باستعمال خاصية الضرب الصفري.

$3x=0$ أو $2x^2+1=0$

$x=0$ أو $2x^2=-1$

$x=\pm i\frac{\sqrt{2}}{2}$

للمعادلة جذر حقيقي واحد هو الصفر وجذران تخيليان هما $\pm i\frac{\sqrt{2}}{2}$.

مثال 2

اذكر العدد الممكن للأصفار الحقيقية الموجبة، والحقيقية السالبة، والتخيلية للدالة $p(x)=4x^4-3x^3-x^2+2x-5$.

بما أن الدالة $p(x)$ من الدرجة الرابعة فلها 4 أصفار .

وبما أن هنالك 3 تغيرات في الإشارة، فللدالة 3 أصفار حقيقية موجبة أو صفر حقيقي موجب واحد.

أوجد $p(-x)$ واوجد عدد مرات تغير إشارة المعاملات.

$p(-x)=4(-x)^4-3(-x)^3+(-x)^2+2(-x)-5$

$=4x^4+3x^3+x^2-2x-5$

وبما أنه يوجد تغير واحد في الإشارة، فهناك جذر حقيقي سالب واحد، لذا يوجد 3 أصفار حقيقية موجبة، وصفر حقيقي سالب. أو جذر حقيقي موجب وجذر حقيقي سالب وجذران تخيليان.

تمارين:

حل كل معادلة مما يأتي واذكر عدد جذورها، وأنواعها.

1) $x^2+4x-21=0$

جذران حقيقيان $3, -7$;

2) $2x^3-50x=0$

3 جذور حقيقية $0, \pm 5$;

3) $12x^3+100x=0$

جذر واحد حقيقي وجذران تخيليان $0, \pm\frac{5i\sqrt{3}}{3}$;

اذكر العدد الممكن للأصفار الحقيقية الموجبة، والحقيقية السالبة، والتخيلية لكل دالة مما يأتي:

4) $f(x)=3x^3+x^2-8x-12$

موجب 1 ؛ سالب 2 أو 0 ؛ تخيلي 2 أو 0

5) $f(x)=3x^5-x^4-x^3+6x^2-5$

موجب 3 أو 1 ؛ سالب 2 أو 0 ؛ تخيلي 0 أو 2 أو 4

3-8 تدريبات إعادة التعليم

(تتمة)

الجذور والأصفار

أوجد الأصفار

نظرية مرافق العدد المركب	إذا كانت a و b أعدادًا حقيقية، $b \neq 0$. وكان $a + bi$ صفرًا لدالة كثيرة حدود معاملات حدودها أعداد حقيقية فإن $a - bi$ صفر آخر للدالة.

مثال 1 أوجد جميع أصفار الدالة $f(x) = x^4 - 15x^2 + 38x - 60$.

بما أن $f(x)$ من الدرجة الرابعة، فإن للدالة 4 أصفار.

$f(x) = x^4 - 15x^2 + 38x - 60$ ، $f(-x) = x^4 - 15x^2 - 38x - 60$

وبما أن هنالك 3 تغيرات في الإشارات للدالة $f(x)$، فإن للدالة 3 أصفار حقيقية موجبة أو صفر حقيقي موجب واحد، وبما أن تغير الإشارة في الدالة $f(-x)$ مرة واحدة، فإنه يوجد صفر حقيقي سالب واحد. استعمل التعويض التركيبي لاختبار الأصفار الممكنة.

2	1	0	−15	38	−60
		2	4	−22	32
	1	2	−11	16	−28

3	1	0	−15	38	−60
		3	9	−18	60
	1	3	−6	20	0

إذن، 3 هو صفر للدالة كثيرة الحدود. جرب التعويض التركيبي ثانية، لإيجاد صفر لكثيرة الحدود $(x^3+3x^2-6x+20)$ التي تمثل ناتج قسمة $f(x)$ على $x-3$.

−2	1	3	−6	20
		−2	−2	16
	1	1	−8	36

−4	1	3	−6	20
		−4	4	8
	1	−1	−2	28

−5	1	3	−6	20
		−5	10	−20
	1	−2	4	0

إذن، 5− هو صفر آخر للدالة. ثم استعمل القانون العام لحل المعادلة التربيعية $x^2 - 2x + 4$ ، فتجد أن $1 \pm i\sqrt{3}$ هما الصفران الآخران .

إذن، للدالة صفران حقيقيان هما 3 ,5− وصفران تخيليان هما $1 \pm i\sqrt{3}$.

تمارين:

أوجد جميع أصفار كل دالة مما يأتي:

1) $f(x) = x^3 + x^2 + 9x + 9$
$-1, \pm 3i$

2) $f(x) = x^3 - 3x^2 + 4x - 12$
$3, \pm 2i$

3) $p(a) = a^3 - 10a^2 + 34a - 40$
$4, 3 \pm i$

4) $p(x) = x^3 - 5x^2 + 11x - 15$
$3, 1 \pm 2i$

5) $f(x) = x^3 + 6x + 20$
$-2, 1 \pm 3i$

6) $f(x) = x^4 - 3x^3 + 21x^2 - 75x - 100$
$-1, 4, \pm 5i$

3-8 تدريبات المهارات

الجذور والأصفار

حل كل معادلة مما يأتي واذكر عددجذورها، وأنواعها:

1) $5x + 12 = 0$
$-\frac{12}{5}$ ، جذر حقيقي واحد

2) $x^2 - 4x + 40 = 0$
$2 \pm 6i$ ، جذران تخيليان

3) $x^5 + 4x^3 = 0$
$0, 0, 0, 2i, -2i,$
3 جذور حقيقية، وجذران تخيليان

4) $x^4 - 625 = 0$
$5, -5, 5i, -5i,$
جذران حقيقيان، وجذران تخيليان

5) $4x^2 - 4x - 1 = 0$
$\frac{1 \pm \sqrt{2}}{2}$ ، جذران حقيقيان

6) $x^5 - 81x = 0$
$0, -3, 3, -3i, 3i,$
3 جذور حقيقية، وجذران تخيليان

اذكر العدد الممكن للأصفار الحقيقية الموجبة، والحقيقة السالبة، والتخيلية لكل دالة مما يأتي:

7) $g(x) = 3x^3 - 4x^2 - 17x + 6$
2 أو 0؛ 1 ؛ 2 أو 0
موجب ؛ سالب ؛ تخيلي

8) $h(x) = 4x^3 - 12x^2 - x + 3$
2 أو 0؛ 1 ؛ 2 أو 0
موجب ؛ سالب ؛ تخيلي

9) $f(x) = x^3 - 8x^2 + 2x - 4$
3 أو 1؛ 0 ؛ 2 أو 0
موجب ؛ سالب ؛ تخيلي

10) $p(x) = x^3 - x^2 + 4x - 6$
3 أو 1؛ 0 ؛ 2 أو 0
موجب ؛ سالب ؛ تخيلي

11) $q(x) = x^4 + 7x^2 + 3x - 9$
1 ؛ 1 ؛ 2
موجب ؛ سالب ؛ تخيلي

12) $f(x) = x^4 - x^3 - 5x^2 + 6x + 1$
2 أو 0؛ 2 أو 0؛ 4 أو 2 أو 0
موجب ؛ سالب ؛ تخيلي

أوجد جميع أصفار كل دالة مما يأتي.

13) $h(x) = x^3 - 5x^2 + 5x + 3$
$3, 1 + \sqrt{2}, 1 - \sqrt{2}$

14) $g(x) = x^3 - 6x^2 + 13x - 10$
$2, 2 + i, 2 - i$

15) $h(x) = x^3 + 4x^2 + x - 6$
$1, -2, -3$

16) $q(x) = x^3 + 3x^2 - 6x - 8$
$2, -1, -4$

17) $g(x) = x^4 - 3x^3 - 5x^2 + 3x + 4$
$-1, -1, 1, 4$

18) $f(x) = x^4 - 21x^2 + 80$
$-4, 4, -\sqrt{5}, \sqrt{5}$

اكتب دالة كثيرة حدود درجتها أقل ما يمكن، ومعاملات حدودها أعداد صحيحة، إذا كانت الأعداد المعطاة في كل مما يأتي من أصفارها.

19) $-3, -5, 1$
$f(x) = x^3 + 7x^2 + 7x - 15$

20) $3i$
$f(x) = x^2 + 9$

21) $-5 + i$
$f(x) = x^2 + 10x + 26$

22) $-1, \sqrt{3}, -\sqrt{3}$
$f(x) = x^3 + x^2 - 3x - 3$

23) $i, 5i$
$f(x) = x^4 + 26x^2 + 25$

24) $-1, 1, i\sqrt{6}$
$f(x) = x^4 + 5x^2 - 6$

الاسم: ________ التاريخ: ________

3-8 تدريبات حل المسألة

الجذور والأصفار

1) **جداول:** صممت انتصار جدول قيم لدالة كثيرة حدود كما هو موضح.

x	$p(x)$
-4	-3
-3	-1
-2	0
-1	2
0	0
1	4
2	0
3	2
4	5

اكتب 3 جذور للدالة $p(x)$.

$-2, 0, 2$

2) **جذور:** يعمل حمد مهندسًا كهربائيًا ويقوم بحل معادلات كثيرة حدود غالبًا ليتعرف خصائص الدوائر الكهربائية التي يعملها، وكان عليه أن يجد لإحدى الدوائر جذور كثيرة الحدود $p(x)$. وقد وجد أن $p(2-3i)=0$. أوجد جذرين مختلفين للدالة $p(x)$.

$2-3i, 2+3i$

3) **جذور حقيقية:** يوجد في العالم ما يزيد على 1000 عجلة دوّارة، ويمكن لمهندسي العجلات الدوارة أن يستعملوا دوال كثيرة حدود لتمثيل الشكل الممكن لتصميمها. يدرس غانم كثيرة الحدود $f(x)=x^6-14x^4+49x^2-36$. وهو يعرف أن جميع جذور $f(x)$ حقيقية، فكم جذرًا حقيقيًا موجبًا وكم جذرًا حقيقيًا سالبًا للدالة؟

يوجد 3 جذور موجبة و 3 جذور سالبة.

4) **الجذور المركبة:** يعمل عمر في مجال الإحصاء، وفي أثناء عمله حاول أن يجد ما يطلق عليه القيم العددية للمصفوفة، والتي تشابه إيجاد جذور كثيرة الحدود x^4+6x^2+25 تمامًا. فإذا كان أحد جذور كثيرة الحدود يساوي $1+2i$. فما الجذور الثلاثة الأخرى؟

الجذور الثلاثة الاخرى هي: $-1-2i$، $1-2i$، $-1+2i$.

5) **الأشكال الرباعية:** رسمت عبير الرؤوس الأربعة لشكل رباعي في المستوى المركب، وافترضت هذه النقط جذورًا لكثيرة الحدود $p(x)$ حيث. $p(x)=x^4-9x^3+27x^2+23x-150$.

a) للدالة $p(x)$ جذر حقيقي وحيد موجب وهو عدد صحيح. أوجده.

3

b) أوجد الجذر/ الجذور الحقيقية السالبة للدالة $p(x)$.

-2

c) أوجد الجذور التخيلية للدالة $p(x)$.

$4-3i$، $4+3i$

الاسم: ________ التاريخ: ________

3-8 التدريبات الإثرائية

أسلوب التنصيف لتقريب الأصفار الحقيقية

يمكن أن يستعمل التنصيف لتقريب أصفار دوال كثيرات الحدود مثل $f(x)=x^3+x^2-3x-3$.

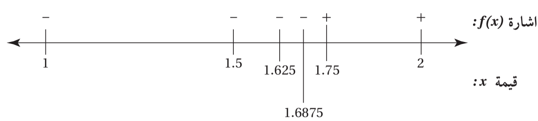
بما أن $f(1)=-4$ و $f(2)=3$، فإن هناك صفر واحد بين 1 و 2، على الأقل ومنتصف الفترة بينهما هو:

$\frac{1+2}{2}=1.5$، وبما أن $f(1.5)=-1.875$ فإن الصفر يقع بين 1.5 و 2، ومنتصف الفترة هو $\frac{1.5+2}{2}=1.75$.

وبما أن $f(1.75)$ تساوي 0.172 تقريبًا، فالصفر يقع بين 1.5 و 1.75 ومنتصف هذه الفترة هو $\frac{1.5+1.75}{2}=1.625$
وبما أن $f(1.625)$ هي -0.94. تقريبًا، لذا يقع الصفر بين 1.625 و 1.75. ومنتصف هذه الفترة هو $\frac{1.625+1.75}{2}=1.6875$.

وبما أن قيمة $f(1.6875)$ تساوي -0.41، تقريبًا، فإن صفر الدالة يقع بين 1.6875 و 1.75 إذن، صفر الدالة يساوي 1.7 لأقرب عشر.

ويلخص الشكل الآتي النتائج التي تم التوصل إليها.



استعمل أسلوب التنصيف لتقريب صفر كل دالة فيما يأتي لأقرب عُشر.

1) $f(x)=x^3-4x^2-11x+2, f(0)=2, f(1)=-12$
0.2

2) $f(x)=2x^4+x^2-15, f(1)=-12, f(2)=21$
1.6

3) $f(x)=x^5-2x^3-12, f(1)=-13, f(2)=4$
1.9

4) $f(x)=4x^3-2x+7, f(-2)=-21, f(-1)=5$
−1.3

5) $f(x)=3x^3-14x^2-27x+126, f(4)=-14, f(5)=16$
4.7

3-9 تدريبات إعادة التعليم

نظرية الصفر النسبي

تحديد الأصفار النسبية

نظرية الصفر النسبي	افرض أن $f(x) = a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + \dots + a_2x^2 + a_1x + a_0$ دالة كثيرة حدود معاملات حدودها أعداد صحيحة، فإن أي صفر نسبي للدالة $f(x)$ سيكون على صورة العدد النسبي $\frac{p}{q}$ في أبسط صورة، حيث p أحد عوامل الحد الثابت، q أحد عوامل المعامل الرئيس.
نتيجة (نظرية الصفر الصحيح)	إذا كانت معاملات حدود كثيرة الحدود أعدادًا صحيحة، وكان $a_n = 1$ و $a_0 \neq 0$، فإن أي صفر نسبي للدالة يتعين أن يكون من عوامل a_0.

مثال اكتب جميع الأصفار النسبية الممكنة لكلٍّ من الدالتين التاليتين:

a) $f(x) = 3x^4 - 2x^2 + 6x - 10$

إذا كان $\frac{p}{q}$ صفر نسبي، فإن p عامل للعدد -10 و q عامل للعدد 3. القيم الممكنة لـ p هي $\pm1, \pm2, \pm5, \pm10$. والقيم الممكنة لـ q هي ±1 و ±3. لذا، فإن جميع الأصفار الممكنة هي: $\frac{p}{q} = \pm1, \pm2, \pm5, \pm10, \pm\frac{1}{3}, \pm\frac{2}{3}, \pm\frac{5}{3}, \pm\frac{10}{3}$.

b) $q(x) = x^3 - 10x^2 + 14x - 36$

بما أن معامل x^3 يساوي 1، فإن الأصفار الممكنة يتعين أن تكون من معاملات العدد -36. لذا فالأصفار الممكنة هي :

$\pm1, \pm2, \pm3, \pm4, \pm6, \pm9, \pm12, \pm18, \pm36$.

تمارين:

اكتب جميع الأصفار النسبية الممكنة لكل دالة مما يأتي:

1) $f(x) = x^3 + 3x^2 - x + 8$
$\pm1, \pm2, \pm4, \pm8$

2) $g(x) = x^5 - 7x^4 + 3x^2 + x - 20$
$\pm1, \pm2, \pm4, \pm5, \pm10, \pm20$

3) $h(x) = x^4 - 7x^3 - 4x^2 + x - 49$
$\pm1, \pm7, \pm49$

4) $p(x) = 2x^4 - 5x^3 + 8x^2 + 3x - 5$
$\pm1, \pm5, \pm\frac{1}{2}, \pm\frac{5}{2}$

5) $q(x) = 3x^4 - 5x^3 + 10x + 12$
$\pm1, \pm2, \pm3, \pm4, \pm6, \pm12, \pm\frac{1}{3}, \pm\frac{2}{3}, \pm\frac{4}{3}$

6) $r(x) = 4x^5 - 2x + 18$
$\pm1, \pm2, \pm3, \pm6, \pm9, \pm18, \pm\frac{1}{2}, \pm\frac{3}{2}, \pm\frac{9}{2}, \pm\frac{1}{4}, \pm\frac{3}{4}, \pm\frac{9}{4}$

7) $f(x) = x^7 - 6x^5 - 3x^4 + x^3 + 4x^2 - 120$
$\pm1, \pm2, \pm3, \pm4, \pm5, \pm6, \pm8, \pm10, \pm12, \pm15, \pm20, \pm24, \pm30, \pm40, \pm60, \pm120$

8) $g(x) = 5x^6 - 3x^4 + 5x^3 + 2x^2 - 15$
$\pm1, \pm3, \pm5, \pm15, \pm\frac{1}{5}, \pm\frac{3}{5}$

9) $h(x) = 6x^5 - 3x^4 + 12x^3 + 18x^2 - 9x + 21$
$\pm1, \pm3, \pm7, \pm21, \pm\frac{1}{2}, \pm\frac{3}{2}, \pm\frac{7}{2}, \pm\frac{21}{2}, \pm\frac{1}{3}, \pm\frac{7}{3}, \pm\frac{1}{6}, \pm\frac{7}{6}$

10) $p(x) = 2x^7 - 3x^6 + 11x^5 - 20x^2 + 11$
$\pm1, \pm11, \pm\frac{1}{2}, \pm\frac{11}{2}$

3-9 تدريبات إعادة التعليم (تتمة)

نظرية الصفر النسبي

إيجاد الأصفار النسبية

مثال 1 أوجد جميع الأصفار النسبية للدالة $f(x) = 5x^3 + 12x^2 - 29x + 12$.

من نتيجة النظرية السابقة في الجبر تعلم أنه يوجد 3 أصفار مركبة، وفق قانون ديكارت في الإشارات، هناك صفران حقيقيان أو صفر واحد من الأصفار الحقيقية الموجبة، وصفر حقيقي سالب واحد. والأصفار الممكنة هي

$\pm1, \pm2, \pm3, \pm4, \pm6, \pm12, \pm\frac{1}{5}, \pm\frac{2}{5}, \pm\frac{3}{5}, \pm\frac{4}{5}, \pm\frac{6}{5}, \pm\frac{12}{5}$

كوِّن جدولًا للقسمة التركيبية، واختبر الأصفار النسبية الممكنة.

$\frac{p}{q}$	5	12	−29	12
1	5	17	−12	0

بما أن $f(1) = 0$، فإن $x = 1$ صفر للدالة، حلِّل كثيرة الحدود الناتجة عن قسمة كثيرة الحدود الأصلية على $x - 1$ وهي $5x^2 + 17x - 12$، ويمكن تحليلها على الصورة $(5x - 3)(x + 4)$.

ومن خاصية الضرب الصفري تكون العبارة مساوية للصفر عندما $x = \frac{3}{5}$ أو $x = -4$.

لذا، فالأصفار النسبية هي $-4, \frac{3}{5}, 1$.

مثال 2 أوجد جميع أصفار الدالة $f(x) = 8x^4 + 2x^3 + 5x^2 + 2x - 3$.

هنالك 4 أصفار مركبة، صفر حقيقي موجب واحد، و 3 أو 1 أصفار حقيقة سالبة، أما الأصفار الممكنة فهي:

$\pm1, \pm3, \pm\frac{1}{2}, \pm\frac{1}{4}, \pm\frac{1}{8}, \pm\frac{3}{2}, \pm\frac{3}{4}, \pm\frac{3}{8}$.

كوِّن جدولًا، واختبر بعض القيم الممكنة.

$\frac{p}{q}$	8	2	5	2	−3
1	8	10	15	17	14
2	8	18	41	84	165
$\frac{1}{2}$	8	6	8	6	0

وبما أن $f\left(\frac{1}{2}\right) = 0$، فإن $x = \frac{1}{2}$ جذر.

حلِّل كثيرة الحدود الناتجة عن قسمة كثيرة الحدود الأصلية على $x - \frac{1}{2}$ وهي $8x^3 + 6x^2 + 8x + 6$.

واستعمل التعويض التركيبي مرة أخرى، علمًا أن الجذور الأخرى المتبقية سالبة.

$\frac{p}{q}$	8	6	8	6
$-\frac{1}{4}$	8	4	7	$4\frac{1}{4}$
$-\frac{3}{4}$	8	0	8	0

$x = -\frac{3}{4}$ جذر آخر، ثم حلِّل كثيرة الحدود الناتجة عن قسمة $8x^3+6x^2+8x+6$ على $x + \frac{3}{4}$ وهي $8x^2 + 8$، وصفراها $\pm i$.

إذن، أصفار الدالة $f(x)$ هي $\frac{1}{2}, -\frac{3}{4}, \pm i$.

تمارين:

أوجد جميع الأصفار النسبية لكل من الدوال الآتية:

1) $f(x) = x^3 + 4x^2 - 25x - 28$
$-1, 4, -7$

2) $f(x) = x^3 + 6x^2 + 4x + 24$
-6

أوجد جميع الأصفار النسبية لكل من الدوال الآتية:

3) $f(x) = x^4 + 2x^3 - 11x^2 + 8x - 60$
$3, -5, \pm2i$

4) $f(x) = 4x^4 + 5x^3 + 30x^2 + 45x - 54$
$\frac{3}{4}, -2, \pm3i$

الاسم: ______ التاريخ: ______

3-9 تدريبات المهارات
نظرية الصفر النسبي

اكتب جميع الأصفار النسبية الممكنة لكل من الدوال الآتية.

1) $n(x) = x^2 + 5x + 3$
$\pm 1, \pm 3$

2) $h(x) = x^2 - 2x - 5$
$\pm 1, \pm 5$

3) $w(x) = x^2 - 5x + 12$
$\pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 4, \pm 6, \pm 12$

4) $f(x) = 2x^2 + 5x + 3$
$\pm \frac{1}{2}, \pm \frac{3}{2}, \pm 1, \pm 3$

5) $q(x) = 6x^3 + x^2 - x + 2$
$\pm \frac{1}{6}, \pm \frac{1}{3}, \pm \frac{1}{2}, \pm \frac{2}{3}, \pm 1, \pm 2$

6) $g(x) = 9x^4 + 3x^3 + 3x^2 - x + 27$
$\pm \frac{1}{9}, \pm \frac{1}{3}, \pm 1, \pm 3, \pm 9, \pm 27$

أوجد جميع الأصفار النسبية لكل دالة مما يأتي.

7) $f(x) = x^3 - 2x^2 + 5x - 4$
1

8) $g(x) = x^3 - 3x^2 - 4x + 12$
$-2, 2, 3$

9) $p(x) = x^3 - x^2 + x - 1$
1

10) $z(x) = x^3 - 4x^2 + 6x - 4$
2

11) $h(x) = x^3 - x^2 + 4x - 4$
1

12) $g(x) = 3x^3 - 9x^2 - 10x - 8$
4

13) $g(x) = 2x^3 + 7x^2 - 7x - 12$
$-4, -1, \frac{3}{2}$

14) $h(x) = 2x^3 - 5x^2 - 4x + 3$
$-1, \frac{1}{2}, 3$

15) $p(x) = 3x^3 - 5x^2 - 14x - 4$
$-\frac{1}{3}$

16) $q(x) = 3x^3 + 2x^2 + 27x + 18$
$-\frac{2}{3}$

17) $q(x) = 3x^3 - 7x^2 + 4$
$-\frac{2}{3}, 1, 2$

18) $f(x) = x^4 - 2x^3 - 13x^2 + 14x + 24$
$-3, -1, 2, 4$

19) $p(x) = x^4 - 5x^3 - 9x^2 - 25x - 70$
$-2, 7$

20) $n(x) = 16x^4 - 32x^3 - 13x^2 + 29x - 6$
$-1, \frac{1}{4}, \frac{3}{4}, 2$

أوجد جميع الأصفار لكل دالة مما يأتي.

21) $f(x) = x^3 + 5x^2 + 11x + 15$
$-3, -1 + 2i, -1 - 2i$

22) $q(x) = x^3 - 10x^2 + 18x - 4$
$2, 4 + \sqrt{14}, 4 - \sqrt{14}$

23) $m(x) = 6x^4 - 17x^3 + 8x^2 + 8x - 3$
$\frac{1}{3}, \frac{3}{2}, \frac{1 + \sqrt{5}}{2}, \frac{1 - \sqrt{5}}{2}$

24) $g(x) = x^4 + 4x^3 + 5x^2 + 4x + 4$
$-2, -2, -i, i$

الاسم: ______ التاريخ: ______

3-9 تدريبات حل المسألة
نظرية الصفر النسبي

1) **الجذور:** يتصفح حامد كتابًا في الجبر، وقد وصل إلى دالة كثيرة حدود لم يظهر منها غير الحدين الأول والأخير كما هو مبين في الشكل.

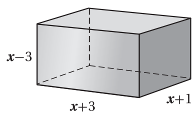
ما الأصفار النسبية الممكنة لهذه الدالة؟
$\pm 1, +2, +4, +8$

2) **الثوابت غير النسبية:** طُلب إلى صالح أن يسجل دالة كثيرة حدود حدها الثابت $\sqrt{2}$. فهل من الممكن أن يكون لمثل هذه الدالة صفر نسبي؟ إذا كانت الإجابة لا، فسر لماذا، وإذا كان ذلك ممكنًا، فأعطِ مثالًا لكثيرة حدود شبيهة ولها جذر نسبي.
نعم، ممكن. فمثلًا كثيرة الحدود
$x^2 - (1 + \sqrt{2})x + \sqrt{2}$
أحد جذورها العدد 1 .

3) تعمل سارة في تدريس الرياضيات، وتختص بالاحتمالات، وفي أثناء عملها أرادت أن تجد أصفار كثيرة الحدود
$p(x) = 288x^4 - 288x^3 + 106x^2 - 17x + 1$.
فما هي أصفار الدالة $p(x)$؟
$\frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{6}$

4) **أهرامات:** أكبر أهرامات الجيزة في مصر قاعدته مربع طول ضلعه $5x$ ياردة وارتفاعه $4x - 50$ ياردة، إذا كان حجمه 3125000 ياردة مكعبة، فاستعمل الحاسبة لإيجاد قيمة x وأبعاد الهرم.
$x = 50$،
طول ضلع القاعدة = 250 ياردة،
الارتفاع = 150 ياردة

5) **صناديق:** عمل صالح صندوقًا عرضه $x + 1$، وطوله $x + 3$، وارتفاعه $x - 3$.



a) أوجد حجم صندوق صالح على صورة دالة في x؟
$V(x) = x^3 + x^2 - 9x - 9$

b) ما قيمة x إذا كان حجم الصندوق 1001 بوصة مكعبة .
10

c) ما قيمة x إذا كان حجم الصندوق $14\frac{5}{8}$ بوصة مكعبة؟
3.5

الاسم: ______________ التاريخ: ______

3-9 التدريبات الإثرائية

الأعداد غير النسبية

اعتقد أحد الفلاسفة ويدعى هباسيوس أنه اكتشف أن $\sqrt{2}$ ليس عددًا نسبيًا، وقد أنكر الرياضيون الذين عاصروه وجود أعداد غير نسبية وقتلوه، لأنهم لم يقتنعوا بفكرة وجود عدد لا يمكن تمثيله على صورة نسبة بين عددين صحيحين.

الطريقة النموذجية لبرهنة أن $\sqrt{2}$ عدد غير نسبي هي باستعمال التناقض، وبالإعتماد على بعض الحقائق البسيطة يمكن برهنتها بسهولة. حيث يفترض البرهان أنه عدد نسبي، ثم يتوصل إلى تناقض مع هذا الفرض.

نظرية : $\sqrt{2}$ عدد غير نسبي

البرهان: افترض أن $\sqrt{2}$ عدد نسبي، لذا $\sqrt{2}=\frac{a}{b}$، حيث a و b عددان أوليان فيما بينهما، أي ليس بينهما عوامل مشتركة غير الواحد الصحيح. لذلك $\frac{a}{b}$ في أبسط صورة، وهذه هي الحالة المسؤولة عن التناقض، فإذا ربعنا طرفي المعادلة $\sqrt{2}=\frac{a}{b}$ نحصل على $2=\frac{a^2}{b^2}$. وهذا يعني أن a^2. عدد زوجي، وإذا كانت a^2 عددًا زوجيًا ، و $b^2=\frac{a^2}{2}$ ، فإن b عدد زوجي أيضا. نستنتج من هذا أن a و b بينهما عامل مشترك غير العدد الواحد وبالذات العدد 2 ، فهما ليسا أوليين فيما بينهما، وهذا تناقض.

نظرية الصفر النسبي تقدم برهانًا مباشرًا لذلك.

تمارين:

1) استعمل نظرية الصفر النسبي لبرهنة أن $\sqrt{2}$ عدد غير نسبي .

ليكن $P(x)=x^2-2$. فالصفر المعروف لهذه الدالة هو $\sqrt{2}$. ولكن من خلال نظرية الصفر النسبي، فإن الاصفار النسبية هي ±1 أو ±2 .

2) بين أن مربع العدد الزوجي هو عدد زوجي .

ليكن a عددًا زوجيًا، $a=2k \Longleftarrow a^2=4k^2=2(2k^2)$ وهو عدد زوجي .

3) بين أن أي عدد صحيح يمثل صفرًا لدالة كثيرة حدود يتعين أن يكون من عوامل الحد الثابت a_0.

لتكن $k=\frac{p}{q}$ عددًا صحيحًا، حيث p من عوامل a_0 ، أي يوجد عدد صحيح M يحقق العلاقة $a_0=MP$
إذا يمكن كتابة $k=\frac{p}{q}=\frac{MP}{MQ}$ وهذا يعني أن $a_0=MP=k(qM)$ ، لذا يكون k عاملًا للعدد a_0 .