



وزارة التربية والتعليم  
Ministry of Education  
المملكة العربية السعودية

# الرياضيات

للفصل الثاني الثانوي

مصادر المعلم للأنشطة الصفية

الفصل الثاني: المصفوفات

العبيكان  
Obekon

Mc  
Graw  
Hill Education

يوزع مجاناً ولا يباع

١٤٣٤ هـ - ٢٠١٣ م

Glencoe Mathematics © 2010  
**CHAPTER RESOURCE MASTERS**  
Algebra 2

الرياضيات - الصف الثاني الثانوي  
**مصادر المعلم للأنشطة الصفية**  
أعدّ النسخة العربية: شركة العبيكان للتعليم

[www.obeikaneducation.com](http://www.obeikaneducation.com)



English Edition Copyright © the McGraw-Hill Companies, Inc.  
All rights reserved.

Arabic Edition is published by Obeikan under agreement with  
The McGraw-Hill Companies, Inc. © 2008.



حقوق الطبع الإنجليزية محفوظة لشركة ماجروهل ©.

الطبعة العربية: مجموعة العبيكان للاستثمار  
وفقاً لاتفاقيتها مع شركة ماجروهل © ٢٠٠٨م / ١٤٢٩هـ.

لا يسمح بإعادة إصدار هذا الكتاب أو نقله في أي شكل أو واسطة، سواءً أكانت إلكترونية أو ميكانيكية، بما في ذلك التصوير بالنسخ «فوتوكوبي»، أو التسجيل، أو التخزين  
والاسترجاع، دون إذن خطي من الناشر.

بِسْمِ اللَّهِ الرَّحْمَنِ الرَّحِيمِ

الحمد لله والصلاة والسلام على نبينا محمد وعلى آله وصحبه أجمعين، وبعد:

### عزيزي المعلم / عزيزتي المعلمة

يسرنا أن نقدم هذه المجموعة من التدريبات المساندة، التي تراعي الفروق الفردية بين الطلاب. حيث نطمح أن يساعدك التنوع في هذه التدريبات على الوصول إلى جميع الطلاب في الصف، مهما تباينت مستوياتهم.

وقد تم تخصيص صفحة أو أكثر لكل نوع من هذه التدريبات؛ لتغطي درسًا من دروس كتاب الطالب. حيث يمكنك أن تكلف الطلاب حل صفحة التدريبات المقابلة لكل درس بحسب مستوى كل منهم؛ سواء في داخل الصف أم في المنزل. وليست هذه التدريبات بديلاً عن كتاب التمارين، ولكنها مساندة ومكملة له. وتشمل هذه التدريبات الأنواع التالية:

### تدريبات إعادة التعليم

تركز هذه التدريبات على محتوى الدروس في كتاب الطالب، وتقدمه بأسلوب تدريسي ومعالجة يختلفان عن كتابي الطالب والتمارين. وهي موجهة إلى الطلاب ذوي المستوى دون المتوسط. ولأهمية حل المسألة تم تخصيص صفحتين من تدريبات إعادة التعليم لكل درس من دروس حل المسألة؛ للتركيز على كيفية اختيار الخطة وتنفيذها، بالإضافة إلى مجموعة من التدريبات المناسبة لتطبيق تلك الخطة.

### تدريبات المهارات

تركز هذه التدريبات غالباً على المهارات الحسابية الموجودة في الدرس، وتتضمن تدريبات إضافية وسائل تركز على تلك المهارات. وهي موجهة إلى الطلاب ذوي المستوى المتوسط.

### التدريبات الإثرائية

تساعد هذه التدريبات على التوسع في مفاهيم الدرس، كما تؤدي إلى توسيع مدارك الطلاب حول تعلم الرياضيات بشكل عام. وهذه التدريبات موجهة إلى الطلاب ذوي المستوى فوق المتوسط.

### ملحق الإجابات:

يتضمن هذا المصدر في آخره ملحقاً بالإجابات، حيث تظهر باللون الأسود الغامق على صفحات مصفّرة.

## المقدمة ..... 4

### الدرس 2-1 مقدمة في المصفوفات

تدريبات إعادة التعليم .....	6
تدريبات المهارات .....	8
تدريبات حل المسألة .....	9
التدريبات الإثرائية .....	10

### الدرس 2-4 المحددات وقاعدة كرامر

تدريبات إعادة التعليم .....	21
تدريبات المهارات .....	23
تدريبات حل المسألة .....	24
التدريبات الإثرائية .....	25

### الدرس 2-2 العمليات على المصفوفات

تدريبات إعادة التعليم .....	11
تدريبات المهارات .....	13
تدريبات حل المسألة .....	14
التدريبات الإثرائية .....	15

### الدرس 2-5 النظير الضربي للمصفوفة وأنظمة المعادلات الخطية

تدريبات إعادة التعليم .....	26
تدريبات المهارات .....	28
تدريبات حل المسألة .....	29
التدريبات الإثرائية .....	30
ملحق الإجابات .....	31

### الدرس 2-3 ضرب المصفوفات

تدريبات إعادة التعليم .....	16
تدريبات المهارات .....	18
تدريبات حل المسألة .....	19
التدريبات الإثرائية .....	20

## 2-1

## تدريبات إعادة التعليم

## مقدمة في المصفوفات

## تنظيم البيانات وتحليلها

المصفوفة	تنظيم مستطيل الشكل لمتغيرات أو ثوابت في صفوف أفقية وأعمدة رأسية، محصورة بين قوسين.
----------	------------------------------------------------------------------------------------

توصف المصفوفة بترتيبها عادة، فالمصفوفة التي تتكون من  $m$  من الصفوف و  $n$  من الأعمدة، تكون مصفوفة من الرتبة  $m \times n$ .

## مثال 1

تحتضن البومة بيضها مدة 30 يوماً، وتحتاج الصغار إلى 30 يوماً كي ينمو ريشها وتقوى على الطيران. ويحتضن الطائر السريع بيضه مدة 20 يوماً، وتحتاج الصغار 44 يوماً كي ينمو ريشها وتقوى على الطيران. ويحتضن الحمام بيضه مدة 15 يوماً وتحتاج الصغار إلى 17 يوماً كي ينمو ريشها وتقوى على الطيران. اكتب مصفوفة  $2 \times 3$  لتنظيم المعلومات السابقة.

	البومة	السريع	الحمام
احتضان البيض	30	20	15
نمو الريش	30	44	17

## مثال 2

ما رتبة المصفوفة  $A$  إذا كانت  $A = \begin{bmatrix} 13 & 10 & -5 & 45 \\ 2 & 8 & 15 & 80 \end{bmatrix}$

بما أن المصفوفة  $A$  تتكون من صفين وأربعة أعمدة، فهي من الرتبة  $2 \times 4$ .

## تمارين:

حدد رتبة كل مصفوفة فيما يأتي:

$$\begin{bmatrix} 71 & 44 \\ 39 & 27 \\ 45 & 16 \\ 92 & 53 \\ 78 & 65 \end{bmatrix} \quad (3)$$

$$[16 \ 12 \ 0] \quad (2)$$

$$\begin{bmatrix} 15 & 5 & 27 & -4 \\ 23 & 6 & 0 & 5 \\ 14 & 70 & 24 & -3 \\ 63 & 3 & 42 & 90 \end{bmatrix} \quad (1)$$

4) تعد شركة سياحية برنامجاً سياحياً لأربعة من مدن المملكة وهي: جدة، الرياض، المدينة، الدمام. في الأيام 19, 20, 21, 22 من شهر جمادى الآخرة 1434هـ، وقد كانت درجات الحرارة السليزية العظمى في الأيام المذكورة

الرياض  $25^\circ \ 26^\circ \ 28^\circ \ 29^\circ$   
الدمام  $32^\circ \ 30^\circ \ 30^\circ \ 31^\circ$

جدة  $35^\circ \ 34^\circ \ 34^\circ \ 35^\circ$   
المدينة  $34^\circ \ 34^\circ \ 31^\circ \ 32^\circ$

نظم هذه البيانات في مصفوفة من الرتبة  $4 \times 4$ .

## 2-1

## تدريبات إعادة التعليم

(تتمة)

## مقدمة في المصفوفات

**عناصر المصفوفة:** المصفوفة عبارة عن تنظيم على شكل مستطيل لمتغيرات أو ثوابت في صفوف أفقية وأعمدة رأسية، تُسمَّى عناصر، ويُحدَّد العنصر وفق موقعه في المصفوفة. ويُحدَّد موقع العنصر برقم الصف متبوعاً برقم العمود الذين يقع فيهما. فمثلاً:  $a_{12}$  يشير إلى العنصر في الصف الأول والعمود الثاني من المصفوفة. وفي المصفوفتين أدناه. قيمة العنصر  $a_{12}$  في المصفوفة  $A$  هي 11، وقيمة  $b_{32}$  في المصفوفة  $B$  هي 7.

$$\underline{B} = \begin{bmatrix} 3 & 9 & 12 \\ 5 & 10 & 15 \\ 8 & 7 & 6 \\ 11 & 13 & 1 \\ 4 & 2 & 14 \end{bmatrix} \quad \underline{A} = \begin{bmatrix} 7 & 11 & 2 & 8 \\ 5 & 4 & 10 & 1 \\ 9 & 3 & 6 & 12 \end{bmatrix}$$

أوجد قيمة  $d_{54}$ 

مثال 1

$$\underline{D} = \begin{bmatrix} 25 & 11 & 4 & 1 & 20 \\ 7 & 8 & 9 & 12 & 13 \\ 17 & 6 & 15 & 18 & 2 \\ 22 & 16 & 21 & 24 & 19 \\ 5 & 23 & 3 & 14 & 10 \end{bmatrix}$$

أوجد قيمة  $c_{23}$ 

مثال 1

$$\underline{C} = \begin{bmatrix} 2 & 5 & 3 \\ 3 & 4 & 1 \end{bmatrix}$$

$c_{23}$  هو العنصر الموجود في الصف الثاني والعمود الثالث، وقيمته 1.  
 $d_{54}$  هو العنصر الموجود في الصف الخامس والعمود الرابع، وقيمته 14.

## تمارين:

حدد قيمة كل عنصر في المصفوفات الآتية:

$$\underline{H} = \begin{bmatrix} 5 & 9 & 11 & 4 \\ 3 & 7 & 2 & 10 \\ 8 & 2 & 6 & 1 \end{bmatrix} \quad \underline{G} = \begin{bmatrix} 1 & 14 & 13 & 12 \\ 2 & 15 & 20 & 11 \\ 3 & 16 & 19 & 10 \\ 4 & 17 & 18 & 9 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \end{bmatrix} \quad \underline{F} = \begin{bmatrix} 12 & 7 & 5 \\ 9 & 2 & 11 \\ 6 & 14 & 8 \\ 1 & 4 & 3 \end{bmatrix}$$

$h_{22}$  (3)

$g_{51}$  (2)

$f_{32}$  (1)

$f_{23}$  (6)

$h_{34}$  (5)

$g_{43}$  (4)

$g_{14}$  (9)

$f_{42}$  (8)

$h_{14}$  (7)

## 2-1 تدريبات المهارات

### مقدمة في المصفوفات

حدد رتبة كل مصفوفة فيما يأتي:

$$\begin{bmatrix} 3 & 2 & 4 \\ -1 & 4 & 0 \end{bmatrix} \quad (1) \quad [0 \ 15] \quad (2)$$

$$\begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 8 \end{bmatrix} \quad (3) \quad \begin{bmatrix} 6 & 1 & 2 \\ -3 & 4 & 5 \\ -2 & 7 & 9 \end{bmatrix} \quad (4)$$

$$\begin{bmatrix} 9 & 3 & -3 & -6 \\ 3 & 4 & -4 & 5 \end{bmatrix} \quad (5) \quad \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ -1 \\ -3 \end{bmatrix} \quad (6)$$

حدد قيمة العنصر المذكور في المصفوفات الآتية:

$$\underline{C} = \begin{bmatrix} 8 & 1 & 6 \\ 7 & 0 & 2 \\ 4 & 9 & 5 \\ 3 & 12 & 10 \end{bmatrix} \quad \underline{B} = \begin{bmatrix} 5 & -2 & 4 & 3 \\ 0 & 8 & 12 & -1 \end{bmatrix} \quad \underline{A} = \begin{bmatrix} 9 & 6 & 7 \\ 2 & 5 & 0 \\ 10 & 3 & 11 \end{bmatrix}$$

$$b_{11} \quad (9)$$

$$c_{42} \quad (8)$$

$$b_{22} \quad (7)$$

$$a_{21} \quad (12)$$

$$c_{41} \quad (11)$$

$$a_{33} \quad (10)$$

$$a_{12} \quad (15)$$

$$b_{13} \quad (14)$$

$$c_{33} \quad (13)$$



## 2-1

## تدريبات حل المسألة

## مقدمة في المصفوفات

(1) سكان: يوضح الجدول أدناه تعداد السكان والمساحة في بعض المدن والبلدات في إحدى الدول. ما رتبة المصفوفة التي تمثل البيانات؟

المدينة/البلدة	عدد السكان	المساحة
أ	120000	317 كلم <sup>2</sup>
ب	91360	150 كلم <sup>2</sup>
ج	836200	400 كلم <sup>2</sup>
د	50900	70 كلم <sup>2</sup>
هـ	2500	40 كلم <sup>2</sup>

(2) مصبغة: بحث عادل عن أماكن فيها آلات لغسل الملابس وتجهيفها، ووجد عدة أماكن منها: المغسلة العملاقة وتحتوي على 20 غسالة صغيرة، و10 غسالات كبيرة، و20 آلة تجفيف. والمغسلة السريعة وفيها 40 غسالة صغيرة، و5 غسالات كبيرة، و50 آلة تجفيف. والمغسلة العجيبة وفيها 15 مغسلة صغيرة، و40 كبيرة، و100 آلة تجفيف. اكتب مصفوفة تنظم هذه البيانات.

(3) مسافات بين المدن: أكمل مصفوفة المسافات بين المدن المذكورة.

	المدينة أ	المدينة ب	المدينة ج
المدينة أ	0	848	
المدينة ب	640	432	
المدينة ج			

(4) مبيعات: أحصى أمين مخازن عدد المصابيح الكهربائية في مخزنه لثلاثة أنواع من هذه المصابيح لمدة 5 أيام. وقد قرر أن يكون مصفوفة بهذه المعلومات. يمثل كل صف نوعاً من المصابيح، ويمثل كل عمود يوماً مختلفاً. وتمثل العناصر في العمود  $N$  المصابيح في بداية اليوم  $N$ .

$$\begin{bmatrix} 25 & 24 & 22 & 20 & 19 \\ 30 & 27 & 25 & 22 & 21 \\ 28 & 25 & 21 & 19 & 19 \end{bmatrix}$$

فأي نوع من المصابيح يوجد منه العدد الأكبر في المخزن في كل يوم من الأيام الخمسة؟

(5) أحذية: يحتفظ مدير محل لبيع الأحذية بسجل يحتوي على قيمة مبيعات الأحذية (بعشرات الريالات) التي يبيعها كل من الموظفين الثلاثة في المحل كل يوم من السبت إلى الأربعاء فكانت على النحو الآتي:

السبت الأحد الإثنين الثلاثاء الأربعاء

هاشم: 120 ، 210 ، 105 ، 150 ، 60

سالم: 90 ، 180 ، 60 ، 135 ، 90

خالد: 105 ، 270 ، 90 ، 120 ، 90

(a) نظم البيانات في مصفوفة من الرتبة  $3 \times 5$

(b) أي من الموظفين كان مجموع مبيعاته أكثر؟

## 2-1

## التدريبات الإثرائية

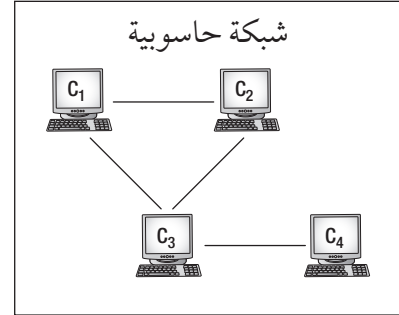
## المصفوفات وشبكة المعلومات

تُعدُّ نظرية الرسم فرعاً من فروع الرياضيات التي تستكشف أوضاعاً تُمثَّل في صورة نقاط تُسمَّى رؤوساً، وقطعاً مستقيمة تصل بينها تُسمَّى أحرفاً. فمثلاً يمكن أن تُستعمل لتمثيل شبكة حاسوبية أو رحلات طيران بين المدن الرئيسة. وتستعمل مصفوفة الوضع أو الحالة لتمثيل رؤوس الشكل، وحوافه والعلاقة بين رؤوس الشكل، وتشغل أسماء الرؤوس كل صفٍّ وعمود. فمثلاً مصفوفة الوضع للشبكة الحاسوبية موضحة بالشكل أدناه، في حين تمثل الأعداد عدد الأحرف التي تربط الرؤوس.

يشير إلى أن عدد الأحرف التي تربط  $C_1$  بـ  $C_2$  وهو 1

	$C_1$	$C_2$	$C_3$	$C_4$
$C_1$	0	1	1	0
$C_2$	1	0	1	0
$C_3$	1	1	0	1
$C_4$	0	0	1	0

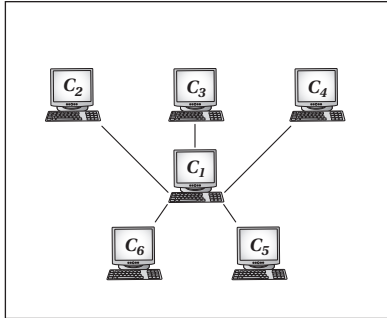
يشير إلى عدد الأحرف التي تربط  $C_1$  بـ  $C_4$



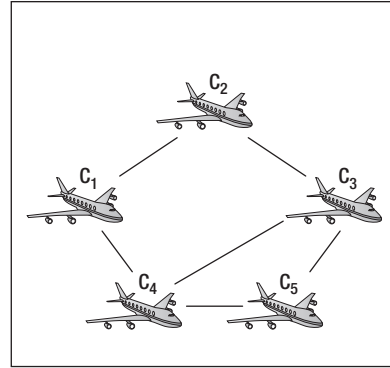
أكمل مصفوفة الوضع لكل شبكة حاسوب

(1) مخطط المواصلات لشركة طيران

(2) شبكة حاسوب في إحدى الشركات



	$C_1$	$C_2$	$C_3$	$C_4$	$C_5$	$C_6$
$C_1$	_____	_____	_____	_____	_____	_____
$C_2$	_____	_____	_____	_____	_____	_____
$C_3$	_____	_____	_____	_____	_____	_____
$C_4$	_____	_____	_____	_____	_____	_____
$C_5$	_____	_____	_____	_____	_____	_____
$C_6$	_____	_____	_____	_____	_____	_____



	$C_1$	$C_2$	$C_3$	$C_4$	$C_5$
$C_1$	_____	_____	_____	_____	_____
$C_2$	_____	_____	_____	_____	_____
$C_3$	_____	_____	_____	_____	_____
$C_4$	_____	_____	_____	_____	_____
$C_5$	_____	_____	_____	_____	_____

## 2-2

## تدريبات إعادة التعليم

## العمليات على المصفوفات

جمع المصفوفات وطرحها: المصفوفات التي لها الرتبة نفسها يمكنك جمعها وطرح إحداها من الأخرى.

$\begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} j & k & i \\ m & n & o \\ p & q & r \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a+j & b+k & c+i \\ d+m & e+n & f+o \\ g+p & h+q & i+r \end{bmatrix}$	جمع المصفوفات
$\begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} j & k & i \\ m & n & o \\ p & q & r \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a-j & b-k & c-i \\ d-m & e-n & f-o \\ g-p & h-q & i-r \end{bmatrix}$	طرح المصفوفات

أوجد  $\underline{A} + \underline{B}$ ، إذا كان:  $\underline{A} = \begin{bmatrix} 6 & -7 \\ 2 & -12 \end{bmatrix}$ ,  $\underline{B} = \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ -5 & -6 \end{bmatrix}$

مثال 1

$$\begin{aligned} \underline{A} + \underline{B} &= \begin{bmatrix} 6 & -7 \\ 2 & -12 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ -5 & -6 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 6+4 & -7+2 \\ 2+(-5) & -12+(-6) \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 10 & -5 \\ -3 & -18 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

أوجد  $\underline{A} - \underline{B}$ ، إذا كان:  $\underline{A} = \begin{bmatrix} -2 & 8 \\ 3 & -4 \\ 10 & 7 \end{bmatrix}$ ,  $\underline{B} = \begin{bmatrix} 4 & -3 \\ -2 & 1 \\ -6 & 8 \end{bmatrix}$

مثال 2

$$\begin{aligned} \underline{A} - \underline{B} &= \begin{bmatrix} -2 & 8 \\ 3 & -4 \\ 10 & 7 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 4 & -3 \\ -2 & 1 \\ -6 & 8 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} -2-4 & 8-(-3) \\ 3-(-2) & -4-1 \\ 10-(-6) & 7-8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -6 & 11 \\ 5 & -5 \\ 16 & -1 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

تمارين:

أوجد الناتج في كل مما يأتي إن أمكن، وإذا تعذر ذلك فاكتب «لا يمكن».

$$\begin{bmatrix} 6 & -5 & 9 \\ -3 & 4 & 5 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -4 & 3 & 2 \\ 6 & 9 & -4 \end{bmatrix} \quad (2)$$

$$\begin{bmatrix} 8 & 7 \\ -10 & -6 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -4 & 3 \\ 2 & -12 \end{bmatrix} \quad (1)$$

$$\begin{bmatrix} 5 & -2 \\ -4 & 6 \\ 7 & 9 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -11 & 6 \\ 2 & -5 \\ 4 & -7 \end{bmatrix} \quad (4)$$

$$\begin{bmatrix} 6 \\ -3 \\ 2 \end{bmatrix} + [-6 \ 3 \ -2] \quad (3)$$

$$\begin{bmatrix} \frac{3}{4} & \frac{2}{5} \\ -\frac{1}{2} & \frac{4}{3} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix} \quad (6)$$

$$\begin{bmatrix} 8 & 0 & -6 \\ 4 & 5 & -11 \\ -7 & 3 & 4 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -2 & 1 & 7 \\ 3 & -4 & 3 \\ -8 & 5 & 6 \end{bmatrix} \quad (5)$$

## 2-2

## تدريبات إعادة التعليم

## العمليات على المصفوفات

(تتمة)

ضرب المصفوفة في عدد: يمكنك ضرب مصفوفة من الرتبة  $m \times n$  في عدد ثابت  $k$ .

الضرب في عدد	$k \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ka & kb & kc \\ kd & ke & kf \end{bmatrix}$
--------------	-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------

مثال

إذا كان:  $\underline{A} = \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ -6 & 3 \end{bmatrix}$  و  $\underline{B} = \begin{bmatrix} -1 & 5 \\ 7 & 8 \end{bmatrix}$ ، فأوجد  $3\underline{B} - 2\underline{A}$ بالتعويض بدل  $A$  و  $B$ 

$$3\underline{B} - 2\underline{A} = 3 \begin{bmatrix} -1 & 5 \\ 7 & 8 \end{bmatrix} - 2 \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ -6 & 3 \end{bmatrix}$$

بالضرب

$$= \begin{bmatrix} 3(-1) & 3(5) \\ 3(7) & 3(8) \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 2(4) & 2(0) \\ 2(-6) & 2(3) \end{bmatrix}$$

بالتبسيط

$$= \begin{bmatrix} -3 & 15 \\ 21 & 24 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 8 & 0 \\ -12 & 6 \end{bmatrix}$$

بالطرح

$$= \begin{bmatrix} -3 & -8 & 15 & -0 \\ 21 & -(-12) & 24 & -6 \end{bmatrix}$$

بالتبسيط

$$= \begin{bmatrix} -11 & 15 \\ 33 & 18 \end{bmatrix}$$

تمارين:

أوجد الناتج في كلٍّ مما يأتي إن أمكن، وإذا تعذر ذلك فاكتب «لا يمكن».

$$0.2 \begin{bmatrix} 25 & -10 & -45 \\ 5 & 55 & -30 \\ 60 & 35 & -95 \end{bmatrix} \quad (3)$$

$$-\frac{1}{3} \begin{bmatrix} 6 & 15 & 9 \\ 51 & -33 & 24 \\ -18 & 3 & 45 \end{bmatrix} \quad (2)$$

$$6 \begin{bmatrix} 2 & -5 & 3 \\ 0 & 7 & -1 \\ -4 & 6 & 9 \end{bmatrix} \quad (1)$$

$$-2 \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 0 & 7 \end{bmatrix} + 4 \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 2 & 5 \end{bmatrix} \quad (5)$$

$$3 \begin{bmatrix} -4 & 5 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} - 2 \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ -3 & 5 \end{bmatrix} \quad (4)$$

$$4 \begin{bmatrix} 1 & -2 & 5 \\ -3 & 4 & 1 \end{bmatrix} - 2 \begin{bmatrix} 4 & 3 & -4 \\ 2 & -5 & -1 \end{bmatrix} \quad (7)$$

$$2 \begin{bmatrix} 6 & -10 \\ -5 & 8 \end{bmatrix} + 5 \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 3 \end{bmatrix} \quad (6)$$

$$\frac{1}{4} \left( \begin{bmatrix} 9 & 1 \\ -7 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 3 & -5 \\ 1 & 7 \end{bmatrix} \right) \quad (9)$$

$$8 \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & -1 \\ -2 & 4 \end{bmatrix} + 3 \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ -2 & 3 \\ 3 & -4 \end{bmatrix} \quad (8)$$

## تدريبات المهارات

2-2

## العمليات على المصفوفات

أوجد الناتج في كلِّ مما يأتي إن أمكن، وإذا تعذر ذلك فاكتب «لا يمكن».

$$\begin{bmatrix} 8 & 3 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & -7 \\ 6 & 2 \end{bmatrix} \quad (2) \quad [5 \ -4] + [4 \ 5] \quad (1)$$

$$\begin{bmatrix} 5 & -1 & 2 \\ 1 & 8 & -6 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 9 & 9 & 2 \\ 4 & 6 & 4 \end{bmatrix} \quad (4) \quad [3 \ 1 \ 6] + \begin{bmatrix} 4 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix} \quad (3)$$

$$[6 \ -3] - 4[4 \ 7] \quad (6) \quad 3[9 \ 4 \ -3] \quad (5)$$

$$3 \begin{bmatrix} 8 \\ 0 \\ -3 \end{bmatrix} - 4 \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 10 \end{bmatrix} \quad (8) \quad -2 \begin{bmatrix} -2 & 5 \\ 5 & 9 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \quad (7)$$

$$3 \begin{bmatrix} 3 & 1 & 3 \\ -4 & 7 & 5 \end{bmatrix} - 2 \begin{bmatrix} 1 & -1 & 5 \\ 6 & 6 & -3 \end{bmatrix} \quad (10) \quad 5 \begin{bmatrix} -4 & 6 \\ 10 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} + 2 \begin{bmatrix} 6 & 5 \\ -3 & -2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \quad (9)$$

استعمل المصفوفات  $\underline{A}$ ,  $\underline{B}$ ,  $\underline{C}$  لإيجاد كلِّ مما يأتي:

$$\underline{A} = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}, \underline{B} = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}, \underline{C} = \begin{bmatrix} -3 & 4 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\underline{B} - \underline{C} \quad (12)$$

$$\underline{A} + \underline{B} \quad (11)$$

$$\underline{A} + \underline{B} + \underline{C} \quad (14)$$

$$\underline{B} - \underline{A} \quad (13)$$

$$-5\underline{C} \quad (16)$$

$$3\underline{B} \quad (15)$$

$$2\underline{B} + 3\underline{A} \quad (18)$$

$$\underline{A} - 4\underline{C} \quad (17)$$

## 2-2

## تدريبات حل المسألة

## العمليات على المصفوفات

(1) حدائق الحيوان: تشير المصفوفة أدناه إلى أسعار تذاكر دخول حديقة الحيوان ومدينة ألعاب للشخص الواحد (بالريال).

	أطفال	كبار
حديقة الحيوان	10	5
مدينة الألعاب	12	8

ما الذي يمكنك فعله بهذه المصفوفة لتحصل على مصفوفة جديدة تبين الأسعار لخمسة أشخاص؟

(2) إشارات عناصر المصفوفات: يريد مهندس أن يغيّر إشارات عناصر مصفوفة، فقام الأول بضرب المصفوفة في العدد  $-1$ ، في حين قام الآخر بطرح مثلي المصفوفة من المصفوفة نفسها. فأَيُّ منهما سيحصل على إجابة صحيحة؟

(3) تذاكر سفر: نُظِّمَت أسعار تذاكر السفر بين 3 مدن في المصفوفة الأولى، وُنظِّمَت الزيادة على التذاكر بعد رفع أسعارها بين هذه المدن في المصفوفة الثانية أيضا.

	المدينة أ	المدينة ب	المدينة ج
المدينة أ	0	440	700
المدينة ب	460	0	660
المدينة ج	850	700	0

مصفوفة الزيادة في أسعار التذاكر:

	المدينة أ	المدينة ب	المدينة ج
المدينة أ	0	40	70
المدينة ب	46	0	60
المدينة ج	85	70	0

اكتب مصفوفة تمثل الأسعار الجديدة للتذاكر.

(4) تباع الشمس: تمثل المصفوفة  $H$  أطوال 3 نباتات من تباع الشمس بالبوصات في وقت ما، وهي مصفوفة  $3 \times 1$ . بينما تمثل المصفوفة  $G$  الزيادة في أطوال النباتات الثلاث خلال أسبوع، فماذا تمثل المصفوفة  $H + 4G$ ؟

(5) الغذاء: تمثل قائمة الطعام أسعار بعض الوجبات في مطعم بالريال.

	طبق كبير	طبق صغير
لحم	17.00	9.00
دجاج	14.00	7.00
سمك	22.00	11.00

(a) كَوْن مصفوفة  $3 \times 2$  تنظم هذه البيانات.

(b) لتكن  $M$  هي المصفوفة التي كونتها في الفرع a. اكتب عبارة تشتمل على  $M$ ، بالإضافة إلى زيادة على السعر قدرها 20% مقابل خدمات.

(c) كَوْن المصفوفة التي وصفتها في الفرع b.

## التدريبات الإثرائية

## 2-2

أبهرت خصائص الأعداد الأولية كثيرًا من علماء الرياضيات، وفي عام 1934 قام طالب من شرق الهند يدعى سندانام ببناء المصفوفة الآتية.

4	7	10	13	16	19	22	25	• • •
7	12	17	22	27	32	37	42	• • •
10	17	24	31	38	45	52	59	• • •
13	22	31	40	49	58	67	76	• • •
16	27	38	49	60	71	82	93	• • •
•	•	•	•	•	•	•	•	• • •

ومن خصائص هذه المصفوفة المذهلة أنه يمكنك استعمالها للحكم على بعض الأعداد هل هي أولية أو غير أولية.

أكمل المسائل الآتية لتكتشف هذه الخاصية.

(1) تكوّن الصف الأول والعمود الأول من نمط حسابي، فما هو الفرق الثابت في هذا النمط؟

(2) أوجد الحدود الأربعة التالية في الصف الأول.

(3) ما الفرق الثابت المستعمل في تكوين النمط في كل من الصفوف: 2، 3، 4، 5.

(4) اكتب الصفيين التاليين للمصفوفة، وضمن كل صف 8 أعداد.

(5) اختر أي 5 أعداد من المصفوفة ولكل عدد اخترته مثل  $n$ ، أوجد  $2n + 1$ .

(6) حلل الأعداد التي توصلت إليها في السؤال (5) إلى عواملها الأولية.

(7) استعمل نتائجك في السؤالين 6، 5 في إكمال العبارة الآتية. إذا كان العدد  $n$  في المصفوفة، فإن  $2n + 1$  ——— أولي / غير أولي.

(8) اختر 5 أعداد ليست ضمن المصفوفة، وأوجد لكل عددٍ اخترته  $n$  المقدار  $2n + 1$ ، ويبيّن أن الأعداد التي توصلت إليها أعداد أولية.

(9) أكمل العبارة "إذا لم يقع العدد  $n$  في المصفوفة، فإن  $2n + 1$  عدد ———".

## تدريبات إعادة التعليم

2-3

## ضرب المصفوفات

ضرب المصفوفات: يمكنك ضرب مصفوفتين إذا وفقط إذا كان عدد أعمدة الأولى يساوي عدد صفوف الثانية.

$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} e & f \\ g & h \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ae + bg & af + bh \\ ce + dg & cf + dh \end{bmatrix}$	ضرب المصفوفات
--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------	---------------

أوجد  $\underline{A} \underline{B}$  إذا كان

$$\underline{A} = \begin{bmatrix} -4 & 3 \\ 2 & -2 \\ 1 & 7 \end{bmatrix}, \underline{B} = \begin{bmatrix} 5 & -2 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}$$

مثال

بالتعويض

$$\underline{A} \underline{B} = \begin{bmatrix} -4 & 3 \\ 2 & -2 \\ 1 & 7 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 5 & -2 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}$$

بضرب الصف في العمود

$$= \begin{bmatrix} -4(5) + 3(-1) & -4(-2) + 3(3) \\ 2(5) + (-2)(-1) & 2(-2) + (-2)(3) \\ 1(5) + 7(-1) & 1(-2) + 7(3) \end{bmatrix}$$

بالتبسيط

$$= \begin{bmatrix} -23 & 17 \\ 12 & -10 \\ -2 & 19 \end{bmatrix}$$

## تمارين:

أوجد الناتج في كل مما يأتي إذا كان ذلك ممكناً، وإذا تعذر ذلك فاكتب «لا يمكن».

(1)  $\begin{bmatrix} 4 & 1 \\ -2 & 3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$  (2)  $\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 3 & 7 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ -1 & 4 \end{bmatrix}$  (3)  $\begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$

(4)  $\begin{bmatrix} -3 & 1 \\ 5 & -2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 4 & 0 & -2 \\ -3 & 1 & 1 \end{bmatrix}$  (5)  $\begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 0 & 4 \\ -5 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$  (6)  $\begin{bmatrix} 5 & -2 \\ 2 & -3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 4 & -1 \\ -2 & 5 \end{bmatrix}$

(7)  $\begin{bmatrix} 6 & 10 \\ -4 & 3 \\ -2 & 7 \end{bmatrix} \cdot [0 \ 4 \ -3]$  (8)  $\begin{bmatrix} 7 & -2 \\ 5 & -4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ -2 & 0 \end{bmatrix}$  (9)  $\begin{bmatrix} 2 & 0 & -3 \\ 1 & 4 & -2 \\ -1 & 3 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 & -2 \\ 3 & 1 \\ -2 & 4 \end{bmatrix}$



## 2-3

## تدريبات إعادة التعليم

(تتمة)

## ضرب المصفوفات

ضرب المصفوفات: لا تنطبق خاصية التبديل على ضرب المصفوفات.

لأي مصفوفات $A, B, C$ معرفة عليها عملية الضرب، ولأي عدد ثابت $k$ تكون الخصائص الآتية صحيحة.	خصائص ضرب المصفوفات.
$(A \ B)C = A(B \ C)$	الخاصية التجميعية في ضرب المصفوفات.
$k(A \ B) = (k \ A)B = A(k \ B)$	الخاصية التجميعية في ضرب عدد في مصفوفة.
$C(A + B) = C \ A + C \ B$	خاصية التوزيع من اليسار.
$(A + B)C = A \ C + B \ C$	خاصية التوزيع من اليمين.

مثال

استعمل  $A = \begin{bmatrix} 4 & -3 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 5 & -3 \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 6 & 3 \end{bmatrix}$  لإيجاد حاصل ضرب كل مما يأتي:(a)  $(A + B)C$ 

$$\begin{aligned}
 (A + B)C &= \left( \begin{bmatrix} 4 & -3 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 5 & -3 \end{bmatrix} \right) \cdot \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 6 & 3 \end{bmatrix} \\
 &= \begin{bmatrix} 6 & -3 \\ 7 & -2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 6 & 3 \end{bmatrix} \\
 &= \begin{bmatrix} 6(1) + (-3)(6) & 6(-2) + (-3)(3) \\ 7(1) + (-2)(6) & 7(-2) + (-2)(3) \end{bmatrix} \\
 &= \begin{bmatrix} -12 & -21 \\ -5 & -20 \end{bmatrix}
 \end{aligned}$$

(b)  $A \ C + B \ C$ 

$$\begin{aligned}
 A \ C + B \ C &= \begin{bmatrix} 4 & -3 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 6 & 3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 5 & -3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 6 & 3 \end{bmatrix} \\
 &= \begin{bmatrix} 4(1) + (-3)(6) & 4(-2) + (-3)(3) \\ 2(1) + 1(6) & 2(-2) + 1(3) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2(1) + 0(6) & 2(-2) + 0(3) \\ 5(1) + (-3)(6) & 5(-2) + (-3)(3) \end{bmatrix} \\
 &= \begin{bmatrix} -14 & -17 \\ 8 & -1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 & -4 \\ -13 & -19 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -12 & -21 \\ -5 & -20 \end{bmatrix}
 \end{aligned}$$

لاحظ أن النتيجة في المثال أعلاه توضح خاصية التوزيع من اليمين إلا أنها لا تبرهن صحتها.

تمارين:

استعمل  $A = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 5 & -2 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 6 & 4 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & -2 \\ 1 & -3 \end{bmatrix}$  والعدد  $k = -4$ ، لتحديد إذا كانت المعادلات الآتية

صحيحة للمصفوفات المعطاة:

$$A \ B = B \ A \quad (2)$$

$$k(A \ B) = (k \ A)B \quad (1)$$

$$(A \ B)C = A(B \ C) \quad (4)$$

$$B \ C = C \ B \quad (3)$$

$$k(A + B) = k \ A + k \ B \quad (6)$$

$$C(A + B) = A \ C + B \ C \quad (5)$$

## تدريبات المهارات

2-3

## ضرب المصفوفات

حدّد إذا كانت عملية الضرب معرفة في كلّ ممّا يأتي أم لا، وإذا كانت معرفة، فأوجد رتبة المصفوفة الناتجة.

$$\underline{M}_{1 \times 3} \bullet \underline{N}_{3 \times 2} \quad (2) \quad \underline{A}_{2 \times 5} \bullet \underline{B}_{5 \times 1} \quad (1)$$

$$\underline{R}_{4 \times 4} \bullet \underline{S}_{4 \times 1} \quad (4) \quad \underline{B}_{3 \times 2} \bullet \underline{A}_{3 \times 2} \quad (3)$$

$$\underline{A}_{6 \times 4} \bullet \underline{B}_{4 \times 5} \quad (6) \quad \underline{X}_{3 \times 3} \bullet \underline{Y}_{3 \times 4} \quad (5)$$

أوجد الناتج في كلّ ممّا يأتي. إذا كان ذلك ممكناً.

$$\begin{bmatrix} 5 & 6 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \bullet \begin{bmatrix} 2 & -5 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} \quad (8) \quad \begin{bmatrix} 3 & 2 \end{bmatrix} \bullet \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (7)$$

$$\begin{bmatrix} 3 \\ -2 \end{bmatrix} \bullet \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \quad (10) \quad \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \bullet \begin{bmatrix} 3 \\ -2 \end{bmatrix} \quad (9)$$

$$\begin{bmatrix} -1 \\ 3 \end{bmatrix} \bullet [2 \quad -3 \quad -2] \quad (12) \quad [-3 \quad 4] \bullet \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} \quad (11)$$

$$\begin{bmatrix} 2 & -2 \\ 4 & 5 \\ -3 & 1 \end{bmatrix} \bullet \begin{bmatrix} 0 & 3 \\ 3 & 0 \end{bmatrix} \quad (14) \quad \begin{bmatrix} 5 \\ 6 \\ -3 \end{bmatrix} \bullet \begin{bmatrix} 4 \\ 8 \end{bmatrix} \quad (13)$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \bullet \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix} \quad (16) \quad \begin{bmatrix} -4 & 4 \\ -2 & 1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} \bullet \begin{bmatrix} 3 & -3 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \quad (15)$$

استعمل  $k = 2$ ،  $\underline{A} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$ ،  $\underline{B} = \begin{bmatrix} -3 & 2 \\ 5 & 1 \end{bmatrix}$ ،  $\underline{C} = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ ؛ لتحديد ما إذا كانت المعادلات الآتية صحيحة للمصفوفات المعطاة.

$$\underline{A} \underline{B} = \underline{B} \underline{A} \quad (18) \quad k(\underline{A} \underline{C}) = \underline{A}(k \underline{C}) \quad (17)$$

$$k(\underline{A} - \underline{B}) = k \underline{A} - k \underline{B} \quad (20) \quad \underline{B}(\underline{A} + \underline{C}) = \underline{A} \underline{B} + \underline{B} \underline{C} \quad (19)$$

## 2-3

## تدريبات حل المسألة

## ضرب المصفوفات

(1) اكتشف الخطأ: إذا كان كل من المصفوفتين  $A, B$  من الرتبة  $2 \times 2$ ، وقد أجرى سامي عليها الاشتقاقات الآتية، فهل هي صحيحة؟

وفي حالة عدم صحتها، فما الخطأ الذي ارتكبه؟

$$(A + B)^2 = (A + B)(A + B) \quad (a)$$

$$= (A + B)A + (A + B)B \quad (b)$$

$$= AA + BA + AB + BB \quad (c)$$

$$= A^2 + BA + AB + B^2 \quad (d)$$

$$= A^2 + AB + AB + B^2 \quad (e)$$

$$= A^2 + 2AB + B^2 \quad (f)$$

(2) تسجيل الإجابات: سجّل مازن درجات طلاب صفه

في مصفوفة من الرتبة  $20 \times 3$ ، في حين سجّل في كل

صف درجات أحد الطلاب. وقد سُجّلت درجات

الاختبار الأول لجميع الطلاب في العمود الأول،

والاختبار الثاني في العمود الثاني. والاختبار الثالث في

العمود الثالث. وأراد مازن أن يكون مصفوفة من الرتبة

$20 \times 1$  ليسجل درجات الطلاب الموزونة. فإذا كان

لكل من الإختبارين الأول والثاني 25% من الدرجة

النهاية، وللاختبار الثالث 50%، ففي أي مصفوفة

ي ضرب مصفوفته الأصلية ( $20 \times 3$ ) من اليمين؟

(3) مصفوفات خاصة: كتبت سارة مصفوفة  $M$  من الرتبة

$3 \times 3$ ، ووجدت أنه لأية مصفوفة  $X$  من الرتبة  $3 \times 3$

يكون  $MX = X$ ، فماذا يتعين أن تكون المصفوفة  $M$ ؟

(4) قوى: تعلم توفيق لتوّه ضرب المصفوفات، وبدأ يتساءل: ما الذي يحصل عند رفع المصفوفة لأُس؟ لقد قام بحساب عدد قليل من القوى الأولى للمصفوفة  $M$ ، حيث  $M = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ ، ولاحظ نمطاً، فما هي  $M^n$ ؟

(5) مقارنة الأسعار: يزيد متوسط إنفاق الأسرة على 500 ريال في بداية العام الدراسي لشراء المتطلبات المدرسية، فإذا سجلت الطالبتان (عبير، وعائشة) متطلباتهما من أقلام الحبر، وأقلام الرصاص، والممحاه في مصفوفة  $M$  من الرتبة  $2 \times 3$

	أقلام حبر	أقلام رصاص	ممحاه
عبير	10	15	3
عائشة	5	20	5

وبعد التقصي؛ وجدتا متجرتين يبيعان هذه المتطلبات بأسعار مختلفة، وسجّلتا هذه الأسعار في المصفوفة  $P$  الآتية:

	متجر 1	متجر 2
أقلام حبر	2.20	1.90
أقلام رصاص	0.85	0.95
ممحاه	0.60	0.65

(a) أوجد  $MP$

(b) ماذا تعني مدخلات  $MP$ .

## التدريبات الإثرائية

2-3

## خصائص المصفوفات

إن إجراء الحسابات على المصفوفات يختلف عن إجرائها على الأعداد الحقيقية، وفيما يأتي بعض العبارات التي تنطبق على الأعداد الحقيقية، فهل هي صحيحة في المصفوفات؟ ستقصي الإجابة عن هذا السؤال في التمارين الآتية:

لجميع الأعداد الحقيقية  $a, b$  يكون  $ab = 0$ ، إذا وفقط إذا كان  $a = 0$  أو  $b = 0$ .

تتحقق خاصية التبديل في ضرب الأعداد الحقيقية. لأي عددين حقيقيين  $a, b$  يكون  $ab = ba$ .

تتحقق خاصية التجميع في ضرب الأعداد الحقيقية. لأي ثلاثة أعداد حقيقية  $a, b, c$  يكون  $a(bc) = (ab)c$ .

استعمل المصفوفات  $\underline{A}$  و  $\underline{B}$  و  $\underline{C}$  في التمارين الآتية، واكتب ما إذا كانت العبارات صحيحة أم لا. افترض أن المصفوفة من الرتبة  $2 \times 2$  تكون مصفوفة صفرية، إذا كان كل عنصر فيها يساوي صفرًا.

$$\underline{C} = \begin{bmatrix} 3 & 6 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\underline{B} = \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}$$

$$\underline{A} = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$$

$$\underline{B} \underline{C} = 0 \quad (3)$$

$$\underline{A} \underline{C} = 0 \quad (2)$$

$$\underline{A} \underline{B} = 0 \quad (1)$$

$$\underline{B} \underline{C} = \underline{C} \underline{B} \quad (6)$$

$$\underline{A} \underline{C} = \underline{C} \underline{A} \quad (5)$$

$$\underline{A} \underline{B} = \underline{B} \underline{A} \quad (4)$$

$$\underline{B}(\underline{A} \underline{C}) = (\underline{B} \underline{A}) \underline{C} \quad (9)$$

$$\underline{B}(\underline{C} \underline{A}) = (\underline{B} \underline{C}) \underline{A} \quad (8)$$

$$\underline{A}(\underline{B} \underline{C}) = (\underline{A} \underline{B}) \underline{C} \quad (7)$$

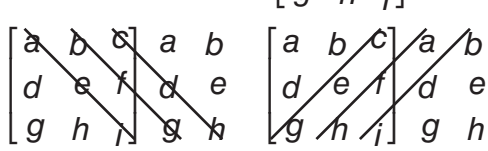
(10) اكتب جملة أو جملتين تلخص النتائج التي توصلت إليها حول خصائص ضرب المصفوفات.

## 2-4

## تدريبات إعادة التعليم

## المحددات وقاعدة كرامر

**المحددات:** للمصفوفة من الرتبة  $2 \times 2$  محددة من الرتبة الثانية، وللمصفوفة  $3 \times 3$  محددة من الرتبة الثالثة.

محددة من الرتبة الثانية	محددة المصفوفة $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ هي $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$ وأن $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc$
محددة من الرتبة الثالثة	تحتسب محددة المصفوفة $\begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix}$ باستعمال قاعدة الأقطار  أو باستعمال محددة المصفوفة $2 \times 2$ بالشكل: $a \cdot \begin{vmatrix} e & f \\ h & i \end{vmatrix} - b \begin{vmatrix} d & f \\ g & i \end{vmatrix} + c \begin{vmatrix} d & e \\ g & h \end{vmatrix}$
مساحة المثلث	مساحة المثلث الذي إحداثيات رؤوسه $(a, b), (c, d), (e, f)$ تساوي $ A $ ، حيث $A = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} a & b & 1 \\ c & d & 1 \\ e & f & 1 \end{vmatrix}$

أوجد قيمة كل محددة مما يأتي:

مثال

$$\begin{vmatrix} 4 & 5 & -2 \\ 1 & 3 & 0 \\ 2 & -3 & 6 \end{vmatrix} \quad (b)$$

$$\begin{vmatrix} 6 & 3 \\ -8 & 5 \end{vmatrix} \quad (a)$$

$$\begin{vmatrix} 4 & 5 & -2 \\ 1 & 3 & 0 \\ 2 & -3 & 6 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 4 & 5 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} \cdot 6 - \begin{vmatrix} 4 & -2 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} \cdot (-3) + \begin{vmatrix} 4 & 5 \\ 2 & -3 \end{vmatrix} \cdot 1$$

$$= [4(3)6 + 5(0)2 + (-2)1(-3)] - [(-2)3(2) + 4(0)(-3) + 5(1)6]$$

$$= [72 + 0 + 6] - [-12 + 0 + 30]$$

$$= 78 - 18 = 60$$

$$\begin{vmatrix} 6 & 3 \\ -8 & 5 \end{vmatrix} = 6(5) - 3(-8) = 54$$

تمارين:

أوجد قيمة كل محددة مما يأتي:

$$\begin{vmatrix} 3 & -2 & -2 \\ 0 & 4 & 1 \\ -1 & 4 & -3 \end{vmatrix} \quad (3)$$

$$\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 9 & 6 \end{vmatrix} \quad (2)$$

$$\begin{vmatrix} 6 & -2 \\ 5 & 7 \end{vmatrix} \quad (1)$$

(4) أوجد مساحة المثلث الذي إحداثيات رؤوسه  $(2, -3), (7, 4), (-5, 5)$ .

## 2-4

## تدريبات إعادة التعليم

(تتمة)

## المحددات وقاعدة كرامر

قاعدة كرامر: توفر المحددات طريقة لحل أنظمة المعادلات.

$\begin{aligned} ax+by &= m \\ fx+gy &= n \end{aligned} \rightarrow \begin{bmatrix} a & b \\ f & g \end{bmatrix}$ $x = \frac{\begin{vmatrix} m & b \\ n & g \end{vmatrix}}{ \underline{C} }, y = \frac{\begin{vmatrix} a & m \\ f & n \end{vmatrix}}{ \underline{C} },  \underline{C}  \neq 0$ <p>حل النظام هو <math> \underline{C}  \neq 0</math></p>	<p>قاعدة كرامر لأنظمة ذات متغيرين</p>
--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------	---------------------------------------

$$5x - 10y = 8$$

استعمل قاعدة كرامر لحل نظام المعادلات

مثال

$$10x + 25y = -2$$

$$x = \frac{\begin{vmatrix} m & b \\ n & g \end{vmatrix}}{|\underline{C}|}$$

قاعدة كرامر

$$y = \frac{\begin{vmatrix} a & m \\ f & n \end{vmatrix}}{|\underline{C}|}$$

$$= \frac{\begin{vmatrix} 8 & -10 \\ -2 & 25 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 5 & -10 \\ 10 & 25 \end{vmatrix}}$$

$$a=5, b=-10, g=25, f=10, m=8, n=-2$$

$$= \frac{\begin{vmatrix} 5 & 8 \\ 10 & -2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 5 & -10 \\ 10 & 25 \end{vmatrix}}$$

$$= \frac{8(25) - (-2)(-10)}{5(25) - (-10)(10)}$$

$$= \frac{5(-2) - 8(10)}{5(25) - (-10)(10)}$$

$$= \frac{180}{225} = \frac{4}{5}$$

$$= -\frac{90}{225} = -\frac{2}{5}$$

تمارين:

استعمل قاعدة كرامر لحل كل نظام معادلات مما يأتي:

$$2x - y = -2 \quad (3)$$

$$x - 4y = 17 \quad (2)$$

$$3x - 2y = 7 \quad (1)$$

$$4x - y = 4$$

$$3x - y = 29$$

$$2x + 7y = 38$$

$$6x - 3y = -3 \quad (6)$$

$$4x + 2y = 1 \quad (5)$$

$$2x - y = 1 \quad (4)$$

$$2x + y = 21$$

$$5x - 4y = 24$$

$$5x + 2y = -29$$

$$\frac{x}{3} + \frac{y}{5} = 2 \quad (9)$$

$$2x - 3y = -2 \quad (8)$$

$$2x + 7y = 16 \quad (7)$$

$$\frac{x}{4} - \frac{y}{6} = -8$$

$$3x - 4y = 9$$

$$x - 2y = 30$$

$$8x + 2y = \frac{3}{7} \quad (12)$$

$$3x - 12y = -14 \quad (11)$$

$$6x - 9y = -1 \quad (10)$$

$$5x - 4y = -\frac{27}{7}$$

$$9x + 6y = -7$$

$$3x + 18y = 12$$

## 2-4 تدريبات المهارات

### المحددات وقاعدة كرامر

أوجد قيمة كل محدة مما يأتي:

$$\begin{vmatrix} 5 & 2 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} \quad (1)$$

$$\begin{vmatrix} 10 & 9 \\ 5 & 8 \end{vmatrix} \quad (2)$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 6 \\ 1 & 7 \end{vmatrix} \quad (3)$$

$$\begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} \quad (4)$$

$$\begin{vmatrix} 0 & 9 \\ 5 & 8 \end{vmatrix} \quad (5)$$

$$\begin{vmatrix} 3 & 12 \\ 2 & 8 \end{vmatrix} \quad (6)$$

$$\begin{vmatrix} -5 & 2 \\ 8 & -6 \end{vmatrix} \quad (7)$$

$$\begin{vmatrix} -3 & 1 \\ 8 & -7 \end{vmatrix} \quad (8)$$

$$\begin{vmatrix} 9 & -2 \\ -4 & 1 \end{vmatrix} \quad (9)$$

$$\begin{vmatrix} 1 & -5 \\ 1 & 6 \end{vmatrix} \quad (10)$$

$$\begin{vmatrix} 1 & -3 \\ -3 & 4 \end{vmatrix} \quad (11)$$

$$\begin{vmatrix} -12 & 4 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} \quad (12)$$

$$\begin{vmatrix} 3 & -5 \\ 6 & -11 \end{vmatrix} \quad (13)$$

$$\begin{vmatrix} -1 & -3 \\ 5 & -2 \end{vmatrix} \quad (14)$$

$$\begin{vmatrix} -1 & -14 \\ 5 & 2 \end{vmatrix} \quad (15)$$

$$\begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 4 \end{vmatrix} \quad (16)$$

$$\begin{vmatrix} 2 & 2 \\ -1 & 4 \end{vmatrix} \quad (17)$$

$$\begin{vmatrix} -1 & 6 \\ 2 & 5 \end{vmatrix} \quad (18)$$

أوجد قيمة كل محدة مما يأتي مستعملًا قاعدة الأقطار:

$$\begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 3 & 2 & -1 \\ 2 & 3 & -2 \end{vmatrix} \quad (19)$$

$$\begin{vmatrix} 6 & -1 & 1 \\ 5 & 2 & -1 \\ 1 & 3 & -2 \end{vmatrix} \quad (20)$$

$$\begin{vmatrix} 2 & 6 & 1 \\ 3 & 5 & -1 \\ 2 & 1 & -2 \end{vmatrix} \quad (21)$$

$$\begin{vmatrix} 2 & -1 & 6 \\ 3 & 2 & 5 \\ 2 & 3 & 1 \end{vmatrix} \quad (22)$$

$$\begin{vmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & 4 \\ 3 & -2 & 0 \end{vmatrix} \quad (23)$$

$$\begin{vmatrix} 3 & 2 & 2 \\ 1 & -1 & 4 \\ 3 & -1 & 0 \end{vmatrix} \quad (24)$$

## 2-4

## تدريبات حل المسألة

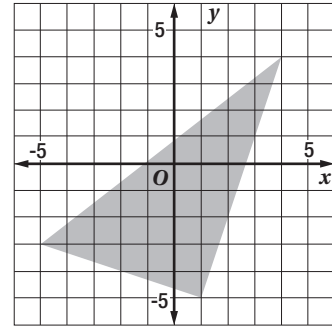
## المحددات وقاعدة كرامر

(1) **اكتشف الخطأ:** وجدت هيام إشارات خطأ في حساب المحددة.

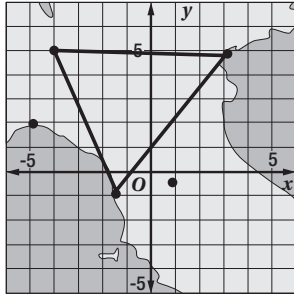
$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix} = 1(5)(9) - 2(6)(7) + 3(4)(8) - 3(5)(7) + 1(6)(8) - 2(4)(9)$$

حوّط الإشارات التي يتعين تعديلها.

(2) **بركة سباحة:** أنشأ مهندس معماري بركة في فناء بناء كما في الشكل. اعتمد على الشكل، واكتب محدة تجدد منها مساحة البركة.



(4) **مساحة:** إذا كانت إحداثيات رؤوس مثلث هي  $(-4, 5)$ ,  $(3.25, 4.8)$ ,  $(-1.4, -0.8)$  وكانت كل وحدة مربعة على المستوى الإحداثي تمثل 400 كيلومتر مربع،



فأوجد مساحة المثلث بالكيلومترات المربعة، وقرب إجابتك إلى أقرب عدد كلي.

(5) **أسهم:** يصنع صالِح مثلثاً إحداثيات رؤوسه  $(-6, 0)$ ,  $(0, -x)$ ,  $(0, x)$  في حين  $x > 0$ ، وقد خطط لعمل المثلث من مادة معدنية تكلف الوحدة المربعة منها ريالين. (a) اكتب محدة تُعطي مساحة المثلث.

(b) أوجد قيمة المحددة في الفرع a، واحسب قيمة  $x$  لتكون تكلفة المعدن المستعمل 60 ريالاً.

(3) **مثلثات:** أراد طلاب مدرسة تزيين حامل السبورة بوضع أشرطة حول الأوتاد التي تحمل السبورة، وقد أراد هلال أن يعمل مثلثات مساحة كل منها نصف وحدة مربعة. ولكون هلال قد درس المحددات فقد عرف أن هذا يُشبه إيجاد إحداثيات رؤوس المثلث  $(a, b)$ ,  $(c, d)$ ,  $(e, f)$  بصورة أساسية

$$\begin{vmatrix} a & b & 1 \\ c & d & 1 \\ e & f & 1 \end{vmatrix}$$

لذا فإن المحددة تساوي 1 أو -1، أعط مثلاً لمثل هذا المثلث.



## 2-4

## التدريبات الإثرائية

## منقول المصفوفة والمحددات

تعلمت سابقاً تمثيل المعلومات على هيئة مصفوفة. فالمصفوفة تحتوي على عناصر في الصورة  $a_{ij}$ ، في حين  $i$  رقم الصف، و  $j$  رقم العمود الذين يقع فيهما العنصر.

$$\underline{A} = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \text{ لتكن المصفوفة}$$

ففي هذه المصفوفة:  $a_{11} = 2, a_{12} = -1, a_{21} = 3, a_{22} = 4$  ويمكنك الحصول على منقول المصفوفة بقلب المصفوفة لتصبح الأعمدة صفوفاً والصفوف أعمدة، بمعنى آخر العنصر  $a_{ij}$  يصبح  $a_{ji}$ ، ويرمز لمنقول المصفوفة  $\underline{A}$  بالرمز  $\underline{A}^T$ .

$$\underline{A}^T = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 4 \end{bmatrix}, \text{ إذن،}$$

احسب محدد  $\underline{A}$ ، ومحدد  $\underline{A}^T$

$$|\underline{A}| = 2(4) - 3(-1) = 11$$

$$|\underline{A}^T| = 2(4) - (-1)(3) = 11$$

(1) أوجد منقول كل مصفوفة مما يأتي:

$$\underline{D} = \begin{bmatrix} 2 & 3 & -1 \\ -2 & -1 & 5 \\ 1 & 3 & -2 \end{bmatrix} \quad (\text{c})$$

$$\underline{C} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -3 & 4 \end{bmatrix} \quad (\text{b})$$

$$\underline{B} = \begin{bmatrix} -1 & 5 \\ 2 & 6 \end{bmatrix} \quad (\text{a})$$

(2) أوجد محددات المصفوفات في التمرين 1 ومحددات منقولاتها.

(3) ماذا تلاحظ حول المحددات؟ ضع تخميناً حول محددات المصفوفات ومحددات منقولاتها.

## 2-5

## تدريبات إعادة التعليم

## النظير الضربي للمصفوفة وأنظمة المعادلات الخطية

المصفوفة المحايدة، والنظير الضربي للمصفوفة: المصفوفة المحايدة لضرب المصفوفات هي مصفوفة مربعة، جميع عناصر قطرها الرئيس تساوي العدد 1، وبقية عناصرها تساوي العدد صفر.

المصفوفة المحايدة	إذا كانت $A$ مصفوفة من الرتبة $n \times n$ ، وكانت $I$ المصفوفة المحايدة للضرب، فإن
لضرب المصفوفات	$A \cdot I = A$ , $I \cdot A = A$

إذا كان للمصفوفة  $A$  من الرتبة  $n \times n$  نظير ضربي  $A^{-1}$ ، فإن  $A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = I$

مثال حدد ما إذا كانت كلٌّ من المصفوفتين  $X = \begin{bmatrix} 7 & 4 \\ 10 & 6 \end{bmatrix}$ ،  $Y = \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ -5 & \frac{7}{2} \end{bmatrix}$  تمثل نظيرًا ضربيًا للأخرى.

• أوجد  $X \cdot Y$

$$\begin{aligned} X \cdot Y &= \begin{bmatrix} 7 & 4 \\ 10 & 6 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ -5 & \frac{7}{2} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 21 - 20 & -14 + 14 \\ 30 - 30 & -20 + 21 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

• أوجد  $Y \cdot X$

$$\begin{aligned} Y \cdot X &= \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ -5 & \frac{7}{2} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 7 & 4 \\ 10 & 6 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 21 - 20 & 12 - 12 \\ -35 + 35 & -20 + 21 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

وبما أن:  $X \cdot Y = Y \cdot X = I$ ، فإن كلًّا من  $X$ ،  $Y$  نظير ضربي للأخرى.

## تمارين:

حدد ما إذا كانت كلٌّ من المصفوفتين تمثل نظيرًا ضربيًا للأخرى مما يأتي:

$$(1) \begin{bmatrix} 4 & 5 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \text{ و } \begin{bmatrix} 4 & -5 \\ -3 & 4 \end{bmatrix} \quad (2) \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 5 & 4 \end{bmatrix} \text{ و } \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -\frac{5}{2} & \frac{3}{2} \end{bmatrix} \quad (3) \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 5 & -1 \end{bmatrix} \text{ و } \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -1 & -2 \end{bmatrix}$$

$$(4) \begin{bmatrix} 8 & 11 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \text{ و } \begin{bmatrix} -4 & 11 \\ 3 & -8 \end{bmatrix} \quad (5) \begin{bmatrix} 4 & -1 \\ 5 & 3 \end{bmatrix} \text{ و } \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 8 \end{bmatrix} \quad (6) \begin{bmatrix} 5 & 2 \\ 11 & 4 \end{bmatrix} \text{ و } \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ \frac{11}{2} & -\frac{5}{2} \end{bmatrix}$$

$$(7) \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 6 & -2 \end{bmatrix} \text{ و } \begin{bmatrix} -\frac{1}{5} & -\frac{1}{10} \\ \frac{3}{10} & \frac{1}{10} \end{bmatrix} \quad (8) \begin{bmatrix} 5 & 8 \\ 4 & 6 \end{bmatrix} \text{ و } \begin{bmatrix} -3 & 4 \\ 2 & -\frac{5}{2} \end{bmatrix} \quad (9) \begin{bmatrix} 3 & 7 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} \text{ و } \begin{bmatrix} \frac{7}{2} & -\frac{3}{2} \\ 1 & -2 \end{bmatrix}$$

$$(10) \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 4 & -6 \end{bmatrix} \text{ و } \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ -4 & -3 \end{bmatrix} \quad (11) \begin{bmatrix} 7 & 2 \\ 17 & 5 \end{bmatrix} \text{ و } \begin{bmatrix} 5 & -2 \\ -17 & 7 \end{bmatrix} \quad (12) \begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 7 & 5 \end{bmatrix} \text{ و } \begin{bmatrix} -5 & 3 \\ 7 & -4 \end{bmatrix}$$

## 2-5

## تدريبات إعادة التعليم

(تتمة)

## النظير الضربي للمصفوفة وأنظمة المعادلات الخطية

**المعادلات المصفوفية:** المعادلة المصفوفية لنظام معادلات تتكون من حاصل ضرب مصفوفة المعاملات ومصفوفة المتغيرات في الجانب الأيسر من إشارة المساواة، وضرب مصفوفة الثوابت في الجانب الأيمن.

استعمل المعادلة المصفوفية لحل نظام المعادلات  $3x - 7y = 12$  و  $x + 5y = -8$

مثال

حدد مصفوفات المعاملات والمتغيرات والثوابت

$$\begin{bmatrix} 3 & -7 \\ 1 & 5 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 12 \\ -8 \end{bmatrix}$$

أوجد النظير الضربي لمصفوفة المعاملات

$$\frac{1}{3(5) - 1(-7)} \begin{bmatrix} 5 & 7 \\ -1 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{5}{22} & \frac{7}{22} \\ -\frac{1}{22} & \frac{3}{22} \end{bmatrix}$$

أعد كتابة المعادلة لتكون في الصورة:  $X = A^{-1}B$

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{5}{22} & \frac{7}{22} \\ -\frac{1}{22} & \frac{3}{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 12 \\ -8 \end{bmatrix}$$

حل

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{2}{11} \\ -\frac{18}{11} \end{bmatrix}$$

تمارين:

استعمل معادلة مصفوفية لحل كل نظام مما يأتي:

$$4x - 3y = 18 \quad (2)$$

$$x + 2y = 12$$

$$2x + y = 8 \quad (1)$$

$$5x - 3y = -12$$

$$4x - 6y = 20 \quad (4)$$

$$3x + y + 8 = 0$$

$$7x - 2y = 15 \quad (3)$$

$$3x + y = -10$$

$$3x - y = 24 \quad (6)$$

$$3y = 80 - 2x$$

$$5x + 2y = 18 \quad (5)$$

$$x = -4y + 25$$

## تدريبات المهارات

2-5

## النظير الضربي للمصفوفة وأنظمة المعادلات الخطية

حدد ما إذا كانت كلٌّ من المصفوفتين تمثل نظيرًا ضربيًا للأخرى أم لا.

$$\underline{P} = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \underline{Q} = \begin{bmatrix} -1 & 3 \\ 1 & -2 \end{bmatrix} \quad (2) \quad \underline{X} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \underline{Y} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \quad (1)$$

$$\underline{A} = \begin{bmatrix} -2 & 5 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}, \underline{B} = \begin{bmatrix} 2 & -5 \\ 1 & -2 \end{bmatrix} \quad (4) \quad \underline{M} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}, \underline{N} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -3 \end{bmatrix} \quad (3)$$

$$\underline{X} = \begin{bmatrix} -1 & 4 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}, \underline{Y} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{1}{6} & \frac{1}{6} \end{bmatrix} \quad (6) \quad \underline{V} = \begin{bmatrix} 0 & 7 \\ -7 & 0 \end{bmatrix}, \underline{W} = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{1}{7} \\ \frac{1}{7} & 0 \end{bmatrix} \quad (5)$$

$$\underline{D} = \begin{bmatrix} -4 & -4 \\ -4 & 4 \end{bmatrix}, \underline{E} = \begin{bmatrix} -0.125 & -0.125 \\ -0.125 & -0.125 \end{bmatrix} \quad (8) \quad \underline{G} = \begin{bmatrix} 4 & -3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}, \underline{H} = \begin{bmatrix} \frac{2}{11} & \frac{3}{11} \\ -\frac{1}{11} & \frac{4}{11} \end{bmatrix} \quad (7)$$

أوجد النظير الضربي لكل مصفوفة فيما يأتي إن وجد:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} \quad (10) \quad \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 4 & 0 \end{bmatrix} \quad (9)$$

$$\begin{bmatrix} -2 & -4 \\ 6 & 0 \end{bmatrix} \quad (12) \quad \begin{bmatrix} 9 & 3 \\ 6 & 2 \end{bmatrix} \quad (11)$$

$$\begin{bmatrix} 3 & 6 \\ -1 & -2 \end{bmatrix} \quad (14) \quad \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 3 \end{bmatrix} \quad (13)$$

استعمل معادلة مصفوفية لحل كل نظام مما يأتي:

$$\begin{aligned} -x - 3y &= 2 & (16) & \quad p - 3q = 6 & (15) \\ -4x - 5y &= 1 & & \quad 2p + 3q = -6 & \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} -3a + b &= -9 & (18) & \quad 2m + 2n = -8 & (17) \\ 5a - 2b &= 14 & & \quad 6m + 4n = -18 & \end{aligned}$$

## تدريبات حل المسألة

## النظير الضربي للمصفوفة وأنظمة المعادلات الخطية

(1) **تدريس:** تشرح سلمى المصفوفات لوالدها، وقد كتبت نظام المعادلات الآتي:

$$2x + y = 4$$

$$3x + y = 5$$

وبعد ذلك عرضت سلمى المصفوفات الخاصة بنظام المعادلات أمام والدها، فما هي المصفوفات؟

(3) **مصفوفات نظيرة لنفسها:** لاحظ سلمان أن أي مصفوفة يكون كل من عناصر القطر الرئيس فيها 1 أو -1، وبقية عناصرها أصفار، تكون نظيرًا ضربيًا لنفسها. أعط مثالًا لمصفوفة  $2 \times 2$  تكون نظيرًا لنفسها، وفيها عنصر واحد على الأقل ليس صفرًا، ولا يقع على القطر الرئيس.

(4) **عمليات على المصفوفات:** يدرس قاسم المحددات، والنظير الضربي للمصفوفات. اقترح معلم قاسم أن هناك مصفوفات لها خصائص وحيدة، وتحدي طلابه في أن يجدوا مثل هذه المصفوفات، ويصفوا الخصائص التي وجدوها

$$\underline{G} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \text{ فكتب قاسم المصفوفة}$$

(a) ما محددة المصفوفة  $\underline{G}$ ؟

(b) هل للمصفوفة  $G$  نظير ضربي؟ فسر إجابتك.

(2) **نقل:** كتب بشير معادلة مصفوفية توضح تكاليف رحلتين بالقطار من المدينة  $A$  إلى المدينة  $B$ ، واستعمل الرمز  $x$  ليدل على تكلفة الرحلة ذهابًا وإيابًا، واستعمل الرمز  $y$  لتكلفة الرحلة في اتجاه واحد.

$$\begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 61 \\ 54 \end{bmatrix}$$

ثم أوجدَ النظير الضربي الآتي

$$\begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{4} \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -2 & 3 \end{bmatrix}$$

ثم حَسَبَ إجابه

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{4} \\ -\frac{1}{2} & \frac{3}{4} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 61 \\ 54 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 34 \\ 10 \end{bmatrix}$$

وعندما تحقَّق من إجابه، وجد أن القيم التي حصل عليها لا تحقق المعادلة الأصلية، فأين أخطأ؟

## التدريبات الإثرائية

## مصفوفات التباديل

مصفوفة التباديل هي مصفوفة مربعة تُظهر العدد 1 مرة واحدة في كل صف وفي كل عمود، وبقية عناصر المصفوفة أصفار.

$$\underline{P}^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad \underline{P} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

أوجد النظير الضربي لمصفوفة التباديل، من خلال تبديل الصف الأول بالعمود الأول، والصف الثاني بالعمود الثاني... وهكذا، أي إيجاد منقول المصفوفة.

$\underline{P}$  مصفوفة تباديل من الرتبة  $4 \times 4$ ، و  $\underline{P}^{-1}$  نظير ضربي لـ  $\underline{P}$ .

حل كلاً من المسائل الآتية:

- (1) يوجد مصفوفة تباديل واحدة من الرتبة  $2 \times 2$ ، وهي (2) أوجد النظير الضربي للمصفوفة التي أوجدتها في ليست المصفوفة المحايدة لعملية الضرب، فما هي؟ السؤال 1. ماذا تلاحظ؟

- (3) بين أن كلاً من المصفوفتين في السؤالين 2، 1 نظير ضربي للأخرى.

$$\underline{B} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad (4) \text{ اكتب النظير الضربي للمصفوفة}$$

- (5) استعمل المصفوفة  $\underline{B}^{-1}$  من السؤال 4، وتحقق من أن كلاً من  $\underline{B}^{-1}$ ،  $\underline{B}$  نظير ضربي للأخرى.

# ملحق الإجابات

الاسم: التاريخ:

## 2-1 تدريبات إعادة التعليم

### مقدمة في المصفوفات

عناصر المصفوفة، المصفوفة عبارة عن تنظيم على شكل مستطيل لبيانات أو ثوابت في صفوف أفقية وأعمدة رأسية، تُسمى عناصر، ويُحدد العنصر وفق موقعه في المصفوفة. ويُحدد موقع العنصر برقم الصف متبوعاً برقم العمود اللذين يقع فيها. فمثلاً:  $a_{12}$  يشير إلى العنصر في الصف الأول والعمود الثاني من المصفوفة.

وفي المصفوفتين أدناه، قيمة العنصر  $a_{12}$  هي 11، وقيمة  $b_{11}$  في المصفوفة B هي 7.

$$B = \begin{bmatrix} 3 & 9 & 12 \\ 5 & 10 & 15 \\ 8 & 7 & 6 \\ 11 & 13 & 1 \\ 4 & 2 & 14 \end{bmatrix} \quad A = \begin{bmatrix} 7 & 11 & 2 & 8 \\ 5 & 4 & 10 & 1 \\ 9 & 3 & 6 & 12 \end{bmatrix}$$

أوجد قيمة  $a_{54}$  مثال 1

$$D = \begin{bmatrix} 25 & 11 & 4 & 1 & 20 \\ 7 & 8 & 9 & 12 & 13 \\ 17 & 6 & 15 & 18 & 2 \\ 22 & 16 & 21 & 24 & 19 \\ 5 & 23 & 3 & 14 & 10 \end{bmatrix} \quad C = \begin{bmatrix} 2 & 5 & 3 \\ 3 & 4 & 1 \end{bmatrix}$$

$b_{11}$  هو العنصر الموجود في الصف الثاني والعمود الثالث، وقيمته 1.

تعاريف:

حدد قيمة كل عنصر في المصفوفات الآتية:

$$H = \begin{bmatrix} 5 & 9 & 11 & 4 \\ 3 & 7 & 2 & 10 \\ 8 & 2 & 6 & 1 \\ 7 \end{bmatrix} \quad G = \begin{bmatrix} 1 & 14 & 13 & 12 \\ 2 & 15 & 20 & 11 \\ 3 & 16 & 19 & 10 \\ 4 & 17 & 18 & 9 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \end{bmatrix} \quad F = \begin{bmatrix} 12 & 7 & 5 \\ 9 & 2 & 11 \\ 6 & 14 & 8 \\ 1 & 4 & 3 \\ 14 \end{bmatrix}$$

$$\begin{matrix} h_{12} & (3) & g_{31} & (2) & f_{12} & (1) \\ i_{11} & (6) & h_{34} & (5) & g_{43} & (4) \\ f_{23} & (12) & i_{14} & (9) & h_{42} & (7) \\ g_{14} & (9) & f_{42} & (8) & i_{14} & (7) \end{matrix}$$

المصفوفات ١، ٢ الفصل ١

المصفوفات الثاني، الثاني

الاسم: التاريخ:

## 2-1 تدريبات إعادة التعليم

### مقدمة في المصفوفات

تنظيم البيانات وتحليلها

المصفوفة تنظيم مستطيل للبيانات أو ثوابت في صفوف أفقية وأعمدة رأسية، محصورة بين قوسين.

توصف المصفوفة برتبها عادة، فالمصفوفة التي تتكون من  $m$  من الصفوف و  $n$  من الأعمدة، تكون مصفوفة من الرتبة  $m \times n$ .

تُخزن البومة بيضها مدة 30 يوماً، وتحتاج الصغار إلى 30 يوماً كي ينمو ريشها وتقرى على الطيران، ويكتفين الطائر السريع بيضه مدة 20 يوماً، وتحتاج الصغار 44 يوماً كي ينمو ريشها وتقرى على الطيران. ويكتفين الحام بيضه مدة 15 يوماً وتحتاج الصغار إلى 17 يوماً كي ينمو ريشها وتقرى على الطيران. احبب مصفوفة  $2 \times 3$  لتنظيم المعلومات السابقة.

$$\begin{matrix} \text{البومة} & \text{الحام} & \text{السريع} \\ \text{احتضان البيض} & 30 & 20 & 15 \\ \text{نمو الريش} & 30 & 44 & 17 \end{matrix}$$

$$A = \begin{bmatrix} 13 & 10 & -5 & 45 \\ 2 & 8 & 15 & 80 \end{bmatrix} \quad \text{مارية المصفوفة إذا كانت}$$

بأن المصفوفة A تتكون من صفين وأربعة أعمدة، فهي من الرتبة  $2 \times 4$ .

تعاريف:

حدد رتبة كل مصفوفة فيما يأتي:

$$\begin{matrix} \begin{bmatrix} 71 & 44 \\ 39 & 27 \\ 45 & 16 \\ 92 & 53 \\ 78 & 65 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 15 & 5 & 27 & -4 \\ 23 & 6 & 0 & 5 \\ 14 & 70 & 24 & -3 \\ 63 & 3 & 42 & 90 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 1 & 5 & 2 & 0 \\ 2 & 3 & 1 & 4 \\ 3 & 4 & 2 & 1 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 1 & 6 & 12 & 0 \\ 2 & 4 & 4 & 4 \\ 3 & 4 & 2 & 1 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 & 3 \\ 2 & 4 & 4 & 4 \\ 3 & 4 & 2 & 1 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 & 3 \\ 2 & 4 & 4 & 4 \\ 3 & 4 & 2 & 1 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 & 3 \\ 2 & 4 & 4 & 4 \\ 3 & 4 & 2 & 1 \end{bmatrix} \end{matrix}$$

4) تعد شركة سياحة برنانكا سياحياً أربعة من مدن المملكة وهي: جدة، الرياض، المدينة، الدمام. في الأيام 19، 20، 21، 22 من شهر جمادى الآخرة 1434 هـ، وقد كانت درجات الحرارة السليزية العظمى في الأيام المذكورة على النحو الآتي:

$$\begin{matrix} \text{الرياض} & 25^\circ & 26^\circ & 28^\circ & 29^\circ \\ \text{الدمام} & 32^\circ & 30^\circ & 30^\circ & 31^\circ \end{matrix} \quad \begin{matrix} \text{جدة} & 35^\circ & 34^\circ & 34^\circ & 35^\circ \\ \text{المدينة} & 34^\circ & 34^\circ & 31^\circ & 32^\circ \end{matrix}$$

نظم هذه البيانات في مصفوفة من الرتبة  $4 \times 4$ .

$$\begin{matrix} \text{اليوم} & \text{الدمام} & \text{المدينة} & \text{الرياض} & \text{جدة} \\ \text{19 جمادى الآخرة} & 32 & 34 & 25 & 35 \\ \text{20 جمادى الآخرة} & 30 & 34 & 26 & 34 \\ \text{21 جمادى الآخرة} & 30 & 31 & 28 & 34 \\ \text{22 جمادى الآخرة} & 31 & 32 & 29 & 35 \end{matrix}$$

المصفوفات ١، ٢ الفصل ١

المصفوفات الثاني، الثاني



التاريخ: \_\_\_\_\_

الاسم: \_\_\_\_\_

## 2-1 تدريبات حل المسألة

### مقدمة في المصفوفات

(4) مبيعات، أحدى أمين خازن عدد المصايح الكهروباية في تخزين ثلاثة أنواع من هذه المصايح لمدة 5 أيام، وقد قرر أن يكون مصفوفة بهذه المعلومات.

يمثل كل صف نوعاً من المصايح ويمثل كل عمود يوماً مختلفاً، وتحتل العناصر في العمود N المصايح في بداية اليوم N.

25	24	22	20	19
30	27	25	22	21
28	25	21	19	19

فأي نوع من المصايح يوجد منه العدد الأكبر في المخزن في كل يوم من الأيام الخمسة؟

الأي في الصف الثالث

(5) أحدى، يحتفظ مدير محل بيع الأحدى بسجل تجري

على قيمة مبيعات الأحدى (بشرات الريالات) التي يبيعها كل من الموظفين الثلاثة في المحل كل يوم من السبت إلى الأربعاء فكلت على النحو الآتي:

السبت الأحد الإثنين الثلاثاء الأربعاء

هشام: 120 ، 210 ، 105 ، 150 ، 60  
سلم: 90 ، 180 ، 60 ، 135 ، 90  
خالد: 105 ، 270 ، 90 ، 120 ، 90

a) نظم البيانات في مصفوفة من الرتبة  $5 \times 3$

سيت أحد اثنين ثلاثة اربعة

هشام	60	150	105	210	120
سلم	90	135	60	180	90
خالد	90	120	90	270	105

b) أي من الموظفين كان مجموع مبيعاته أكثر؟

خالد

الفصل ٢ ، المصفوفات

9

التاريخ: \_\_\_\_\_

الاسم: \_\_\_\_\_

## 2-1 تدريبات المهارات

### مقدمة في المصفوفات

حدد قيمة كل مصفوفة فيما يأتي:

$$\begin{bmatrix} 3 & 2 & 4 \\ -1 & 4 & 0 \end{bmatrix} \quad (1) \quad 2 \times 3$$

$$\begin{bmatrix} 6 & 1 & 2 \\ -3 & 4 & 5 \\ -2 & 7 & 9 \end{bmatrix} \quad (4) \quad 3 \times 3$$

$$\begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 8 \end{bmatrix} \quad (3) \quad 2 \times 2$$

$$\begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ -1 \\ -3 \end{bmatrix} \quad (6) \quad 4 \times 1$$

$$\begin{bmatrix} 9 & 3 & -3 & -6 \\ 3 & 4 & -4 & 5 \end{bmatrix} \quad (5) \quad 2 \times 4$$

حدد قيمة المتغير المذكور في المصفوفات الآتية:

$$\begin{bmatrix} 8 & 1 & 6 \\ 7 & 0 & 2 \\ 4 & 9 & 5 \\ 3 & 12 & 10 \end{bmatrix} \quad C =$$

$$B = \begin{bmatrix} 5 & -2 & 4 & 3 \\ 0 & 8 & 12 & -1 \end{bmatrix}$$

$$A = \begin{bmatrix} 9 & 6 & 7 \\ 2 & 5 & 0 \\ 10 & 3 & 11 \end{bmatrix}$$

$$\begin{matrix} b_{11} & (9) \\ 5 & \\ c_{42} & (8) \\ 12 & \\ b_{22} & (7) \\ 8 & \end{matrix}$$

$$\begin{matrix} a_{21} & (12) \\ 2 & \\ c_{41} & (11) \\ 3 & \\ a_{33} & (10) \\ 11 & \end{matrix}$$

$$\begin{matrix} a_{12} & (15) \\ 6 & \\ b_{13} & (14) \\ 4 & \\ c_{33} & (13) \\ 5 & \end{matrix}$$

الفصل ٢ ، المصفوفات

8

المصفوفات ، الثاني ، الثاني

التاريخ:

الاسم:

## 2-2 تدريبات إعادة التعليم

### العمليات على المصفوفات

جميع المصفوفات وطرحها: المصفوفات التي لها الرتبة نفسها يمكن جمعها وطرح إحداها من الأخرى.

جميع المصفوفات	طرح المصفوفات
$\begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} j & k & l \\ m & n & o \\ p & q & r \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a+j & b+k & c+l \\ d+m & e+n & f+o \\ g+p & h+q & i+r \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} j & k & l \\ m & n & o \\ p & q & r \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a-j & b-k & c-l \\ d-m & e-n & f-o \\ g-p & h-q & i-r \end{bmatrix}$

مثال 1: أوجد  $A+B$ ، إذا كان:  $A = \begin{bmatrix} 6 & -7 \\ 2 & -12 \end{bmatrix}$ ,  $B = \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ -5 & -6 \end{bmatrix}$

$$A+B = \begin{bmatrix} 6 & -7 \\ 2 & -12 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ -5 & -6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6+4 & -7+2 \\ 2+(-5) & -12+(-6) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 & -5 \\ -3 & -18 \end{bmatrix}$$

مثال 2: أوجد  $A-B$ ، إذا كان:  $A = \begin{bmatrix} -2 & 8 \\ 3 & -4 \\ 10 & 7 \end{bmatrix}$ ,  $B = \begin{bmatrix} 4 & -3 \\ -2 & 1 \\ -6 & 8 \end{bmatrix}$

$$A-B = \begin{bmatrix} -2 & 8 \\ 3 & -4 \\ 10 & 7 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 4 & -3 \\ -2 & 1 \\ -6 & 8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2-4 & 8-(-3) \\ 3-(-2) & -4-1 \\ 10-(-6) & 7-8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -6 & 11 \\ 5 & -5 \\ 16 & -1 \end{bmatrix}$$

تعاريف:

أوجد الناتج في كل ما يأتي إن أمكن، وإذا تعذر ذلك فكتب «لا يمكن».

(1)  $\begin{bmatrix} 2 & -2 & 11 \\ 3 & 13 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 6 & -5 & 9 \\ -4 & 3 & 2 \\ -3 & 4 & 5 \end{bmatrix}$  (2)  $\begin{bmatrix} 12 & 4 \\ -12 & 6 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 8 & 7 \\ -4 & 3 \end{bmatrix}$

(3)  $\begin{bmatrix} -6 & 4 \\ -2 & 1 \\ 11 & 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 5 & -2 \\ -4 & 6 \\ 7 & 9 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -11 & 6 \\ 2 & -5 \\ 4 & -7 \end{bmatrix}$  (4)  $\begin{bmatrix} 6 \\ -3 \\ -2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -6 & 3 & -2 \end{bmatrix}$

(5)  $\begin{bmatrix} 1 & -4 \\ -7 & 11 \\ -6 & 6 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 5 \\ -1 & 4 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \\ 3 & -2 \end{bmatrix}$  (6)  $\begin{bmatrix} 10 & -1 & -13 \\ 1 & 9 & -14 \\ 1 & -2 & -2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 8 & 0 & -6 \\ 4 & 5 & -11 \\ -7 & 3 & 4 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -2 & 1 & 7 \\ -3 & -4 & 3 \\ -8 & 5 & 6 \end{bmatrix}$

المصفوفات ٢، الفصل ١١

11

المصفوفات الثاني الثاني

التاريخ:

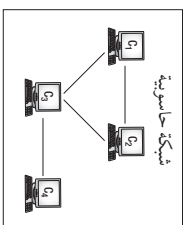
الاسم:

## 2-1 التدريبات الإثباتية

### المصفوفات وشبكة المعلومات

تُعد نظرية الرسم فرعاً من فروع الرياضيات التي تستكشف أوصافاً تُحل في صورة نقاط تُسمى رؤوساً، وخطوطاً مستقيمة تصل بينها تُسمى أحياناً، فمثلاً يمكن أن تُستعمل لتمثيل شبكة حاسوبية أو رحلات طيران بين المدن القريبة.

وتستعمل مصفوفة الوضع أو الحالة لتمثيل رؤوس الشكل، وحواشه والعلاقة بين رؤوس الشكل، وتشمل أسماء الرؤوس كل صف وعمود. فمثلاً مصفوفة الوضع للشبكة الحاسوبية موضحة بالشكل أدناه، في حين تمثل الأعداد عدد الأحرف التي تربط الرؤوس.

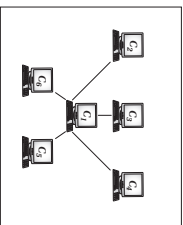


يشير إلى أن عدد الأحرف التي تربط  $C_1$  بـ  $C_2$  وهو 1

	$C_1$	$C_2$	$C_3$	$C_4$
$C_1$	0	1	1	0
$C_2$	1	0	1	0
$C_3$	1	1	0	1
$C_4$	0	0	1	0

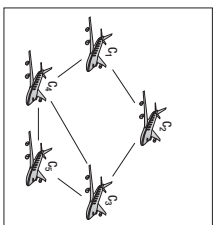
يشير إلى عدد الأحرف التي تربط  $C_1$  بـ  $C_4$

(2) شبكة حاسوب في إحدى الشركات



	$C_1$	$C_2$	$C_3$	$C_4$	$C_5$	$C_6$
$C_1$	0	1	1	1	1	0
$C_2$	1	0	0	0	0	0
$C_3$	1	0	0	0	0	0
$C_4$	1	0	0	0	0	0
$C_5$	1	0	0	0	0	0
$C_6$	1	0	0	0	0	0

(1) اكمل مصفوفة الوضع لكل شبكة حاسوب. مخطط الاتصالات لشركة طيران



	$C_1$	$C_2$	$C_3$	$C_4$	$C_5$
$C_1$	0	1	0	1	0
$C_2$	1	0	1	0	0
$C_3$	0	1	0	1	1
$C_4$	1	0	1	0	1
$C_5$	0	0	1	1	0

المصفوفات ٢، الفصل ١١

10

المصفوفات الثاني الثاني

التاريخ:

الاسم:

## 2-2 تدريبات المهارات

### العمليات على المصفوفات

أوجد الناتج في كل ما يأتي إن أمكن، وإذا تعذر ذلك فاكتب «لا يمكن».

$$\begin{bmatrix} 8 & 10 \\ -7 & -3 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 8 & 3 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & -7 \\ 6 & 2 \end{bmatrix} \quad (2) \quad \begin{bmatrix} 9 & 11 \\ 5 & -4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 4 & 5 \\ 14 & 5 \end{bmatrix} \quad (1)$$

$$\begin{bmatrix} 14 & 8 & 4 \\ 5 & 14 & -2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 5 & -1 & 2 \\ 1 & 8 & -6 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 9 & 9 & 2 \\ 4 & 6 & 4 \end{bmatrix} \quad (4) \quad \text{غير ممكن} \quad \begin{bmatrix} 3 & 1 & 6 \\ 3 & 1 & 6 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 4 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix} \quad (3)$$

$$[-10 \ -31] \quad [6 \ -3] - 4[4 \ 7] \quad (6) \quad [27 \ 12 \ -9] \quad 3[9 \ 4 \ -3] \quad (5)$$

$$\begin{bmatrix} 16 \\ -8 \\ -49 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 8 \\ 0 \\ -3 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 2 \\ -4 \\ 10 \end{bmatrix} \quad (8) \quad \begin{bmatrix} 5 & -9 \\ -9 & -17 \end{bmatrix} - 2 \begin{bmatrix} -2 & 5 \\ 5 & 9 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \quad (7)$$

$$\begin{bmatrix} 7 & 5 & -1 \\ -24 & 9 & 21 \end{bmatrix} - 3 \begin{bmatrix} 3 & 1 & 3 \\ -4 & 7 & 5 \end{bmatrix} - 2 \begin{bmatrix} 1 & -1 & 5 \\ 6 & 6 & -3 \end{bmatrix} \quad (10) \quad \begin{bmatrix} -8 & 40 \\ 44 & 1 \\ -3 & 5 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -4 & 6 \\ 5 & 10 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} + 2 \begin{bmatrix} 6 & 5 \\ -3 & -2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \quad (9)$$

استعمل المصفوفات  $A, B, C$  لإيجاد كل ما يأتي:

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} -3 & 4 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 5 & -2 \\ -2 & -3 \end{bmatrix} B - C \quad (12) \quad \begin{bmatrix} 5 & 4 \\ 5 & 1 \end{bmatrix} A + B \quad (11)$$

$$\begin{bmatrix} 2 & 8 \\ 8 & 2 \end{bmatrix} A + B + C \quad (14) \quad \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ -3 & -5 \end{bmatrix} B - A \quad (13)$$

$$\begin{bmatrix} 15 & -20 \\ -15 & -5 \end{bmatrix} - 5C \quad (16) \quad \begin{bmatrix} 6 & 6 \\ 3 & -6 \end{bmatrix} 3B \quad (15)$$

$$\begin{bmatrix} 13 & 10 \\ 14 & 5 \end{bmatrix} \quad 2B + 3A \quad (18) \quad \begin{bmatrix} 15 & -14 \\ -8 & -1 \end{bmatrix} A - 4C \quad (17)$$

الفصل ٢ : المصفوفات

13

المصفوفات الثاني الثانوي

التاريخ:

الاسم:

## 2-2 تدريبات إعادة التعليم

### العمليات على المصفوفات

ضرب المصفوفة في عدد، يمكن ضرب مصفوفة من الرتبة  $m \times n$  في عدد ثابت  $k$ .

$k \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ka & kb & kc \\ kd & ke & kf \end{bmatrix}$	الضرب في عدد
-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------	--------------

$$3B - 2A \quad \text{أوجد } B = \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ -1 & 5 \\ 7 & 8 \end{bmatrix} \text{ و } A = \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ -6 & 3 \end{bmatrix} \quad \text{إذا كان:}$$

$$3B - 2A = 3 \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ -1 & 5 \\ 7 & 8 \end{bmatrix} - 2 \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ -6 & 3 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 3(-1) & 3(5) \\ 3(7) & 3(8) \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 2(4) & 2(0) \\ 2(-6) & 2(3) \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} -3 & 15 \\ 21 & 24 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 8 & 0 \\ -12 & 6 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} -3 & -8 \\ 21 & -12 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 15 & -0 \\ 24 & -6 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} -11 & 15 \\ 33 & 18 \end{bmatrix}$$

بالتبسيط

تقاربن:

أوجد الناتج في كل ما يأتي إن أمكن، وإذا تعذر ذلك فاكتب «لا يمكن».

$$\begin{bmatrix} 25 & -10 & -45 \\ 5 & 55 & -30 \\ 60 & 35 & -95 \end{bmatrix} \quad (3) \quad -\frac{1}{3} \begin{bmatrix} 6 & 15 & 9 \\ 51 & -33 & 24 \\ -18 & 3 & 45 \end{bmatrix} \quad (2) \quad \begin{bmatrix} 2 & -5 & 3 \\ 6 & 0 & 7 \\ -4 & 6 & 9 \end{bmatrix} \quad (1)$$

$$\begin{bmatrix} 5 & -2 & -9 \\ 1 & 11 & -6 \\ 12 & 7 & -19 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} -2 & -5 & -3 \\ -17 & 11 & -8 \\ 6 & -1 & -15 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 12 & -30 & 18 \\ 0 & 42 & -6 \\ -24 & 36 & 54 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} -14 & 2 \\ 8 & 6 \end{bmatrix} - 2 \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 0 & 7 \end{bmatrix} + 4 \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 2 & 5 \end{bmatrix} \quad (5) \quad \begin{bmatrix} -10 & 11 \\ 12 & -1 \end{bmatrix} - 3 \begin{bmatrix} -4 & 5 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} - 2 \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ -3 & 5 \end{bmatrix} \quad (4)$$

$$\begin{bmatrix} -4 & -14 & 28 \\ -16 & 26 & 6 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & -2 & 5 \\ -3 & 4 & 1 \end{bmatrix} - 2 \begin{bmatrix} 4 & 3 & -4 \\ 2 & -5 & -1 \end{bmatrix} \quad (7) \quad \begin{bmatrix} 22 & -15 \\ 10 & 31 \end{bmatrix} + 2 \begin{bmatrix} 6 & -10 \\ -5 & 8 \end{bmatrix} + 5 \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 3 \end{bmatrix} \quad (6)$$

$$\begin{bmatrix} 3 & -1 \\ -3 & 7 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 9 & 1 \\ -7 & 0 \\ 1 & 7 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 3 & -5 \\ 1 & 7 \end{bmatrix} \quad (9) \quad \begin{bmatrix} 28 & 8 \\ 18 & 1 \\ -7 & 20 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 8 & 3 \\ -2 & 4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ -2 & 3 \\ 3 & -4 \end{bmatrix} \quad (8)$$

الفصل ٢ : المصفوفات

12

المصفوفات الثاني الثانوي

الاسم: التاريخ:

## 2-2 التدريبات الإثرائية

أبرزت خصائص الأعداد الأولية كثيراً من علماء الرياضيات، وفي عام 1934 قام طالب من شرق الهند يدعى سندانام بينا الصغوفة الآتي.

4	7	10	13	16	19	22	25	•••
7	12	17	22	27	32	37	42	•••
10	17	24	31	38	45	52	59	•••
13	22	31	40	49	58	67	76	•••
16	27	38	49	60	71	82	93	•••
•••	•••	•••	•••	•••	•••	•••	•••	•••

ومن خصائص هذه الصغوفة الملحوظة أنه يمكنك استعمالها للحكم على بعض الأعداد هل هي أولية أو غير أولية.

أكمل المسائل الآتية لتكتشف هذه الخاصية.

1) كون الصف الأول والخمود الأول من نمط حسابي، فما هو الفرق الثابت في هذا النمط؟

2) أوجد الحدود الأربعة التالية في الصف الأول.

3

3) ما الفرق الثابت المستعمل في تكوين النمط في كل من الصغوف: 2, 3, 4, 5.

5, 7, 9, 11

4) اكتب الصغوف الثالين للصغوفة، وضمن كل صف 8 أعداد.

الصف: 6, 10, 19, 32, 45, 58, 71, 84, 97,

الصف: 7, 12, 22, 37, 52, 67, 82, 97, 112, 127,

5) اختر أي 5 أعداد من الصغوفة وكل عدد اخترته مثل  $2n$ ، أوجد  $2n + 1$ .

تنوع الإجابات

6) حلل الأعداد التي توصلت إليها في السؤال (5) إلى عواملها الأولية.

تنوع الإجابات، جميع الأعداد غير أولية

7) استعمل نتائجك في السؤالين 6, 5 في أكمال العبارة الآتية. إذا كان العدد  $n$  في الصغوفة، فإن

$2n + 1$  ——— أولي/ غير أولي.

غير أولي

8) اختر 5 أعداد ليست ضمن الصغوفة، وأوجد لكل عدد اخترته  $n$  المقدار  $2n + 1$ ، وبيّن أن الأعداد

التي توصلت إليها أعداد أولية.

تنوع الإجابات، ولكن كل الأعداد أولية.

9) أكمل العبارة الآتية، فإن  $2n + 1$  يقع العدد  $n$  في الصغوفة، فإن  $2n + 1$  عدد ———.

أولي

المصفوفات ٢، الفصل ١٠

15

المصفوفات المتماثلات

الاسم: التاريخ:

## 2-2 تدريبات حل المسألة

العمليات على المصفوفات

14) يتبع الشمس، تحمل الصغوفة  $H$  أطوال 3 نباتات من يتبع الشمس بالزوايا في وقت ما، وهي مصغوفة  $3 \times 1$ . بينا تحمل الصغوفة  $G$  الزيادة في أطوال النباتات الثلاث خلال أسبوع، فإنها تحمل الصغوفة  $4G + H$ ؟

أطوال النباتات الثلاث بعد 4 أسابيع

15) العدا، تحمل قائمة الطعام أسعار بعض الوجبات في مطعم بالريال.

طبق صغير	طبق كبير	طبق كبير
لحم	17.00	9.00
دجاج	14.00	7.00
سمك	22.00	11.00

16) كون مصغوفة  $2 \times 3$  تنظم هذه البيانات.

اجابة متوقعة

9	17
7	14
11	22

17) لكن  $M$  هي الصغوفة التي كونتها في الفرع a.

اكتب عبارة تستعمل على  $M$ ، بالإضافة إلى زيادة على السعر قدرها 20% مقابل خدمات.

$1.2M$  و  $M + 0.2M$

18) كون الصغوفة التي وصفتها في الفرع b.

10.80	20.40
8.40	16.80
13.20	26.40

المصفوفات ٢، الفصل ١٠

14

المصفوفات المتماثلات

الاسم:

العمليات على المصفوفات

1) حددان الوجوه، تشير المصفوفة أدناه إلى أسعار تذاكر دخول حديقة الحيوان ومدينة ألعاب للشخص الواحد (بالريال).

أطفال	كبار
حديقة الحيوان	5
مدينة الألعاب	12

ما الذي يمكنك فعله بهذه المصفوفة لتحصل على مصغوفة جديدة تبين الأسعار لخمس أشخاص؟

أضرب المصفوفة في العدد 5.

2) إشارات عناصر المصفوفات، تريد مهندسان أن يعثرا إشارات عناصر مصغوفة، فقام الأول بطرح المصفوفة

في العدد 1-، في حين قام الآخر بطرح بكل المصفوفة من المصفوفة نفسها، فأي منهما سيحصل على إجابة صحيحة؟

كلهما يحصل على إجابة صحيحة،

لأن  $M - M = 0$

3) تذاكر سفر، نُظمت أسعار تذاكر السفر بين 3 مدن في المصفوفة الأولى، ونُظمت الزيادة على التذاكر بعد رفع أسعارها بين هذه المدن في المصفوفة الثانية أيضاً.

المدنية أ	المدنية ب	المدنية ج
المدنية أ	0	440
المدنية ب	460	0
المدنية ج	880	0

مصفوفة الزيادة في أسعار التذاكر:

المدنية أ	المدنية ب	المدنية ج
المدنية أ	0	40
المدنية ب	46	0
المدنية ج	85	0

اكتب مصغوفة تحمل الأسعار الجديد للتذاكر.

المدنية ج المدنية ب المدنية أ

المدنية أ	المدنية ب	المدنية ج
المدنية أ	0	480
المدنية ب	506	0
المدنية ج	935	770

الاسم: التاريخ:

(تتمه)

## 2-3 تدريبات إعادة التعليم

### ضرب المصفوفات

ضرب المصفوفات، لا تنطبق خاصية التبديل على ضرب المصفوفات.

لأي مصفوفات $A, B, C$ معرفة عليها عملية ضرب، ولأي خاصائص ضرب المصفوفات.	
الخاصية التجميعية في ضرب المصفوفات.	$(AB)C = A(BC)$
الخاصية التجميعية في ضرب عددي مصفوفة.	$k(AB) = (kA)B = A(kB)$
خاصية التوزيع من اليسار.	$C(A+B) = CA + CB$
خاصية التوزيع من اليمين.	$(A+B)C = AC + BC$

مثال

استعمل  $A = \begin{bmatrix} 4 & -3 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 5 & -3 \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 6 & 3 \end{bmatrix}$  لإيجاد حاصل ضرب كل ما يلي:

(a)  $(A+B)C$

$$(A+B)C = \begin{bmatrix} 4 & -3 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 5 & -3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 6 & 3 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 6 & -3 \\ 7 & -2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 6 & 3 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 6(1) + (-3)(6) & 6(-2) + (-3)(3) \\ 7(1) + (-2)(6) & 7(-2) + (-2)(3) \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -12 & -21 \\ -5 & -20 \end{bmatrix}$$

(b)  $AC + BC$

$$AC + BC = \begin{bmatrix} 4 & -3 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 6 & 3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 5 & -3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 6 & 3 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 4(1) + (-3)(6) & 4(-2) + (-3)(3) \\ 2(1) + 1(6) & 2(-2) + 1(3) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2(1) + 0(6) & 2(-2) + 0(3) \\ 5(1) + (-3)(6) & 5(-2) + (-3)(3) \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -14 & -17 \\ 8 & -1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 & -4 \\ -5 & -20 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -12 & -21 \\ -5 & -20 \end{bmatrix}$$

لاحظ أن النتيجة في المثال أعلاه توضع خاصية التوزيع من اليمين إليها لا تبرز من صحتها.

تعاريف:

لاحتديد إذا كانت الماتrices  $A, B$  والعدد  $k = -4$ ،  $A = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 5 & -2 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 6 & 4 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & -2 \\ 1 & -3 \end{bmatrix}$  استعمل

صحيحة المصفوفات المعطاة:

نعم	2	$AB = BA$	نعم	1	$k(AB) = (kA)B$
نعم	4	$(AB)C = A(BC)$	نعم	3	$BC = CB$
نعم	6	$k(A+B) = kA + kB$	نعم	5	$C(A+B) = AC + BC$

الفصل ٢، المصفوفات

17

المصفوفات، التناوبي

الاسم: التاريخ:

## 2-3 تدريبات إعادة التعليم

### ضرب المصفوفات

ضرب المصفوفات، يمكنك ضرب مصفوفتين إذا وقعت الأولى عدد أعمدة الأولى يساوي عدد صفوف الثانية.

$A \cdot B = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} e & f \\ g & h \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ae + bg & af + bh \\ ce + dg & cf + dh \end{bmatrix}$	ضرب المصفوفات
--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------	---------------

مثال

$$A = \begin{bmatrix} -4 & 3 \\ 2 & -2 \\ 1 & 7 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 5 & -2 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}$$

أوجد  $AB$  إذا كان

بالعويض

$$AB = \begin{bmatrix} -4 & 3 \\ 2 & -2 \\ 1 & 7 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 5 & -2 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -4(5) + 3(-1) & -4(-2) + 3(3) \\ 2(5) + (-2)(-1) & 2(-2) + (-2)(3) \\ 1(5) + 7(-1) & 1(-2) + 7(3) \end{bmatrix}$$

بضرب الصف في العمود

$$= \begin{bmatrix} -23 & 17 \\ 12 & -10 \\ -2 & 19 \end{bmatrix}$$

بالتبسيط

تعاريف:

أوجد الناتج في كل ما يلي إذا كان ذلك ممكناً، وإذا تعذر ذلك فكتب «لا يمكن».

$$\begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} \quad (3) \quad \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 3 & 7 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ -1 & 4 \end{bmatrix} \quad (2) \quad \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ -2 & 3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} \quad (1)$$

$$\begin{bmatrix} 7 & -7 \\ 14 & 14 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} -3 & -2 \\ 2 & 34 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 12 & 3 \\ -6 & 9 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 5 & -2 \\ 2 & -3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 4 & -1 \\ -2 & 5 \end{bmatrix} \quad (6) \quad \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 0 & 4 \\ -5 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \quad (5) \quad \begin{bmatrix} -3 & 1 \\ 5 & -2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 4 & 0 & -2 \\ -3 & 1 & 1 \end{bmatrix} \quad (4)$$

$$\begin{bmatrix} 24 & -15 \\ 14 & -17 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} -1 & 4 \\ 8 & 4 \\ -3 & -9 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} -15 & 1 & 7 \\ 26 & -2 & -12 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 & -3 \\ 1 & 4 & -2 \\ -1 & 3 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 & -2 \\ 3 & 1 \\ -2 & 4 \end{bmatrix} \quad (9) \quad \begin{bmatrix} 7 & -2 \\ 5 & -4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ -2 & 0 \end{bmatrix} \quad (8) \quad \begin{bmatrix} 6 & 10 \\ -4 & 3 \\ -2 & 7 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 4 & 0 & -2 \\ 0 & 4 & -3 \end{bmatrix} \quad (7)$$

$$\begin{bmatrix} 10 & -16 \\ 18 & -6 \\ 5 & 9 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 11 & -21 \\ 13 & -15 \end{bmatrix}$$

غير ممكن

الفصل ٢، المصفوفات

16

المصفوفات، التناوبي

التاريخ:

الاسم:

## 2-3 تدريبات حل المسألة

### ضرب المصفوفات

- (4) قوى، تعلم ترفيق لثبوته ضرب المصفوفات، وبدأ يتساءل: ما الذي يحصل عند رفع المصفوفة لأس؟ لقد قام بحساب عدد قليل من القوى الأولى للمصفوفة  $M$ ، حيث  $M = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ ، لاحظ نمطاً، فما هي  $M^{100}$ ؟

(5) مقاربة الإسفار، يزيد متوسط إنفاق الأسرة على

500 ريال في بداية العام الدراسي لشراء الملابس المدرسية، فإذا سجلت الطالبات (خبر، وعاشة) متطلباتها من أقلام الخبر، وأقلام الرصاص، والمحي في مصفوفة  $M$  من الرتبة  $2 \times 3$

عاج أقلام رصاص خبر

$$\begin{bmatrix} 10 & 15 & 3 \\ 5 & 20 & 5 \end{bmatrix}$$

وبعد التقوي، وجدنا متجهين يبينان هذه المتطلبات بأبعاد مختلفة، وسجلنا هذه الأبعاد في المصفوفة  $P$  الآتية:

متجه 1 متجه 2

$$\begin{bmatrix} 2.20 & 1.90 \\ 0.85 & 0.95 \\ 0.60 & 0.65 \end{bmatrix}$$

أوجد  $MP$

(b) ماذا تعني مدخلات  $MP$ .

$$\begin{bmatrix} 36.55 & 35.2 \\ 31 & 31.75 \end{bmatrix}$$

يطلب الصف الأول التكلفة الكلية لمتطلبات معين من التعريف الأول والثاني على الترتيب .  
ويطلب الصف الثاني التكلفة الكلية لمتطلبات عاشة من التعريف الأول والثاني على الترتيب أيضاً .

المصفوفات ٢، الفصل ٢

19

- (1) اكتشف الخطأ، إذا كان كل من المصفوفتين  $B$ ،  $A$  من الرتبة  $2 \times 2$ ، وقد أجرى سامي عليها الاستنتاجات الآتية، فهل هي صحيحة؟

(a)  $(A+B)^2 = (A+B)(A+B)$ ؟  
(b)  $(A+B)A = (A+B)B$ ؟  
(c)  $A^2 + B^2 = A(B+A) + B(A+B)$ ؟  
(d)  $A^2 + B^2 = A(B+A) + B(A+B)$ ؟  
(e)  $A^2 + B^2 = A(B+A) + B(A+B)$ ؟  
(f)  $A^2 + B^2 = A(B+A) + B(A+B)$ ؟

في الخطوة من  $d$ ، إلى  $e$  طبق سامي التبدل على  $BA$ ، ولكن هذا ليس صحيحاً دائماً في المصفوفات.

- (2) تسجيل الإجابات، سجل مازن درجات طلاب صفه في مصفوفة من الرتبة  $20 \times 3$ ، في حوز سجل في كل صف درجات أحد الطلاب، وقد سُجلت درجات الاختبار الأول لجميع الطلاب في العمود الأول، والاختبار الثاني في العمود الثاني، والاختبار الثالث في العمود الثالث، وأراد مازن أن يكون مصفوفة من الرتبة  $20 \times 1$  لتسجل درجات الطلاب الموزونة، فإذا كان لكل من الاختبارين الأول والثاني 25% من الدرجة النهائية، والاختبار الثالث 50%، فقي أي مصفوفة يضرب مصفوفته الأصلية  $(20 \times 3)$  من اليمين؟

$$\begin{bmatrix} 0.25 \\ 0.25 \\ 0.50 \end{bmatrix}$$

- (3) مصفوفات خاصة، كتبت سارة مصفوفة  $M$  من الرتبة  $3 \times 3$ ، ووجدت أنه لأي مصفوفة  $X$  من الرتبة  $3 \times 3$  يكون  $MX = X$ ، فإذا يتبين أن تكون المصفوفة  $M$ ؟

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

المصفوفات الثاني، الثاني

التاريخ:

الاسم:

## 2-3 تدريبات المهارات

### ضرب المصفوفات

حدد إذا كانت عملية ضرب معرفة في كل ما يأتي أم لا، وإذا كانت معرفة، فأوجد رتبة المصفوفة الناتجة.

(1)  $M_{1 \times 3} \bullet \Delta_{3 \times 2}$   $2 \times 1$   $B_{3 \times 1} \bullet \Delta_{5 \times 5}$

(2)  $4 \times 1$   $B_{3 \times 4} \bullet S_{4 \times 1}$   $6 \times 5$   $A_{6 \times 4} \bullet B_{4 \times 5}$

(3)  $3 \times 4$   $B_{3 \times 2} \bullet A_{4 \times 2}$   $3 \times 4$   $X_{3 \times 3} \bullet Y_{3 \times 4}$

(4)  $28 \times 19$   $\begin{bmatrix} 5 & 6 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \bullet \begin{bmatrix} 2 & -5 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$   $\begin{bmatrix} 3 \\ -2 \end{bmatrix} \bullet \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$

(5)  $\begin{bmatrix} -2 & 3 & 2 \\ 6 & -9 & -6 \end{bmatrix} \bullet \begin{bmatrix} -1 \\ 3 \end{bmatrix}$   $\begin{bmatrix} 2 & -3 & -2 \end{bmatrix} \bullet \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix}$   $\begin{bmatrix} -6 & 6 \\ 15 & 12 \\ 3 & -9 \end{bmatrix} \bullet \begin{bmatrix} 2 & -2 \\ 4 & 5 \\ -3 & 1 \end{bmatrix}$

(6)  $\begin{bmatrix} 3 \\ -2 \end{bmatrix} \bullet \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$   $\begin{bmatrix} -3 \\ -5 \end{bmatrix}$   $\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \bullet \begin{bmatrix} 3 \\ -2 \end{bmatrix}$

(7)  $\begin{bmatrix} -3 \\ -5 \end{bmatrix}$   $\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \bullet \begin{bmatrix} 3 \\ -2 \end{bmatrix}$   $\begin{bmatrix} -3 \\ -5 \end{bmatrix}$   $\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \bullet \begin{bmatrix} 3 \\ -2 \end{bmatrix}$

(8)  $\begin{bmatrix} -2 & 3 & 2 \\ 6 & -9 & -6 \end{bmatrix} \bullet \begin{bmatrix} -1 \\ 3 \end{bmatrix}$   $\begin{bmatrix} 2 & -3 & -2 \end{bmatrix} \bullet \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix}$   $\begin{bmatrix} -6 & 6 \\ 15 & 12 \\ 3 & -9 \end{bmatrix} \bullet \begin{bmatrix} 2 & -2 \\ 4 & 5 \\ -3 & 1 \end{bmatrix}$

(9)  $\begin{bmatrix} -3 \\ -5 \end{bmatrix}$   $\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \bullet \begin{bmatrix} 3 \\ -2 \end{bmatrix}$   $\begin{bmatrix} -3 \\ -5 \end{bmatrix}$   $\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \bullet \begin{bmatrix} 3 \\ -2 \end{bmatrix}$

(10)  $\begin{bmatrix} -3 \\ -5 \end{bmatrix}$   $\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \bullet \begin{bmatrix} 3 \\ -2 \end{bmatrix}$   $\begin{bmatrix} -3 \\ -5 \end{bmatrix}$   $\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \bullet \begin{bmatrix} 3 \\ -2 \end{bmatrix}$

(11)  $\begin{bmatrix} -3 \\ -5 \end{bmatrix}$   $\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \bullet \begin{bmatrix} 3 \\ -2 \end{bmatrix}$   $\begin{bmatrix} -3 \\ -5 \end{bmatrix}$   $\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \bullet \begin{bmatrix} 3 \\ -2 \end{bmatrix}$

(12)  $\begin{bmatrix} -3 \\ -5 \end{bmatrix}$   $\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \bullet \begin{bmatrix} 3 \\ -2 \end{bmatrix}$   $\begin{bmatrix} -3 \\ -5 \end{bmatrix}$   $\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \bullet \begin{bmatrix} 3 \\ -2 \end{bmatrix}$

(13)  $\begin{bmatrix} -3 \\ -5 \end{bmatrix}$   $\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \bullet \begin{bmatrix} 3 \\ -2 \end{bmatrix}$   $\begin{bmatrix} -3 \\ -5 \end{bmatrix}$   $\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \bullet \begin{bmatrix} 3 \\ -2 \end{bmatrix}$

(14)  $\begin{bmatrix} -3 \\ -5 \end{bmatrix}$   $\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \bullet \begin{bmatrix} 3 \\ -2 \end{bmatrix}$   $\begin{bmatrix} -3 \\ -5 \end{bmatrix}$   $\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \bullet \begin{bmatrix} 3 \\ -2 \end{bmatrix}$

(15)  $\begin{bmatrix} -3 \\ -5 \end{bmatrix}$   $\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \bullet \begin{bmatrix} 3 \\ -2 \end{bmatrix}$   $\begin{bmatrix} -3 \\ -5 \end{bmatrix}$   $\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \bullet \begin{bmatrix} 3 \\ -2 \end{bmatrix}$

(16)  $\begin{bmatrix} -3 \\ -5 \end{bmatrix}$   $\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \bullet \begin{bmatrix} 3 \\ -2 \end{bmatrix}$   $\begin{bmatrix} -3 \\ -5 \end{bmatrix}$   $\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \bullet \begin{bmatrix} 3 \\ -2 \end{bmatrix}$

(17)  $\begin{bmatrix} -3 \\ -5 \end{bmatrix}$   $\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \bullet \begin{bmatrix} 3 \\ -2 \end{bmatrix}$   $\begin{bmatrix} -3 \\ -5 \end{bmatrix}$   $\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \bullet \begin{bmatrix} 3 \\ -2 \end{bmatrix}$

المصفوفات ٢، الفصل ٢

18

التاريخ: \_\_\_\_\_

الاسم: \_\_\_\_\_

## 2-4 تدريبات إعادة التعليم

### المحددات وقاعدة كرامر

المحددات، للمصفوفة من الرتبة  $2 \times 2$  عددة من الرتبة الثانية، وللمصفوفة  $3 \times 3$  عددة من الرتبة الثالثة.

عددة من الرتبة الثانية	عددة المصفوفة $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ هي $ a \ b $ وأن $ a \ b  = ad - bc$
عددة من الرتبة الثالثة	تكتب عددة المصفوفة $\begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix}$ باستعمال قاعدة الأقطار
أو باستعمال عددة المصفوفة $2 \times 2$ بالشكل:	$\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & b \\ d & e \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a & c \\ d & f \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} b & c \\ e & f \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} a & b \\ g & h \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} d & e \\ g & h \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} a & c \\ e & f \end{vmatrix}$
مساحة المثلث	مساحة المثلث الذي إحداثيات رؤوسه $(a, d)$ , $(c, d)$ , $(e, f)$ تساوي $ A $ ، حيث $A = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} a & b & 1 \\ c & d & 1 \\ e & f & 1 \end{vmatrix}$

أوجد قيمة كل عددة على يأتي:

$$(a) \begin{vmatrix} 4 & 5 & -2 \\ 1 & 3 & 0 \\ 2 & -3 & 6 \end{vmatrix} \quad (b) \begin{vmatrix} 6 & 3 \\ -8 & 5 \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} 6 & 3 \\ -8 & 5 \end{vmatrix} = 6(5) - 3(-8) = 54$$

$$\begin{vmatrix} 4 & 5 & -2 \\ 1 & 3 & 0 \\ 2 & -3 & 6 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 4 & 5 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 4 & -2 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 5 & -2 \\ 2 & -3 \end{vmatrix}$$

$$= [4(3) - 5(0)] + [4(3) - (-2)(-3)] - [(2)(-3) - (-2)(3)] +$$

$$4(0)(-3) + 5(1)(6)$$

$$= [72 + 0 + 6] - [-12 + 0 + 30]$$

$$= 78 - 18 = 60$$

تمارين:

أوجد قيمة كل عددة على يأتي:

$$\begin{vmatrix} 3 & -2 & -2 \\ 0 & 4 & 1 \\ -1 & 4 & -3 \end{vmatrix} \quad (3) \begin{vmatrix} 0 & 3 & 2 \\ 9 & 6 & 6 \end{vmatrix} \quad (2) \begin{vmatrix} 6 & -2 \\ 5 & 7 \end{vmatrix} \quad (1)$$

$$(4) \text{ أوجد مساحة المثلث الذي إحداثيات رؤوسه } (2, -3), (7, 4), (-5, 5)$$

الفصل ٢، المصفوفات

21

المصفوفات، التمارين التناوبي

التاريخ: \_\_\_\_\_

الاسم: \_\_\_\_\_

## 2-3 التدرجات الإثر أئية

### خصائص المصفوفات

إن إجراء الحسابات على المصفوفات يختلف عن إجراءها على الأعداد الحقيقية، وفيما يأتي بعض المبررات التي تتعلق على الأعداد الحقيقية، فهل هي صحيحة في المصفوفات؟ استقصى الإجابة عن هذا السؤال في التمارين الآتية:

جميع الأعداد الحقيقية  $b$ ، يكون  $a \cdot b = 0$ ، إذا وقطع إذا كان  $a = 0$  أو  $b = 0$ .

تتحقق خاصية التبادل في ضرب الأعداد الحقيقية، لأي عددين حقيقيين  $a, b$ ، يكون  $ab = ba$ .

تتحقق خاصية التجميع في ضرب الأعداد الحقيقية، لأي ثلاثة أعداد حقيقية  $a, b, c$ ، يكون  $a(bc) = (ab)c$ .

استعمل المصفوفات  $A$  و  $B$  و  $C$  في التمارين الآتية، واكتب ما إذا كانت المبررات صحيحة أم لا. افترض أن المصفوفة من الرتبة  $2 \times 2$  تكون مصفوفة صفرية، إذا كان كل عنصر فيها يساوي صفرًا.

$$C = \begin{bmatrix} 3 & 6 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ -1 & 3 \end{bmatrix} \quad A = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$$

$$(3) \text{ نعم } B \cdot C = 0$$

$$(2) \text{ نعم } A \cdot C = 0$$

$$(1) \text{ نعم } A \cdot B = 0$$

$$B \cdot C = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad A \cdot C = \begin{bmatrix} 10 & 20 \\ 6 & 12 \end{bmatrix} \quad A \cdot B = \begin{bmatrix} 2 & -6 \\ -2 & 6 \end{bmatrix}$$

$$(6) \text{ نعم } B \cdot C = C \cdot B$$

$$(5) \text{ نعم } A \cdot C = C \cdot A$$

$$(4) \text{ نعم } A \cdot B = B \cdot A$$

$$C \cdot B = \begin{bmatrix} -3 & 9 \\ -1 & 3 \end{bmatrix} \quad C \cdot A = \begin{bmatrix} 15 & 21 \\ 5 & 7 \end{bmatrix} \quad B \cdot A = \begin{bmatrix} 0 & -8 \\ 0 & 8 \end{bmatrix}$$

$$B \cdot C \neq C \cdot B \quad A \cdot C \neq C \cdot A \quad A \cdot B \neq B \cdot A$$

$$(9) \text{ نعم } B(A \cdot C) = (B \cdot A)C$$

$$(8) \text{ نعم } B(C \cdot A) = (B \cdot C)A$$

$$(7) \text{ نعم } A(B \cdot C) = (A \cdot B)C$$

$$\text{كلها تساوي} \quad \begin{bmatrix} -8 & -16 \\ 8 & 16 \end{bmatrix} \quad \text{كلها تساوي} \quad \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{كلها تساوي} \quad \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

(10) اكتب جملة أو جملتين تخلص النتائج التي توصلت إليها حول خصائص ضرب المصفوفات.

ضرب المصفوفات تجميعي، وليس تبديلياً، ويمكن أن يكون حاصل ضرب مصفوفتين مصفوفة صفرية، ولو لم تكن أي منهما صفرية.

الفصل ٢، المصفوفات

20

المصفوفات، التمارين التناوبي

التاريخ: \_\_\_\_\_

الاسم: \_\_\_\_\_

## 2-4 تدريبات المهارات

المحددات وقاعدة كرامر

أوجد قيمة كل محددية على ما يلي:

$$1 \quad \begin{vmatrix} 1 & 6 \\ 1 & 7 \end{vmatrix} \quad (3) \quad 35 \quad \begin{vmatrix} 10 & 9 \\ 5 & 8 \end{vmatrix} \quad (2) \quad 13 \quad \begin{vmatrix} 5 & 2 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} \quad (1)$$

$$0 \quad \begin{vmatrix} 3 & 12 \\ 2 & 8 \end{vmatrix} \quad (6) \quad -45 \quad \begin{vmatrix} 0 & 9 \\ 5 & 8 \end{vmatrix} \quad (5) \quad -13 \quad \begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} \quad (4)$$

$$1 \quad \begin{vmatrix} 9 & -2 \\ -4 & 1 \end{vmatrix} \quad (9) \quad 13 \quad \begin{vmatrix} -3 & 1 \\ 8 & -7 \end{vmatrix} \quad (8) \quad 14 \quad \begin{vmatrix} -5 & 2 \\ 8 & -6 \end{vmatrix} \quad (7)$$

$$-52 \quad \begin{vmatrix} -12 & 4 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} \quad (12) \quad -5 \quad \begin{vmatrix} 1 & -3 \\ -3 & 4 \end{vmatrix} \quad (11) \quad 11 \quad \begin{vmatrix} 1 & -5 \\ 1 & 6 \end{vmatrix} \quad (10)$$

$$68 \quad \begin{vmatrix} -1 & -14 \\ 5 & 2 \end{vmatrix} \quad (15) \quad 17 \quad \begin{vmatrix} -1 & -3 \\ 5 & -2 \end{vmatrix} \quad (14) \quad -3 \quad \begin{vmatrix} 3 & -5 \\ 6 & -11 \end{vmatrix} \quad (13)$$

$$-17 \quad \begin{vmatrix} -1 & 6 \\ 2 & 5 \end{vmatrix} \quad (18) \quad 10 \quad \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ -1 & 4 \end{vmatrix} \quad (17) \quad -4 \quad \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 4 \end{vmatrix} \quad (16)$$

$$-1 \quad \begin{vmatrix} 2 & 6 & 1 \\ 3 & 5 & -1 \\ 2 & 1 & -2 \end{vmatrix} \quad (21) \quad -2 \quad \begin{vmatrix} 6 & -1 & 1 \\ 5 & 2 & -1 \\ 1 & 3 & -2 \end{vmatrix} \quad (20) \quad -1 \quad \begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 3 & 2 & -1 \\ 2 & 3 & -2 \end{vmatrix} \quad (19)$$

$$40 \quad \begin{vmatrix} 3 & 2 & 2 \\ 1 & -1 & 4 \\ 3 & -1 & 0 \end{vmatrix} \quad (24) \quad 8 \quad \begin{vmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & 4 \\ 3 & -2 & 0 \end{vmatrix} \quad (23) \quad -3 \quad \begin{vmatrix} 2 & -1 & 6 \\ 3 & 2 & 5 \\ 2 & 3 & 1 \end{vmatrix} \quad (22)$$

أوجد قيمة كل محددية على ما يلي مستخدماً قاعدة الأظفار:

المصفوفات ٢، ٣، المصفوفات

23

المصفوفات الثاني، الثاني

التاريخ: \_\_\_\_\_

الاسم: \_\_\_\_\_

## 2-4 تدريبات إعادة التعليم

المحددات وقاعدة كرامر

قاعدة كرامر، توفر المحددات طريقة لحل أنظمة المعادلات.

$ax+by=m$ $fx+gy=n$	$\rightarrow \begin{bmatrix} a & b \\ f & g \end{bmatrix}$	لكن $C$ مصفوفة معاملات نظام المعادلات	قاعدة كرامر لأنظمة ذات متغيرين
$x = \frac{\begin{vmatrix} m & b \\ n & g \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a & b \\ f & g \end{vmatrix}}, y = \frac{\begin{vmatrix} a & m \\ f & n \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a & b \\ f & g \end{vmatrix}}$	$C \neq 0$	$ C $	

$$5x - 10y = 8$$

$$10x + 25y = -2$$

مثال

$$x = \frac{\begin{vmatrix} m & b \\ n & g \end{vmatrix}}{|C|}$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} a & m \\ f & n \end{vmatrix}}{|C|}$$

قاعدة كرامر

$$= \frac{\begin{vmatrix} 8 & -10 \\ -2 & 25 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 5 & -10 \\ 10 & 25 \end{vmatrix}}$$

$$a=5, b=-10, g=25, f=10, m=8, n=-2$$

$$= \frac{\begin{vmatrix} 5 & 8 \\ 10 & -2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 5 & -10 \\ 10 & 25 \end{vmatrix}}$$

$$= \frac{8(25) - (-2)(-10)}{5(25) - (-10)(10)}$$

$$= \frac{5(-2) - 8(10)}{5(25) - (-10)(10)}$$

$$= \frac{180}{225} = \frac{4}{5}$$

$$= \frac{-90}{225} = -\frac{2}{5}$$

تعاريف:

استعمل قاعدة كرامر لحل كل نظام معادلات على ما يلي:

$$\begin{array}{ll} 2x - y = -2 & (3) \\ 4x - y = 4 & (9, -2) \end{array} \quad \begin{array}{ll} x - 4y = 17 & (2) \\ 3x - 2y = 7 & (5, 4) \end{array} \quad \begin{array}{ll} 3x - y = 29 & (5, 4) \\ 2x + 7y = 38 & (5, 4) \end{array}$$

$$\begin{array}{ll} 2x - y = -3 & (6) \\ 2x + y = 21 & (2, -\frac{7}{2}) \end{array} \quad \begin{array}{ll} 4x + 2y = 1 & (5) \\ 5x - 4y = 24 & (-3, -7) \end{array} \quad \begin{array}{ll} 2x - y = 1 & (4) \\ 5x + 2y = -29 & (-3, -7) \end{array}$$

$$\begin{array}{ll} \frac{x}{3} + \frac{y}{5} = 2 & (9) \\ \frac{x}{4} - \frac{y}{6} = -8 & (35, 24) \end{array} \quad \begin{array}{ll} 2x - 3y = -2 & (8) \\ 3x - 4y = 9 & (22, -4) \end{array} \quad \begin{array}{ll} 2x + 7y = 16 & (7) \\ x - 2y = 30 & (22, -4) \end{array}$$

$$\begin{array}{ll} 8x + 2y = \frac{3}{7} & (12) \\ 5x - 4y = -\frac{27}{7} & (-\frac{4}{3}, \frac{5}{6}) \end{array} \quad \begin{array}{ll} 3x - 12y = -14 & (11) \\ 9x + 6y = -7 & (-\frac{4}{3}, \frac{5}{6}) \end{array} \quad \begin{array}{ll} 6x - 9y = -1 & (10) \\ 3x + 18y = 12 & (-\frac{2}{3}, \frac{5}{9}) \end{array}$$

المصفوفات ٢، المصفوفات

22

المصفوفات الثاني، الثاني



التاريخ:

الاسم:

## 2-4 التدريبات الإثرائية

### منقول المصفوفة والمحددات

تعلمت سابقاً تقبل المعلومات على هيئة مصفوفة. فالمصفوفة تحتوي على عناصر في الصورة  $a_{ij}$  في حين  $i$  رقم الصف، و  $j$  رقم العمود اللذين يقع فيهما العنصر.

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$$

نتكن المصفوفة  $A$  في هذه المصفوفة:  $a_{11} = 2, a_{12} = -1, a_{21} = 3, a_{22} = 4$ .  
ويمكنك الحصول على منقول المصفوفة بقلب المصفوفة لتصبح الأعمدة صفوفًا والصفوف أعمدة، بمعنى آخر العنصر  $a_{ij}$  يصبح  $a_{ji}$ ، ويبرز لنقول المصفوفة  $A^T$  بالترتيب  $A^T$ .

$$A^T = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 4 \end{bmatrix}$$

إذن،  $A^T$  تصبح عمدة  $A$ ، وعمدة  $A^T$

$$|A| = 2(4) - 3(-1) = 11$$

$$|A^T| = 2(4) - (-1)(3) = 11$$

(1) أوجد منقول كل مصفوفة مما يأتي:

$$D = \begin{bmatrix} 2 & 3 & -1 \\ -2 & -1 & 5 \\ 1 & 3 & -2 \end{bmatrix} \quad \text{c}$$

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -3 & 4 \end{bmatrix} \quad \text{b}$$

$$B = \begin{bmatrix} -1 & 5 \\ 2 & 6 \end{bmatrix} \quad \text{a}$$

$$D^T = \begin{bmatrix} 2 & -2 & 1 \\ 3 & -1 & 3 \\ -1 & 5 & -2 \end{bmatrix}$$

$$C^T = \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ 0 & 4 \end{bmatrix} \quad B^T = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 5 & 6 \end{bmatrix}$$

(2) أوجد محددات المصفوفات في التمرين 1 ومحددات منقولها.

معددة  $B$  تساوي 16 :  $B^T$  تساوي 16  
معددة  $C$  تساوي 4 :  $C^T$  تساوي 4  
معددة  $D$  تساوي 18 :  $D^T$  تساوي 18

(3) ماذا تلاحظ حول المحددات؟ ضع تخميناً حول محددات المصفوفات ومحددات منقولها.

معددة المصفوفة تساوي معددة منقولها.

الفصل ٢ المصفوفات

25

العصف، الثاني، التناوي

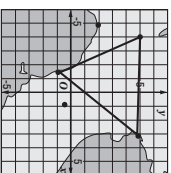
التاريخ:

الاسم:

## 2-4 تدريبات حل المسألة

### المحددات وقاعدة كرامر

(4) مساحة، إذا كانت إحداثيات رؤوس مثلث هي  $(-4, 5), (3, 25), (4, 8), (-1, 4), (0, -8)$  وكانت كل وحدة مربعة على المستوى الإحداثي تمثل 400 كيلومتر مربع.



فأوجد مساحة المثلث بالكيلومترات المربعة، وقرب

إجابتك إلى أقرب عدد كلي.

8306 كيلو متر مربع.

(5) أنسهم، يصنع صالِح مثلثًا إحداثيات رؤوسه  $(0, x), (0, -x), (-6, 0)$ ، في حين  $x > 0$ . وقد

خطط لعمل المثلث من مادة معدنية تكلف الوحدة

المربعة مئيل ريالين.

(a) اكتب معادلة تعطي مساحة المثلث.

$$\begin{vmatrix} -6 & 0 & 1 \\ 0 & -x & 1 \\ 0 & x & 1 \end{vmatrix} \quad \text{إجابة ممكنة: } \frac{1}{2}$$

(b) أوجد قيمة المحددة في الفرع h، واحسب قيمة  $x$

لتكون تكلفة المثلث المستعمل 60 ريالاً.

$$6x; 2(6x) = 60; x = 5$$

(1) اكتشف الخطأ، وجدت هيام إشارات خطأ في حساب

المحددة.

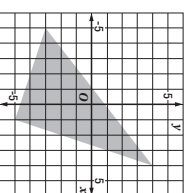
$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix} = 1(5)(9) - 2(6)(7) + 3(4)(8) = 2(4)(9) - 3(5)(7) + 1(6)(8) = 2(4)(9) - 3(5)(7) + 1(6)(8)$$

خطأ الإشارات التي يتعين تعديلها.

(2) بركة مساحة، أنشأ مهندس معماري بركة في فناء بناء

كأ في الشكل. اعتمد على الشكل، واكتب معادلة تحد

منها مساحة البركة.



$$\begin{vmatrix} 4 & 4 & 1 \\ 1 & -5 & 1 \\ 2 & -5 & -3 \end{vmatrix} \quad \text{إجابة ممكنة: } \frac{1}{2}$$

(3) مثلثات، أراد طلاب مدرسة تزيين حامل السبورة

بوضع أشرطة حول الأوتاد التي تحمل السبورة، وقد

أراد هؤلاء أن يعمل مثلثات مساحة كل منها نصف

وحدة مربعة، ولكون هلال قد درس المحددات فقد

عرف أن هذا يشبه إيجاد إحداثيات رؤوس المثلث

$(a, b), (c, d), (e, f)$  بصورة أساسية

$$\begin{vmatrix} a & b & 1 \\ c & d & 1 \\ e & f & 1 \end{vmatrix} \quad \text{لنا فإن المحددة } 1 \text{ أو } -1, \text{ أعط}$$

مثالاً لن هذا المثلث.

$\triangle ABC$ ، حيث  $A(0, 0)$  و  $B(1, 1)$  و  $C(1, 1)$

الفصل ٢ المصفوفات

24

العصف، الثاني، التناوي

الاسم: التاريخ:

## 2-5 تدريبات إعادة التعليم

(تتمه)

المعادلات المصفوفية: المعادلة المصفوفية لنظام معادلات تتكون من حاصل ضرب مصفوفة المعادلات ومصفوفة المتغيرات في الجانب الأيسر من إشارة المساواة، وضرب مصفوفة المتغيرات في الجانب الأيمن.

$$x+5=-8 \text{ و } 3x-7y=12 \text{ نظام المعادلات حل}$$

استعمل المعادلة المصفوفية لحل

$$\begin{bmatrix} 3 & -7 \\ 1 & 5 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 12 \\ -8 \end{bmatrix}$$

أوجد التعبير الضربي للمصفوفة المعادلات

$$\frac{1}{3(5)-1(-7)} \begin{bmatrix} 5 & 7 \\ -1 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{5}{22} & \frac{7}{22} \\ -\frac{1}{22} & \frac{3}{22} \end{bmatrix}$$

أعد كتابة المعادلة لتكون في الصورة:  $X = A^{-1}B$

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{5}{22} & \frac{7}{22} \\ -\frac{1}{22} & \frac{3}{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 12 \\ -8 \end{bmatrix}$$

حل

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{2}{11} \\ -\frac{11}{18} \end{bmatrix}$$

تعاريف:

استعمل معادلة مصفوفية لحل كل نظام ما يأتي:

$$\begin{pmatrix} 72 & 30 \\ 11 & 11 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4x-3y=18 \\ x+2y=12 \end{pmatrix} \quad (2)$$

$$\begin{pmatrix} 12 & 64 \\ 11 & 11 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2x+y=8 \\ 5x-3y=-12 \end{pmatrix} \quad (1)$$

$$\begin{pmatrix} -14 & 46 \\ 11 & 11 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4x-6y=20 \\ 3x+y+8=0 \end{pmatrix} \quad (4)$$

$$\begin{pmatrix} -5 & 115 \\ 13 & 13 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 7x-2y=15 \\ 3x+y=-10 \end{pmatrix} \quad (3)$$

$$\begin{pmatrix} 152 & 192 \\ 11 & 11 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3x-y=24 \\ 3y=80-2x \end{pmatrix} \quad (6)$$

$$\begin{pmatrix} 22 & 107 \\ 18 & 18 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5x+2y=18 \\ x=-4y+25 \end{pmatrix} \quad (5)$$

المفصل ٢، المصفوفات

27

المصفوفات المتساوية

الاسم: التاريخ:

## 2-5 تدريبات إعادة التعليم

التعبير الضربي للمصفوفة وأنظمة المعادلات الخطية

المصفوفة المربعة: والتعبير الضربي للمصفوفة، المصفوفة المربعة للصفوف هي مصفوفة مربعة، جميع عناصر قطرها الرئيس تساوي العدد 1، وبقية عناصرها تساوي العدد صفر.

المصفوفة المربعة: إذا كانت  $A$  مصفوفة من الرتبة  $n \times n$ ، وكانت  $I$  المصفوفة المربعة للصفوف، فإن  $A \cdot I = A$ ،  $I \cdot A = A$

إذا كان للمصفوفة  $A$  من الرتبة  $n \times n$  نظير ضربي  $A^{-1}$ ، فإن  $A \cdot A^{-1} = I$ ،  $A^{-1} \cdot A = I$

$$X = \begin{bmatrix} 7 & 4 \\ 10 & 6 \end{bmatrix}, Y = \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ -5 & 7 \end{bmatrix}$$

حدد ما إذا كانت كل من المصفوفتين  $X$  و  $Y$  نظيراً ضربياً للآخرى.

• أوجد  $X \cdot Y$

$$X \cdot Y = \begin{bmatrix} 7 & 4 \\ 10 & 6 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ -5 & 7 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 21-20 & -14+14 \\ 30-30 & -20+21 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

• أوجد  $Y \cdot X$

$$Y \cdot X = \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ -5 & 7 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 7 & 4 \\ 10 & 6 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 21-20 & 12-12 \\ -35+35 & -20+21 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

وبما أن:  $I = I \cdot X = X \cdot I$ ، فإن كلا من  $X$  و  $Y$  نظير ضربي للآخرى.

تعاريف:

حدد ما إذا كانت كل من المصفوفتين  $X$  و  $Y$  نظيراً ضربياً للآخرى بما يأتي:

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 5 & -1 \end{bmatrix} \text{ و } \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -1 & -2 \end{bmatrix} \quad (3) \quad \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 5 & 4 \end{bmatrix} \text{ و } \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -5 & 3 \end{bmatrix} \quad (2) \quad \begin{bmatrix} 4 & 5 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \text{ و } \begin{bmatrix} 4 & -3 \\ -3 & 4 \end{bmatrix} \quad (1)$$

$$\begin{bmatrix} 5 & 2 \\ 11 & 4 \end{bmatrix} \text{ و } \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 11 & -5 \end{bmatrix} \quad (6) \quad \begin{bmatrix} 4 & -1 \\ 5 & 3 \end{bmatrix} \text{ و } \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 8 \end{bmatrix} \quad (5) \quad \begin{bmatrix} 8 & 11 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \text{ و } \begin{bmatrix} -4 & 11 \\ 3 & -8 \end{bmatrix} \quad (4)$$

$$\begin{bmatrix} 3 & 7 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} \text{ و } \begin{bmatrix} 7 & -3 \\ 2 & -2 \end{bmatrix} \quad (9) \quad \begin{bmatrix} 5 & 8 \\ 4 & 6 \end{bmatrix} \text{ و } \begin{bmatrix} -3 & 4 \\ 2 & -5 \end{bmatrix} \quad (8) \quad \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 6 & -2 \end{bmatrix} \text{ و } \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} \quad (7)$$

$$\begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 7 & 5 \end{bmatrix} \text{ و } \begin{bmatrix} -5 & 3 \\ 7 & -4 \end{bmatrix} \quad (12) \quad \begin{bmatrix} 7 & 2 \\ 17 & 5 \end{bmatrix} \text{ و } \begin{bmatrix} 5 & -2 \\ -17 & 7 \end{bmatrix} \quad (11) \quad \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 4 & -6 \end{bmatrix} \text{ و } \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ -4 & -3 \end{bmatrix} \quad (10)$$

المفصل ٢، المصفوفات

26

المصفوفات المتساوية

التاريخ:

الاسم:

## 2-5 تدريبات حل المسألة

### الانظير الضربي للمصفوفة وأنظمة المعادلات الخطية

3 مصفوفات نظيرة لنفسها، لاحظ سلمان أن أي مصفوفة يكون كل من عناصر القطر الرئيس فيها 1 أو -1، وفيه عناصرها أصفار، تكون نظيرًا ضربيًا لنفسها. أعط مثالًا لمصفوفة  $2 \times 2$  تكون نظيرًا لنفسها، وفيها عنصر واحد على الأقل ليس صفرًا، ولا يقع على القطر الرئيس.

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

4 عمليات على المصفوفات: يدرس قاسم المحددات،

والنظير الضربي للمصفوفات، اقترح معلم قاسم أن هناك مصفوفات لها خصائص وحيدة، وتحكي طلابه في أن يجدوا مثل هذه المصفوفات، ويصفوا الخصائص التي وجدوها

$$G = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

a ما تحدة المصفوفة  $G$ ؟  
معددة  $G$  تساوي الصفر

b هل للمصفوفة  $G$  نظير ضربي؟ فسر إجابتك.  
النظير الضربي غير موجود لأن  $ad-bc=0$

1 تدریس، تشرح سلمی الصفوفات لوالدها، وقد كتبت نظام المعادلات الآتي:

$$2x + y = 4$$

$$3x + y = 5$$

وبعد ذلك عرضت سلمی الصفوفات الخاصة بنظام المعادلات أمام والدها، فما هي الصفوفات؟

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 5 \end{bmatrix}$$

2 نهن، كتب بيتر معادلة مصفوفة توضح تكاليف

رحلتين بالقطار من المدينة  $A$  إلى المدينة  $B$ ، واستعمل الرمز  $x$  ليدل على تكلفة الرحلة ذهًا وياًا، واستعمل الرمز  $y$  لكانة الرحلة في اتجاه واحد.

$$\begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 61 \\ 54 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{4} \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -2 & 3 \end{bmatrix}$$

ثم كسب إجابته

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{4} \\ -\frac{1}{2} & \frac{3}{4} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 61 \\ 54 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 34 \\ 10 \end{bmatrix}$$

وعندما تحقّق من إجابته، وجد أن القيم التي حصل عليها لا تحقق المعادلة الأصلية، فآين أخطأ؟  
في ضرب المصفوفات في الخطوة الأخيرة  
 $17 = (54) + (-\frac{1}{4})(61)$   
وليس 34

الفصل ٢، المصفوفات

29

المصفوفات، الثاني، التناوي

التاريخ:

الاسم:

## 2-5 تدريبات المهارات

### الانظير الضربي للمصفوفة وأنظمة المعادلات الخطية

حدد ما إذا كانت كل من المصفوفتين مثل نظيرًا ضربيًا للآخرى أم لا.

$$1) \quad E = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, Q = \begin{bmatrix} -1 & 3 \\ -1 & -2 \end{bmatrix} \quad \text{نعم} \quad \text{لا} \quad X = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, Y = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$2) \quad A = \begin{bmatrix} -2 & 5 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 2 & -5 \\ 1 & -2 \end{bmatrix} \quad \text{نعم} \quad \text{لا} \quad M = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}, N = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -3 \end{bmatrix}$$

$$3) \quad X = \begin{bmatrix} -1 & 4 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}, Y = \begin{bmatrix} -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{1}{6} & \frac{1}{6} \end{bmatrix} \quad \text{نعم} \quad \text{لا} \quad V = \begin{bmatrix} 0 & 7 \\ -7 & 0 \end{bmatrix}, W = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{7}{7} \\ \frac{1}{7} & 0 \end{bmatrix}$$

$$4) \quad D = \begin{bmatrix} -4 & -4 \\ -4 & 4 \end{bmatrix}, E = \begin{bmatrix} -0.125 & -0.125 \\ -0.125 & -0.125 \end{bmatrix} \quad \text{نعم} \quad \text{لا} \quad G = \begin{bmatrix} 4 & -3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}, H = \begin{bmatrix} \frac{2}{11} & \frac{3}{11} \\ -\frac{1}{11} & \frac{4}{11} \end{bmatrix}$$

$$5) \quad \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{نعم} \quad \text{لا} \quad \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} \quad \text{نعم} \quad \text{لا} \quad \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 4 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{نعم} \quad \text{لا}$$

$$6) \quad \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} \quad \text{نعم} \quad \text{لا} \quad \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 4 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{نعم} \quad \text{لا} \quad \begin{bmatrix} 9 & 3 \\ 6 & 2 \end{bmatrix} \quad \text{نعم} \quad \text{لا}$$

$$7) \quad \begin{bmatrix} 0 & 4 \\ -6 & -2 \end{bmatrix} \quad \text{نعم} \quad \text{لا} \quad \begin{bmatrix} -2 & -4 \\ 6 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{نعم} \quad \text{لا} \quad \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} \quad \text{نعم} \quad \text{لا}$$

أوجد النظير الضربي لكل مصفوفة فيما يأتي إن وجد:

$$8) \quad \begin{bmatrix} 3 & 6 \\ -1 & -2 \end{bmatrix} \quad \text{نعم} \quad \text{لا} \quad \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} \quad \text{نعم} \quad \text{لا} \quad \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} \quad \text{نعم} \quad \text{لا}$$

$$9) \quad \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} \quad \text{نعم} \quad \text{لا} \quad \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} \quad \text{نعم} \quad \text{لا} \quad \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} \quad \text{نعم} \quad \text{لا}$$

الفصل ٢، المصفوفات

28

المصفوفات، الثاني، التناوي

## 2-5 التدرجات الإثرائية

### مصفوفات التباديل

مصفوفة التباديل هي مصفوفة مربعة تظهر العدد 1 مرة واحدة في كل صف وفي كل عمود، وبقيّة عناصر المصفوفة أصفار.

$$P^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad P = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

أوجد التغير الضريبي لمصفوفة التباديل، من خلال تبديل الصف الأول بالعمود الأول، والصف الثاني بالعمود الثاني... وهكذا، أي إيجاد متقول المصفوفة.

$P$  مصفوفة تباديل من الرتبة  $4 \times 4$ ، و  $P^{-1}$  نظير ضريبي لـ  $P$ .

حلّ كلّ من المسائل الآتية:

1) يوجد مصفوفة تباديل واحدة من الرتبة  $2 \times 2$ ، وهي 2) أوجد التغير الضريبي للمصفوفة التي أوجدتها في السؤال 1، ماذا لاحظ؟

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

3) بين أن كلّاً من المصفوفتين في السؤالين 1، 2 نظير ضريبي للآخرى.

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

4) اكتب التغير الضريبي للمصفوفة

$$B^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

5) استعمل المصفوفة  $P^{-1}$  من السؤال 4، وتحقق من أن كلّاً من  $P$ ، نظير ضريبي للآخرى.

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$