



وزارة التربية والتعليم
Ministry of Education
المملكة العربية السعودية

الرياضيات

لصف الثالث الثانوي

مصادر المعلم للأنشطة الصفية

الفصل السابع: الاحتمال والإحصاء

العبيكان
Obekon

Mc
Graw
Hill Education

يوزع مجاناً ولا يباع

١٤٣٥ هـ - ٢٠١٤ م

Glencoe Mathematics © 2010

CHAPTER RESOURCE MASTERS

Precalculus

الرياضيات - الصف الثالث الثانوي

مصادر المعلم للأنشطة الصفية

أعدّ النسخة العربية: شركة العبيكان للتعليم

www.obeikaneducation.com



English Edition Copyright © the McGraw-Hill Companies, Inc.
All rights reserved.

Arabic Edition is published by Obeikan under agreement with
The McGraw-Hill Companies, Inc. © 2008.



حقوق الطبعة الإنجليزية محفوظة لشركة ماجروهل ©.

الطبعة العربية: مجموعة العبيكان للاستثمار
وفقاً لاتفاقيتها مع شركة ماجروهل © ٢٠٠٨ م / ١٤٢٩ هـ.

لا يسمح بإعادة إصدار هذا الكتاب أو نقله في أي شكل أو واسطة، سواء أكانت إلكترونية أو ميكانيكية، بما في ذلك التصوير بالنسخ «فوتوكوبي»، أو التسجيل، أو التخزين والاسترجاع، دون إذن خطي من الناشر.

بِسْمِ اللَّهِ الرَّحْمَنِ الرَّحِيمِ

الحمد لله، والصلاة والسلام على نبينا محمد، وعلى آله وصحبه أجمعين، وبعد:

عزيزي المعلم / عزيزتي المعلمة

يسرنا أن نقدّم هذه المجموعة من التدريبات المساندة، التي تراعي الفروق الفردية بين الطلاب. حيث نطمح أن يساعدك التنوع في هذه التدريبات على الوصول إلى جميع الطلاب في الصف، مهما تباينت مستوياتهم. وقد تم تخصيص صفحة أو أكثر لكل نوع من هذه التدريبات؛ لتغطي درسًا من دروس كتاب الطالب. حيث يمكنك أن تكلف الطلاب حل صفحة التدريبات المقابلة لكل درس بحسب مستوى كل منهم؛ سواء في داخل الصف أم في المنزل. وليست هذه التدريبات بديلاً عن كتاب التمارين، ولكنها مساندة ومكملة له.

وتشمل هذه التدريبات الأنواع التالية:

تدريبات إعادة التعليم

تركّز هذه التدريبات على محتوى الدروس في كتاب الطالب، وتقدّمه بأسلوب تدريسي ومعالجة يختلفان عن كتابي الطالب والتمارين. وهي موجّهة إلى الطلاب ذوي المستوى دون المتوسط.

تدريبات حل المسألة

تأتي هذه التدريبات انطلاقاً من اهتمام هذه المناهج بحلّ المسألة، حيث تم تخصيصها لتقديم تدريبات إضافية على حل المسألة ترتبط بكل درس من دروس كتاب الطالب. وهي موجّهة إلى جميع الطلاب على اختلاف مستوياتهم التحصيلية.

التدريبات الإثرائية

تساعد هذه التدريبات على التوسّع في مفاهيم الدرس، كما تؤدي إلى توسيع مدارك الطلاب حول تعلم الرياضيات بشكل عام. وهذه التدريبات موجّهة إلى الطلاب ذوي المستوى فوق المتوسط.

ملحق الإجابات:

يتضمن هذا المصدر في آخره ملحقاً بالإجابات، حيث تظهر باللون الأسود الغامق على صفحات مصغّرة.

المقدمة 4

الدرس 7-1 الدراسات التجريبية والمسحية وبالملاحظة

تدريبات إعادة التعليم 6

تدريبات حل المسألة 8

التدريبات الإثرائية 9

الدرس 7-2 التحليل الإحصائي

تدريبات إعادة التعليم 10

تدريبات حل المسألة 12

التدريبات الإثرائية 13

الدرس 7-3 الاحتمال المشروط

تدريبات إعادة التعليم 14

تدريبات حل المسألة 16

التدريبات الإثرائية 17

الدرس 7-4 الاحتمال والتوزيعات الاحتمالية

تدريبات إعادة التعليم 18

تدريبات حل المسألة 20

التدريبات الإثرائية 21

الدرس 7-5 التوزيع الطبيعي

تدريبات إعادة التعليم 22

تدريبات حل المسألة 24

التدريبات الإثرائية 25

الدرس 7-6 التوزيعات ذات الحدين

تدريبات إعادة التعليم 26

تدريبات حل المسألة 28

التدريبات الإثرائية 29

ملحق الإجابات 30

7-1

تدريبات إعادة التعليم

الدراسات التجريبية والمسحية والقائمة على الملاحظة

الدراسات التجريبية والمسحية والقائمة على الملاحظة

المصطلح	التعريف	مثال
الدراسة المسحية	الحصول على معلومات من مجتمع الدراسة أو عينة منه.	أخذ عينة لمعرفة من يؤيد فكرة ما أو يعارضها.
الدراسة القائمة على الملاحظة	اختبار يُراقب فيه الأفراد دون أية محاولة للتأثير في النتائج.	ملاحظة مجموعة مكونة من 100 شخص، منهم 50 يخضعون للمعالجة، وجمع معلومات، وتحليل البيانات وتفسيرها.
الدراسة التجريبية	عملية يجري فيها تدخل مقصود للأشخاص أو الحيوانات أو الأشياء. ويتم فيها ملاحظة النتائج.	دراسة الفرق بين مجموعتين إحداهما تتعرض لمعالجة، والأخرى لا تتعرض لمعالجة أو تتعرض لمعالجة شكلية.

مثال 1

اذكر ما إذا كان كل موقف مما يأتي يمثل دراسة تجريبية أو قائمة على الملاحظة، وفي حالة الدراسة التجريبية حدّد المجموعة الضابطة، والمجموعة التجريبية، ثم بيّن إن وُجد تحيز أو لا.

اختر 20 مولوداً حديثاً نصفهم من الذكور، ونصفهم من الإناث، وقارن بين كتلهم.

هذه دراسة قائمة على الملاحظة.

مثال 2

حدّد ما إذا كانت كل من الحالات الآتية تتطلب دراسة مسحية أو دراسة قائمة على الملاحظة أو دراسة تجريبية، وفسّر إجابتك.

تريد معرفة شعور الطلاب وأولياء الأمور حول الزي الموحد في المدرسة.

تتطلب هذه الحالة دراسة مسحية، يُفضّل أن تسأل فيها عينة عشوائية من الطلاب، وعينة عشوائية أخرى من أولياء الأمور حول رأيهم في ذلك.

تمارين

حدّد ما إذا كانت كل حالة مما يأتي تمثل دراسة تجريبية أو دراسة قائمة على الملاحظة، وحدّد المجموعة الضابطة والتجريبية إذا كانت تجريبية، ثم بيّن إن وُجد تحيز أو لا:

- خذ 300 طالب واقسمهم عشوائياً إلى مجموعتين (2) خذ 100 طالب، نصفهم شارك في فريق الرياضيات، وقارن بين درجاتهم ومعدلاتهم.
- خذ 300 طالب واقسمهم عشوائياً إلى مجموعتين (2) خذ 100 طالب، نصفهم شارك في فريق الرياضيات، وقارن بين درجاتهم ومعدلاتهم.
- متساويتين، إحداهما تمارس لعبة كرة السلة 3 مرات في الأسبوع، والمجموعة الأخرى لا تمارس لعبة كرة السلة مطلقاً. وبعد ثلاثة أشهر، أجر مقابلة مع الطلاب؛ لمعرفة شعورهم نحو المدرسة.

7-1

تدريبات إعادة التعليم

(تتمة)

الدراسات التجريبية والمسحية والقائمة على الملاحظة

التمييز بين الارتباط والسببية

المصطلح	التعريف	مثال
الارتباط	عندما تحصل حادثة يكون حصول الأخرى ممكنًا.	عندما تتجمع الغيوم فإنه من الممكن نزول المطر.
السببية	إحدى الحادثتين سبب مباشر في وقوع الحادثة الأخرى.	إشعال الضوء يجعل الغرفة أكثر إضاءة.

مثال

بيّن ما إذا كانت العبارات الآتية تُظهر ارتباطاً أم سببية، ثم فسر إجابتك.
الأطفال الذين يعيشون في بيوت واسعة أكثر نشاطاً من الأطفال الذين يعيشون في بيوت صغيرة.
ارتباط؛ لا يوجد سبب يجعلنا نفترض أن حجم البيت يسبب زيادة النشاط، إذ إن هناك أطفالاً مختلفي النشاط يعيشون في بيوت كبيرة. فربما ترجع زيادة النشاط إلى عامل آخر، مثل كميات الغذاء ونوعها.

تمارين

- بيّن ما إذا كانت العبارات الآتية تُظهر ارتباطاً أم سببية، ثم فسر إجابتك:
- (1) إذا ركضت في الشتاء، فإني سأمرض.
 - (2) دلّت الدراسات أن زيادة أكل السمك تحسن درجة الرياضيات.

- (3) إذا أضعت كتاب المكتبة، فعليك أن تدفع غرامة. (4) قراءة كتاب عن التغذية الخالية من الدسم تجعلك تفقد كتلة.

- (5) إذا تغيّت يوماً عن المدرسة، فلن أحصل على جائزة الحضور.
- (6) امتلاك لي سيارة ثمينة تجعلني أجمع ثروة.

تدريبات حل المسألة

الدراسات التجريبية والمسحية والقائمة على الملاحظة

(4) رسوم متحركة درس علماء السلوك أثر الرسوم المتحركة التي تتسم بالعنف في سلوك الأولاد.

(a) صف دراسة قائمة على الملاحظة يمكن للعلماء أن ينفذوها؛ لدراسة أثر الرسوم المتحركة التي تتسم بالعنف في الأولاد.

(b) صف التجربة التي يمكن أن يعلها العلماء لدراسة أثر الرسوم المتحركة التي تتسم بالعنف في الأولاد.

(c) كيف يوضح العلماء أن العنف بين الأولاد كان نتيجة للرسوم المتحركة التي تتسم بالعنف لا مجرد ارتباط؟

(1) جراحة هناك تقنية جديدة في جراحة الركبة، حيث تُوضع الركبة في وضع مناسب باستعمال مادة التيتانيوم وأغطية واقية بدلاً من قطع الأربطة والعضلات. وقد قامت دراسة بملاحظة أزمنة الشفاء بعد جراحة 100 رُكبة نصفها استعملت فيها التقنية الجديدة. فأيهما كانت المجموعة الضابطة؟

(2) مشروبات رياضية تعطي شركة للمشروبات الرياضية عينات مجانية من إنتاجها الجديد في مجمع تجاري، وقد سجل عدد الأشخاص الذين أعمارهم من 12 - 20 مقابل عدد الكبار الذين أخذوا العينات. فهل يدل هذا على دراسة تجريبية أو مسحية أو قائمة على الملاحظة؟

(3) نواد وجدت دراسة أن أعضاء أحد الأندية هم في الأغلب من المحامين والأطباء. فهل هذا ارتباط أم سببية؟

7-1

التدريبات الإثرائية

عينات طبقية

يستعمل الباحثون في بعض الحالات عينات طبقية بدلاً من العينات العشوائية، ويمكن للعينات الطبقية في المجتمعات المتنوعة أن تكون أكثر دقة من العشوائية. حيث يوزع المجتمع إلى أجزاء متميزة، قبل اختيار العينة الطبقية على أن يتجانس أفراد كل جزء، ثم يتم أخذ عينة تمثله من كل جزء، وتكون مجموعة هذه العينات هي العينة الممثلة للمجتمع.

مثال

يمكن تصنيف طلاب مدرسة ثانوية، وعددهم 2294 طالباً، إلى أربع فئات بحسب الصف، والفرع/ علمي أو شرعي:

الصف الحادي عشر علمي: 576	الصف الحادي عشر شرعي: 530
الصف الثاني عشر علمي: 600	الصف الثاني عشر شرعي: 588

اختيرت عينة من 500 طالب لاستطلاع رأيهم، حدّد عدد الطلاب الذين سيشاركون في العينة من كل فئة.

الخطوة 1: أحسب النسبة لكل فئة.

الصف الحادي عشر علمي: $576 \div 2294 = 25.11\%$

الصف الحادي عشر شرعي: $530 \div 2294 = 23.10\%$

الصف الثاني عشر علمي: $600 \div 2294 = 26.16\%$

الصف الثاني عشر شرعي: $588 \div 2294 = 25.63\%$

الخطوة 2: أضرب كل نسبة في حجم العينة.

الصف الحادي عشر علمي: $126 \text{ طالباً} \approx 125.55 = (25.11\%)(500)$

الصف الحادي عشر شرعي: $115 \text{ طالباً} \approx 115.5 = (23.10\%)(500)$

الصف الثاني عشر علمي: $131 \text{ طالباً} \approx 130.8 = (26.16\%)(500)$

الصف الثاني عشر شرعي: $128 \text{ طالباً} \approx 128.15 = (25.63\%)(500)$

(ملحوظة: تم تقريب العدد 115.5 إلى 115 حتى يكون حجم العينة 500 طالب)

تمارين

لكل من التمرينين 1,2، حدّد عدد الأشخاص في كل فئة من المشاركين في العينة.

(1) يتكون مجتمع رياضيين من 18 لاعب كرة قدم، 18 لاعب كرة سلة، ويُراد أخذ عينة ممثلة من 20 رياضياً.

(2) أريد التعرف على صعوبات العمل في ستة قطاعات هي: الزراعة، والصناعة، والتجارة، والنقل، والتعليم، والصحة، في مجتمع يتكون من: 100000 يعملون في الصناعة، 195000 في قطاع الزراعة، 150000 في قطاع التعليم، 125000 في قطاع التجارة، 52000 في قطاع الصحة، و 31000 في قطاع النقل. حيث يتطلب ذلك أخذ عينة ممثلة من 100 شخص.

تدريبات إعادة التعليم

التحليل الإحصائي

7-2

مقاييس النزعة المركزية

المصطلح	التعريف	أفضل استعمال له
المتوسط	مجموع البيانات مقسوماً على عددها.	عندما لا توجد قيم متطرفة.
الوسيط	العدد الذي موقعة في المنتصف في قيم مرتبة أو المتوسط عند وجود قيمتين في المنتصف.	عندما توجد قيم متطرفة في البيانات، ولا توجد فراغات كبيرة في المنتصف.
المنوال	العدد أو الأعداد التي تظهر أكثر من غيرها.	توجد قيم متكررة عديدة في البيانات.
هامش خطأ المعاينة	$\pm \frac{1}{\sqrt{n}}$ ، للعينة العشوائية التي حجمها n .	تقدير إلى أي مدى تمثل العينة المجتمع.

مثال 1

أي مقاييس النزعة المركزية نصف البيانات الآتية بصورة أفضل؟ ولماذا؟
 $\{2.1, 21.5, 22.3, 22.8, 23.1, 159.4\}$

هناك قيم متطرفة، غير أنه لا توجد فراغات كبيرة بين البيانات؛ لذا فالوسيط هو أفضل مقياس .

مثال 2

ما هامش خطأ المعاينة والفترة الممكنة التي تتضمن نسبة المجتمع الكلي؟
 استُطلعت آراء 400 شخص حول موقع حديقة عامة، فأجاب 51% منهم بالموافقة على المكان المقترح.

لما كان الاستطلاع قد شمل 400 شخص، فإن هامش خطأ المعاينة $\pm \frac{1}{\sqrt{400}}$ أو $\pm 5\%$. ونسبة الأشخاص المؤيدين هي النسبة التي وُجدت في الدراسة المسحية مضافاً إليها أو مطروحاً منها 5%، لذا فالفترة هي (56% , 46%).

تمارين

أي مقاييس النزعة المركزية يصف كل مجموعة من البيانات الآتية بصورة أفضل؟ ولماذا؟
 (1) $\{45, 16, 30, 45, 29, 45\}$ (2) $\{100, 92, 105, 496, 77, 121\}$

(3) $\{2.5, 99.5, 110.5, 76\}$ (4) $\{60, 50, 55, 62, 44, 65, 51\}$

(5) كتب استُطلعت آراء 28 شخصاً، وُجد أن 40% منهم يقرأ 3 كتب على الأقل شهرياً. فما هامش خطأ المعاينة؟ وما الفترة الممكنة التي تتضمن نسبة المجتمع الذين يقرؤون 3 كتب شهرياً على الأقل؟

تدريبات إعادة التعليم

التحليل الإحصائي

(تتمة)

مقاييس التشتت

قانون الانحراف المعياري		
القانون	المتغير	
$\sqrt{\frac{\sum_{k=1}^n (x_n - \bar{x})^2}{n-1}}$	s	العينة
$\sqrt{\frac{\sum_{k=1}^n (x_n - \mu)^2}{n}}$	σ	المجتمع

مثال حدّد ما إذا كانت البيانات الآتية تمثّل عينة أم مجتمعاً، ثم أوجد الانحراف المعياري مقرباً إلى أقرب جزء من مئة.

بيّن الجدول الآتي درجات 12 طالباً في مساق الرياضيات.

درجات 12 طالباً سجلوا في مساق للرياضيات في إحدى الجامعات					
69	92	83	75	99	61
91	98	65	73	94	77

هذه بيانات مجتمع؛ لأن جميع درجات الطلاب وعددهم 12 قد أخذت.

$$\mu = \frac{\sum_{i=1}^{12} (x_i)}{12} = \frac{977}{12} = 81.42$$

ثم أوجد مجموع مربعات الفروق بين الدرجات والمتوسط.

$$\Sigma [(61 - 81.42)^2 + (99 - 81.42)^2 + (75 - 81.42)^2 + \dots + (91 - 81.42)^2] = 2095.55$$

$$\sqrt{\frac{2095.55}{12}} \approx 13.21$$

عوّض هذه القيمة في قانون الانحراف المعياري تحصل على 13.21

تمارين

(1) حدّد ما إذا كان كل مما يأتي يمثل عينة أم مجتمعاً، ثم أوجد الانحراف المعياري للبيانات، مقرباً إلى أقرب جزء من مئة.

درجات بعض طلاب الآداب في إحدى الجامعات					
88	76	95	82	91	88
90	82	85	92	94	75

(a)

أعمار جميع أعضاء النادي الثقافي					
16	15	14	15	17	14

(b)

تدريبات حل المسألة

التحليل الإحصائي

- (1) درجات حرارة فيما يأتي درجات الحرارة السيليزية العظمى في خمسة أيام اختيرت عشوائياً من شهر جمادى الآخرة (عام 1434 هـ) في مدينة الرياض .

المركز	الوسط
1	34°
2	35°
3	33°
4	31°
5	35°

هل تُعد هذه البيانات عينة أم مجتمعاً؟

- (2) أُجري استطلاع للرأي حول رغبة الأشخاص في قضاء الإجازة خارج البلاد، فكانت الفترة الممكنة التي تتضمن نسبة المجتمع الذي أبدوا رغبة في ذلك هي: 46.5% إلى 49.5% . فما هامش خطأ المعاينة؟

- (3) تفاح تصف البيانات الآتية أعداد حبات التفاح في 20 سلة مختلفة : { 80, 75, 68, 82, 77, 74, 81, 85, 73, 79, 75, 73, 80, 71, 82, 81, 77, 80, 78, 84 } . فما الوسيط لعدد حبات التفاح في السلة؟

- (4) سيارات حدّدت دائرة المرور سرعات السيارات على الطرق الخارجية بالميل / ساعة على النحو التالي: {65, 61, 72, 54, 78, 61, 74, 75, 61, 55, 64, 66, 70} . فما المنوال لهذه السرعات؟

- (5) النظام الشمسي اعتقد العلماء الفلكيون حتى نهاية القرن العشرين أن هناك 9 كواكب . و الجدول الآتي يبين كتل هذه الكواكب .

الكوكب	عطارد	الزهرة	الأرض	المريخ	المشتري
الكتلة (10 ²¹ طن)	0.364	5.37	6.58	0.708	2093

الكوكب	زحل	أورانوس	نبتون	بلوتو
الكتلة (10 ²¹ طن)	627	95.7	113	0.0138

- (a) أي مقياس النزعة المركزية يصف هذه البيانات بصورة أفضل؟

- (b) ما القيمة الدقيقة للمقياس الأفضل لهذه البيانات؟

- (c) ما الانحراف المعياري لهذه البيانات؟

- (d) كم كوكباً كتلته ضمن مدى انحراف معياري واحد من مقياس النزعة المركزية؟

7-2

التدريبات الإثرائية

المتوسطات (Means)

توجد متوسطات أخرى غير المتوسط الحسابي المعروف ومنها:

المتوسط الهندسي (*Ageometric Meam*) ويُعرف بأنه الجذر النوني لنتائج ضرب n من القيم، ويُستعمل عادة في المعاملات التجارية لمعرفة معدلات النمو.

المتوسط التوافقي H (*Aharmonic Meam*) ويُعرف بأنه عدد القيم مقسومًا على مجموع مقلوباتها، ويُستعمل عادة في حساب معدلات السرعة $H = \frac{n}{\sum \frac{1}{x}}$.

تمارين

(1) أوجد المتوسط الهندسي للقيم: 225, 181, 110, 118, 107

(2) أوجد المتوسط التوافقي للقيم: 3, 4, 5, 6

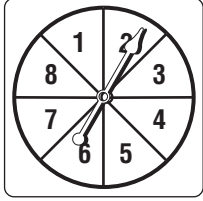
(3) سافر إذا سافرت بسيارتك، وقطعت نصف المسافة بسرعة ثابتة، ثم قطعت نصف المسافة الآخر بسرعة ثابتة أخرى، فإن سرعتك المتوسطة في الرحلة هي المتوسط التوافقي. إذا قام سعد برحلة طويلة وقطع نصف المسافة بسرعة 60 mi/h ، والنصف الآخر بسرعة 70 mi/h ، فكم كانت سرعتك المتوسطة في الرحلة كلها؟

تدريبات إعادة التعليم

7-3

الاحتمال المشروط

الاحتمال المشروط يُسمى احتمال وقوع حادثة B إذا عُلِمَ أن حادثة أخرى A قد وقعت احتمالاً مشروطاً، ويُرمز إليه بالرمز $P(B|A)$.



القرص الدوّار: يلعب عثمان لعبة القرص الدوّار الموضح إلى اليسار. فما احتمال أن يتوقف المؤشر على العدد 7 علماً بأنه توقف على عدد أكبر من 5؟

مثال

هناك 8 نتائج ممكنة للقرص الدوار الموضح.

افترض أن الحادثة A هي: المؤشر الذي توقّف على عدد أكبر من 5

وأن الحادثة B هي: المؤشر الذي توقّف على العدد 7

$$P(A) = \frac{3}{8} \quad \text{هناك 3 نواتج من 8 نواتج أكبر من 5}$$

$$P(A \cap B) = \frac{1}{8} \quad \text{ناتج واحد من 8 نواتج يكون أكبر من 5 ويساوي 7}$$

$$P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} \quad \text{قانون الاحتمال المشروط}$$

$$P(B|A) = \frac{1}{8} \div \frac{3}{8} \quad \text{تعويض القيم } P(A) \text{ و } P(A \cap B)$$

$$P(B|A) = \frac{1}{3}$$

احتمال أن يتوقف المؤشر على 7، علماً بأن المؤشر توقّف على عدد أكبر من 5 يساوي $\frac{1}{3}$

تمارين

مجموعة بطاقات مكونة من 52 بطاقة موزعة بالتساوي على أربعة ألوان هي: الأحمر، الأسود، الأخضر، الأزرق. وقد رُقمت بطاقات كل لون من 1 إلى 13. فإذا سحبت بطاقة من مجموعة البطاقات، فأوجد احتمال كل مما يأتي:

(1) البطاقة حمراء علماً بأن البطاقة المسحوبة تحمل الرقم 1

(2) البطاقة تحمل الرقم 6 علماً بأن لونها أسود .

(3) البطاقة سوداء علماً بأن اللون المسحوب أسود أو أخضر.

إذا أُلقي مكعب أرقام مرة واحدة، فأوجد كل احتمال مما يأتي:

(4) العدد الظاهر 4 علماً بأن العدد الظاهر زوجي.

(5) العدد الظاهر 2 علماً بأن العدد الظاهر أقل من 6

(6) العدد الظاهر زوجي علماً بأن العدد الظاهر 3 أو 4

7-3

تدريبات إعادة التعليم

(تتمة)

الاحتمال المشروط

الجدول التوافقي هي جداول تُسجّل فيها البيانات ضمن خلايا على أن تعطي الحالات المحتملة المختلفة نتائج ممكنة مختلفة. ومثل هذه الجداول تستعمل لتحديد الاحتمالات المشروطة.

مثال

كرة اليد: أوجد احتمال أن طالباً في فريق كرة اليد علماً أنه في السنة الثالثة.

الصف	سنة أولى	سنة ثانية	سنة ثالثة	سنة رابعة
يلعب كرة يد	17	20	34	14
لا يلعب كرة يد	586	540	510	459

المجموع 2180 طالباً $14 + 586 + 20 + 540 + 34 + 510 + 17 + 459 =$

$$P(L|J) = \frac{P(L \cap J)}{P(J)}$$

قانون الاحتمال المشروط

$$P(L \cap J) = \frac{34}{2180}, P(J) = \frac{34 + 510}{2180}$$

$$= \frac{34}{2180} \div \frac{544}{2180}$$

$$= \frac{34}{544} = \frac{1}{16}$$

بسط

احتمال أن الطالب يلعب كرة يد علماً بأنه في السنة الثالثة $\cdot \frac{1}{16}$.

تمارين

(1) احتفالات يبيّن الجدول المجاور الحضور في حفل تخرج. أوجد احتمال أن يحضر شخص بوصفه (ولي أمر) هذا الحفل.

طالب	ولي أمر	
112	104	يستطيع أن يحضر
14	32	لا يستطيع أن يحضر

(2) رياضة يبيّن الجدول المجاور عدد الطلاب الذين يلعبون كرة سلة. أوجد احتمال أن يلعب طالب كرة سلة علماً بأنه في أعلى صف في المدرسة.

الصف	يلعب كرة سلة	لا يلعب كرة سلة
قبل الصف الأعلى	22	352
الصف الأعلى	34	306

(3) تسوق أجابت 4 شركات أعمال في المدينة عن استبانة تسأل حول

أسلوب الدفع الذي تقبل به عند الشراء: هل كان نقداً أم تحويلاً بنكياً أم باستعمال بطاقة الائتمان؟ أوجد احتمال كل مما يأتي:

أسلوب الدفع	شركة الأعمال الأولى	شركة الأعمال الثانية	شركة الأعمال الثالثة	شركة الأعمال الرابعة
نقداً	304	140	102	49
بطاقة ائتمان	456	223	63	70
تحويل بنكي	380	166	219	28

(a) يستعمل المتسوق بطاقة الائتمان علماً بأنه يتسوق من الشركة الأولى.

(b) يستعمل المتسوق التحويل البنكي علماً بأنه يتسوق من الشركة الرابعة.

(c) يتسوق من الشركة الثالثة علماً بأنه يدفع نقداً.

تدريبات حل المسألة

7-3

الاحتمال المشروط

(4) أحصى معاذ عدد أكواب الشاي وفناجين القهوة التي قدّمها للزبائن خلال 3 أيام فكانت على النحو التالي:

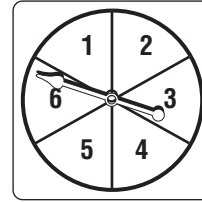
اليوم	شاي	قهوة
الاثنين	42	8
الثلاثاء	47	3
الأربعاء	47	3

(a) أوجد احتمال تقديمه فنجان قهوة علمًا أن اليوم هو الأربعاء.

(b) أوجد احتمال تقديمه فنجان قهوة علمًا أن اليوم هو الاثنين.

(c) أوجد احتمال أن يكون اليوم هو الثلاثاء علمًا أنه قدّم الشاي.

(1) الأقراص الدوّارة: يقوم خالد باللعب بالقرص الدوّار أدناه، فما احتمال أن يقف المؤشر عند العدد 6 علمًا بأن العدد الذي توقف عنده أكبر من 2؟



(2) بطاقات: لُوّنت 52 بطاقة مقسمة إلى أربع مجموعات متساوية، بالألوان الأحمر، والأخضر، والأزرق، والأصفر، ورُقّمت بطاقات كل لون من 1 إلى 13 فإذا سحبت فاطمة بطاقة عشوائية، فما احتمال أن تكون حمراء علمًا أنها ليست خضراء أو صفراء؟

(3) مكعب الأرقام: يلقي عبدالسلام مكعبي أرقام، فما احتمال أن يكون مجموع العددين الظاهرين 11 علمًا أنه ظهر على أحدهما فقط الرقم 5؟

7-3

التدريبات الإثرائية

نظرية بيز (Bayes theorem)

إذا كانت A_1, A_2, \dots, A_n مجموعة من الحوادث المتنافية فيما بينها، وتشكل جميعها الفضاء العيني، وكانت B حادثة من الفضاء العيني نفسه $p(B) > 0$ ، فإن:

$$P(A_k|B) = \frac{P(A_k) P(B|A_k)}{P(A_1) P(B|A_1) + P(A_2) P(B|A_2) + \dots + P(A_n) P(B|A_n)}$$

مثال

صندوقان يحوي كل منهما كرات بألوان مختلفة، اختير أحدهما بصورة عشوائية وسُحبت منه كرة فكانت زرقاء. ما احتمال أن تكون قد سُحبت من الصندوق الثاني، إذا علمت أن احتمال سحب كرة زرقاء من الصندوق الأول $\frac{1}{2}$ ، ومن الصندوق الثاني $\frac{1}{4}$ ؟

$$P(A_2|B) = \frac{P(A_2) P(B|A_2)}{P(A_1) P(B|A_1) + P(A_2) P(B|A_2)}$$

$$= \frac{\frac{1}{2} \times \frac{1}{4}}{\frac{1}{2} \times \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \times \frac{1}{4}} = \frac{1}{3}$$

تمارين

(1) كيسان يحوي كل منهما كرات بألوان مختلفة، اختير أحدهما بصورة عشوائية وسُحبت منه كرة فكانت حمراء. ما احتمال أن تكون قد سُحبت من الكيس الأول، إذا علمت أن احتمال سحب كرة حمراء من الكيس الأول $\frac{1}{3}$ ، ومن الكيس الثاني $\frac{1}{4}$ ؟

(2) في مصنع آلتان تنتج الأولى 90% من القطع، وتنتج الثانية 10% منها. إذا اختيرت إحدى القطع عشوائياً وكانت معيبة، فما احتمال أنها من إنتاج الآلة الأولى، إذا علمت أن نسبة المعيب في إنتاج الآلة الأولى 5%، ومن الآلة الثانية 8%؟

7-4

تدريبات إعادة التعليم

الاحتمال والتوزيعات الاحتمالية

احتمال في الاحتمال، يسمى ظهور الناتج المرغوب فيه نجاحًا، ويُسمى ظهور بقية النواتج فشلًا.

احتمال النجاح والفشل	إذا أمكن أن تنجح حادثة في s من المرات وتفشل في f من المرات فإن احتمال النجاح $P(S)$ ، واحتمال الفشل $P(F)$ هما: $P(S) = \frac{s}{s+f}, P(F) = \frac{f}{s+f}$
----------------------	---

مثال 1

ما احتمال أن تظهر صورتان على الأقل عند إلقاء 3 قطع نقدية؟

يوجد من بين النواتج الثمانية 4 نواتج فيها صورتان على الأقل؛
لذا فإن احتمال ظهور صورتين على الأقل هو $\frac{4}{8}$ أو $\frac{1}{2}$.

مثال 2

ما احتمال اختيار 4 قصص وسيرتي حياة من قائمة تتكون من 12 قصة و 6 سير حياة؟

عدد إمكانيات النجاح ${}_{12}C_4 \cdot {}_6C_2$
عدد الاختيارات الممكنة، $s+f$ ، هو ${}_{18}C_6$
$$P(4 \text{ قصص وسيرتي حياة}) = \frac{{}_{12}C_4 \cdot {}_6C_2}{{}_{18}C_6} = 0.40$$

اختيار 4 قصص وسيرتي حياة يساوي 40% تقريبًا.

تمارين

(1) ماشية لدى عائلة 3 بقرات و 4 خراف. فإذا اختير رأسان عشوائيًا، فما احتمال كلٍّ من:

(a) خروفان) P (b) بقرتان) P (c) بقرة وخروف) P

(2) سجّل سامر 10 محاضرات حاسوب و 5 محاضرات رياضيات على قرص مدمج. فإذا اختار 6 محاضرات عشوائيًا، فأوجد احتمال كلٍّ من:

(a) 6 محاضرات حاسوب) P (b) 2 رياضيات و 4 حاسوب) P (c) 2 حاسوب و 4 رياضيات) P

(3) حلوى يحتوي كيس حلوى على 15 قطعة حمراء، 10 قطع صفراء، 6 قطع خضراء. أوجد احتمال كلٍّ من:

(a) سحب قطعة حمراء (b) عدم سحب قطعة صفراء

(c) سحب قطعة خضراء (d) عدم سحب قطعة حمراء

تدريبات إعادة التعليم

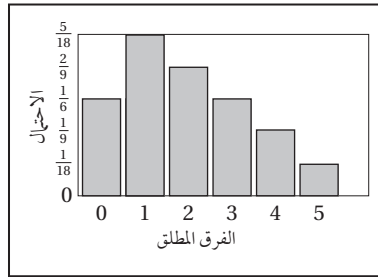
(تتمة)

الاحتمال والتوزيعات الاحتمالية

التوزيعات الاحتمالية: المتغير العشوائي هو متغير قيمته ناتج عددي لحادثة عشوائية، والتوزيع الاحتمالي لمتغير عشوائي معين هو دالة تربط عناصر فضاء العينة باحتمالاتها.

مثال 1

ألقي مكعبان مرقمان (1-6)، والجدول والأعمدة البيانية يوضحان توزيع القيمة المطلقة للفرق بين العددين الظاهرين. استعمل التمثيل البياني لتحديد أي النواتج أكثر احتمالاً، وما احتمالها؟



الفرق المطلق	0	1	2	3	4	5
الاحتمال	$\frac{1}{6}$	$\frac{5}{18}$	$\frac{2}{9}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{18}$

من التمثيل البياني أكبر احتمال هو $\frac{5}{18}$.

والنواتج الأكثر احتمالاً هو 1، واحتماله $\frac{5}{18}$.

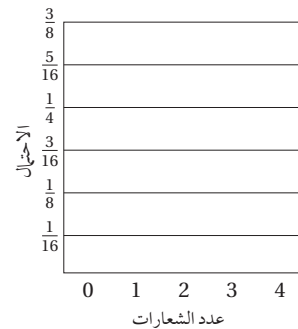
تمارين

(1) احتمال ألقى 4 قطع نقدية.

(a) أكمل الجدول لتوضّح التوزيع الاحتمالي لعدد الشعارات الظاهرة.

عدد الشعارات	0	1	2	3	4
الاحتمال					

(b) مثل بالأعمدة هذا التوزيع الاحتمالي.



(c) أوجد $P(4 \text{ شعارات})$.

تدريبات حل المسألة

الاحتمال والتوزيعات الاحتمالية

(4) مثلجات وضع باحثون الجدول الآتي حول نكهات المثلجات التي تباع في الأسواق.

النكهة	فانيلا	شوكولاتة	أناناس
النسبة المئوية	28%	8%	7%

النكهة	زبدة	كاكاو	أخرى
النسبة المئوية	4.5%	3.5%	49%

(a) اختيرت علبة من المثلجات عشوائياً، ما احتمال أن تكون بنكهة الشوكولاتة؟

(b) اختيرت علبة من المثلجات عشوائياً، ما احتمال أن تكون العلبة ليست بنكهة الفانيلا؟

(c) اختيرت علبة من المثلجات عشوائياً، ما احتمال أن تكون بنكهة الفانيلا أو الشوكولاتة أو الأناناس أو الزبدة أو الكاكاو؟

(1) فنون كُتبت الأحرف "A," "R," "T" على قطع ورقية، ووُضعت في كيس وُخلطت جيداً. ثم سحبت واحدة تلو الأخرى عشوائياً، ورُتّب بعضها بجانب بعض دون النظر إليها. فما احتمال أن تتكون كلمة "ART"؟

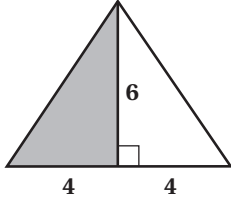
(2) مكعب الأرقام ألقى جمال مكعبي أرقام واحدًا تلو الآخر. فما احتمال أن يكون العدد الظاهر على الثاني أكبر من العدد الظاهر على الأول؟

(3) لغات أراد سعود اختيار اللغة التي سيدرسها من بين الإنجليزية، والفرنسية، والألمانية، والروسية. فأعطى كل لغة رقمًا من الأرقام من 0 إلى 3، وأحضر أربع قطع نقدية وقرّر أن يلقيها معاً، على أن يكون عدد الشعارات الظاهرة هو الذي سيقرّر اللغة التي سيدرسها، وذلك بأن يكون عدد الشعارات مناظرًا لرقم اللغة، فهل أسلوب سعود في اختيار اللغة يعطي جميع اللغات الفرصة نفسها؟ فسّر إجابتك.

التدريبات الإثرائية

7-4

الاحتمال الهندسي



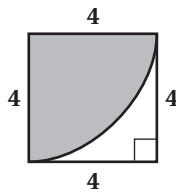
(a) إذا أُطلق سهم على اللوحة المثلثية المجاورة، فما فرصة إصابة الجزء المظلل؟
هذه الفرصة تُسمى احتمالاً، ويمكن إيجادها من خلال مقارنة مساحة المنطقة المظلمة
بمساحة اللوحة كاملة. وتحدد هذه النسبة نسبة الأسهم التي ستصيب المنطقة المظلمة.

$$\frac{\frac{1}{2}(4)(6)}{\frac{1}{2}(8)(6)} = \frac{\text{مساحة المنطقة المظلمة}}{\text{مساحة المنطقة الكاملة}} = \frac{12}{24} = \frac{1}{2}$$

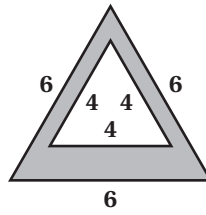
وبصورة عامة إذا كانت S منطقة جزئية من المنطقة R ، فإن الاحتمال
لنقطة اختيرت عشوائياً أن تنتمي إلى المنطقة الجزئية S هو:

$$P(S) = \frac{\text{مساحة المنطقة الجزئية } S}{\text{مساحة المنطقة } R}$$

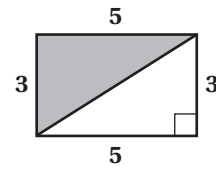
أوجد احتمال أن تقع نقطة اختيرت عشوائياً في المنطقة الجزئية المظلمة لكل مما يأتي:



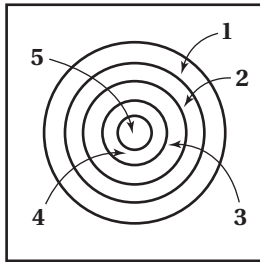
(3)



(2)



(1)



توضّح لوحة الهدف المجاورة وجود خمس دوائر متحدة المركز الذي يقع في مركز لوحة مربعة
طول ضلعها 38 cm ، وأنصاف أقطار الدوائر هي $2 \text{ cm}, 5 \text{ cm}, 8 \text{ cm}, 11 \text{ cm}, 14 \text{ cm}$.
ويبيّن الشكل عدد النقاط التي يحصل عليها الشخص إذا أصاب كل منطقة دائرية،
فإذا أُطلق سهم وأصاب اللوحة، فأوجد احتمال الحصول على كل من النقاط الآتية
(علماً بأن إصابة أي نقطة خارج المناطق الدائرية لا يُكسبه أي نقاط):

(6) نقطتان

(5) نقطة واحدة

(4) 0 نقطة

(9) 5 نقاط

(8) 4 نقاط

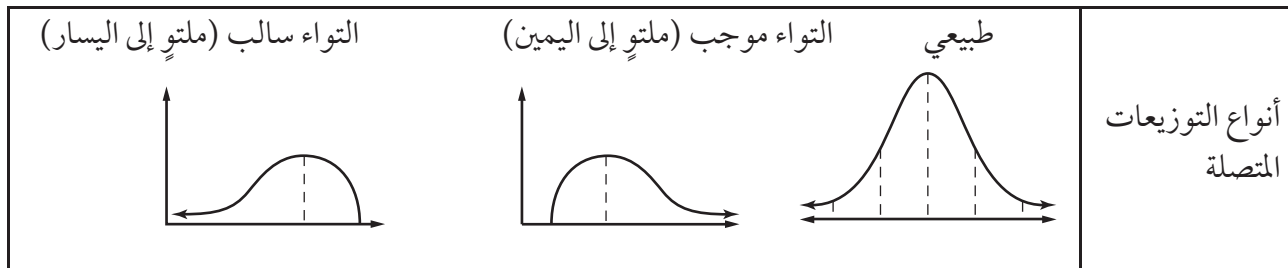
(7) 3 نقاط

تدريبات إعادة التعليم

7-5

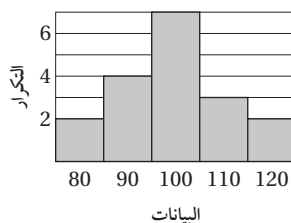
التوزيع الطبيعي

التوزيعات الطبيعية والملتوية: يمثل التوزيع الاحتمالي المتصل بمنحنى.



مثال

حدّد ما إذا كانت البيانات في الجدول التكراري أدناه تظهر التواءً موجباً، أو التواءً سالباً، أو موزعة توزيعاً طبيعياً.



القيمة	120	110	100	90	80
التكرار	2	3	7	4	2

استعمل البيانات لتمثيل المدرج التكراري، فتظهر البيانات وكأنها تتوزع توزيعاً طبيعياً تقريباً.

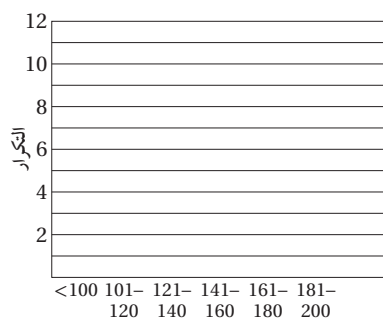
تمارين

حدّد ما إذا كانت البيانات في كل مما يأتي تظهر التواءً موجباً، أو التواءً سالباً، أو موزعة توزيعاً طبيعياً، ثم مثل البيانات بالمدرج التكراري.



كتل الأطفال	10	9	8	7	6	5	4
عدد الأطفال	2	1	5	8	4	2	1

(1)



عدد البيوت	أثمان البيوت
0	أقل من أو يساوي 100000
1	101000–120000
3	12100–140000
7	14100–160000
8	16100–180000
6	18100–200000
12	أكبر من 200000

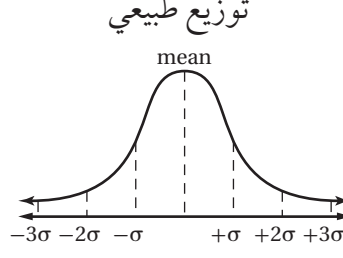
(2)

تدريبات إعادة التعليم

(تتمة)

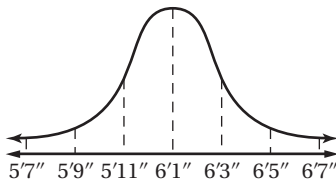
التوزيع الطبيعي

القانون التجريبي

<p>للتوزيع الطبيعي الخواص الآتية:</p> <p>يبلغ أقصى قيمة له عند المتوسط.</p> <p>يتساوى المتوسط والوسيط والمنوال تقريباً.</p> <p>68% من البيانات لا يتجاوز بعدها عن المتوسط قيمة الانحراف المعياري.</p> <p>95% من البيانات لا يتجاوز بعدها عن المتوسط ضعف قيمة الانحراف المعياري.</p> <p>99% من البيانات لا يتجاوز بعدها عن المتوسط ثلاثة أمثال الانحراف المعياري.</p>	<p>توزيع طبيعي</p> 
--	--

مثال

تتوزع أطوال لاعبي كرة السلة توزيعاً طبيعياً بمتوسط 6 أقدام وبوصة واحدة، وانحراف معياري مقداره بوصتان (القدم = 12 بوصة).



- (a) ما احتمال أن يُختار لاعب عشوائياً ويكون طوله أقل من 5 أقدام و9 بوصات؟
ارسم منحنى توزيع طبيعي، وحدد المتوسط والنقاط التي تزيد على المتوسط أو تنقص عنه بانحراف معياري، وانحرافين معياريين، وثلاثة انحرافات معيارية.
القيمة 5 أقدام و9 بوصات تقع تحت المتوسط بانحرافين معياريين؛ لذا سيكون 2.5% من اللاعبين تقريباً أطولهم أقل من 5 أقدام و9 بوصات.
- (b) إذا كان في النادي 240 لاعباً، فكم لاعباً منهم يزيد طوله على 6 أقدام و3 بوصات؟
القيمة 6 أقدام و3 بوصات تقع فوق المتوسط بانحراف معياري واحد، لذا فإن 16% من اللاعبين تقريباً تكون أطولهم أكبر من هذا الطول. ويكون عدد اللاعبين هو:
 $240 \times 0.16 \approx 38$

تمارين

(1) إنتاج البيض أعداد البيض الذي ينتجه نوع من الدجاج سنوياً يتوزع توزيعاً طبيعياً بمتوسط 225 بيضة، وانحراف معياري مقداره 10 بيضات.

(a) ما نسبة الدجاج الذي ينتج ما بين 215 و235 بيضة في السنة؟

(b) كم تتوقع عدد الدجاج الذي ينتج أكثر من 245 بيضة في السنة من أصل 400 دجاجة؟

(2) صناعة قُطر أحد أنواع المسامير المنتجة في أحد المصانع يتوزع توزيعاً طبيعياً بوسط 18 mm، وانحراف معياري 0.2 mm

(a) ما نسبة المسامير المنتجة التي طول قطرها أكبر من 18.4 mm؟

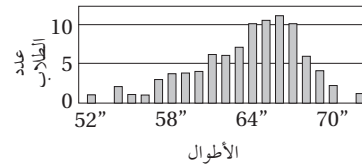
(b) ما نسبة المسامير التي يقع طول قطرها بين 17.8 و 18.2 mm؟

تدريبات حل المسألة

التوزيع الطبيعي

(1) مواقف السيارات أُجريت دراسة حول مدى التزام الناس بالاصطفاف في المواقف بحسب قياسات المكان المخصص، ووجد أن البيانات التي جُمعت تتوزع توزيعاً طبيعياً تقريباً بمتوسط in 8.5. ووجد أن 5% تقريباً من السيارات تقف على مسافة تزيد على in 11.5 من نهاية الموقف المخصص. فما نسبة عدد السيارات التي تقف على مسافة تقل عن in 5.5 من نهاية الموقف؟

(2) يوضح التمثيل البياني الآتي أطوال طلاب المرحلتين الإعدادية والثانوية.



فهل هذه البيانات موجبة الالتواء أو سالبة الالتواء أو موزعة توزيعاً طبيعياً؟

(3) مواقع وجد في أثناء متابعة مواقع أحد المصانع حتى تبقى في حدود $350^{\circ}F$ ، أن درجة حرارة المواقع تتوزع توزيعاً طبيعياً بوسط $350^{\circ}F$ ، وانحراف معياري $0.5^{\circ}F$. فما النسبة المئوية للمواقع التي تتراوح درجات حرارتها من $350^{\circ}F$ إلى $351^{\circ}F$ ؟

(4) وجد في مزرعة لتربية الخراف أن كتل الخراف تتوزع توزيعاً طبيعياً بوسط 68 باونداً، وانحراف معياري 10 باوندات معاً.

(a) ما النسبة المئوية التقريبية لعدد الخراف التي تتراوح كتلتها بين 58 ، 78 باونداً؟

(b) ما النسبة المئوية للخراف التي تتوقع أن كتلتها تزيد على 98 باونداً؟

(c) ما نسبة الخراف التي تتوقع أن تقل كتلتها عن 48 باونداً؟

(d) ما كتلة خروف يقع ضمن أقل 0.5% من الخراف كتلة؟

7-5

التدريبات الإثرائية

حساب القيم المعيارية

يُعد التوزيع الطبيعي من أهم التوزيعات الاحتمالية، فالكثير من القياسات يكون توزيعها طبيعيًا بصورة عامة مثل: الأطوال، والكتل، وقياسات الذكاء. والأكثر أهمية أنه في حالة المتغيرات المتعلقة بالأفراد، فإن هذه القياسات لا تكون موزعة توزيعًا طبيعيًا إلا أن المجاميع والمتوسطات تميل إلى أن تتوزع توزيعًا طبيعيًا. ولسوء الحظ فإنه يصعب إيجاد قيم دوال التوزيع الاحتمالي الطبيعي، وحلًا لهذه المشكلة، قام الإحصائيون بوضع جداول لهذه الغاية، وذلك بجعل الصفر هو المتوسط الحسابي والانحراف المعياري يساوي العدد 1. وأطلق على هذا التوزيع الطبيعي المعياري ويرمز إليه بالرمز $N(0, 1)$ حيث N تشير إلى التوزيع الطبيعي الذي وسطه الحسابي $\mu = 0$ ، وانحرافه المعياري $\sigma = 1$.

افترض أن متغيرًا مثل x يتوزع توزيعًا طبيعيًا بوسط حسابي μ ، وانحراف معياري σ . وحتى تحسب الاحتمالات لهذا التوزيع الطبيعي يجب تحويله إلى توزيع طبيعي معياري من خلال تحويلات مناسبة. والرمز Z يُرمز إلى الدرجات المعيارية. والخطوات الآتية توضح عملية التحويل:

• إذا لم يُعطَ الوسط الحسابي والانحراف المعياري، فاحسب كلا منهما من البيانات المعطاة.

• عرّف $Z = \frac{x - \mu}{\sigma}$

مثال 1

افترض أن الزمن (X) المتطلب لإكمال اختبار يتوزع طبيعيًا، وأن الزمن يُعطى بالدقائق، وعدد طلاب الصف 12 طالبًا.

أوجد المتوسط الحسابي والانحراف المعياري، والعلاقة بين قيم Z وقيم X بعد تعويض قيمتي المتوسط والانحراف المعياري فيها.

الطلاب	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
الزمن (X)	35	42	48	33	32	39	40	52	48	34	36	44

تمارين

(5) افترض أن المتغير العشوائي X يتوزع توزيعًا طبيعيًا بمتوسط حسابي $\mu = 20$ ، وانحراف معياري $\sigma = 5$ ، فحوّل العبارات الاحتمالية الآتية إلى عبارات مكافئة بدلالة قيم Z :

(a) $P(X > 18)$

(b) $P(17 < X < 23)$

(c) $P(X < 19)$

تدريبات إعادة التعليم

7-6

التوزيعات ذات الحدين

تجارب ذات الحدين

تجربة ذات الحدين هي تجربة احتمالية تحقق الشروط الآتية:	
<ul style="list-style-type: none"> • لكل محاولة نتيجتان فقط . • هناك عدد محدد من المحاولات . • المحاولات مستقلة . • احتمالات نواتج كل محاولة ثابتة . 	تجربة ذات الحدين

مثال 1

عُدَّت قطعة نقد ليكون احتمال ظهور الشعار 90% في كل مرة تُلقى فيها القطعة. فما احتمال

الحصول على 7 شعارات في 8 رميات؟

احتمال الحصول على شعار $\frac{9}{10}$ ، واحتمال الحصول على كتابة $\frac{1}{10}$ ، لذا يوجد ${}_8C_7$ طريقة لاختيار 7 شعارات .

$$P(7 \text{ شعارات}) = {}_8C_7 \left(\frac{9}{10}\right)^7 \left(\frac{1}{10}\right)^1$$

$$= 8 \cdot \frac{9^7}{10^8}$$

$$\approx 0.38$$

احتمال الحصول على 7 شعارات من 8 رميات يساوي تقريباً 38%.

تمارين

(1) كرة سلة احتمال أن يحرز ماهر نقطة لكل رمية حرة 0.72 ، وفي إحدى مراحل التدريب رمى من خط المنطقة الحرة 8 رميات.

(a) ما احتمال أن يحرز 6 نقاط بالضبط؟

(b) ما احتمال أن يحرز 6 نقاط على الأقل؟

(2) مدرسة يحاول معلم أن يضع 4 أو 5 بدائل لكل سؤال من نوع اختيار من متعدد، ويريد أن يُقلل من احتمال الحصول على الدرجات بمجرد التخمين .

(a) ما احتمال أن يحصل الطالب على 60% على الأقل باستعمال التخمين في اختبار مكون من 5 أسئلة لكل منها أربعة بدائل؟

(b) ما احتمال أن يحصل الطالب على 60% على الأقل باستعمال التخمين في اختبار من خمسة أسئلة لكل منها 5 بدائل؟

(3) تزلج يسقط متدرب في أثناء تدريبه على التزلج على الجليد 15% من المرات التي يحاولها. وفي إحدى تدريباته حاول 20 مرة.

(a) ما احتمال أن يسقط مرة واحدة؟

(b) ما احتمال أن يسقط 4 مرات؟

7-6

تدريبات إعادة التعليم

(تتمة)

التوزيعات ذات الحدين

التوزيع ذو الحدين يمكن استعمال نظرية ذات الحدين لإيجاد الاحتمال في الحالات التي لها نتيجتان ممكنتان فقط، ويمكن إيجاد معاملات الحدود في مفكوك ذات الحدين باستعمال التوافق.

نظرية ذات الحدين في الاحتمالات
احتمال الحصول على x نجاح في n من التجارب المستقلة، $P(x) = {}_nC_x P^x q^{n-x}$ ، حيث p احتمال النجاح، q احتمال الفشل في المحاولة الواحدة. ($s + f = 1$)

مثال

ما احتمال أن يظهر 3 شعارات و 3 كتابات عند رمي 6 قطع نقدية؟

يوجد نتيجتان ممكنتان ومتساويتا الاحتمال هما الشعار (L)، والكتابة (T)، وإلقاء 6 قطع نقدية تمثل أحداثاً مستقلة. وعند فك $(L+T)^6$ فإن الحدود التي تحتوي $L^3 T^3$ ، تمثل 3 شعارات و 3 كتابات، وتستعمل لإيجاد الاحتمال المطلوب. من خلال نظرية ذات الحدين معامل $L^3 T^3$ هو ${}_6C_3$.

$$P(T) = \frac{1}{2} \text{ و } P(L) = \frac{1}{2} \quad P(3 \text{ شعارات و } 3 \text{ كتابات}) = \frac{6!}{3!3!} \left(\frac{1}{2}\right)^3 \left(\frac{1}{2}\right)^3$$

$$= \frac{20}{64}$$

$$= \frac{5}{16}$$

احتمال الحصول على 3 شعارات و 3 كتابات هو $\frac{5}{16}$ أو 0.3125.

تمارين

(1) نفقود أوجد احتمال كل مما يأتي إذا أُلقيت قطعة نقدية 8 مرات:

(a) 5 شعارات بالضبط $P(5 \text{ شعارات بالضبط})$

(b) شعاران بالضبط $P(2 \text{ شعاران بالضبط})$

(c) (عدد زوجي من الشعارات) $P(\text{عدد زوجي من الشعارات})$

(d) 6 شعارات على الأقل $P(6 \text{ شعارات على الأقل})$

(2) صحيح - خطأ أجب توفيق عن اختبار مكون من 10 أسئلة يجاب عنها بـ (صحيح أو خطأ). عشوائياً ودون معرفة أي شيء عن موضوع الاختبار. أوجد كلاً من الاحتمالين الآتين:

(a) أن يحصل توفيق على 8 إجابات صحيحة . (b) أن يحصل توفيق على 3 إجابات صحيحة على الأكثر.

(3) أُلقي مكعب مرقم من 1 إلى 6 أربع مرات، فما احتمال الحصول على العدد 6 مرتين بالضبط؟

تدريبات حل المسألة

التوزيعات ذات الحدين

- (1) جينات يجري عامر بعض التجارب على الجينات الوراثية وقبل أن يجري إحدى التجارب أراد أن يحسب نظرياً احتمالات بعض النواتج. أحد الحسابات يتطلب إيجاد مفكوك $(p + q)^4$. فما المفكوك؟
- (2) ألعاب احتمال أن تفوز سميرة $\frac{2}{3}$. فإذا لعبت 7 أشواط، فما احتمال أن تفوز في أربعة منها بالضبط؟ قرب الجواب لأقرب جزء من ألف.
- (3) أعطال تنتج شركة مكثفات كهربائية لدوائر إلكترونية، فإذا كان احتمال عطل المكثف 1 من كل 1000. ويحتوي صندوق على 10000 مكثف، فاكتب عبارة تمثل احتمال أن يكون 10 من بينها غير صالحة.
- (4) يستعمل ماجد الحافلات في الذهاب إلى عمله والإياب منه. وفي الفترة الصباحية تكون حركة الحافلات كبيرة، وهناك فرصة 1 إلى 8 لأن يجد حافلة بانتظاره عند وصوله الموقف. فما احتمال أن يجد حافلة بانتظاره مرتين على الأقل خلال فترة 5 أيام من دوامه الأسبوعي؟ قرب الإجابة إلى أقرب جزء من ألف.
- (5) رياضة فرصة فوز أحد الأندية الرياضية هو 75% في كل مباراة من مبارياته السبع عشرة في هذا الموسم. فما احتمال أن يفوز في 13 مباراة منها على الأقل؟ قرب الجواب إلى أقرب جزء من ألف.
- (6) شطرنج يلعب عبدالرحمن الشطرنج، إذا لعب 3 مرات، وكان احتمال فوزه في المرة الواحدة 64%، فأجب عما يأتي (قرب إجابتك إلى أقرب جزء من ألف):
 (a) ما احتمال أن يفوز عبدالرحمن بالمرات الثلاثة؟
 (b) ما احتمال أن يفوز عبدالرحمن بمرتين على الأقل؟
 (c) ما احتمال أن يفوز عبدالرحمن بمرة واحدة فقط؟

7-6

التدريبات الإثرائية

توزيعات متعددة الحدود

متعددة الحدود هي تعميم لذات الحدين، فمثلاً $(a + b + c)^2$ هي متعددة حدود. وإحدى طرق إيجاد المعاملات هي من خلال عملية الضرب المباشر واستعمال خاصية التوزيع. وذلك بأن تأخذ كل حد في العامل الأول وتضربه في جمع حدود العامل الثاني، وتجمع الحدود المتماثلة، (لاحظ أن مجموع الأسس في كل حد يساوي 2).

$$\begin{aligned}(a + b + c)^2 &= (a + b + c)(a + b + c) \\ &= a(a + b + c) + b(a + b + c) + c(a + b + c) \\ &= a^2 + ab + ac + ab + b^2 + bc + ac + bc + c^2 \\ &= a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2ac + 2bc\end{aligned}$$

ومن أهمية هذا المفكوك هو ربط كل حد بتجزئة معينة، فمثلاً التجزئة $\{1, 0, 1\}$ تمثل الحد ac في المفكوك، والذي يمكن أن يكتب على الصورة $a^1 b^0 c^1$ ، في حين أن التجزئة $\{0, 2, 0\}$ تمثل b^2 . ويمكن حساب معامل كل حد باستعمال القانون:

$$\frac{n!}{n_1! \cdot n_2! \cdot n_3! \dots n_k!}, \text{ حيث } n \text{ الأس و } n_1 + n_2 + n_3 + \dots + n_k = n. \text{ تذكر أن } 0! = 1.$$

المعامل	التجزئة	الحد
$\frac{2!}{2! \cdot 0! \cdot 0!} = 1$	$\{2, 0, 0\}$	a^2
$\frac{2!}{0! \cdot 2! \cdot 0!} = 1$	$\{0, 2, 0\}$	b^2
$\frac{2!}{0! \cdot 0! \cdot 2!} = 1$	$\{0, 0, 2\}$	c^2
$\frac{2!}{1! \cdot 1! \cdot 0!} = 2$	$\{1, 1, 0\}$	ab
$\frac{2!}{1! \cdot 0! \cdot 1!} = 2$	$\{1, 0, 1\}$	ac
$\frac{2!}{0! \cdot 1! \cdot 1!} = 2$	$\{0, 1, 1\}$	bc

(1) أوجد جميع تجزئات $(x + y + z)^3$.

(2) أوجد معاملات مفكوك $(x + y + z)^3$ المرتبطة بكل تجزئة.

ملحق الإجابات

التاريخ:

الاسم:

(تممة)

7-1 تدريبات إعادة التعليم

الدراسات التجريبية والمسحية والقائمة على الملاحظة

التمييز بين الارتباط والسببية

المصطلح	التعريف	مثال
الارتباط	عندما تحصل حادثة يكون حصون الأخرى ممكنًا.	عندما تتجمع الغيوم فإنه من الممكن نزول المطر.
السببية	إحدى الحادتين سبب مباشر في وقوع الحادثة الأخرى.	إشعال الضوء يجعل الغرفة أكثر إضاءة.

يقن ما إذا كانت الممارات الآتية تظهر ارتباطاً سببية، ثم فسر إجاباتك.

الارتباط؛ لا يوجد سبب يجعلنا نقنر ض أن حجم البيت يسبب زيادة النشاط؛ إذ أن هناك أفتقلاً مختلفي النشاط يعيشون في بيوت كبيرة، فربما ترجع زيادة النشاط إلى عامل آخر، مثل كميات الغذاء وتوزيعها.

الأطفال الذين يعيشون في بيوت واسعة أكثر نشاطاً من الأطفال الذين يعيشون في بيوت صغيرة.

تمارين

يقن ما إذا كانت الممارات الآتية تظهر ارتباطاً سببية، ثم فسر إجاباتك:

- (1) إذا ركضت في الشتاء، فإني سأمرض.
- (2) دلت الدراسات أن زيادة أكل السمك تحسن درجة الرياضيات.

ارتباط؛ لا يتسبب المطر في حدوث المرض.

ارتباط؛ مع أن الدراسة وجدت علاقة بين الاثنين، لكن نتيجة الرياضيات لا تتأثر مباشرة بمقدار ما نأكل من السمك.

إذا أضعت كتاب الكنية، فممكن أن تدفع غرامة. (4) قراء كتاب عن التغذية الحالية من الدسم تجعلك تتفقد كتاة.

سببية؛ عدم إرجاع كتب الكنية يتسبب في دفع الغرامة.

ارتباط؛ قراءة كتاب لا يتسبب في فقدان الكتاة إلا إذا أتيحت نظاماً غذائياً.

استلاكي سيارة شبيبة تجلبني أضع ثروة.

ارتباط؛ إذا كان لديك ثروة، فإنها تسمح لك

بامتلاك سيارة فضمة، ولكن امتلاك السيارة لا يكون سبباً مباشراً لزيادة ذلك.

- (5) إذا بقيت يوماً عن المدرسة، فلن أحصل على جائزة الحضور.
- (6) استلاكي سيارة شبيبة تجلبني أضع ثروة.

سببية؛ الغياب عن المدرسة يتسبب في عدم الحصول على حضور كامل.

الفصل 7، الاختبار والإحصاء

7

المصفى، الثالث الثانوي

التاريخ:

الاسم:

7-1 تدريبات إعادة التعليم

الدراسات التجريبية والمسحية والقائمة على الملاحظة

التمييز بين الارتباط والسببية والمسحية والقائمة على الملاحظة

المصطلح	التعريف	مثال
الدراسة المسحية	الاحصاء على معلومات من جميع الدراسة أو عينة منه.	أخذ عينة لمرة من بريد فكرة ما أو بيارضها.
الدراسة القائمة على الملاحظة	اختبار يُراقب فيه الأفراد دون أية محاولة للتأثير في النتائج.	ملاحظة مجموعة مكونة من 100 شخص، منهم 50 يتخضعون للمعالجة، وجمع معلومات، وتحليل البيانات وتفسيرها.
الدراسة التجريبية	عملية تجري فيها تدخل مقصود للاشخاص أو الحيوانات أو الأشياء، ويتم فيها ملاحظة النتائج.	دراسة الفرق بين مجموعتين أحداها تتعرض لمعالجة، والأخرى لا تتعرض لمعالجة أو تتعرض لمعالجة شكية.

مثال 1

أذكر ما إذا كان كل موقف عايلي يمثل دراسة تجريبية أو قائمة على الملاحظة، وفي حالة الدراسة التجريبية حدد المجموعة الضابطة، والمجموعة التجريبية، ثم يئن أن وجد تحيز أو لا.

اختر 20 مولدًا حديثاً نصفهم من الذكور ونصفهم من الإناث، وقارن بين كتلهم.

هذه دراسة قائمة على الملاحظة.

مثال 2

حدد ما إذا كانت كل من الحالات الآتية تتطلب دراسة مسحية أو دراسة قائمة على الملاحظة أو دراسة تجريبية، وفسر إجاباتك.

تريد معرفة شعور الطلاب وأولياء الأمور حول الزي الموحد في المدرسة.

تختلف هذه الحالة دراسة مسحية، يُفضل أن تسأل فيها عينة عشوائية من الطلاب، وعينة عشوائية أخرى من أولياء الأمور حول رأيهم في ذلك.

تقارن

حدد ما إذا كانت كل حالة عايلي تمثل دراسة تجريبية أو دراسة قائمة على الملاحظة، وحدد المجموعة الضابطة والتجريبية

- (1) جند 300 طالب واقسمهم عشوائياً إلى مجموعتين (2) جند 100 طالب، نصفهم شارك في فريق الرياضيات، وقارن بين درجاتهم ومعدلاتهم.

متساويتين، أحدهما تمارس لعبة كرة السلة 3 مرات في الأسبوع، والآخرى لا تمارس لعبة كرة السلة مطلقاً. وبعد ثلاثة أشهر، أخرج مقابلة مع الطلاب لمعرفة شعورهم نحو المدرسة.

دراسة تجريبية؛ العينة التجريبية هم الطلاب الذين تدربوا على لعبة كرة السلة، وأما المجموعة الضابطة، فهي المجموعة الأخرى. وهذه تجربة متخيزة؛ لأن الطلاب كلهم يعرفون أنفسهم في أي

مجموعة.

الفصل 7، الاختبار والإحصاء

6

المصفى، الثالث الثانوي

الاسم: التاريخ:

7-1 التدرجات الإثرائية

عينات طبقية

يستعمل الباحثون في بعض الحالات عينات طبقية بدلاً من العينات العشوائية، ويمكن للميزات الطبقية في المجتمعات التبرع أن تكون أكثر دقة من العشوائية.

حيث يوزع المجتمع إلى أجزاء متباينة، قبل اختيار العينة الطبقية على أن يتجانس أفراد كل جزء، ثم يتم أخذ عينة ممثلة من كل جزء، وتكون مجموعة هذه العينات هي العينة الممثلة للمجتمع.

يمكن تصنيف طلاب مدرسة ثانوية، وعددهم 2294 طالباً، إلى أربع فئات بحسب الصف، والنوع / علمي أو شرعي.

الصف	الصف الثاني عشر علمي	الصف الحادي عشر علمي	الصف الحادي عشر شرعي	الصف الثاني عشر شرعي
588	600	576	530	588

اختيرت عينة من 500 طالب لاستطلاع رأيهم، حدد عدد الطلاب الذين سيشاركون في العينة من كل فئة.

الخطوة 1: أحسب النسبة لكل فئة.

الصف الحادي عشر علمي: $576 \div 2294 = 25.11\%$
الصف الحادي عشر شرعي: $530 \div 2294 = 23.10\%$
الصف الثاني عشر علمي: $600 \div 2294 = 26.16\%$
الصف الثاني عشر شرعي: $588 \div 2294 = 25.63\%$

الخطوة 2: أنسب كل نسبة في حجم العينة.

الصف الحادي عشر علمي: $126 \approx 125.55$ طالباً $(500)(25.11\%)$
الصف الحادي عشر شرعي: $115 \approx 115.5$ طالباً $(500)(23.10\%)$
الصف الثاني عشر علمي: $131 \approx 130.8$ طالباً $(500)(26.16\%)$
الصف الثاني عشر شرعي: $128 \approx 128.15$ طالباً $(500)(25.63\%)$
(ملحوظة: تم تقريب العدد 115.5 إلى 115 حتى يكون حجم العينة 500 طالب)

تمارين

لكل من التمرينين 1، 2، حدد عدد الأشخاص في كل فئة من المشاركين في العينة.

1) يكون جميع رياضيين من 18 لاعب كرة قدم، 18 لاعب كرة سلة، ويؤاد أخذ عينة ممثلة من 20 رياضياً.

10 لاعبي كرة قدم، 10 لاعبي كرة سلة

2) أريد التعرف على صعوبات العمل في ستة قطاعات هي: الزراعة، والصناعة، والتجارة، والنقل، والتعليم، والصحة، في جميع يتكون من: 100000 يعملون في الصناعة، 195000 في قطاع الزراعة، 150000 في قطاع التعليم، 125000 في قطاع التجارة، 52000 في قطاع الصحة، و 31000 في قطاع النقل. حيث يتطلب ذلك أخذ عينة ممثلة من 100 شخص.

صناعة 15؛ زراعة 30؛ تعليم 23؛ تجارة 19؛ صحة 8؛ نقل 5

الصف: الثالث الثانوي الفصل 7: الاحتمال والاحصاء 9

الاسم: التاريخ:

7-1 تدريبات حل المسألة

الدراسات التجريبية والمسحية والقائمة على الملاحظة

1) جراحة هناك تقنية جديدة في جراحة الركبة، حيث تُوضع الركبة في وضع مناسب باستعمال مادة التيتانيوم وأنظمة واقية بدلاً من قطع الأربطة والعصلات. وقد قامت دراسة بملاحظة أربعة مئة اشخاص بعد جراحة 100 ركبة، تفحصها استعملت فيها التقنية الجديدة، فأيها كانت المجموعة الضابطة؟

2) مجموعة الفاعلة هي الأفراد الذين أُجريت لهم جراحة الركبة بالطريقة القديمة.

3) جراحة ممكنة: يمكن أن يلاحظ العلماء عدد الجراحات التي ترتكب من الأحداث الذين يشاهدون هذه الرسوم.

4) صف التجربة التي يمكن أن يعدها العلماء لدراسة أثر الرسوم المتحركة التي تتسم بالعنف في الأولاد.

5) كيف يوضح العلماء أن العنف بين الأولاد كان نتيجة للرسوم المتحركة التي تتسم بالعنف لا مجرد ارتباط؟

6) جابة ممكنة: اجعل المجموعة التجريبية تشاهد رسوم متحركة تتسم بالعنف لمدة 8 ساعات، ثم لاحظ سلوك أفرادها وأقاربه بسلوك الآخرين.

7) على العلماء أن يثبتوا أن الرسوم المتحركة التي تتسم بالعنف تتولد مباشرة إلى العنف.

8) فوائد وجدت دراسة أن أعضاء أحد الأندية هم في الأغلب من الماحون والأطباء. فهل هذا ارتباط أم سببية؟

ارتباط.

الصف: الثالث الثانوي الفصل 7: احتمال والإحصاء 8

الاسم: التاريخ:

7-2 تدريبات إعادة التعليم التحليل الإحصائي

مقاييس التشتت

قانون الانحراف المعياري	
القانون	التغير
$\sqrt{\frac{\sum_{k=1}^n (x_k - \bar{x})^2}{n-1}}$	s
$\sqrt{\frac{\sum_{k=1}^n (x_k - \mu)^2}{n}}$	σ
المجموع	

ماتن

جُد ما إذا كانت البيانات الآتية تمثل عينة أم مجتمعًا ثم أوجد الانحراف المعياري مقررًا إلى أقرب بيتل الجدول الآتي درجات 12 طالبًا في مساق الرياضيات.

درجات 12 طالبًا سجلوا في مساق للرياضيات في إحدى الجامعات					
69	92	83	75	99	61
91	98	65	73	94	77

هذه بيانات مجتمع؛ لأن جميع درجات الطلاب وعددهم 12 قد أخذت.

$$\mu = \frac{1}{12} \sum_{i=1}^{12} (x_i) = \frac{977}{12} = 81.42$$

ثم أوجد مجموع مربعات الفروق بين الدرجات والمتوسط.

$$\sum (x_i - \mu)^2 = 2095.55 = (61 - 81.42)^2 + (99 - 81.42)^2 + (75 - 81.42)^2 + \dots + (91 - 81.42)^2$$

$$\sqrt{\frac{2095.55}{12}} \approx 13.21$$

تعاريف

1) جلد ما إذا كان كل مما يلي يمثل عينة أم مجتمعًا ثم أوجد الانحراف المعياري للبيانات، مقررًا إلى أقرب جزء من مئة.

(a)

درجات بعض طلاب الآداب في إحدى الجامعات					
88	91	82	95	76	88
75	94	92	85	82	90

عينة؛ الانحراف المعياري = 6.61

(b)

أعداد جميع أعضاء النادي، التتابع					
14	17	15	14	15	16

مجموع؛ الانحراف المعياري = 1.07

11

الفصل 7، الاختبار والإحصاء

المصف، الثالث الثانوي

الاسم: التاريخ:

7-2 تدريبات إعادة التعليم التحليل الإحصائي

مقاييس التوزع المركزية

المصطلح	التعريف	أفضل استعمال له
المتوسط	مجموع البيانات مقسومًا على عددها.	عندما لا توجد قيم متطرفة.
الوسيط	العدد الذي يوقع في المنتصف في قيم مرتبة أو المتوسط عند وجود قيمتين في المنتصف.	عندما توجد قيم متطرفة في البيانات، ولا توجد فراغات كبيرة في المنتصف.
المنوال	العدد أو الأعداد التي تظهر أكثر من غيرها.	توجد قيم متكررة عديدة في البيانات.
هامش خطأ المعايه	$\pm \frac{1}{\sqrt{n}}$ ، للمعينة العشوائية التي حجمها n.	تقدير إلى أي مدى تمثل العينة المجتمع.

ماتن 1

في مقاييس التوزع المركزية نصف البيانات الآتية بصورة أفضل؟ ولماذا؟

{2, 1, 21, 5, 22, 3, 22, 8, 23, 1, 159, 4}

هناك قيم متطرفة، غير أنه لا توجد فراغات كبيرة بين البيانات، لذا فالوسيط هو أفضل مقياس.

ماتن 2

ما هامش خطأ المعايه والنزعة الممكنة التي تتضمن نسبة المجتمع الكلي؟ استُعملت آراء 400 شخص حول موقع حديقة عامة، فأجاب 51% منهم بالوقت على المكان المثالي.

تعاريف

لما كان الاستطلاع قد شمل 400 شخص، فإن هامش خطأ المعايه $\pm \frac{1}{\sqrt{400}} \pm 5\%$ ، ونسبة الأشخاص الذين هي النسبة التي وجدت في الدراسة المسحية مضافًا إليها أو مطروحًا منها 5%، لذا فالفترة هي (56%، 46%).

1) {45, 16, 30, 45, 29, 45}

المنوال؛ البيانات فيها قيم متكررة.

2) {100, 92, 105, 496, 77, 121}

الوسيط؛ توجد قيمة متطرفة 496.

3) {2, 5, 99, 5, 110, 5, 76}

الوسيط؛ توجد قيمة متطرفة 2.5.

4) {60, 50, 55, 62, 44, 65, 51}

المتوسط؛ لا توجد قيم متطرفة أو فقرات في المنتصف.

5) كتب استطلاعات آراء 28 شخصًا، ووجد أن 40% منهم يقرأ 3 كتب على الأقل شهريًا، فما هامش خطأ المعايه؟ وما النزعة الممكنة التي تتضمن نسبة المجتمع الذين يقرؤون 3 كتب شهريًا على الأقل؟

هامش خطأ المعايه $\pm 0.1890 \pm 18.9\%$ الفترة الممكنة هي (21.1%، 58.9%).

10

الفصل 7، الاختبار والإحصاء

المصف، الثالث الثانوي

الاسم: التاريخ:

7-2 التكرينات الإثرائية المتوسحات (Means)

توجد متوسطات أخرى غير المتوسط الحسابي المعروف ومنها:

المتوسط الهندسي (Agometric Mean) ويُعرف بأنه الجذر التربوي لنتائج ضرب n من القيم، ويُستعمل عادة في المعاملات التجارية لمعرفة معدلات النمو.

المتوسط التوافقي H (Harmonic Mean) ويُعرف بأنه عدد القيم مقسومًا على مجموع مقلوباتها، ويُستعمل عادة في حساب معدلات السرعة $H = \frac{n}{\sum \frac{1}{x}}$.

تدرازين

(1) أوجد المتوسط التوافقي للقيم، 107، 118، 110، 181، 225.

141.4 تقريبًا

(2) أوجد المتوسط التوافقي للقيم، 6، 5، 4، 3.

4.21 تقريبًا

(3) سطر إذا سافرت بسيارتك، وقطعت نصف المسافة بسرعة ثابتة، ثم قطعت نصف المسافة الآخر بسرعة ثابتة أخرى، فإن سرعتك المتوسطة في الرحلة هي المتوسط التوافقي. إذا قام سعاد برحلة طريقية وقطع نصف المسافة بسرعة 60 mi/h ، والنصف الآخر بسرعة 70 mi/h ، فكم كانت سرعتك المتوسطة في الرحلة كلها؟

64.6 mi/h تقريبًا

الصف: الثالث الثانوي الفصل 7: الاحتمال والإحصاء 13

الاسم: التاريخ:

7-2 تدريبات حل المسألة التحليل الإحصائي

(1) درجات حرارة فيراني في درجات الحرارة السيليزية

المنطى في خمسة أيام اختبرت عشوائيًا من شهر جلدى الأخيرة (عام 1434 هـ) في مدينة الرياض .

المتوسط	المركز
34°	1
35°	2
33°	3
31°	4
35°	5

حل قُدم هذه البيانات عينة أم عينة؟

عينة

(5) النظام شمسي اعتقد العلماء الفلكيون حتى نهاية القرن العشرين أن هناك 9 كواكب، و الجولن الاي بين كتل هذه الكواكب.

الكوكب	عدارد	الوحدة الأرض	المريخ	المشتري
الكتلة	0.364	5.37	6.58	0.708
(10^{21} طن)				

الكوكب	زحل	أورانوس	نبتون	بلوتو
الكتلة	627	95.7	113	0.0138
(10^{21} طن)				

(a) أي مقياس النبرة المركزية يصف هذه البيانات بصورة أفضل؟

الوسيط؛ في البيانات قيم متطرفة، ولا توجد قيم متطورات في الوسط .

(b) ما القيمة الدوقية للمقياس الأفضل لهذه البيانات؟

الوسيط: 6.58

(c) ما الانحراف المعياري لهذه البيانات؟

الانحراف المعياري = 652.71

(d) كم كوكبا كتلته ضمن مدى انحراف معياري واحد من مقياس النبرة المركزية؟

8

الصف: الثالث الثانوي الفصل 7: احتمال والإحصاء 12

(2) أُجري استطلاع للرأي حول رغبة الأشخاص في قضاء الإجازة خارج البلاد، فكانت الفترة الممكنة التي تتضمن نسبة المجتمع الذي أبدو رغبة في ذلك هي: 46.5% إلى 49.5% . فما هامش خطأ المعينة؟

هامش الخطأ 1.5% ±

(3) نتاج نصف البيانات الآتية أعداد حبات التفاح في

20 سلة مختلفة: { 80, 75, 68, 82, 77, 74, 81, 85, }

73, 79, 75, 73, 80, 71, 82, 81, 77, 80, 78,

84} . فما الوسيط لعدد حبات التفاح في السلة؟

الوسيط = 78.5

التاريخ: _____

الاسم: _____

(تتمه)

7-3 تدريبات إعادة التعليم الاحتمال المشروط

الجدول التوافقي هي جداول تُسجّل فيها البيانات ضمن خلايا على أن تعطي الحالات المحتملة المختلفة نتائج ممكنة مختلفة، وتمثل هذه الجداول تستعمل لتحديد الاحتمالات المشروطة.

كرة اليد: أوجد احتمال أن طابا في فريق كرة اليد علماً أنه في السنة الثانية.

مثال	كرة اليد: أوجد احتمال أن طالباً أن فريق كرة اليد علم أنه في السنة الثالثة.				
الصف	سنة أولى	سنة ثانية	سنة ثالثة	سنة رابعة	
يلعب كرة يد	17	20	34	14	
لا يلعب كرة يد	586	540	510	459	

الجميع 2180 طالباً $= 459 + 510 + 34 + 540 + 20 + 586 + 14$

قانون الاحتمال المشروط $P(L|I) = \frac{P(L \cap I)}{P(I)}$

$$P(L \cap I) = \frac{34}{2180}, P(I) = \frac{34 + 510}{2180} = \frac{34}{2180} \div \frac{544}{2180} = \frac{34}{544} = \frac{1}{16}$$

احتمال أن الطالب يلعب كرة يد علماً بأنه في السنة الثالثة $\frac{1}{16}$.

تمارين

1) احققوا لا يتّكّن الجدول المجاور المضمور في جدول تخرج، أوجد احتمال أن يخسر شخص بوضفه (ولي أمر) هذا الخلل.

طالب	ولي أمر	
يستطيع أن يخضر	104	112
لا يستطيع أن يخضر	32	14

الصف	يلعب كرة سلة	لا يلعب كرة سلة
قبل الصف الأعلى	22	352
الصف الأعلى	34	306

10 أسئلة أجابت 4 شركات أعمال في المدينة عن استبانة تسأل حول أسلوب اللعب الذي تفضل به عند الشراء: هل كان قدّم أم تجويزاً بكياً؟ استعمل بطاقة الاستبانة؟ أوجد احتمال كل ما يأتي:

أسلوب الدفع	شركة الأعمال الأولى	شركة الأعمال الثانية	شركة الأعمال الثالثة	شركة الأعمال الرابعة
تقدّم	304	140	102	49
بطاقة اتصال	456	223	63	70
تحويل بنكي	380	166	219	28

- (a) يستعمل التسوّق بطاقة الائتمان علماً بأنه يتوقّف من الشركة الأولى. $\frac{2}{5}$
(b) يستعمل التسوّق التحويل البنكي علماً بأنه يتوقّف من الشركة الرابعة. $\frac{4}{21}$
(c) يتوقّف من الشركة الثالثة علماً بأنه يدفع نقداً. $\frac{6}{35}$

الفصل 7، الاحتمال والإحصاء

15

الصف: الثالث الثانوي

التاريخ: _____

الاسم: _____

7-3 تدريبات إعادة التعليم الاحتمال المشروط

الاحتمال المشروط يُسمى احتمال وقوع حادثة B إذا عُلم أن حادثة أخرى A قد وقعت احتمالاً مشروطاً، ويُرمز إليه بالرمز $P(B|A)$.

مثال

الفرص الدوّار: يلعب عثمان لعبة الفرص الدوّار الموضح إلى اليسار. فما احتمال أن يتوقّف المؤشر على العدد 7 علماً بأنه توقّف على عدد أكبر من 5؟

هناك 8 نتائج ممكنة للفرص الدوّار الموضح.

افترض أن الحادثة A هي: المؤشر الذي توقّف على عدد أكبر من 5
وأن الحادثة B هي: المؤشر الذي توقّف على العدد 7

$$P(A) = \frac{3}{8} \quad \text{هناك 3 نتائج من 8 نتائج أكبر من 5}$$

$$P(A \cap B) = \frac{1}{8} \quad \text{نتائج واحد من 8 نتائج يكون أكبر من 5 ويساوي 7}$$

$$P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{\frac{1}{8}}{\frac{3}{8}} = \frac{1}{3}$$

$$P(B|A) = \frac{1}{3} \div \frac{3}{8} = \frac{1}{3} \times \frac{8}{3} = \frac{8}{9}$$

احتمال أن يتوقّف المؤشر على 7 علماً بأن المؤشر توقّف على عدد أكبر من 5 يساوي $\frac{1}{3}$

تعاريف

مجموعة بطاقات مكونة من 52 بطاقة موزعة بالتساوي على أربعة ألوان هي: الأحمر، الأسود، الأخضر، الأزرق. وقد وُضعت بطاقات كل لون من 1 إلى 13. فإذا سحبت بطاقة من مجموعة البطاقات، فأوجد احتمال كل ما يأتي:

- (1) البطاقة حمراء علماً بأن البطاقة المسحوبة تحمل الرقم 1 $\frac{4}{52}$
(2) البطاقة تحمل الرقم 6 علماً بأن لونها أسود. $\frac{1}{13}$
(3) البطاقة سوداء علماً بأن اللون المسحوب أسود أو أخضر. $\frac{2}{13}$
إذا ألقي مكعب أرقام مرة واحدة، فأوجد كل احتمال ما يأتي:
(4) العدد الظاهر 4 علماً بأن العدد الظاهر زوجي. $\frac{1}{6}$
(5) العدد الظاهر 2 علماً بأن العدد الظاهر أقل من 6 $\frac{3}{6}$
(6) العدد الظاهر زوجي علماً بأن العدد الظاهر 3 أو 4 $\frac{1}{2}$

الفصل 7، الاحتمال والإحصاء

14

الصف: الثالث الثانوي

الاسم: التاريخ:

7-3 التدرّيات الإثرائية

نظرية بيز (Bayes theorem)

إذا كانت A_1, A_2, \dots, A_n مجموعة من الحوادث المتبادلة وشكل جميعها التقاء البيني، وكانت B حادثاً من التقاء البيني نفسه $p(B) > 0$ ، فإن:

$$P(A_i|B) = \frac{P(A_i)P(B|A_i)}{P(A_1)P(B|A_1) + P(A_2)P(B|A_2) + \dots + P(A_n)P(B|A_n)}$$

مثال

صندوقان يحوي كل منهما كرات بألوان مختلفة، اختير أحدهما بصورة عشوائية وسُحبت منه كرة فكانت زرقاء. ما احتمال أن يكون قد سُحبت من الصندوق الثاني، إذا علمت أن احتمال سحب كرة زرقاء من الصندوق الأول $\frac{1}{2}$ ومن الصندوق الثاني $\frac{1}{4}$ ؟

$$P(A_2|B) = \frac{P(A_2)P(B|A_2)}{P(A_1)P(B|A_1) + P(A_2)P(B|A_2)}$$

$$= \frac{\frac{1}{2} \times \frac{1}{4}}{\frac{1}{2} \times \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \times \frac{1}{4}} = \frac{1}{3}$$

تمارين

1) كيسان يحوي كل منهما كرات بألوان مختلفة، اختير أحدهما بصورة عشوائية وسُحبت منه كرة فكانت حمراء، ما احتمال أن تكون قد سُحبت من الكيس الأول، إذا علمت أن احتمال سحب كرة حمراء من الكيس الأول $\frac{1}{3}$ ومن الكيس الثاني $\frac{4}{7}$ ؟

2) في مصنع آتات تنتج الأول 90% من القطع، وتنتج الثانية 10% منها. إذا اختيرت إحدى القطع عشوائياً وكانت معينة، فما احتمال أنها من إنتاج الآلة الأولى، إذا علمت أن نسبة العيب في إنتاج الآلة الأولى 5%، ومن الآلة الثانية 8%؟
0.85 تقريباً.

الصف: الثالث الثانوي الفصل 7: الاحتمال والإحصاء 17

الاسم: التاريخ:

7-3 تدريبات حل المسألة

الاحتمال المشروط

1) أخصي معاذ عدد أكواب الشاي وناجين القهوة التي قدّمها للزبائن خلال 3 أيام وكانت على النحو التالي:

اليوم	شاي	قهوة
الاثنين	42	8
الثلاثاء	47	3
الأربعاء	47	3

a) أوجد احتمال تقديمه فنجان قهوة علماً أن اليوم هو الأربعاء.

$$\frac{3}{50}$$

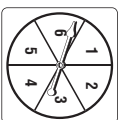
b) أوجد احتمال تقديمه فنجان قهوة علماً أن اليوم هو الاثنين.

$$\frac{4}{25}$$

c) أوجد احتمال أن يكون اليوم هو الثلاثاء علماً أنه قدّم الشاي.

$$\frac{47}{136}$$

2) الأقرع المدوّرة، يقوم خالد باللعب بالقرع المدوّار أدناه، في احتمال أن يقف المؤشر عند العدد 6 علماً بأن العدد الذي توقف عنده أكبر من ٢؟



$$\frac{1}{4}$$

3) معكب الأرقعة، يلقي عبدالسلام مكعبه أرقعه، في احتمال أن يكون مجموع العددين الظاهرين 11 علماً أنه ظهر على أحدهما فقط الرقم 5؟

$$\frac{1}{5}$$

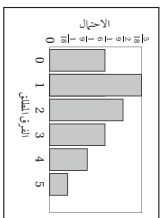
الصف: الثالث الثانوي الفصل 7: احتمال والإحصاء 16

(3)

تدريبات إعادة التعليم
الاحتمال والتوزيعات الاحتمالية

التوزيعات الاحتمالية: المتغير العشوائي هو متغير قيمته ناتج عددي لحادثة عشوائية، والتوزيع الاحتمالي للمتغير العشوائي يعين هي دالة تربط عناصر فضاء العينة باحتمالها.

مثال 1



الفرق المطلق	0	$\frac{1}{6}$	$\frac{5}{18}$	2	3	4	5
الاحتمال	$\frac{1}{6}$	$\frac{2}{9}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{18}$

من التمثيل البياني أكبر احتمال هو $\frac{5}{18}$ ،
والنتائج الأكثر احتمالاً هو 1، واحتماله $\frac{5}{18}$.

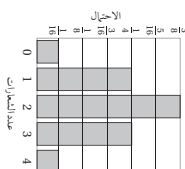
३३

(1) احتمال القیت 4 قطع نقدیة.

(a) أكمل الجدول لتوضِّح التوزيع الاحتمالي لعدد الشعرات الظاهرة.

عدد الشعرات	0	1	2	3	4
الاحتمال	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{16}$

(b) مثل بالأعمدة هذا التوزيع الاحتمالي.



(c) أوجد $P(4 \text{ شعارات})$.

$$\frac{1}{16}$$

نظريات إعادة التعليم

احتمال في الاحتمال، يسمى ظهور الناتج المرغوب فيه نجاحًا، ويسمى ظهور بقية النواتج فشلًا.

إذا أمكن أن تنبج حادثة في S من المرات وتفشل في r من المرات فإن احتمال النجاح $P(S)$ ، واحتمال الفشل $P(F)$ هما:

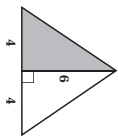
$$P(S) = \frac{s}{s+f}, P(F) = \frac{f}{s+f}$$

الاسم: التاريخ:

7-4

الاحتمالات الإثرائية

الاحتمال الهندسي



(a) إذا أطلق سهم على الورقة المثبتة المجاورة، فما فرصة إصابته الجزء المظلل؟
هذه الورقة تسمى احتمالاً ويمكن إيجادها من خلال مقارنة مساحة المنطقة المظلمة بمساحة الورقة كاملة، وتحدد هذه النسبة نسبة الأسهم التي ستصيب المنطقة المظلمة.

$$\begin{aligned} \text{مساحة المنطقة المظلمة} &= \frac{1}{2}(4)(6) \\ \text{مساحة المنطقة الكاملة} &= \frac{1}{2}(8)(6) \\ &= \frac{12}{24} = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

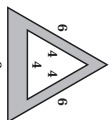
وبصورة عامة إذا كانت S منطقة جزئية من المنطقة R ، فإن الاحتمال لنقطة اختيارت عشوائياً أن تنتمي إلى المنطقة الجزئية S هو:

$$P(S) = \frac{\text{مساحة المنطقة الجزئية } S}{\text{مساحة المنطقة } R}$$

أوجد احتمال أن تقع نقطة اختيارت عشوائياً في المنطقة الجزئية المظلمة لكل ما يلي:



(3)



(2)

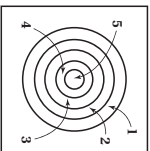


(1)

$$\frac{\pi}{4}$$

$$\frac{5}{9}$$

$$\frac{1}{2}$$



توضح لوحة الهدف المجاورة وجود خمس دوائر متحدة المركز الذي يقع في مركز لوحة مرمية طول جنبها 3.8 cm ، وأنصاف أقطار الدوائر هي 2 cm , 5 cm , 8 cm , 11 cm , 14 cm .
ويبين الشكل عدد النقاط التي يحصل عليها الشخص إذا أصاب كل منطقة دائرية، فإذا أطلق سهم وأصاب الورقة، فأوجد احتمال الحصول على كل من النقاط الآتية (صالح بأن إصابته أي نقطة خارج المناطق الدائرية لا يُكسبه أي نقاط):

$$\frac{57\pi}{1444}$$

$$\frac{75\pi}{1444}$$

$$\frac{361 - 49\pi}{361}$$

$$\frac{\pi}{361}$$

$$\frac{21\pi}{1444}$$

$$\frac{39\pi}{1444}$$

الفصل 7، الاحتمال والإحصاء

الصف: الثالث الثانوي

الاسم: التاريخ:

7-4 تقديرية حل المسألة

الاحتمال والتوزيعات الاحتمالية

(a) نتائج وضع باحثون جدولاً الآتي حول تكميلات المتاحبات التي تباع في الأسواق.

النكهة	فانيليا	شوكولاتة	أخرى
النسبة المئوية	28%	8%	7%

النكهة	زبدة	كاكاو	أخرى
النسبة المئوية	4.5%	3.5%	49%

(a) اختيرت عذبة من المتاحبات عشوائياً، ما احتمال أن تكون بنكهة الشوكولاتة؟
8%

(b) اختيرت عذبة من المتاحبات عشوائياً، ما احتمال أن تكون العذبة ليست بنكهة الفانيليا؟
72%

(c) اختيرت عذبة من المتاحبات عشوائياً، ما احتمال أن تكون بنكهة الفانيليا أو الشوكولاتة أو الأخرى أو الزبدة أو الكاكاو؟
51%

(a) هذين كُتبت الحروف "T"، "P"، "A" على قطع ورقية، ووضعت في كيس وخلطت جيداً. ثم سحبنا واحدة تلو الأخرى عشوائياً، ورُتّب بعضها بجانب بعض دون النظر إليها. فما احتمال أن تتكون كلمة "PART"؟
 $\frac{1}{6}$

(2) معجب الولد الذي جال مكعباً أو قام وأحياناً تلو الآخر. فما احتمال أن يكون العدد الظاهر على الثاني أكبر من العدد الظاهر على الأول؟
 $\frac{5}{12}$

(3) هناك أراد سعود اختيار اللغة التي سيدرسها من بين الإنجليزية، والفرنسية، والألمانية، والروسية. فأعطى كل لغة رقماً من الأرقام من 0 إلى 3، وأحضر أربع قطع نقدية وفُور أن يلقيها معاً، على أن يكون عدد الشعارات الظاهرة هو الذي سيقرر اللغة التي سيدرسها، وذلك بأن يكون عدد الشعارات متطابقاً مع اللغة، فمثل أسلوبي سمود في اختيار اللغة يعطي جميع اللغات الفرصة نفسها؟ قس أرجاءك.

لا: إجابة ممكنة: احتمال الحصول على 0 هو 1 من 16، ولكن احتمال الحصول على 1 هو 1 من 4.

الفصل 7، احتمال والإحصاء

20

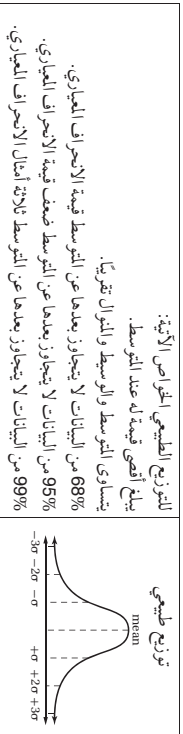
الصف: الثالث الثانوي

الاسم: التاريخ:

7-5 تدريبات إعادة التعليم

التوزيع الطبيعي

القانون التجريبي



متن

تتوزع أطوال لحي كوة السلة توزيعًا طبيعيًا بمتوسط 6 أقدام وروسة واحدة، وانحراف معياري مقداره بوصتان. (القدم = 12 بوصة).

- a) ما احتمال أن يُختار لاعب عشوائي ويكون طوله أقل من 5 أقدام و9 بوصات؟
- ارسم منحنى توزيع طبيعي، وحدد المتوسط والنقاط التي تريد على المتوسط أو تنقص عنه بالحراف معياري، وانحرافين معيارين، وثلاثة انحرافات معيارية.
- القيمة 5 أقدام و9 بوصات تقع تحت المتوسط بالحرافين معيارين؛ لذا سيكون 2.5% من اللاعبين تقريبًا أطولهم أقل من 5 أقدام و9 بوصات.
- b) إذا كان في النادي 240 لاعبًا، فكم لاعبًا منهم يزيد طوله على 6 أقدام و3 بوصات؟
- القيمة 6 أقدام و3 بوصات تقع فوق المتوسط بالحراف معياري واحد، لذا فإن 16% من اللاعبين تقريبًا تكون أطولهم أكبر من هذا الطول، ويكون عدد اللاعبين هو:
- $$240 \times 0.16 \approx 38$$

تمارين

1) ينتج البغيف أعداد البيض الذي ينتج نوع من الدجاج سنويًا يتوزع توزيعًا طبيعيًا بمتوسط 225 بيضة، وانحراف معياري مقداره 10 بيضات.

a) ما نسبة الدجاج الذي ينتج ما بين 215 و235 بيضة في السنة؟

تقريبًا 68%

b) كم تتوزع عدد الدجاج الذي ينتج أكثر من 245 بيضة في السنة من أصل 400 دجاجة؟

10 دجاجات تقريبًا

2) صناعة قطر أحد أنواع المسامير الناتجة في أحد المصانع يتوزع توزيعًا طبيعيًا بوسط 8 mm، وانحراف معياري 0.2 mm

a) ما نسبة المسامير الناتجة التي طول قطرها أكبر من 18.4 mm؟

تقريبًا 2.5%

b) ما نسبة المسامير التي يقع طول قطرها بين 17.8 و 18.2 mm؟

تقريبًا 68%

23

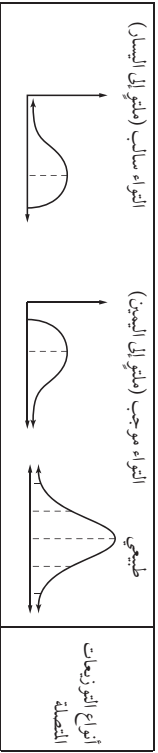
المصف، الثالث الثانوي الفصل 7، الاحتمال والإحصاء

الاسم: التاريخ:

7-5 تدريبات إعادة التعليم

التوزيع الطبيعي

التوزيعات الطبيعية والتوزيع الطبيعي



متن

حدد ما إذا كانت البيانات في الجدول الكروي أدناه تظهر التواء موجبًا، أو التواء سالبًا، أو موزعة توزيعيًا طبيعيًا.

القيمة	80	90	100	110	120
التكرار	2	4	7	3	2

البيانات	80	90	100	110	120
التكرار	2	4	7	3	2

استعمل البيانات لتمثيل المدرج التكراري، فظهر البيانات وكأنها تتوزع توزيعًا طبيعيًا تقريبًا.

تمارين

حدد ما إذا كانت البيانات في كل ما يلي تظهر التواء موجبًا، أو التواء سالبًا، أو موزعة توزيعيًا طبيعيًا، ثم مثل البيانات بالمدرج التكراري.

1)

كتل الأطفال	4	5	6	7	8	9	10
عدد الأطفال	1	2	4	8	5	1	2

تكرار	4	5	6	7	8	9	10
بيانات	2	4	7	8	5	1	2

كل الأعداد

توزيع طبيعي تقريبًا

سألة الاختواء

أنواع البيوت	عدد البيوت
أقل من أو يساوي 100000	0
101000–120000	1
12100–140000	3
14100–160000	7
16100–180000	8
18100–200000	6
أكثر من 200000	12

22

المصف، الثالث الثانوي الفصل 7، الاحتمال والإحصاء

الاسم: التاريخ:

7-5 التدرجيات الإثرائية حساب القيمة المعيارية

يعد التوزيع الطبيعي من أهم التوزيعات الاحتمالية، فالكثير من القياسات يكون توزيعها طبيعيًا بصورة عامة مثل: الأطوار، والكتل، وقياسات الذكاء، والأكثر أهمية أنه في حالة التغيرات المتتالية بالأفراد، فإن هذه القياسات لا تكون موزعة توزيعًا طبيعيًا إلا أن المجاميع والتوسطات تميل إلى أن تتوزع توزيعًا طبيعيًا، ولسمو الخط فإنه يصعب إيجاد قيم دوال التوزيع الاحتمالي الطبيعي، وحل هذه المشكلة، قام الإحصائيون بوضع جداء ل هذه الدالة، وذلك يجعل الصفر هو المتوسط الحسابي والانحراف المعياري يساوي العدد 1. وأطلق على هذا التوزيع التوزيع الطبيعي المعياري ويميز إليه بالرمز $N(0, 1)$ حيث $N(0, 1)$ تشير إلى التوزيع الطبيعي الذي وسطه الحسابي $= 0$ ، وانحراف المعياري $\sigma = 1$.

افترض أن متغيرًا مثل X يتوزع توزيعًا طبيعيًا بوسط حسابي μ ، وانحراف معياري σ ، وحتى تحسب الاحتمالات لهذا التوزيع الطبيعي يجب تحويله إلى توزيع طبيعي معياري من خلال تحويلات مناسبة، والرمز Z يُرمز إلى الدرجات المعيارية. والخطوات الآتية توضح عملية التحويل:

- عزف $Z = \frac{x - \mu}{\sigma}$
- إذا لم يُعطَ الوسط الحسابي والانحراف المعياري، فاحسب كلا منهما من البيانات المعطاة.
- افترض أن الزمن (X) المطلوب لإكمال اختبار يتوزع طبيعيًا، وأن الزمن يُعطى بال دقائق، وعدد طلاب الصف 12 طالبًا.

أوجد المتوسط الحسابي والانحراف المعياري، والعلاقة بين قيم Z وقيم X بعد تعويض قيمتي المتوسط والانحراف المعياري فيها.

الطلاب	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
الزمن (X)	35	42	48	33	32	39	40	52	48	34	36	44

$$Z = \frac{(X - 40.25)}{6.34}$$

تمارين

5) افترض أن المتغير العشوائي X يتوزع توزيعًا طبيعيًا بمتوسط حسابي $\mu = 40$ ، وانحراف معياري $\sigma = 5$ ، فحول العبارات الاحتمالية الآتية إلى عبارات مكافئة بدلالة قيم Z :

- a) $P(X > 18)$ b) $P\left(Z > \frac{18 - 20}{5}\right) = P\left(Z > -\frac{2}{5}\right)$
- c) $P(X < 19)$ d) $P\left(\frac{17 - 20}{5} < Z < \frac{23 - 20}{5}\right) = P\left(-\frac{3}{5} < Z < \frac{3}{5}\right)$
- e) $P\left(Z < -\frac{1}{5}\right) = P\left(Z < \frac{19 - 20}{5}\right)$

الفصل 7، الاحتمال والإحصاء

25

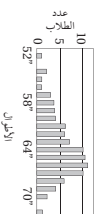
الصف: الثالث الثانوي

الاسم: التاريخ:

7-5 تدريجيات حل المسألة التوزيع الطبيعي

- a) وجد في مزرعة لزراعة الخراف أن كل الخراف تتوزع توزيعًا طبيعيًا بوسط 68 باوند، وانحراف معياري 10 باوندات معًا.
- a) ما النسبة المئوية التقريبية لعدد الخراف التي تتراوح كتلتها بين 58 ، 78 باوندًا؟
- تقريبًا 68%
- b) ما النسبة المئوية للخراف التي تتوقع أن كتلتها تزيد على 98 باوندًا؟
- تقريبًا 0.5%
- c) ما نسبة الخراف التي تتوقع أن كتلتها من 48 باوندًا؟
- تقريبًا 2.5%
- d) ما كتلة خروف يقع ضمن أقل 0.5% من الخراف كتلة؟
- 38 باوندًا أو أقل

- 2) يوضح التمثيل البياني الآتي أطوال طلاب المرحلة الإعدادية والثانوية.



فهل هذه البيانات موزعة الانتماء أو سالبة الانتماء أو موزعة توزيعًا طبيعيًا؟

سألية الانتماء

- 3) موافق وجد في أثناء متابعة موافق أحد الصانع حتى تبقي في حدود $350^\circ F$ ، أن درجة حرارة المواد تتوزع توزيعًا طبيعيًا بوسط $350^\circ F$ ، وانحراف معياري $0.5^\circ F$ ، فما النسبة المئوية للموافق التي تتراوح درجات حرارتها من $350^\circ F$ إلى $351^\circ F$ ؟
- تقريبًا 47.5%

الفصل 7، احتمال والإحصاء

24

الصف: الثالث الثانوي

التاريخ:

الاسم:

(تتمه)

7-6 تدريبات إعادة التعليم

التوزيعات ذات الحدين

التوزيع ذو الحدين يمكن استعمال نظرية ذات الحدين لإيجاد الاحتمال في الحالات التي لها نتيجتان محتملتان فقط، ويمكن إيجاد معادلات الحدود في متكونك ذات الحدين باستعمال التوافيق .

نظرية ذات الحدين في الاحتمالات

احتمال الحصول على x نجاح في n من التجارب المستقلة $p, q = 1 - p$ ، حيث p احتمال النجاح، q احتمال الفشل في المحاولة الواحدة. ($s + t = 1$)

مثال

ما احتمال أن يظهر 3 شعارات و 3 كتابات عند رمي 6 قطع نقدية؟
بوجد نتيجتان محتملتان ونستعملنا الاحتمال L والشعار T ، والكتابة L ، وإلقاء 6 قطع نقدية على أحداثًا مستقلة. وعند ذلك $L + T = 6$ فإن الحدود التي تحتوي $L^3 T^3$ تمثل 3 شعارات و 3 كتابات، ونستعمل لإيجاد الاحتمال المطلوب.

$$P(T) = \frac{1}{2} \text{ و } P(L) = \frac{1}{2}$$

$$P(3 \text{ شعارات و 3 كتابات}) = \binom{6}{3} \left(\frac{1}{2}\right)^3 \left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{6!}{3!3!} \left(\frac{1}{2}\right)^6 = \frac{20}{64} = \frac{5}{16} \approx 0.3125$$

تعاريف

1) تقود واحد احتمال كل مما يأتي إذا أقيمت قطعة نقدية 8 مرات:

- a) (شعارات بالوسط) P **11% تقريباً**
b) (شعارات بالوسط) P **22% تقريباً**
c) (عدد زوجي من الشعارات) P **50%**
d) (6 شعارات على الأقل) P **14% تقريباً**

2) صحيح - خطأ: أجب توفيق عن اختيار مكون من 10 أسئلة يجب عليها (ب) (صحيح أو خطأ). عشوائياً ودون معرفة أي شيء عن موضوع الاختبار. أوجد كلاً من الاحتمالين الآتيين:

- a) أن يحصل توفيق على 8 إجابات صحيحة. **11/64 أو 0.172 تقريباً**
b) أن يحصل توفيق على 3 إجابات صحيحة على الأكثر. **45/1024 أو 0.044 تقريباً**
3) التي يكعب مرقم من 1 إلى 6 أربع مرات، في احتمال الحصول على العدد 6 مرتين بالوسط؟ **25/216 أو 0.116 تقريباً**

الفصل 7، الاختبار والإحصاء

27

المصف، الثالث الثانوي

التاريخ:

الاسم:

7-6 تدريبات إعادة التعليم

التوزيعات ذات الحدين

تجارب ذات الحدين

تجربة ذات الحدين هي تجربة احتمالية تحقق الشروط الآتية:

- لكل محاولة نتيجتان فقط .
- هناك عدد محدد من المحاولات .
- المحاولات مستقلة .
- احتمالات نواتج كل محاولة ثابتة .

عُذلت قطعة نقد ليكون احتمال ظهور الشعار 90% في كل مرة تُلقى فيها القطعة. في الاحتمال

الحصول على 7 شعارات في 8 رميات؟

$$P(7 \text{ شعارات و 1 رمية}) = C_8^7 \left(\frac{9}{10}\right)^7 \left(\frac{1}{10}\right)^1 = \frac{1}{10} \cdot \frac{1}{10} \text{ يوجد } C_8^7 \text{ طريقة لاختبار 7 شعارات.}$$

$$P(7 \text{ شعارات و 1 رمية}) = C_8^7 \left(\frac{9}{10}\right)^7 \left(\frac{1}{10}\right)^1 = \frac{9^7}{10^8} \approx 0.38$$

احتمال الحصول على 7 شعارات من 8 رميات يساوي تقريباً 38%.

تعاريف

1) كوة سلة احتمال أن يحرز فاهر نقطة لكل رمية كوة 0.72، وفي إحدى مراحل التدريب رمي من خط المنطقة الحرة 8 رميات.

- a) ما احتمال أن يحرز 6 نقاط بالوسط؟ **31% تقريباً**
b) ما احتمال أن يحرز 6 نقاط على الأقل؟ **60% تقريباً**

2) مدرسة يجاون معلم أن يضع 4 أو 5 بدائل لكل سؤال من نوع اختبار من متعدد، ويريد أن يُقبل من احتمال الحصول على الدرجات بمحور التخمين.

- a) ما احتمال أن يحصل الطالب على 60% على الأقل باستعمال التخمين في اختبار مكون من 5 أسئلة لكل أربعة بدائل؟ **10.4% تقريباً**
b) ما احتمال أن يحصل الطالب على 60% على الأقل باستعمال التخمين في اختبار من خمسة أسئلة لكل منها 5 بدائل؟ **5.8% تقريباً**
3) ترفع يسقط منترب في أثناء تدريبه على التلج على الجليد 15% من المرات التي يجاولها، وفي إحدى تدريباته حاول 20 مرة.

- a) ما احتمال أن يسقط مرة واحدة؟ **14% تقريباً**
b) ما احتمال أن يسقط 4 مرات؟ **18% تقريباً**

الفصل 7، الاختبار والإحصاء

26

المصف، الثالث الثانوي

التاريخ: _____

الاسم: _____

7-6 التدرّيات الإثرائية

توزيعات متعددة الحدود

متعددة الحدود هي تعميم لمات الحدين، فمثلاً $(a + b + c)^2$ هي متعددة حدود، وأحدى طرق إيجاد المعاملات هي من خلال عملية القسمة المباشر واستعمال خاصية التوزيع. وذلك بأن تأخذ كل حد في العامل الأول وتضربه في جميع حدود العامل الثاني، وتجمع الحدود الناتجة، (لاحظ أن مجموع الأسس في كل حد يساوي 2).

$$\begin{aligned}(a + b + c)^2 &= (a + b + c)(a + b + c) \\ &= a(a + b + c) + b(a + b + c) + c(a + b + c) \\ &= a^2 + ab + ac + ab + b^2 + bc + ac + bc + c^2 \\ &= a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2ac + 2bc\end{aligned}$$

ومن أهميّة هذا المفكوك أنه ربط كل حد بتجربة معينة، فمثلاً التجربة $\{1, 0, 1\}$ تمثّل الحدّ ac في المفكوك، والذي يمكن أن يكتب على الصورة $c^1 a^1 b^0$ ، في حين أن التجربة $\{0, 2, 0\}$ تمثّل b^2 . ويمكن حساب معامل كل حد باستعمال القانون:

$$\frac{n!}{m_1! \cdot m_2! \cdot m_3! \cdot \dots \cdot m_k!} \text{ حيث } m_1 + m_2 + m_3 + \dots + m_k = n \text{ وأن } 0! = 1.$$

الحد	التجربة	المعامل
a^2	$\{2, 0, 0\}$	$\frac{2!}{2! \cdot 0! \cdot 0!} = 1$
b^2	$\{0, 2, 0\}$	$\frac{2!}{0! \cdot 2! \cdot 0!} = 1$
c^2	$\{0, 0, 2\}$	$\frac{2!}{0! \cdot 0! \cdot 2!} = 1$
ab	$\{1, 1, 0\}$	$\frac{2!}{1! \cdot 1! \cdot 0!} = 2$
ac	$\{1, 0, 1\}$	$\frac{2!}{1! \cdot 0! \cdot 1!} = 2$
bc	$\{0, 1, 1\}$	$\frac{2!}{0! \cdot 1! \cdot 1!} = 2$

1) أوجد جميع تجزئات $(x + y + z)^3$.

$$\{3, 0, 0\}, \{0, 3, 0\}, \{0, 0, 3\}, \{2, 0, 1\}, \{2, 1, 0\}, \{1, 2, 0\}, \{0, 1, 2\}, \{0, 2, 1\}, \{1, 1, 1\}$$

2) أوجد معاملات مفكوك $(x + y + z)^3$ المرتبطة بكل تجربة.

$$\begin{aligned}\{3, 0, 0\} &\rightarrow 1, \{0, 3, 0\} \rightarrow 1, \{0, 0, 3\} \rightarrow 1, \{2, 0, 1\} \rightarrow 3, \{2, 1, 0\} \rightarrow 3, \{1, 2, 0\} \rightarrow 3, \\ \{1, 0, 2\} &\rightarrow 3, \{0, 1, 2\} \rightarrow 3, \{0, 2, 1\} \rightarrow 3, \{1, 1, 1\} \rightarrow 6\end{aligned}$$

التاريخ: _____

الاسم: _____

7-6 تدريبات حل المسألة

التوزيعات ذات الحدين

4) جينات تجربي عامر بعض التجارب على الجينات الوراثية (5) ربعة فرصة فوز أحد الأندية الرياضية هو 75% في كل مباراة من مبارياته السبع عشرة في هذا الموسم. فما احتمال أن يفوز في 13 مباراة منها على الأقل؟ قرب الجواب إلى أقرب جزء من ألف.

$$0.574$$

6) شطرنج يلعب عبدالرحمن الشطرنج، إذا لعب 3 مرات، وكان احتمال فوزه في المرة الواحدة 64%، فأجب عما يأتي (قرب إجابتك إلى أقرب جزء من ألف):

a) ما احتمال أن يفوز عبدالرحمن بالرات الثلاثة؟

$$0.262 \text{ تقريباً}$$

b) ما احتمال أن يفوز عبدالرحمن بهرتين على الأقل؟

$$0.705 \text{ تقريباً}$$

c) ما احتمال أن يفوز عبدالرحمن بمرة واحدة فقط؟

$$0.249 \text{ تقريباً}$$

2) أعباء احتمال أن تفوز سميرة $\frac{2}{3}$. وإذا لعبت 7 أشرطة، فما احتمال أن تفوز في أربعة منها بالضبط؟ قرب الجواب لأقرب جزء من ألف.

$$0.256 \text{ تقريباً}$$

3) أعمال تنتج شركة مكنتات كهربائية لدوائر إلكترونية، فإذا كان احتمال عطل المكثف 1 من كل 1000.

وتجري صنفون على 10000 مكثف، فأكتب عبارة تمثّل احتمال أن يكون 10 من بينها غير صالحة.

$$10000 C_{10} \left(\frac{1}{1000} \right)^{10} \left(\frac{999}{1000} \right)^{9990}$$

4) يستعمل ماجد الحافلات في الذهاب إلى عمله والإياب منه، وفي الفترة الصباحية تكون حركة الحافلات كبيرة، وهناك فرصة 1 إلى 8 لأن يجده حافلة بانتظاره عند وصوله، العكس، فما احتمال أن يجده حافلة بانتظاره مرتين على الأقل خلال فترة 5 أيام من دوائمه الأسبوعي؟

قرب الإجابة إلى أقرب جزء من ألف.

$$0.121 \text{ تقريباً}$$