وزارة التربية والتعليم
Ministry of Education
المملكة العربية السعودية

الرياضيات

للصف الثاني الثانوي

مصادر المعلم للأنشطة الصفية

الفصل الأول: الدوال والمتباينات

العبيكان Obeikan
McGraw Hill Education

١٤٣٤ هـ - ٢٠١٣ م

Glencoe Mathematics © 2010
CHAPTER RESOURCE MASTERS
Algebra 2

الرياضيات ـ الصف الثاني الثانوي
مصادر المعلم للأنشطة الصفية

أعدَّ النسخة العربية: شركة العبيكان للتعليم

www.obeikaneducation.com

McGraw Hill Education

العبيكان Obeikan

Arabic Edition is published by Obeikan under agreement with
The McGraw-Hill Companies, Inc. © 2008.

الطبعة العربية: مجموعة العبيكان للاستثمار
وفقًا لاتفاقيتها مع شركة ماجروهل© ٢٠٠٨م/ ١٤٢٩هـ.

بسم الله الرحمن الرحيم

الحمد لله والصلاة والسلام على نبينا محمد وعلى آله وصحبه أجمعين، وبعد:

عزيزي المعلم/ عزيزتي المعلمة

يسرنا أن نقدم هذه المجموعة من التدريبات المساندة، التي تراعي الفروق الفردية بين الطلاب. حيث نطمح أن يساعدك التنوع في هذه التدريبات على الوصول إلى جميع الطلاب في الصف، مهما تباينت مستوياتهم.

وقد تم تخصيص صفحة أو أكثر لكل نوعٍ من هذه التدريبات؛ لتغطي درسًا من دروس كتاب الطالب. حيث يمكنك أن تكلف الطلاب حل صفحة التدّريبات المقابلة لكل درس بحسب مستوى كل منهم؛ سواء في داخل الصف أم في المنزل. وليست هذه التدريبات بديلًا عن كتاب التمارين، ولكنها مساندة ومكملة له.

وتشمل هذه التدريبات الأنواع التاليه:

تدريبات إعادة التعليم

تركِّز هذه التدريبات على محتوى الدروس في كتاب الطالب، وتقدمه بأسلوب تدريسي ومعالجة يختلفان عن كتابي الطالب والتمارين. وهي موجّهة إلى الطلاب ذوي المستوى دون المتوسط.

ولأهمية حل المسألة تم تخصيص صفحتين من تدريبات إعادة التعليم لكل درس من دروس حل المسألة؛ للتركيز على كيفية اختيار الخطة وتنفيذها، بالإضافة إلى مجموعة من التدريبات المناسبة لتطبيق تلك الخطة.

تدريبات المهارات

تركِّز هذه التدريبات غالبًا على المهارات الحسابية الموجودة في الدرس، وتتضمن تدريبات إضافية وسائل تركز على تلك المهارات. وهي موجّهة إلى الطلاب ذوي المستوى المتوسط.

التدريبات الإثرائية

تساعد هذه التدريبات على التوسُّع في مفاهيم الدرس، كما تؤدي إلى توسيع مدارك الطلاب حول تعلم الرياضيات بشكل عام. وهذه التدريبات موجَّهة إلى الطلاب ذوي المستوى فوق المتوسط.

ملحق الإجابات:

يتضمن هذا المصدر في آخره ملحقًا بالإجابات، حيث تظهر باللون الأسود الغامق على صفحات مصغَّرة.

الفهرس

الاسم: ________________ التاريخ: ________

1-1 تدريبات إعادة التعليم

خصائص الأعداد الحقيقية

الأعداد الحقيقية : تصنف الأعداد الحقيقية جميعها على أنها نسبية أو غير نسبية، ومجموعة الأعداد النسبية تتضمن مجموعات جزئية متعددة: الطبيعية، الصحيحة، الكلية.

R	الأعداد الحقيقية	{جميع الأعداد النسبية وغير النسبية}.
Q	الأعداد النسبية	{جميع الأعداد التي يمكنك كتابتها على الصورة $\frac{m}{n}$، في حين أن m، n عددان صحيحان، $n \neq 0$}
I	الأعداد غير النسبية	{الكسور العشرية غير الدورية وغير المنتهية جميعها}.
Z	الأعداد الصحيحة	$\{\ldots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \ldots\}$
W	الأعداد الكلية	$\{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, \ldots\}$
N	الأعداد الطبيعية	$\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, \ldots\}$

مثال حدد مجموعات الأعداد التي ينتمي إليها كلٌّ من الأعداد الآتية.

$\frac{-11}{3}$ النسبية (Q)، الحقيقية (R)

$\sqrt{25} = 5$ الطبيعية (N)، الكلية (W)، الصحيحة (Z)، النسبية (Q)، الحقيقية (R).

تمارين:

حدِّد مجموعات الأعداد التي ينتمي إليها كلٌّ من الأعداد الآتية.

1) $\frac{6}{7}$　2) $-\sqrt{81}$　3) 0　4) 192.0005

5) 73　6) $34\frac{1}{2}$　7) $\frac{\sqrt{36}}{9}$　8) 26.1

9) π　10) $\frac{15}{3}$　11) $-4.\overline{17}$

12) $\frac{\sqrt{25}}{2}$　13) -1　14) $\sqrt{42}$

15) -11.2　16) $-\frac{8}{13}$　17) $\frac{\sqrt{5}}{2}$

18) $33.\overline{3}$　19) 894000　20) -0.02

1-1 تدريبات إعادة التعليم

(تتمة)

خصائص الأعداد الحقيقية

خصائص الأعداد الحقيقية		
لأي أعداد حقيقية a, b, c		
الخاصيّة	الجمع	الضرب
التبديلية	$a+b = b+a$	$a.b = b.a$
التجميعية	$(a+b)+c=a+(b+c)$	$(a.b).c=a.(b.c)$
العنصر المحايد	$a+0=a=0+a$	$a.1 = a = 1.a$
النظير	$a+(-a) = 0 = (-a) + a$	$a.\frac{1}{a} =1= \frac{1}{a}.a, 0 \neq 0$
الانغلاق	$a + b$ عدد حقيقي	$a.b$ عدد حقيقي
التوزيع	$(b+c)a = ba + ca$ و $a(b+c)=ab + ac$	

مثال بسِّط العبارة: $9x + 3y + 12y - 0.9x$

$9x+3y+12y- 0.9x = 9x + (-0.9x)+3y+12y$ الخاصية التبديلية للجمع

$=(9+(-0.9))x + (3+12)y$ خاصية التوزيع

$= 8.1x + 15y$ بالتبسيط

تمارين:

بسِّط كلًّا من العبارات الآتية:

1) $8(3a - b) + 4(2b -a)$
2) $40s + 18t - 5t + 11s$
3) $\frac{1}{5}(4j+2k-6j+3k)$
4) $10(6g+3h)+4(5g-h)$
5) $12\left(\frac{a}{3} - \frac{b}{4}\right)$
6) $8(2.4r-3.1s)-6(1.5r+2.4s)$
7) $4(20 - 4p) - \frac{3}{4}(4-16p)$
8) $5.5j+8.9k-4.7k-10.9j$
9) $1.2(7x-5y)-(10y-4.3x)$
10) $9(7e - 4f) - 0.6(e+5f)$
11) $2.5(12m - 8.5n)$
12) $\frac{3}{4}p-\frac{1}{5}r-\frac{3}{5}r-\frac{1}{2}p$
13) $4(10g+80h) - 20(10h - 5g)$
14) $2(15d+45c)+\frac{5}{6}(12d+18c)$
15) $(7y - 2.1x)3+2(3.5x - 6y)$
16) $\frac{2}{3}(18m-6n+12m+3n)$
17) $14(J-2k) - 3j(4-7)$
18) $50(3a-b) - 20(b -2a)$

1-1 تدريبات المهارات

اذكر مجموعات الأعداد التي ينتمي إليها كلٌ من الأعداد الآتية.

1) 34

2) -525

3) 0.875

4) $\frac{12}{3}$

5) $-\sqrt{9}$

6) $\sqrt{30}$

ما الخاصية الموضحة في كلٍّ من المعادلات الآتية:

7) $3 . x = x . 3$

8) $3a + 0 = 3a$

9) $2(r+w) = 2r + 2w$

10) $2r + (3r + 4r) = (2r+3r) + 4r$

11) $5y(\frac{1}{5y})=1$

12) $15\,x(1) = 15\,x$

13) $0.6\,[25(0.5)] = [0.6(25)]\,0.5$

14) $(10\,b+12b) + 7b = (12b + 10b) + 7b$

أوجد كلًّا من النظير الجمعي والنظير الضربي لكل عدد فيما يأتي:

15) 15

16) 1.25

17) $-\frac{4}{5}$

18) $3\frac{3}{4}$

بسّط كلًّا من العبارات الآتية:

19) $3x+ 5y + 2x - 3y$

20) $x - y - z + y - x + z$

21) $-(3g+3h) + 5g - 10h$

22) $a^2 - a + 4a - 3a^2 + 1$

23) $3(m-z) + 5(2m-z)$

24) $2x - 3y - (5x - 3y-2z)$

25) $6(2w + v) - 4\,(2v + 1w)$

26) $\frac{1}{3}(15d+3c)-\frac{1}{2}(8c-10d)$

1-1 تدريبات حل المسألة

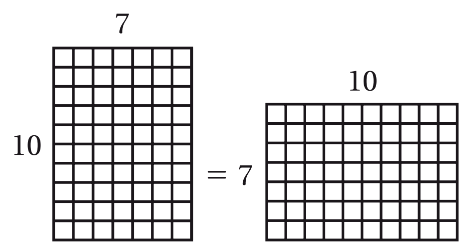
خصائص الأعداد الحقيقية

1) **حساب ذهني:** يقوم معلِّمو الرياضيات في المرحلة الابتدائية عند تعليم طلابهم الضرب والقيمة المنزلية للرقم، بعرض النموذج الآتي:

$$54\times 8 = (50+4)\times 8$$
$$= (50\times 8) + (4\times 8)$$

ما الخاصيّة المستخدمة في ذلك؟

2) **نمذجة:** ما خاصية الأعداد الحقيقية الموضحة في الشكل أدناه؟



3) **أشكال فن:** مثّل العلاقة بين الأعداد الطبيعية والصحيحة والنسبية وغير النسبية والحقيقية مستعملًا أشكال فن.

4) **نظرية الأعداد:** في الفقرتين الآتيتين:

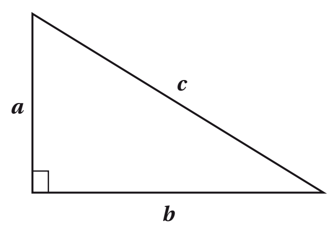
I) حاصل ضرب أيِّ عددين نسبيين دائمًا يساوي عددًا نسبيًّا.

II) حاصل ضرب أي عددين غير نسبيين دائمًا يساوي عددًا غير نسبيٍّ.

حدّد ما إذا كانت كلٌّ من الفقرتين صحيحة دائمًا أو أحيانًا أو ليست صحيحة أبدًا، فسِّر ذلك.

5) **المثلثات القائمة الزاوية.** أطوال أضلاع المثلث القائم الزاوية ترتبط بالعلاقة:

$$c^2=a^2+b^2$$



لكل مجموعة قيم a, b فيما يأتي، أوجد طول الضلع c، ثم حدّد ما إذا كان c عددًا طبيعيًّا أم لا.

a) $a=5, b=12$

b) $a=7, b=14$

c) $a=7, b=24$

الاسم: ________________ التاريخ: ________

1-1 التدريبات الإثرائية

خصائص الزمرة

تشكل مجموعة من الأعداد زمرة بالنسبة لعملية رياضية معرّفة عليها، إذا حققت الخصائص الآتية:

1) الانغلاق **2)** التجميع **3)** وجود عنصر محايد **4)** وجود نظير لكل عنصر في المجموعة.

مثال 1 هل تشكل المجموعة $\{0, 1, 2, 3, \ldots\}$ زمرة مع عملية الجمع؟

خاصية الانغلاق: لكل الأعداد في المجموعة، هل $a+b$ ينتمي للمجموعة؟

$1=0+1$ والعدد 1 ينتمي للمجموعة، $2=0+2$ ، والعدد 2 ينتمي للمجموعة... وهكذا.

إذن المجموعة تحقق خاصية الانغلاق مع الجمع.

خاصية التجميع: لكل الأعداد في المجموعة، هل $(a+b)+c = a+(b+c)$؟

$(1+2) +3 = 1+(2+3)$ ، $0+(1+2)=(0+1)+2$ ... وهكذا

إذن المجموعة تحقق خاصية التجميع مع الجمع.

خاصية العنصر المحايد: هل يوجد عدد "i" في المجموعة يحقق ما يأتي؟

لكل a في المجموعة، هل $i + a = a = a + i$؟

$1+0 = 1 = 0+1$، $2+0 = 2 = 2+0$ ، ... وهكذا

إذن العنصر المحايد للجمع هو الصفر " 0 ".

خاصية العنصر النظير: هل يوجد نظير a' لكل عدد مثل a في المجموعةوينتمي إليها، حيث $a'+a=a+ a' =i$؟

النظير الجمعي للعدد 3 هو -3؛ لأن $-3+3=0$، والعنصر المحايد للجمع هو الصفر " 0 ". لكن المجموعة لا تحتوي على العدد -3، لذا لا يوجد نظير جمعي للعدد 3.

إذن المجموعة ليست زمرة بالنسبة للجمع؛ لأنها لم تحقق الخصائص الأربع جميعها.

مثال 2 هل المجموعة $\{-1, 1\}$ تشكل زمرة مع عملية الضرب؟

خاصية الانغلاق: $1 = (1)(1)$; $-1=(-1)(1)$; $-1=(1)(-1)$; $1=(-1)(-1)$، إذن المجموعة تحقق خاصية الانغلاق مع الضرب.

خاصية التجميع: $(-1) = -1$ $[(-1)(-1)] = [(-1)(-1)]$ (-1) ... وهكذا

تحقق خاصية التجميع مع الضرب

خاصية العنصر المحايد: $-1 = (1)(-1)$; $-1 = (-1)1$ العنصر المحايد لعملية الضرب هو 1

خاصية العنصر النظير: -1 هو النظير الضربي للعدد -1، في حين $1 = (-1)(-1)$، والعدد 1 هو المحايد لعملية الضرب.

كما أن العدد 1 هو النظير الضربي للعدد 1، حيث $1=(1)(1)$، والعدد 1 هو المحايد لعملية الضرب.

ويعني هذا أن كل عدد له نظير ضربي في المجموعة.

إذن المجموعة $\{-1, 1\}$ تشكل زمرة مع الضرب؛ لأنها حققت الخصائص الأربع جميعها.

تمارين:

بين ما إذا كانت المجموعة المعطاة تشكل زمرة مع العملية المعطاة في كلٍّ ممّا يأتي أم لا:

1) {الأعداد الصحيحة}، الجمع

2) {الأعداد الصحيحة}، الضرب

3) $\{\frac{1}{2}, \frac{2}{2}, \frac{3}{2}, \ldots\}$، الجمع

4) {مضاعفات العدد 5}، الضرب

5) $\{x, x^2, x^3, x^4, \ldots\}$، الجمع

6) $\{\sqrt{1}, \sqrt{2}, \sqrt{3}, \ldots\}$، الضرب

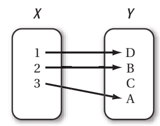
7) {الأعداد غير النسبية}، الجمع

8) {الأعداد النسبية}، الجمع.

1-2 تدريبات إعادة التعليم

العلاقات والدوال

العلاقات والدوال: يمكنك تمثيل العلاقة في صورة مجموعة من الأزواج المرتبة أو في صورة معادلة. والعلاقة هي مجموعة الأزواج المرتبةكلها (x, y) التي تجعل المعادلة صحيحة، والدالة علاقة تربط كل عنصر في مجالها بعنصر واحد فقط في مداها.

الدالة المتباينة	كل عنصر في المجال يرتبط بعنصر واحد فقط في المدى، ولا يرتبط أكثر من عنصر في المجال بالعنصر نفسه في المدى.	

مثال **حدد مجال العلاقة الآتية ومداها، وهل تمثل هذه العلاقة دالة؟**

x	y
-5	-1
-3	0
-1	1
1	2
3	3

المجال والمدى كلاهما أعداد حقيقية. كل عنصر في المجال يرتبط بعنصر واحد فقط في المدى؛ لذا فهذه دالة .

المجال $= \{-5,-3,-1,1,3\}$

المدى $= \{-1,0,1,2,3\}$

تمارين:

حدِّد كلًّا من مجال ومدى كلِّ علاقة فيما يأتي، ثم حدد ما إذا كانت دالة أم لا، وإذا كانت دالة، فهل هي متباينة أم لا؟

(1 $\{(0.5, 3), (0.4, 2), (3.1, 1), (0.4, 0)\}$

(2 $\{(-5, 2), (4, -2), (3, -11), (-7, 2)\}$

(3 $\{(0.5, -3), (0.1, 12), (6, 8)\}$

(4 $\{(-15, 12), (-14, 11), (-13, 10), (-12, 12)\}$

الاسم: ______________________ التاريخ: ______________

1-2 تدريبات إعادة التعليم

(تتمة)

العلاقات والدوال

معادلات العلاقات والدوال: المعادلات التي تمثل دوال غالبًا ما تكتب برمز الدالة، فعلى سبيل المثال: $y = 10 - 8x$ يمكنك كتابتها على الصورة $f(x) = 10 - 8x$، وهذه الصيغة تؤكد حقيقة أن قيم y (**المتغير التابع**) تعتمد على قيم x (**المتغير المستقل**).

نعوِّض القيمة المعطاة من المجال في المعادلة؛ لإيجاد العنصر المرتبط بهذه القيمة في المدى، فيكون هو قيمة الدالة.

مثال **إذا أعطيت الدالة $f(x) = x^2 + 2x$، فأوجد قيمة كلٍّ ممَّا يأتي:**

a) $f(3)$

$f(x) = x^2 + 2x$	الدّالة الأصلية
$f(3) = 3^2 + 2(3)$	بالتعويض
$= 15$	بالتبسيط

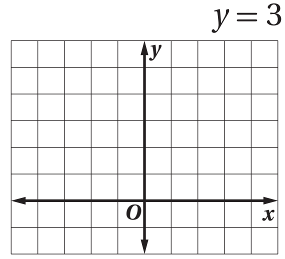
b) $f(5a)$

$f(x) = x^2 + 2x$	الدّالة الأصلية
$f(5a) = (5a)^2 + 2(5a)$	بالتعويض
$= 25a^2 + 10a$	بالتبسيط

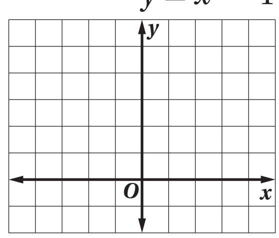
تمارين:

مثِّل كل علاقة أو معادلة، وحدِّد المجال والمدى لكلٍّ منها. وحدِّد فيما إذا كانت دالة أم لا، وإذا كانت دالة فهل هي متباينة؟ ثم حدد ما إذاكانت منفصلة أو متصلة.

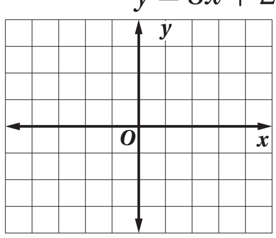
1) $y = 3$



2) $y = x^2 - 1$



3) $y = 3x + 2$



أوجد قيمة كلٍّ مما يأتي إذا كان: $f(x) = -2x + 4$.

4) $f(12)$ **5)** $f(6)$ **6)** $f(2b)$

أوجد قيمة كلٍّ مما يأتي إذا كان: $g(x) = x^3 - x$.

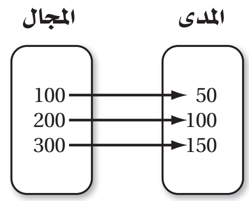
7) $g(5)$ **8)** $g(-2)$ **9)** $g(7c)$

1-2 تدريبات المهارات

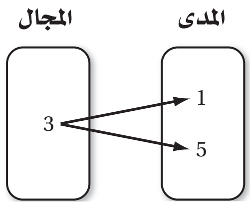
العلاقات والدوال

حدّد المجال والمدى لكل علاقة مما يأتي، ثم حدد إذا كانت دالة، و إذا كانت دالة، فهل هي متباينة؟

1)



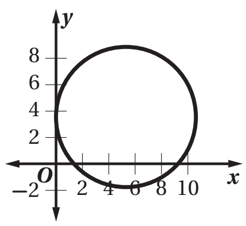
2)



3)

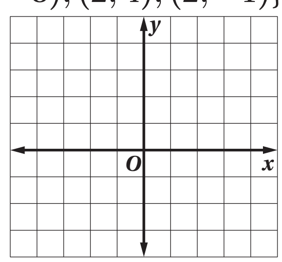
x	y
1	2
2	4
3	6

4)

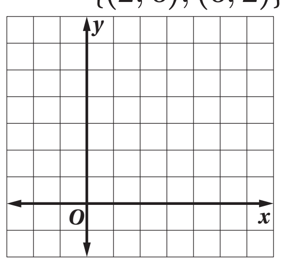


مثّل كل علاقة أو معادلة مما يأتي وحدد مجالها ومداها، ثم حدد ما إذا كانت دالة أم لا، وإن كانت دالة، فهل هي متباينة؟ ثم حدد إذا كانت متصلة أم منفصلة.

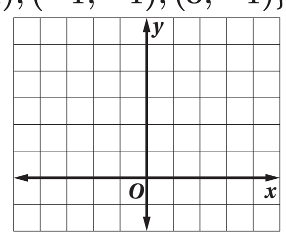
5) $\{(2, -3), (2, 4), (2, -1)\}$



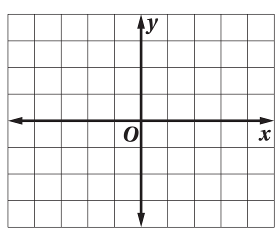
6) $\{(2, 6), (6, 2)\}$



7) $\{(-3, 4), (-2, 4), (-1, -1), (3, -1)\}$



8) $x = -2$



إذا كان: $g(x) = 2 - x^2$ و $f(x) = 2x - 1$ ، فأوجد قيمة كلٍّ ممّا يأتي

9) $f(0)$ **10)** $f(12)$ **11)** $g(4)$

12) $f(-2)$ **13)** $g(-1)$ **14)** $f(d)$

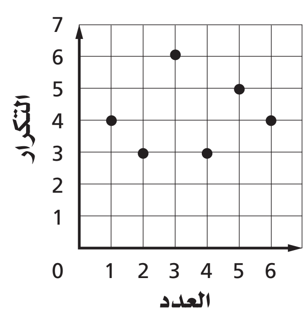
1-2 تدريبات حل المسألة

العلاقات والدوال

1) كواكب: يبيِّن الجدول الآتي متوسط المسافة بين الشمس والكواكب الثمانية الرئيسة في النظام الشمسي، ومدة دوران كلٍّ منها، فكّر في متوسط المسافة على أنها المجال، ومدة الدوران على أنها المدى للعلاقة، هل هذه العلاقة دالة؟ فسر إجابتك.

الكوكب	متوسط المسافة من الشمس	مدة الدوران (سنوات)
عطارد	0.387	0.241
الزهرة	0.723	0.615
الأرض	1.0	1.0
المريخ	1.524	1.881
المشتري	5.204	11.75
زحل	9.582	29.5
أورانوس	19.201	84
نبتون	30.047	165

2) احتمالات: قامت ليلى بإلقاء مكعب الأرقام مرات عدة، فكوَّنت التمثيل الآتي للبيانات. اكتب العلاقة التي تمثل هذه البيانات على شكل أزواج مرتبة.

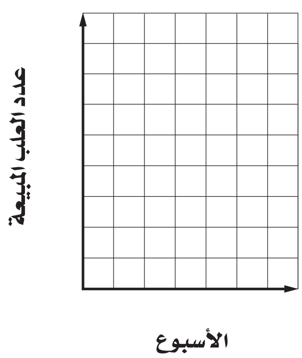


3) مدرسة: عدد الطلاب (N) في إحدى المدارس مُعطًى بالدالة: $N = 120 + 30G$ ، في حين أن G هو مستوى (ترتيب) الصف. هل العدد 285 ينتمي إلى مدى هذه الدالة؟

4) مبيعات: الجدول الآتي يبيِّن مبيعات أحد المحالِّ التجارية من نوعٍ معيَّنٍ من الشوكلاتة في ستة أسابيع.

الأسبوع	1	2	3	4	5	6
عدد العلب المبيعة	8	10	15	22	31	44

a) مثِّل البيانات بيانيًّا.



b) حدِّد المجال والمدى.

c) هل تمثِّل هذه العلاقة دالة؟ فسِّر إجابتك.

الاسم: ____________________ التاريخ: ____________

1-2 التدريبات الإثرائية

علاقات ودوال على الأعداد الحقيقية

من الممتع التفكير في الارتباط واحد لواحد بين مجموعات جزئية من الأعداد الحقيقية.

مثال 1 **هل هناك ارتباط واحد لواحد بين الأعداد الطبيعية والأعداد الصحيحة؟**

ضع المجموعتين في الصورة الآتية:

$$\begin{array}{ccccccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9\ldots \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ 0 & 1 & -1 & 2 & -2 & 3 & -3 & 4 & -4\ldots \end{array}$$

رغم أن الأعداد الطبيعية مجموعة جزئية من الأعداد الصحيحة، إلَّا أنه يوجد عدد طبيعي وحيد لكل عدد صحيح؛ أي أنه يوجد ارتباط واحد لواحد بين المجموعتين.

مثال 2 **هل هناك ارتباط واحد لواحد، بين الأعداد الطبيعية والأعداد الزوجية الموجبة؟**

$$\begin{array}{cccc} 1 & 2 & 3 & 4\ldots \\ 2 & 4 & 6 & 8\ldots \end{array}$$

يوجد ارتباط واحد لواحد بين المجموعتين.

تمارين:

1) هل هناك ارتباط واحد لواحد بين الأعداد الكلية والأعداد الطبيعية؟

2) هل هناك ارتباط واحد لواحد بين الأعداد الكلية والأعداد الصحيحة؟

3) هل هناك ارتباط واحد لواحد بين الأعداد الصحيحة السالبة ومجموعة الأعداد الصحيحة؟

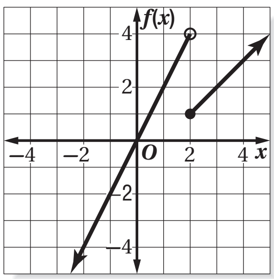
4) هل هناك ارتباط واحد لواحد بين الأعداد الطبيعية والأعداد النسبية؟

1-3 تدريبات إعادة التعليم

دوال خاصة

الدالة متعددة التعريف: تُكتب هذه الدالة باستعمال عبارتين جبريتين أو أكثر، ويكون تمثيلها متقطعًا في العادة.

مثال مثِّل الدالة $f(x) = \begin{cases} 2x, x < 2 \\ x - 1, x \geq 2 \end{cases}$ بيانيًّا.

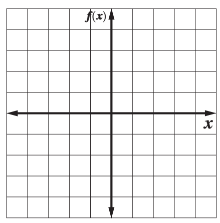


أولًا: مثِّل الدالة الخطية $f(x) = 2x$ عندما $x < 2$. بما أن العدد 2 لا يحقق هذه المتباينة، فإنه عند التمثيل نضع دائرة غير مظللة عند النقطة $(2, 4)$. ثم نمثِّل الدالة الخطية $f(x) = x - 1$ عندما $x \geq 2$. وبما أن العدد 2 يحقق هذه المتباينة، فإننا نضع دائرة مغلقة عند النقطة $(2, 1)$.

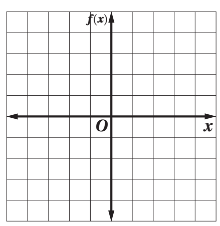
تمارين:

مثِّل كل دالة فيما يأتي، ثمَّ حدّد مجالها ومداها:

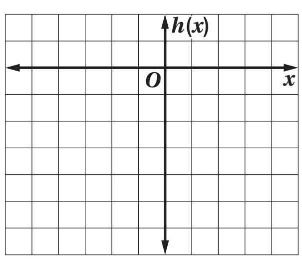
(1 $f(x) = \begin{cases} x + 2, x < 0 \\ 2x + 5, 0 \leq x \leq 2 \\ -x + 1, x > 2 \end{cases}$



(2 $f(x) = \begin{cases} -x - 4, x < -7 \\ 5x - 1, -7 \leq x \leq 0 \\ 2x + 1, x > 0 \end{cases}$



(3 $h(x) = \begin{cases} \frac{x}{3}, x \leq 0 \\ 2x - 6, 0 < x < 2 \\ 1, x \geq 2 \end{cases}$



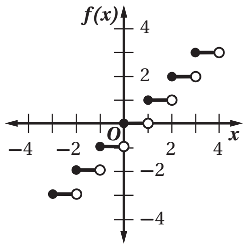
الاسم: ______________________ التاريخ: __________

1-3 تدريبات إعادة التعليم

(تتمة)

دوال خاصة

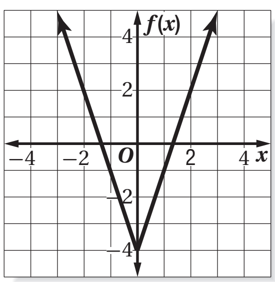
الدوال الدرجية ودوال القيمة المطلقة

الاسم	تكتب على الصيغة	تُمثل على الشكل التالي
دالة أكبر عدد صحيح	$f(x)=[x]$	
داله القيمة المطلقة	$f(x)=\lvert x \rvert$	نصفا مستقيم كلٌّ منهما انعكاس للآخر في محور ويلتقيان عند نقطة الرأس.

مثال مثِّل الدالة $f(x) = 3\ \lvert x \rvert - 4$ بيانيًّا .

أوجد عددًا من الأزواج المرتبة. ثم مثِّلها بيانيًّا وصِلْ بينها،
يمكن أن تتوقع أن يكون الشكل مشابهًا للدالة الرئيسة (الأم) $f(x)= \lvert x \rvert$.

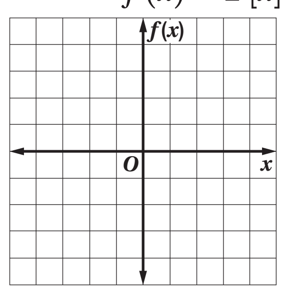
x	$3\lvert x \rvert - 4$
0	−4
1	−1
2	2
−1	−1
−2	2



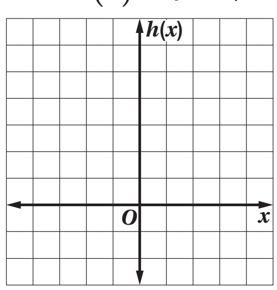
تمارين:

مثِّل الدالة بيانيًّا، ثم حدِّد مجالها ومداها في كلٍّ مما يأتي .

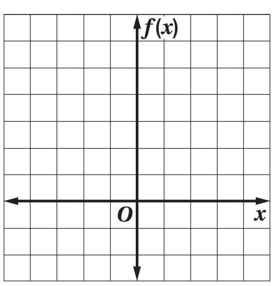
1) $f(x) = 2\,[x]$



2) $h(x)= \lvert 2x + 1 \rvert$



3) $f(x)= [x] + 4$

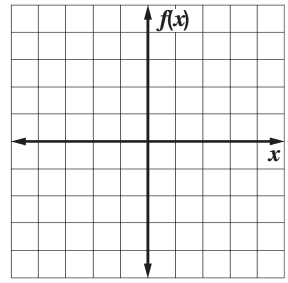


1-3 تدريبات المهارات

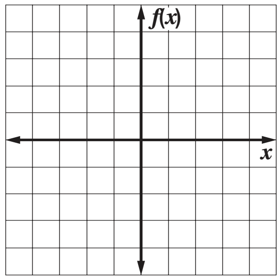
دوال خاصة

مثِّل الدالة بيانيًّا. ثم حدِّد مجالها ومداها في كلٍّ مما يأتي.

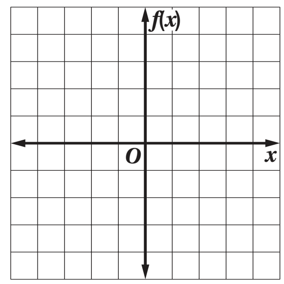
(1 $f(x) = 3$



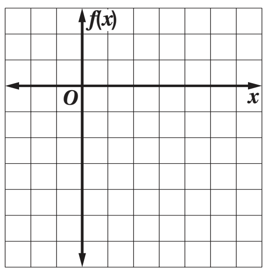
(2 $f(x) = -x$



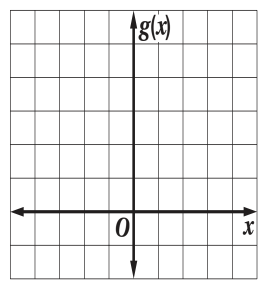
(3 $f(x) = [x+1]$



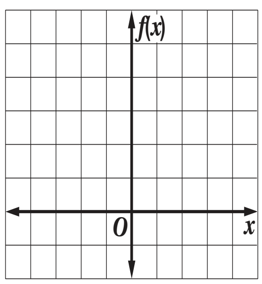
(4 $f(x) = [x-3]$



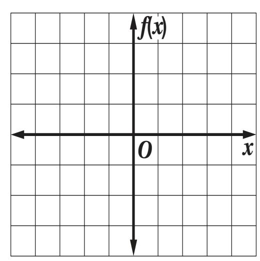
(5 $g(x) = 2|x|$



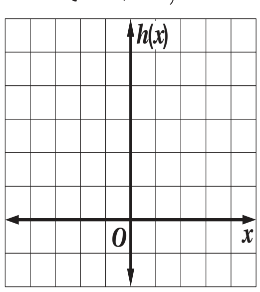
(6 $f(x) = |x+1|$



(7 $f(x) = \begin{cases} x, & x < 0 \\ 2, & x \geq 0 \end{cases}$



(8 $h(x) = \begin{cases} 3, & x < -1 \\ x+1, & x > 1 \end{cases}$



الاسم: ________________ التاريخ: ________

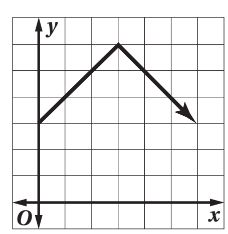
1-3 تدريبات حل المسألة

دوال خاصة

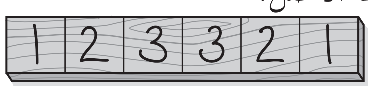
9) **توفير:** وضع صلاح 2000 ريال في حسابه المصرفي عندما تسلَّم راتبه الشهري. واستمر في التوفير خلال عمله. ويمكن تمثيل قيمة حسابه المصرفي بالصيغة $2000\,[\![x]\!]$ في حين x هو عدد الشهور التي عمل فيها صلاح. كم أصبح حسابه المصرفي بعد 105 أيامٍ من بداية عمله؟

10) **تقريب:** قام معلم العلوم بتوجيه طلابه لتقريب قياساتهم على النحو الآتي: إذا كان الكسر في العدد أقل من 0.5 من الملمتر، فإنهم يقومون بتقريبه إلى العدد السابق (الأقل)، أما إذا كان الكسر في العدد أكبر من أو يساوي 0.5، فإنهم يقومون بتقريبه إلى العدد التالي (الأكبر). اكتب صيغة تعطيك قيمة تقريبية لـ x بالملمترات.

11) **فن العمارة:** المقطع العرضي لسقف إحدى الأبنية مبيَّن في الشكل الآتي. اكتب دالة قيمة مطلقة تمثل شكل هذا السقف؟



12) **ألعاب:** يلعب بعض الشباب لعبة إطلاق سهام صغيرة على لوحٍ خشبيٍّ مقسَّم إلى ستة أجزاء متطابقة. وهم يضعون في كل جزءٍ رقمًا يدل على الدرجة المستحقة للاعب إذا استقر السهم في ذلك الجزء. لتكن x تشير إلى الموقع الأفقي للسهم على اللوح الخشبي، على أن يكون مركز اللوح هو نقطة الأصل. والقيم السالبة عن يسار اللوح، والقيم الموجبة عن يمين اللوح. وتعتمد درجة اللاعب على المسافة التي يبعدها السهم عن نقطة الأصل.



a) اكتب صيغة رياضية تُعطِي المسافة الأفقية بين السهم ونقطة الأصل.

b) مستعملًا دالة أكبر عدد صحيح اكتب صيغة رياضية يمكنك استخدامها لإيجاد درجة أيِّ لاعبٍ.

الاسم: ____________________ التاريخ: ____________

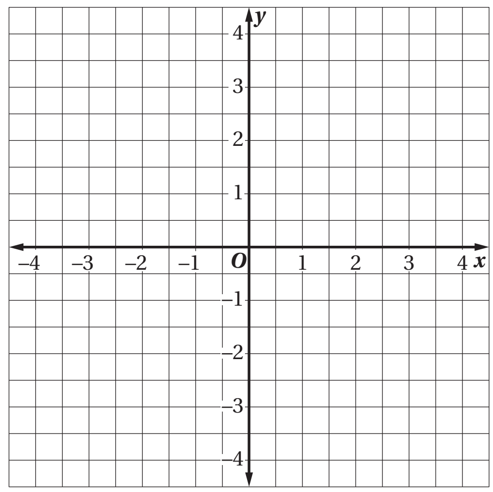
1-3 التدريبات الإثرائية

تمثيل دالة أكبر عدد صحيح بيانيًّا

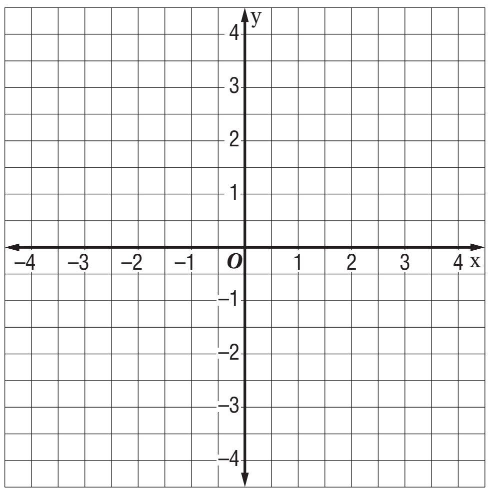
تنتج بعض المعادلات التي تحتوي على دالة أكبر عدد صحيح تمثيلات ممتعة ومفيدة، وسيكون من المفيد تكوين جدول للقيم لكل دالة واستخدام أقلام تلوين للتمثيل.

مثّل كل دالة من الدوال الآتية بيانيًّا:

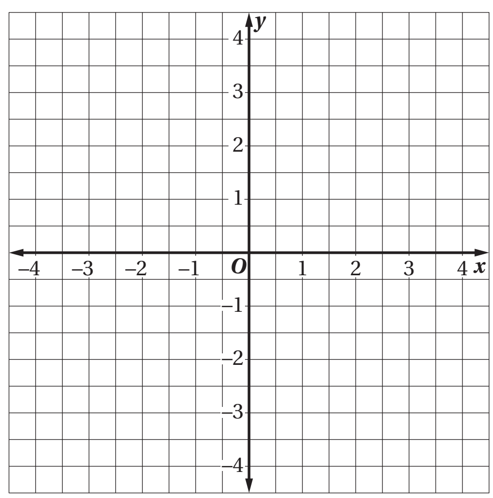
1) $y = 2x - [x]$



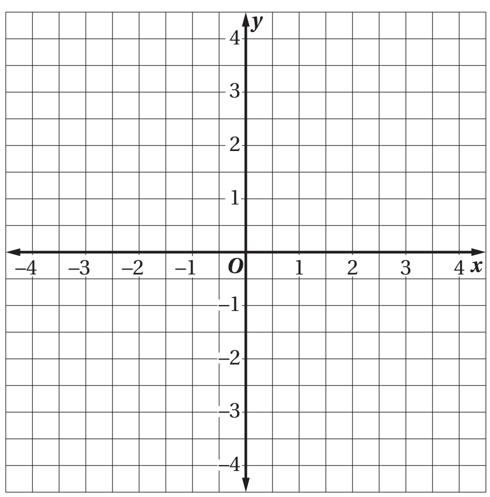
2) $y = \frac{[x]}{[x]}$



3) $y = \frac{[0.5x+1]}{[0.5x+1]}$



4) $y = \frac{x}{[x]}$



الاسم: ________________________ التاريخ: ____________

1-4 تدريبات إعادة التعليم

تمثيل المتباينات الخطية ومتباينات القيمة المطلقة بيانيًّا

تمثيل المتباينة الخطية : المتباينة الخطية مثل $y \geq 2x - 1$ ، يمكنك تشبيهها بمعادلة خطية، ولكن نستعمل إشارة المتباينة بدلًا من إشارة المساواة، ومنحنى المعادلة الخطية المرتبطة بالمتباينة يقسم المستوى الإحداثي إلى نصفَي مستوى، ويكون المستقيم حدًّا لكلا النصفين.

لتمثيل المتباينة الخطية بيانيًّا، اتبع الخطوات الآتية:

الخطوة 1: مثّل الحد الفاصل، وهو التمثيل البياني للمعادلة المرتبطة، إذا كانت إشارة المتباينة ($\leq$ أو $\geq$)، فإن الحد يكون متصلًا، أما إذا كانت إشارة المتباينة($>$ أو $<$)، فإن الحد يكون متقطعًا.

الخطوة 2: اختر نقطة لا تكون على الحد، واختبر ما إذا كانت تحقق المتباينةأم لا، وإذا كانت النقطة $(0, 0)$ لا تقع على الحد الفاصل، فهي نقطة جيدة للاختبار.

الخطوة 3: إذا حققت النقطة التي اخترتها المتباينة، ظلل نصف المستوى الذي يحوي هذه النقطة، وإذا لم تحقق النقطة المتباينة ظلل النصف الآخر.

مثال مثّل $x+2y \geq 4$ بيانيًّا .

الحد هو التمثيل البياني للمعادلة: $x + 2y = 4$.

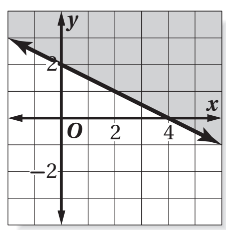
استعمل صيغة الميل والمقطع $y = 2 - \frac{1}{2}x$ لتمثيل حد المنطقة.

الحد يتعيَّن أن يكون متصلًا، اختبر النقطة $(0, 0)$.

$0+2\,(0) \overset{?}{\geq} 4$ $\quad (x, y) = (0, 0)$

$0 \geq 4$ $\quad$ خطأ

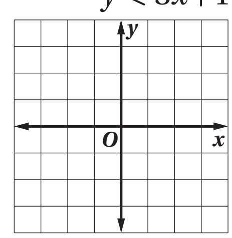
ظلل المنطقة التي لا تحتوي على $(0, 0)$.



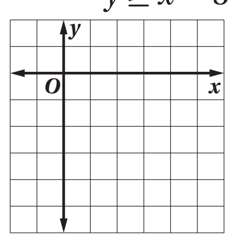
تمارين:

مثِّل كلَّ متباينة ممَّا يأتي بيانيًّا:

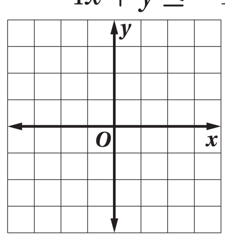
1) $y < 3x+1$



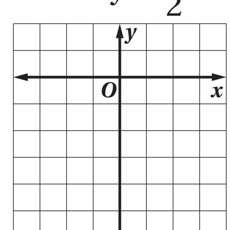
2) $y \geq x - 5$



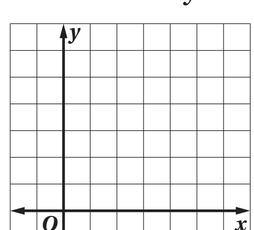
3) $4x + y \leq -1$



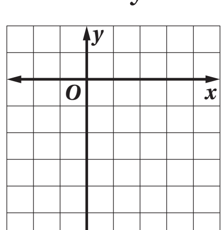
4) $y < \frac{x}{2} - 4$



5) $x + y > 6$



6) $0.5x - 0.25y < 1.5$



1-4 تدريبات إعادة التعليم

(تتمة)

تمثيل المتباينات الخطية ومتباينات القيمة المطلقة بيانيًا

تمثيل متباينات القيمة المطلقة بيانيًا: تمثيل متباينات القيمة المطلقة مشابه لتمثيل المتباينات الخطية. فالتمثيل البياني لمعادلة القيمة المطلقة المرتبطة هو الحدّ(الفاصل). يكون الحدّ مرسوما على نحو متصل، إذا كانت المتباينة تحتوي على إشارة $\le$ أو $\ge$ ، ويرسم الحدّ متقطعًا إذا كانت تحوي $>$ أو $<$. اختر نقطة لا تقع على الحد لتحديد المنطقة التي يتعين تظليلها.

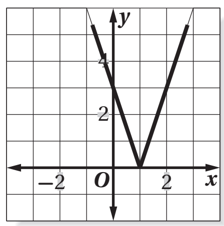
مثال مثّل $y \le 3|x-1|$ بيانيا.

أولًا. مثّل المعادلة $y = 3|x-1|$.

بما أن المتباينة تحتوي على إشارة المساواة($\le$)، فإن الحدّ سيكون متصلًا.

و لتكن نقطة الاختبار $(0, 0)$.

$0 \overset{?}{\le} 3\,\|0-1\|$	$(x, y) = (0, 0)$
$0 \overset{?}{\le} 3\,\|-1\|$	$\|-1\| = 1$
$0 \le 3$	صحيح

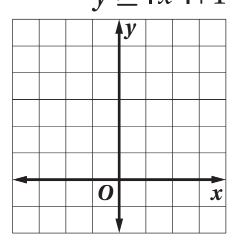


ظلّل المنطقة التي تحتوي على النقطة $(0, 0)$.

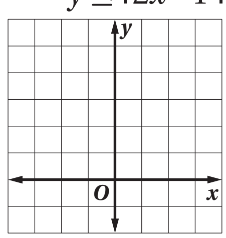
تمارين:

مثّل كل متباينة مما يأتي بيانيًا:

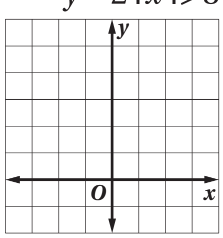
1) $y \ge |x| + 1$



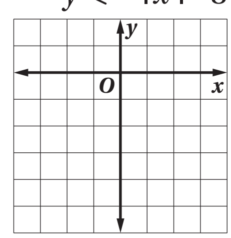
2) $y \le |2x-1|$



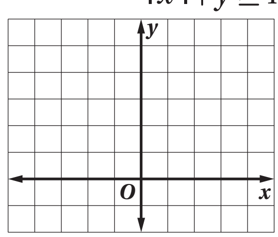
3) $y - 2|x| > 3$



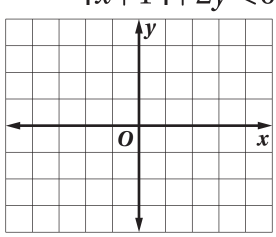
4) $y < -|x| - 3$



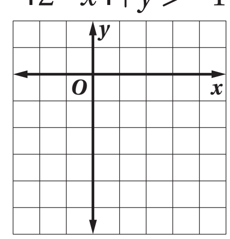
5) $|x| + y \ge 4$



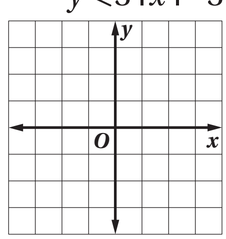
6) $|x+1| + 2y < 0$



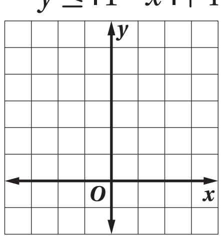
7) $|2-x| + y > -1$



8) $y < 3|x| - 3$



9) $y \le |1-x| + 4$

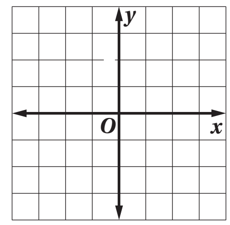


1-4 تدريبات المهارات

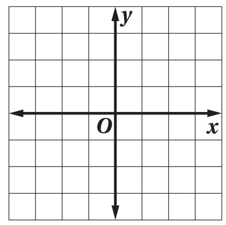
تمثيل المتباينات الخطية ومتباينات القيمة المطلقة بيانيًّا

مثّل كل متباينة مما يأتي بيانيًّا:

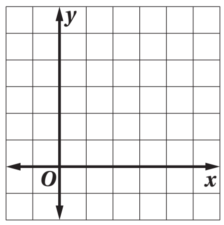
1) $y > 1$



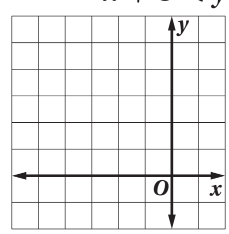
2) $y \leq x + 2$



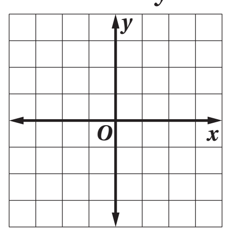
3) $x + y \leq 4$



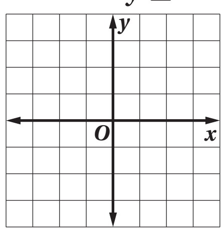
4) $x + 3 < y$



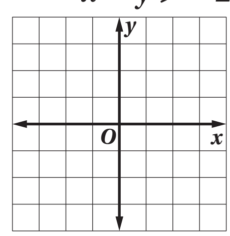
5) $2 - y < x$



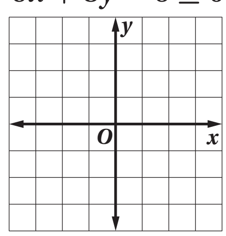
6) $y \geq -x$



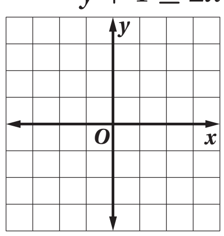
7) $x - y > -2$



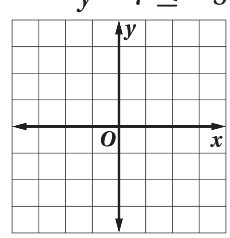
8) $9x + 3y - 6 \leq 0$



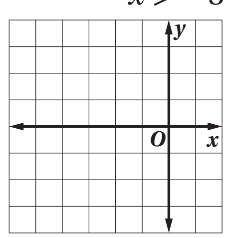
9) $y + 1 \geq 2x$



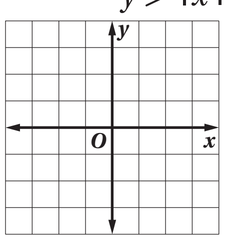
10) $y - 7 \leq -9$



11) $x > -5$



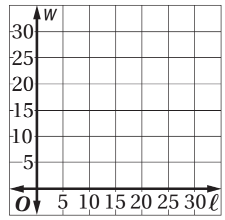
12) $y > |x|$



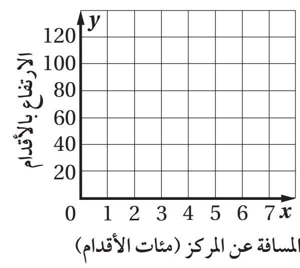
1-4 تدريبات حل المسألة

تمثيل المتباينات الخطية ومتباينات القيمة المطلقة بيانيًّا

13) إطارات: إذا كانت أبعاد الإطار المستطيل الشكل الذي يمكنك عمله من قطعة خشب طولها 50 بوصة محددة بالمتباينة $\ell + w \leq 25$. فمثّل هذه المتباينة بيانيًّا.

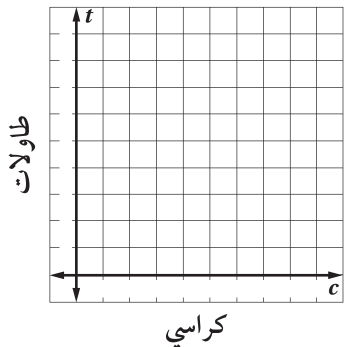


14) تعليمات البناء: تحدد البلدية في إحدى المدن ارتفاع الأبنية حول أحد المتنزهات الموجودة في وسط المدينة، على أن يكون ارتفاع البناية أقل من $0.1x$ في حين أن x هي المسافة بين البناية ومركز المتنزه. افترض أن مركز المتنزه يقع عند النقطة (0,0) ومثّل المتباينة التي تمثل ارتفاع البناية بيانيًّا.



15) مزارع: خلال فصل الشتاء، يحتاج الحصان إلى 36 لترًا من الماء يوميًّا، في حين يحتاج الخروف إلى 3.6 لتراتٍ يوميًّا. إذا كان أحد المزارعين يستطيع أن يزوِّد أحصنة وخرافًا بمقدار 300 لتر من الماء يوميًّا، فاكتب متباينة تبين عدد الأحصنة وعدد الخراف التي يمكن أن يقتنيها هذا المزارع.

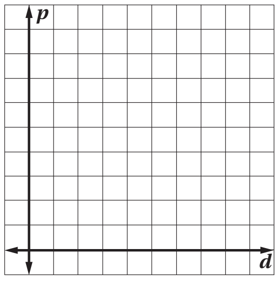
16) كتلة: تقوم مجموعة من العمال بتحميل إحدى الشاحنات بكراسي وطاولات، فإذا كانت المتباينة الآتية تمثل حدود الكتلة التي تستطيع الشاحنة حملها $200t + 60c < 1200$, في حين أن t هو عدد الطاولات و c عدد الكراسي فمثّل هذه المتباينة بيانيًّا.



17) فنون: يبيع أحد الرسامين نوعين من اللوحات بمبلغ 100 ريال لكل لوحة من النوع الأول، و 400 ريال لكل لوحة من النوع الثاني، ويريد الرسام أن يحصل على مبلغ لا يقل عن 2000 ريال شهريًّا.

a) اكتب متباينة تمثل عدد اللوحات من النوع الأول و/أو عدد اللوحات من النوع الثاني الذي يتعين أن يبيعها الرسام للوصول إلى هدفه.

b) مثّل المتباينة بيانيًّا.



c) إذا باع الرسام 3 لوحاتٍ من النوع الثاني في أحد الشهور، فما عدد اللوحات من النوع الأول التي يتعين أن يبيعها ليحصل على 2000 ريال؟

1-4 التدريبات الإثرائية

النهايات

النهاية مفهوم رئيس في كثير من فروع الرياضيات، وخاصة في حساب التفاضل والتكامل. إذا أخذنا المقدار $3x + 2$، عندما تقترب x من العدد 1، فإن قيمة هذا المقدار تقترب من العدد 5، ويبيِّن الجداول أدناه طريقة اختيار قيم x القريبة من 1؛ للحصول على قيم للمقدار قريبة من 5، وهي إحدى طرق إيجاد نهاية المقدار.

x	$3x + 2$
0.900	4.700
0.950	4.850
0.990	4.970
0.999	4.997
0.9999	4.9997

أوجد نهاية كلِّ عبارة مما يأتي عند ما تقترب x من القيمة المعطاة:

1) $2x + 2$ عندما تقترب x من 5

2) $x - 5$ عندما تقترب x من 11

3) $\frac{3x+5}{x-6}$ عندما تقترب x من 1

4) $\frac{5x+2}{x-1}$ عندما تقترب x من -1

5) $\frac{3x+5}{x-6}$ عندما تقترب x من 100

6) $\frac{3x+5}{x-6}$ عندما تقترب x من 1000

7) $\frac{5x+2}{x-1}$ عندما تقترب x من 100

8) $\frac{5x+2}{x-1}$ عندما تقترب x من 1000

9) ماذا تلا حظ في النهايات التي حصلت عليها في التمارين 8–5؟

الاسم: ______________________________ التاريخ: ____________

1-5 تدريبات إعادة التعليم

حل أنظمة المتباينات الخطية بيانيًا

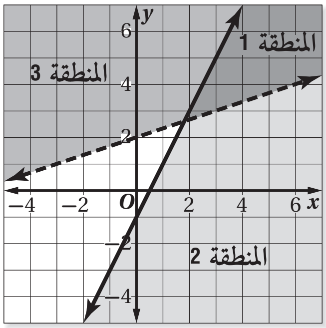
أنظمة المتباينات الخطية : لحل نظام من المتباينات الخطية، مثّل المتباينات بيانيًا على المستوى البياني نفسه. ومنطقة حل النظام هي المنطقة المظللة المشتركة لكل المتباينات.

مثال حل نظام المتباينات: $y > \frac{x}{3} + 2 , y \leq 2x - 1$

المنطقتان 1 و 2 تمثلان حل المتباينة $y \leq 2x - 1$

المنطقتان 1 و 3 تمثلان حل المتباينة $y > \frac{x}{3} + 2$

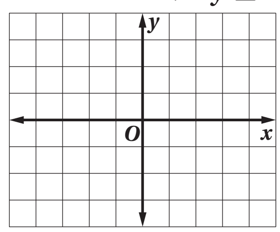
المنطقة 1 مشتركة بين هذه المناطق، فهي تمثل حل نظام المتباينات.



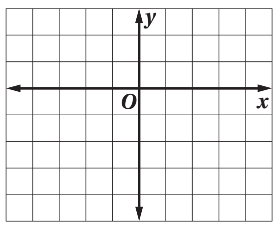
تمارين:

حلّ كلًّا من أنظمة المتباينات الخطيّة بيانيًّا.

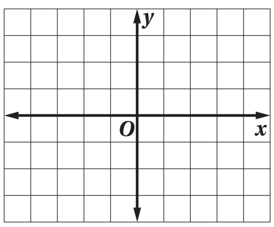
1) $x - y \leq 2$
$x + 2y \geq 1$



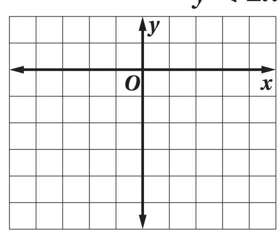
2) $3x - 2y \leq -1$
$x + 4y \geq -12$



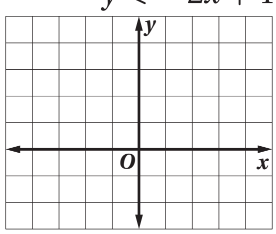
3) $|y| \leq 1$
$x > 2$



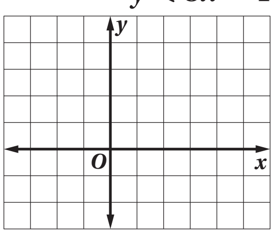
4) $y \geq \frac{x}{2} - 3$
$y < 2x$



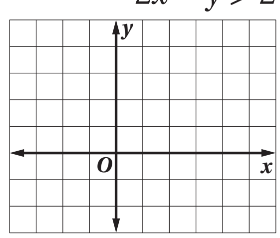
5) $y < \frac{x}{3} + 2$
$y < -2x + 1$



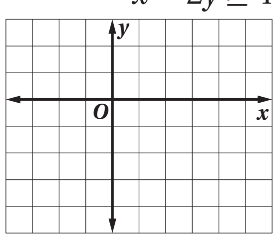
6) $y \geq -\frac{x}{4} + 1$
$y < 3x - 1$



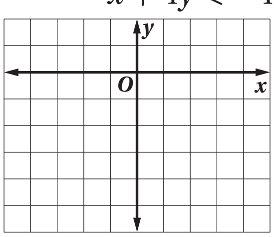
7) $x + y \geq 4$
$2x - y > 2$



8) $x + 3y < 3$
$x - 2y \geq 4$



9) $x - 2y > 6$
$x + 4y < -4$



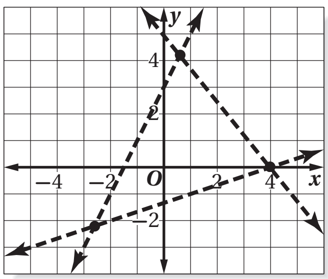
1-5 تدريبات إعادة التعليم

(تتمة)

حل أنظمة المتباينات الخطية بيانيًا

إيجاد رؤوس منطقة مغلقة : تكون منطقة الحل الناتجة عن حل نظام من المتباينات الخطية منطقة مغلقة على شكل مضلع أحيانًا. ويمكنك إيجاد رؤوس هذا المضلع مستعملًا أساليب سبقت دراستها مثل: التمثيل البياني، التعويض و/ أو الحذف.

مثال **أوجد رؤوس المثلث الناتج عن تمثيل نظام المتباينات: $5x+4y<20, y<2x+3 , x-3y<4$ بيانيًا.**



مثِّل كل متباينة بيانيًّا. رؤوس المثلث الناتج هي النقاط الناتجة عن تقاطع المستقيمات التي تحد المنطقة. الرأس $(4, 0)$ يمكنك إيجاده من الرسم مباشرة. ولإيجاد الرأسين الآخرين حل نظامَي المعادلات:

$y=2x+3$ و $y=2x+3$

$5x+4y=20$ $x-3y=4$

أعد كتابة المعادلة الأولى بالصورة القياسية على الصورة $2x-y=-3$ بالنسبة للنظام الأول، ثم اضربها في العدد 4، واجمع الناتج إلى المعادلة الثانية

$2x-y=-3$ بالضرب في 4 $8x-4y=-12$

$5x+4y=20$

$$\underline{(+)\ 5x+4y=20}$$

$$13x=8$$

$$x=\frac{8}{13}$$

عوّض $x=\frac{8}{13}$ في إحدى المعادلتين الأصليتين لإيجاد قيمة y

$$2\left(\frac{8}{13}\right)-y=-3$$

$$\frac{16}{13}-y=-3$$

$$y=\frac{55}{13}$$

إحداثيات الرأس الثاني $\left(\frac{8}{13},4\frac{3}{13}\right)$،

استخدم التعويض، بالنسبة لنظام المعادلات الثاني.

عوّض $2x+3$ بدلًا من y في المعادلة الثانية فتحصل على:

$$x-3(2x+3)=4$$

$$x-6x-9=4$$

$$-5x=13$$

$$x=-\frac{13}{5}$$

عوّض $x=-\frac{13}{5}$ في المعادلة الأولى لإيجاد قيمة y

$$y=2\left(-\frac{13}{5}\right)+3$$

$$y=-\frac{26}{5}+3$$

$$y=-\frac{11}{5}$$

إحداثيات الرأس الثالث $\left(-2\frac{3}{5}, -2\frac{1}{5}\right)$.

إذن إحداثيات الرؤوس الثلاثة للمثلث الناتج هي: $\left(\frac{8}{13}, 4\frac{3}{13}\right)$، $(4, 0)$ و $\left(-2\frac{3}{5}, -2\frac{1}{5}\right)$.

تمارين:

أوجد إحداثيات رؤوس المثلث الناتج عن التمثيل البياني لكلٍّ من أنظمة المتباينات الآتية:

1) $y\leq -3x+7$ ، $y<\frac{1}{2}x$ ، $y>-2$

2) $x>-3$ ، $y<-\frac{1}{3}x+3$ ، $y>x-1$

3) $y<-\frac{1}{2}x+3$ ، $y>\frac{1}{2}x+1$ ، $y<3x+10$

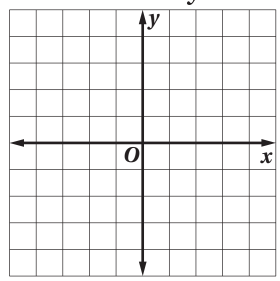
1-5 تدريبات المهارات

حل أنظمة المتباينات الخطية بيانيًا

حل كلًّا من أنظمة المتباينات الآتية بيانيًا:

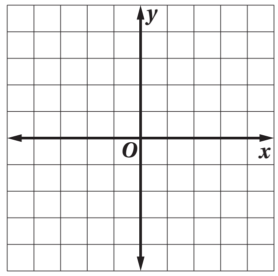
1) $x < 1$

$y \geq -1$



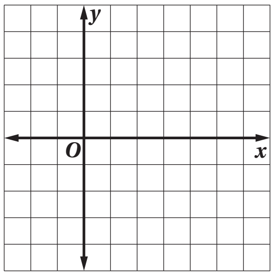
2) $x \geq -3$

$y \geq -3$



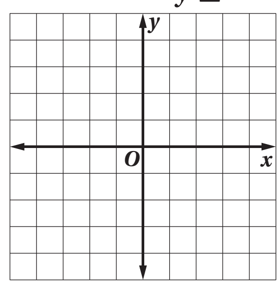
3) $x \leq 2$

$x > 4$



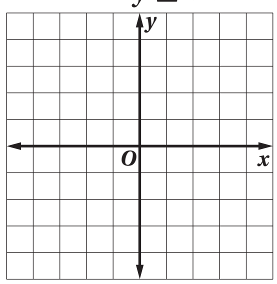
4) $y \geq x$

$y \geq -x$



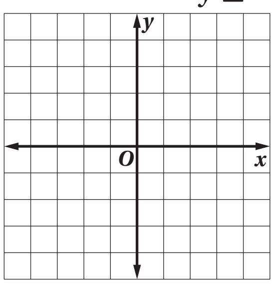
5) $y < -4x$

$y \geq 3x - 2$



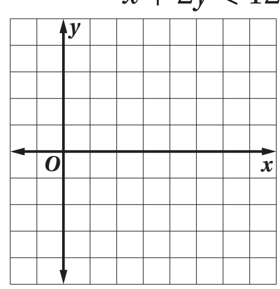
6) $x - y \geq -1$

$3x - y \leq 4$



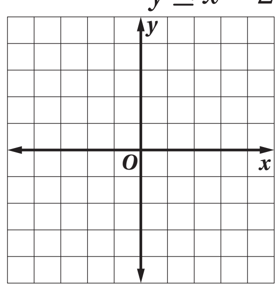
7) $y < 3$

$x + 2y < 12$



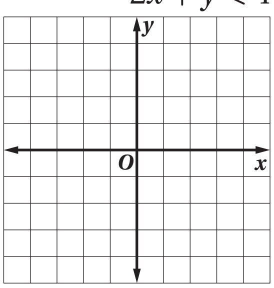
8) $y < -2x + 3$

$y \leq x - 2$



9) $x - y \leq 4$

$2x + y < 4$



أوجد إحداثيات كل رأس من رؤوس المثلث الناتج عن تمثيل كلٍّ من أنظمة المتباينات الخطية الآتية:

10) $y \leq 0$

$x \leq 0$

$y \geq -x - 1$

11) $y \leq 3 - x$

$y \geq 3$

$x \geq -5$

12) $x \geq -2$

$y \geq x - 2$

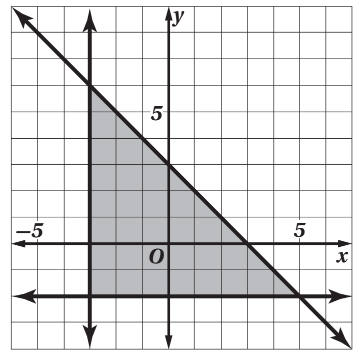
$x + y \leq 2$

الاسم: ________________________ التاريخ: ____________

1-5 تدريبات حل المسألة

حل أنظمة المتباينات الخطية بيانيًا

1) **برج الحمام:** يريد أحمد وضع برج للحمام في حديقة منزله عند نقطة (x, y) داخل المنطقة المغلقة المظللة المبيَّنة في الشكل.

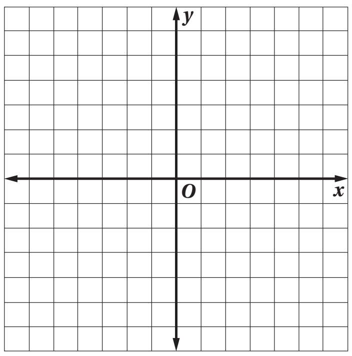


تأكد أحمد من أن: $x \geq -3$ و $y \geq -2$ متباينتان من نظام المتباينات التي كوَّنت المنطقة. ما المتباينة الخطية الثالثة التي يتعين أن تتحقق، على أن تكون (x, y) داخل المثلث؟

2) **مربعات:** وجد علي بقعة من الحبر على دفتر الرياضيات. ورأى جملة تقول: "المتباينتان الآتيتان تمثلان مربعًا $|x| \leq 8$ و ......" اكتب متباينة لتصبح هذه الجملة صحيحة.

3) **عطلة:** تلقَّى محمد مجموعة من الهدايا وبطاقات التهنئة من زملائه خلال العطلة الصيفية. إذا كانت كل هدية معها بطاقة، ولم يرسل له أيٌّ من أصدقائه أكثر من بطاقة واحدة.
وأقل من 10 من أصدقائه أرسلوا إليه بطاقة تهنئة بدون هدية.
عبّر عن هذا الوضع مستخدمًا نظامًا من المتباينات الخطية.

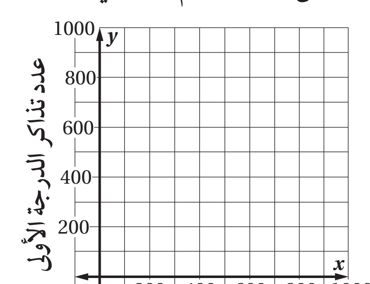
4) **لوح بياني:** تعمل مجموعة من الطلاب مع معلمهم على صنع لوح بياني محدود بالمتباينات الآتية:
$x \leq 5$ و $y \leq 5$ و $0.25x + y \geq -4.75$
و $4.5x + y \geq -17.5$ مثّل هذه المتباينات بيانيًا لإيجاد إحداثيات أركان هذا اللوح.



5) **تذاكر:** يتسع مسرح إلى 800 مقعد، وتعرض فيه مسرحية تاريخية، إذا علمت أن هناك نوعين من التذاكر. تذكرة من الدرجة الأولى بمبلغ 7 ريالاتٍ وتذكرة من الدرجة الثانية بمبلغ 4 ريالاتٍ، وكان هدف إدارة المسرح هو الحصول على 3400 ريالٍ في الليلة الواحدة.

a) اكتب نظامًا من المتباينات الخطية يمثل عدد المقاعد والمبلغ الإجمالي.

b) مثِّل هذا النظام بيانيًا في المستوى أدناه.



c) هل تصل المبيعات إلى المبلغ المستهدف إذا بيع 200 تذكرة من الدرجة الأولى و 475 تذكرة من الدرجة الثانية؟

الاسم: ______________________________ التاريخ: ____________

1-5 التدريبات الإثرائية

(تصميم إبداعي)

يمكنك استعمال أنظمة المتباينات الخطية لوصف مناطق مغلقة محدودة بأشكال هندسية مرسومه في المستوى الإحداثي.

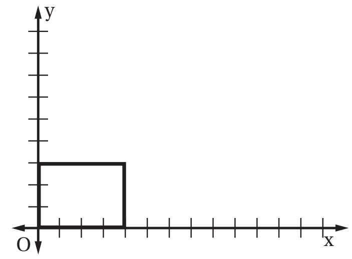
فمثلًا المستطيل الممثل في الشكل المجاور يمكنك رسمه مستعملًا نظام المتباينات الآتي:

$x \leq 4$

$x \geq 0$

$y \leq 3$

$y \geq 0$

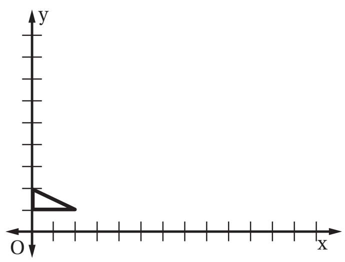


والمثلث في الشكل المجاور، يمكنك رسمه مستعملًا النظام الآتي:

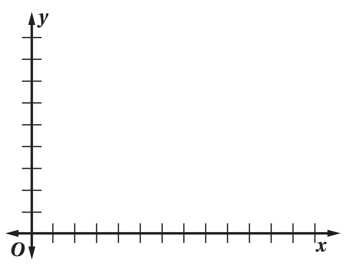
$x+2y \leq 4$

$x \geq 0$

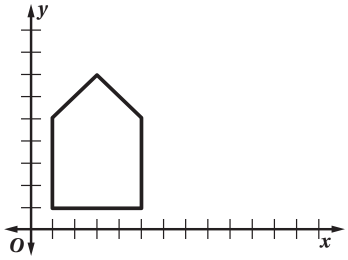
$y \geq 1$



1) أوجد نظام المتباينات الخطية التي تصف المنطقة المظللة في الشكل المجاور.
في حين أن نقاط التقاطع هي: $(5, 2)$، $(3, 3)$، $(1, 4)$، $(1, 1)$ و $(5, 5)$



2) أوجد نظام المتباينات الخطية التي تصف المنطقة المظللة المحدودة بشكل البيت في الشكل أدناه. نقاط التقاطع هي:
$(5، 5)$، $(3، 7)$ $(5، 1)$، $(1، 1)$ و $(1، 5)$



1-6 تدريبات إعادة التعليم

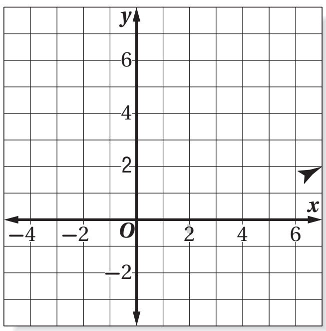
البرمجة الخطية والحل الأمثل

القيم العظمى والقيم الصغرى: عندما يكوّن نظام من المتباينات الخطية منطقة مضلعة محدودة، فإن القيم العظمى أو الصغرى لدالة مرتبطة بها يمكنك إيجادها عند رؤوس المضلع.

مثال

مثّل نظام المتباينات الخطية الآتية بيانيًّا، وحدّد إحداثيات رؤوس منطقة الحل. ثم أوجد القيم العظمى والصغرى للدالة: $f(x, y) = 3x + 2y$ في هذه المنطقة.

$$y \le 4$$
$$y \le -x + 6$$
$$y \ge \frac{1}{2}x - \frac{3}{2}$$
$$y \le 6x + 4$$



أولًا، مثّل المتباينات بيانيًّا، ثم أوجد رؤوس منطقة الحل.

المضلع الناتج هو شكل رباعي رؤوسه هي:

$(5, 1)$، $(2, 4)$، $(0, 4)$ و $(-1, -2)$

استعمل الجدول الآتي لإيجاد القيمة العظمى والقيمة الصغرى للدالة: $f(x, y) = 3x + 2y$

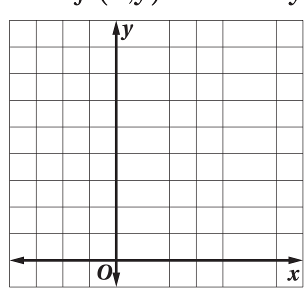
$f(x,y)$	$3x+2y$	(x,y)
8	$3(0)+2(4)$	$(0,4)$
14	$3(2)+2(4)$	$(2,4)$
17	$3(5)+2(1)$	$(5,1)$
-7	$3(-1)+2(-2)$	$(-1,-2)$

القيمة العظمى هي 17 عند النقطة $(5, 1)$. والقيمة الصغرى هي -7 عند النقطة $(-1, -2)$.

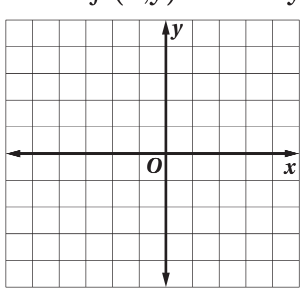
تمارين:

مثّل كلًّا من أنظمة المتباينات الآتية بيانيًّا. وحدد رؤوس المضلع الذي يمثّل منطقة الحل. ثم أوجد القيمة العظمى والقيمة الصغرى للدالة المعطاة.

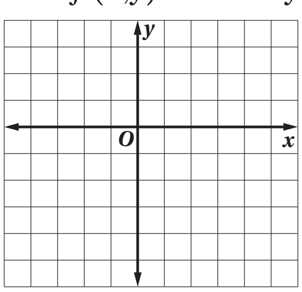
1)
$y \ge 2$
$1 \le x \le 5$
$y \le x + 3$
$f(x,y) = 3x - 2y$



2)
$y \ge -2$
$y \ge 2x - 4$
$x - 2y \ge -1$
$f(x,y) = 4x - y$



3)
$x + y \ge 2$
$4y \le x + 8$
$y \ge 2x - 5$
$f(x,y) = 4x + 3y$



1-6 تدريبات إعادة التعليم

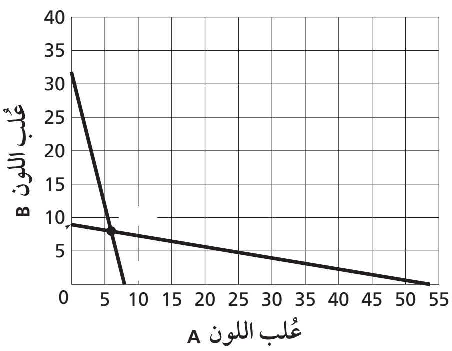
(تتمة)

البرمجة الخطية والحل الأمثل

الحل الأمثل: عند حل أسئلة البرمجة الخطية استعمل الإجراءات الآتية:
1) حدّد المتغيرات.
2) اكتب نظامًا من المتباينات الخطية يمثّل المسألة.
3) مثّل هذا النظام بيانيًّا.
4) أوجد إحداثيات رؤوس المضلع الناتج (منطقة الحل).
5) اكتب الدالة التي تريد إيجاد القيمة العظمى أو القيمة الصغرى لها.
6) عوِّض إحداثيات الرؤوس في هذه الدالة.
7) اختر القيمة العظمى أو القيمة الصغرى لما هو مطلوب في المسألة.

مثال **لدى أحد الصبّاغين 32 وحدة صبغة من اللون الأصفر، و54 وحدة صبغة من اللون الأخضر. ويريد هذا الصباغ أن ينتج أكبر عدد ممكن من العُلب من اللونين A و B . إذا كانت كل علبة من اللون A تحتاج 4 وحدات من الصبغة الصفراء ووحدة واحدة من الصبغة الخضراء، وكل علبة من اللون B تحتاج وحدة واحدة من الصبغة الصفراء و6 وحدات من الصبغة الخضراء. فأوجد أكبر عدد ممكن من العلب التي يمكنه إنتاجها.**

الخطوة 1: حدّد المتغيرات:
x= عدد العُلب من اللون A، y= عدد العُلب من اللون B



الخطوة 2: كوّن نظامًا من المتباينات الخطية. بما أن عدد العُلب لا يمكن أن يكون سالبًا، فإن: $x \geq 0$ و $y \geq 0$. وبما أن هناك 32 وحدة من اللون الأصفر واللون A يحتاج إلى 4 وحدات، واللون B يحتاج إلى وحدة واحدة، فإن:
$4x+y \leq 32$
وباتباع الطريقة نفسها لاستخدام الصبغة الخضراء، فإن: $x+6y \leq 54$

الخطوتان 3, 4: مثّل نظام المتباينات بيانيًّا وحدد رؤوس منطقة الحل.
الرؤوس هي: $(0, 0)$ و $(0, 9)$ و $(6, 8)$ و $(8, 0)$

الخطوات 5–7: أوجد أكبر عدد ممكن من العُلب $x+y$. أكبر عدد من العُلب يمكنك صنعه 14 علبة: 6 عُلب من اللون A و 8 عُلبٍ من اللون B.

تمارين:

1) **طعام:** لدى أحد المطاعم 12 كيلوجرامًا من البهارات غير الحارة و 10 كيلوجرامات من البهارات الحارة. ويريد صاحب المطعم عمل نوعين جديدين من البهارات، على أن يحتوي الكيلوجرام من النوع الأول (A) على $\frac{3}{4}$ كيلوجرام بهارات غير حارة و $\frac{1}{4}$ كيلو جرام بهارات حارة، أما النوع الثاني (B) فيحتوي على $\frac{1}{2}$ كيلوجرام من البهارات غير الحارة، و $\frac{1}{2}$ كيلوجرام من البهارات الحارة. أوجد أكبر عدد ممكن من الكيلوجرامات يمكن إنتاجه من كلٍّ من النوعين A و B.

2) **صناعة:** يوجد في أحد المصانع جهازان لإنتاج الحلوى. يُنتج الجهاز الأول (A) 30 قطعة من الحلوى في الساعة بتكلفة 8 ريالاتٍ للساعة الواحدة، أما الجهاز الثاني (B) فيُنتج 40 قطعة في الساعة بتكلفة 12 ريالًا للساعة الواحدة. يمكن استعمال الجهاز A لوحده أو B لوحده أو كلاهما معًا لإنتاج الحلوى. ما أقل عدد من الساعات يحتاجها المصنع لإنتاج 380 قطعة من الحلوى، على ألّا تزيد التكلفة عن 108 ريالاتٍ؟

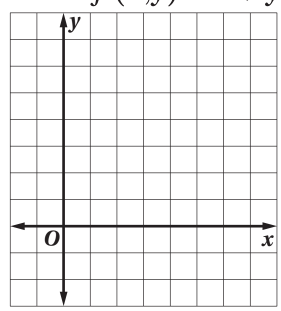
الاسم: ______________ التاريخ: ______________

1-6 تدريبات المهارات

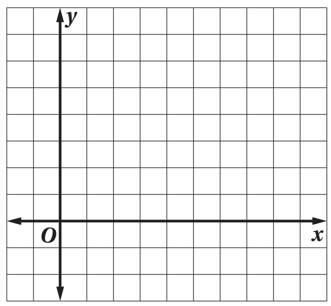
البرمجة الخطية والحل الأمثل

مثِّل كلًّا من أنظمة المتباينات الآتية بيانيًّا، ثم حدِّد إحداثيات رؤوس منطقة الحل، وأوجد القيمة العُظمى والقيمة الصغرى للدالة المعطاة.

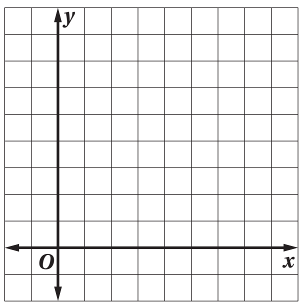
(1
$x \geq 2$
$x \leq 5$
$y \geq 1$
$y \leq 4$
$f(x,y) = x + y$



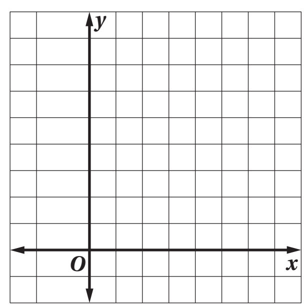
(2
$x \geq 1$
$y \leq 6$
$y \geq x - 2$
$f(x,y) = x - y$



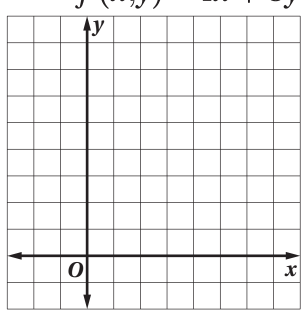
(3
$x \geq 0$
$y \geq 0$
$y \leq 7 - x$
$f(x,y) = 3x + y$



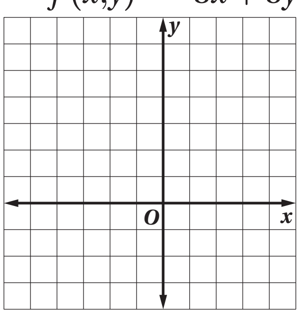
(4
$x \geq -1$
$x + y \leq 6$
$f(x,y) = x + 2y$



(5
$y \leq 2x$
$y \geq 6 - x$
$y \leq 6$
$f(x,y) = 4x + 3y$



(6
$y \geq -x - 2$
$y \geq 3x + 2$
$y \leq x + 4$
$f(x,y) = -3x + 5y$



(7 صناعة: ينتج أحد المصانع إطارات داخلية وإطارات خارجية. افترض أن x تمثل عدد الإطارات الداخلية المصنّعة في الساعة الواحدة، وأن y تمثل عدد الإطارات الخارجية المصنعة في الساعة الواحدة. إن المتباينات:
$x + 3y \leq 18$, $2x + y \leq 16$, $x \geq 0, y \geq 0$ تمثل القيود على إنتاج كلا النوعين من الإطارات. استعمل دالة الربح $f(x, y) = 50x + 80y$ والقيود المعطاة لتحديد أقصى ربح يحققه المصنع.

الاسم: ________________ التاريخ: ________

1-6 تدريبات حل المسألة

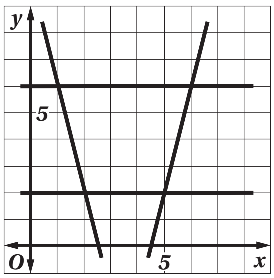
البرمجة الخطية والحل الأمثل

1) **مناطق:** تُحدد منطقة على الخريطة عن طريق المتباينات $x-y<3$ و $x-y>-3$ و $x+y>-3$. فهل هذه المنطقة محدودة أم لا؟ فسِّر ذلك.

2) **صناعة:** يعمل ثمانون عاملًا في تجميع الطاولات والكراسي. ويتطلب العمل 5 عمال لتجميع الطاولة و3 عمال لتجميع الكرسي. ويصنع العمال عددًا من الطاولات يساوي عدد الكراسي على الأقل دائمًا. إذا كانت x تمثل عدد الطاولات، و y تمثِّل عدد الكراسي، ونظام المتباينات الذي يمثِّل ما يمكنهم تجميعه هو: $x>0$ و $y>0$ و $y\le x$ و $5x+3y\le 80$. ما أكبر عددٍ من الكراسي والطاولات يستطيع العمال صنعه؟

3) **أسماك:** حوض أسماك حجمه 7000 بوصة مكعبة. ويريد عبدالله أن يربي في الحوض نوعين من السمك وهما السمكة الذهبية وسمكة السلور. وينصح بتوفير 170 بوصة مكعبة لكل سمكة ذهبية، و 700 بوصة مكعبة لكل سمكة سلور. ويرغب عبدالله في تربية سمكة سلور واحدة على الأقل مقابل كل 4 سمكات ذهبية. افترض أن n تمثّل عدد الأسماك الذهبية وc تمثّل عدد أسماك السلور. والمتباينات الآتية تُكوِّن منطقة الحل لهذا الوضع: $n>0$ و $c>0$ و $4c\ge n$ و $170n+700\,c\le 7000$ ما هو أكبر عدد من الأسماك يمكن أن يضعه عبدالله في الحوض؟

4) **مرتفع:** بُنيت حديقة على شكل شبه منحرف فوق منحدر بسيط. والدالة التي تمثل ارتفاع نقط المنحدر عن مستوى سطح البحر هي: $f(x,y)=x-3y+20\,ft$، ما إحداثيات أعلى نقطة في الحديقة؟



5) **خزف:** لدى فهد 8 أيام ليصنع أواني وأطباقًا ليبيعها في معرض محلي. كتلة كل إناء 2 باوند وكتلة الطبق الواحد 1 باوند، ويمكنه الاشتراك في المعرض بأواني وأطباق لا تزيد كتلتها على 50 باوندًا. ويستطيع أن يصنع في كل يوم 5 أطباق و3 أواني على الأكثر. ويربح 12 ريالًا لكل طبق و25 ريالًا لكل إناء سيبيعه.

a) اكتب متباينة خطية تمثل عدد الأواني (P) وعدد الأطباق (n)، التي يستطيع أن يحضرها فهد إلى المعرض.

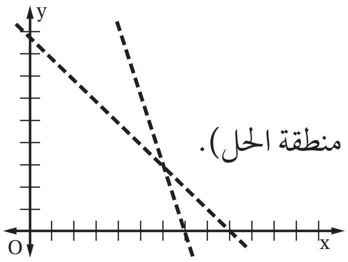
b) اكتب إحداثيات رؤوس منطقة الحل.

c) ما عدد الأطباق والأواني التي يتعيَّن أن يصنعها فهد ليجعل ربحه أكبر ما يمكن؟

1-6 التدريبات الإثرائية

تحليل الحساسية (الدقة)

يحتوي نموذج البرمجة الخطية على معاملات هدف محدد. فعلى سبيل المثال،
إذا وجدت قيم نموذج ما من خلال المعادلة $2x+3y=5$، فإن معاملات الهدف هي $\{2, 3\}$.
ماذا لو كانت هذه المعاملات هي $\{2.1, 2.9\}$ أو $\{2.5, 3.1\}$؟
كيف ستؤثر هذه التغييرات في قيم الحل الأمثل للبرمجة الخطية؟ هذا النوع من التحقق يدعى **تحليل الحساسية (الدقة).**
عمومًا، دوال الهدف في مسائل البرمجة الخطية بمتغيرين يمكنك كتابتها كما يلي:
إيجاد القيم العظمى أو الصغرى لدالة الهدف: $Ax + By = C$. وتكون خاضعة لعدد من معادلات القيود. التغيير في المعاملات A و B قد يغيِّر ميل الخط. وهذا التغير في الميل قد يؤدي إلى تغيرٍ في الحل الأمثَّل (تذكَّر أن الحل الأمثل يكون عند إحدى رؤوس منطقة الحل).
هناك مدى لقيم الميل الناتجة عن هذا التغيير؛ لذا فإن هناك مدى لتغيير قيم A و B التي تُبقِي على الحل الأمثل (انظر الرسم).



1) أوجد ميل $Ax + By = C$، ولاحظ كيف يمكن أن يُحدث التغيير في المعاملات A و B تغييرًا في ميل المستقيم.

ادرس مسألة البرمجة الخطية الآتية:

القيم العظمى: $C = 2x + 3y$

القيود: $3x + y \le 21$

$x + y \le 9$

$y \le x$

$y \le 4$

(x,y)	(0,0)	(4,4)	(5,4)	(6,3)	(7,0)
C	0	20	22	21	14

بعد إيجاد التقاطعات وتقدير قيمة معادلة الهدف، نجد أن القيمة العظمى تقع عند $(5, 4)$. إذا غُيّرت معاملات الهدف من 2 و 3 إلى B و A، سيبقى الحل الأمثل عند $(5, 4)$ ما دام الميل بين ميل $x + y \le 9$ وميل $3x + y \le 21$، وإذا لم يكن كذلك، فإن الحل الأمثل سيكون عند $(4, 4)$ أو $(6, 3)$.

2) عبر عن العلاقة: ميل دالة الهدف يقع بين ميل المستقيم $x+y=9$، وميل المستقيم $3x+y = 21$، بطريقة جبرية.

ملحق الإجابات

الاسم: ________ التاريخ: ________

1-1 تدريبات إعادة التعليم

خصائص الأعداد الحقيقية

الأعداد الحقيقية : تصنف الأعداد الحقيقية جميعها على أنها نسبية أو غير نسبية، ومجموعة الأعداد النسبية تتضمن مجموعات جزئية متعددة: الطبيعية، الصحيحة، الكلية.

R	الأعداد الحقيقية	{جميع الأعداد النسبية وغير النسبية}.
Q	الأعداد النسبية	{جميع الأعداد التي يمكنك كتابتها على الصورة $\frac{m}{n}$، في حين أن m، n عددان صحيحان، $n \neq 0$}
I	الأعداد غير النسبية	{الكسور العشرية غير الدورية وغير المنتهية جميعها}.
Z	الأعداد الصحيحة	{..., -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3,...}
W	الأعداد الكلية	{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8,...}
N	الأعداد الطبيعية	{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8,...}

مثال حدد مجموعات الأعداد التي ينتمي إليها كلٌّ من الأعداد الآتية.

$\frac{-11}{3}$ النسبية (Q)، الحقيقية (R)

$\sqrt{25} = 5$ الطبيعية (N)، الكلية (W)، الصحيحة (Z)، النسبية (Q)، الحقيقية (R).

تمارين:

حدِّد مجموعات الأعداد التي ينتمي إليها كلٌّ من الأعداد الآتية.

1) $\frac{6}{7}$ **Q , R**
2) $-\sqrt{81}$ **Z,Q,R**
3) 0 **W,Z,Q,R**
4) 192.0005 **Q,R**
5) 73 **N,W,Z,Q,R**
6) $34\frac{1}{2}$ **Q,R**
7) $\frac{\sqrt{36}}{9}$ **Q,R**
8) 26.1 **Q,R**
9) π **I,R**
10) $\frac{15}{3}$ **N,W,Z,Q,R**
11) $-4.\overline{17}$ **Q,R**
12) $\frac{\sqrt{25}}{2}$ **Q,R**
13) -1 **Z,Q,R**
14) $\sqrt{42}$ **I,R**
15) -11.2 **Q,R**
16) $-\frac{8}{13}$ **Q,R**
17) $\frac{\sqrt{5}}{2}$ **I,R**
18) $33.\overline{3}$ **Q,R**
19) 894000 **N,W,Z,Q,R**
20) -0.02 **Q,R**

الاسم: ________ التاريخ: ________

1-1 تدريبات إعادة التعليم (تتمة)

خصائص الأعداد الحقيقية

خصائص الأعداد الحقيقية		
لأي أعداد حقيقية a, b, c		
الخاصيّة	الجمع	الضرب
التبديلية	$a+b = b+a$	$a.b = b.a$
التجميعية	$(a+b)+c=a+(b+c)$	$(a.b).c=a.(b.c)$
العنصر المحايد	$a+0=a=0+a$	$a.1 = a = 1.a$
النظير	$a+(-a) = 0 = (-a) + a$	$a.\frac{1}{a}=1=\frac{1}{a}.a, 0 \neq 0$
الانغلاق	$a + b$ عدد حقيقي	$a.b$ عدد حقيقي
التوزيع	$(b+c)a = ba + ca$ و $a(b+c)=ab + ac$	

مثال بسِّط العبارة: $\mathbf{9x + 3y + 12y - 0.9x}$

$9x+3y+12y-0.9x = 9x + (-0.9x)+3y+12y$ الخاصية التبديلية للجمع

$=(9+(-0.9))x + (3+12)y$ خاصية التوزيع

$= 8.1x + 15y$ بالتبسيط

تمارين:

بسِّط كلًّا من العبارات الآتية:

1) $8(3a-b) + 4(2b-a)$ — $\mathbf{20a}$
2) $40s + 18t - 5t + 11s$ — $\mathbf{51s+13t}$
3) $\frac{1}{5}(4j+2k-6j+3k)$ — $\mathbf{k-\frac{2}{5}j}$
4) $10(6g+3h)+4(5g-h)$ — $\mathbf{80g+26h}$
5) $12\left(\frac{a}{3}-\frac{b}{4}\right)$ — $\mathbf{4a-3b}$
6) $8(2.4r-3.1s)-6(1.5r+2.4s)$ — $\mathbf{10.2r-39.2s}$
7) $4(20-4p) - \frac{3}{4}(4-16p)$ — $\mathbf{77-4p}$
8) $5.5j+8.9k-4.7k-10.9j$ — $\mathbf{4.2k-5.4j}$
9) $1.2(7x-5y)-(10y-4.3x)$ — $\mathbf{12.7x-16y}$
10) $9(7e-4f) - 0.6(e+5f)$ — $\mathbf{62.4e-39f}$
11) $2.5(12m-8.5n)$ — $\mathbf{30m-21.25n}$
12) $\frac{3}{4}p-\frac{1}{5}r-\frac{3}{5}r-\frac{1}{2}p$ — $\mathbf{\frac{1}{4}p-\frac{4}{5}r}$
13) $4(10g+80h) - 20(10h-5g)$ — $\mathbf{140g+120h}$
14) $2(15d+45c)+\frac{5}{6}(12d+18c)$ — $\mathbf{40d+105c}$
15) $(7y-2.1x)3+2(3.5x-6y)$ — $\mathbf{0.7x+9y}$
16) $\frac{2}{3}(18m-6n+12m+3n)$ — $\mathbf{20m-2n}$
17) $14(J-2k) - 3j(4-7)$ — $\mathbf{23j-28k}$
18) $50(3a-b) - 20(b-2a)$ — $\mathbf{190a-70b}$

الاسم: ______________ التاريخ: ________

1-1 تدريبات المهارات

اذكر مجموعات الأعداد التي ينتمي إليها كلٌّ من الأعداد الآتية.

1) 34
N,W,Z,Q,R

2) -525
Z,Q,R

3) 0.875
Q,R

4) $\frac{12}{3}$
N,W,Z,Q,R

5) $-\sqrt{9}$
Z,Q,R

6) $\sqrt{30}$
I,R

ما الخاصية الموضحة في كلٍّ من المعادلات الآتية:

7) $3 . x = x . 3$
التبديلية للضرب

8) $3a + 0 = 3a$
المحايد الجمعي

9) $2(r+w) = 2r + 2w$
التوزيع

10) $2r + (3r + 4r) = (2r+3r) + 4r$
التجميعية

11) $5y(\frac{1}{5y}) = 1$
النظير الضربي

12) $15\,x(1) = 15\,x$
المحايد الضربي

13) $0.6\,[25(0.5)] = [0.6(25)]\,0.5$
التجميعية

14) $(10\,b + 12b) + 7b = (12b + 10b) + 7b$
التبديلية للجمع

أوجد كلًّا من النظير الجمعي والنظير الضربي لكل عدد فيما يأتي:

15) 15
$\mathbf{-15\,,\frac{1}{15}}$

16) 1.25
$\mathbf{-1.25\,,0.8}$

17) $-\frac{4}{5}$
$\mathbf{\frac{4}{5}\,,-\frac{5}{4}}$

18) $3\frac{3}{4}$
$\mathbf{-3\frac{3}{4}\,,\frac{4}{15}}$

بسّط كلًّا من العبارات الآتية:

19) $3x + 5y + 2x - 3y$
$\mathbf{5x+2y}$

20) $x - y - z + y - x + z$
$\mathbf{0}$

21) $-(3g+3h) + 5g - 10h$
$\mathbf{2g-13h}$

22) $a^2 - a + 4a - 3a^2 + 1$
$\mathbf{-2a^2+3a+1}$

23) $3(m-z) + 5(2m-z)$
$\mathbf{13m-8z}$

24) $2x - 3y - (5x - 3y - 2z)$
$\mathbf{-3x+2z}$

25) $6(2w + v) - 4\,(2v + 1w)$
$\mathbf{8w-2v}$

26) $\frac{1}{3}(15d+3c) - \frac{1}{2}(8c-10d)$
$\mathbf{10d-3c}$

الاسم: ______________ التاريخ: ________

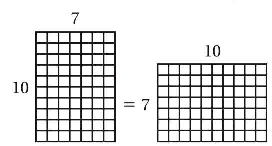
1-1 تدريبات حل المسألة

خصائص الأعداد الحقيقية

1) **حساب ذهني:** يقوم معلّمو الرياضيات في المرحلة الابتدائية عند تعليم طلابهم الضرب والقيمة المنزلية للرقم، بعرض النموذج الآتي:
$54\times 8 = (50+4)\times 8$
$= (50\times 8) + (4\times 8)$
ما الخاصيّة المستخدمة في ذلك؟

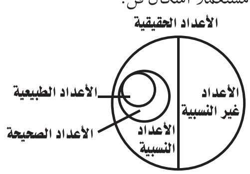
خاصية التوزيع

2) **نمذجة:** ما خاصية الأعداد الحقيقية الموضحة في الشكل أدناه؟



الخاصية التبديلية للضرب

3) **أشكال فن:** مثّل العلاقة بين الأعداد الطبيعية والصحيحة والنسبية وغير النسبية والحقيقية مستعملًا أشكال فن.



4) **نظرية الأعداد:** في الفقرتين الآتيتين:

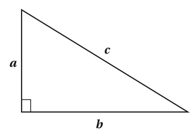
I) حاصل ضرب أيِّ عددين نسبيين دائمًا يساوي عددًا نسبيًّا.

II) حاصل ضرب أي عددين غير نسبيين دائمًا يساوي عددًا غير نسبيٍّ.

حدّد ما إذا كانت كلٌّ من الفقرتين صحيحة دائمًا أو أحيانًا أو ليست صحيحة أبدًا، فسِّر ذلك.

I) دائمًا
II) أحيانًا، $\sqrt{2}\,.\,\sqrt{2} = 2$

5) **المثلثات القائمة الزاوية.** أطوال أضلاع المثلث القائم الزاوية ترتبط بالعلاقة:
$c^2 = a^2 + b^2$



لكل مجموعة قيم a, b فيما يأتي، أوجد طول الضلع c، ثم حدّد ما إذا كان c عددًا طبيعيًّا أم لا.

a) $a = 5, b = 12$
$c=13$ ؛ عدد طبيعي .

b) $a = 7, b = 14$
$c=\sqrt{245}=7\sqrt{5}$ ؛ ليس عددًا طبيعيًا .

c) $a = 7, b = 24$
$c=25$ ؛ عدد طبيعي .

1-1 التدريبات الإثرائية

خصائص الزمرة

تشكل مجموعة من الأعداد زمرة بالنسبة لعملية رياضية معرَّفة عليها، إذا حققت الخصائص الآتية :

1) الانغلاق 2) التجميع 3) وجود عنصر محايد 4) وجود نظير لكل عنصر في المجموعة.

مثال 1 هل تشكل المجموعة {... ,3 ,2 ,1 ,0} زمرة مع عملية الجمع؟

خاصية الانغلاق: لكل الأعداد في المجموعة، هل $a+b$ ينتمي للمجموعة؟
1=0+1والعدد 1 ينتمي للمجموعة، 2=0+2، والعدد 2 ينتمي للمجموعة... وهكذا.
إذن المجموعة تحقق خاصية الانغلاق مع الجمع.

خاصية التجميع: لكل الأعداد في المجموعة، هل $(a+b)+c=a+(b+c)$؟
(3+2)+1 = 3+ (2+1) ، 2+(1+0)=(2+1)+0 ... وهكذا
إذن المجموعة تحقق خاصية التجميع مع الجمع.

خاصية العنصر المحايد: هل يوجد عدد "i" في المجموعة يحقق ما يأتي؟
لكل a في المجموعة، هل $i+a=a=a+i$؟
1+0 = 1 = 0+1، 0+2 = 2 = 2 + 0 ، ... وهكذا
إذن العنصر المحايد للجمع هو الصفر " 0 ".

خاصية العنصر النظير: هل يوجد نظير a' لكل عدد مثل a في المجموعةوينتمي إليها، حيث $a'+a=a+a'=i$؟
النظير الجمعي للعدد 3 هو 3−؛ لأن 0=3+3−، والعنصر المحايد للجمع هو الصفر " 0 ". لكن المجموعة لا تحتوي على العدد 3−، لذا لا يوجد نظير جمعي للعدد 3.
إذن المجموعة ليست زمرة بالنسبة للجمع؛ لأنها لم تحقق الخصائص الأربع جميعها.

مثال 2 هل المجموعة {1 ,1−} تشكل زمرة مع عملية الضرب؟

خاصية الانغلاق: 1 = (1)(1) ; 1−=(1−)(1) ; 1−=(1)(1−) ; 1=(1−)(1−)، إذن المجموعة تحقق خاصية الانغلاق مع الضرب.

خاصية التجميع: 1− = (1−) [(1−)(1−)] = [(1−)(1−)] (1−) ... وهكذا
تحقق خاصية التجميع مع الضرب

خاصية العنصر المحايد: 1− = (1)1− ; 1− = (1−)1 العنصر المحايد لعملية الضرب هو 1

خاصية العنصر النظير: 1− هو النظير الضربي للعدد 1−، في حين 1 =(1−)(1−)، والعدد 1 هو المحايد لعملية الضرب.
كما أن العدد 1 هو النظير الضربي للعدد 1، حيث 1=(1)(1)، والعدد 1 هو المحايد لعملية الضرب.
ويعني هذا أن كل عدد له نظير ضربي في المجموعة.
إذن المجموعة {1 ,1−} تشكل زمرة مع الضرب؛ لأنها حققت الخصائص الأربع جميعها.

تمارين:

بين ما إذا كانت المجموعة المعطاة تشكل زمرة مع العملية المعطاة في كلٍّ مِمّا يأتي أم لا:

1) {الأعداد الصحيحة}، الجمع **نعم** 2) {الأعداد الصحيحة}، الضرب **لا**

3) $\{\frac{1}{2},\frac{2}{2},\frac{3}{2},\ldots\}$، الجمع **لا** 4) {مضاعفات العدد 5}، الضرب **لا**

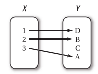
5) $\{x, x^2, x^3, x^4, \ldots\}$، الجمع **لا** 6) $\{\sqrt{1},\sqrt{2},\sqrt{3},\ldots\}$، الضرب **لا**

7) {الأعداد غير النسبية}، الجمع **لا** 8) {الأعداد النسبية}، الجمع. **نعم**

1-2 تدريبات إعادة التعليم

العلاقات والدوال

العلاقات والدوال: يمكنك تمثيل العلاقة في صورة مجموعة من الأزواج المرتبة أو في صورة معادلة. والعلاقة هي مجموعة الأزواج المرتبةكلها (x, y) التي تجعل المعادلة صحيحة، والدالة علاقة تربط كل عنصر في مجالها بعنصر واحد فقط في مداها.

الدالة المتباينة	كل عنصر في المجال يرتبط بعنصر واحد فقط في المدى، ولا يرتبط أكثر من عنصر في المجال بالعنصر نفسه في المدى.	

مثال حدد مجال العلاقة الآتية ومداها، وهل تمثل هذه العلاقة دالة؟

x	y
−5	−1
−3	0
−1	1
1	2
3	3

المجال والمدى كلاهما أعداد حقيقية. كل عنصر في المجال يرتبط بعنصر واحد فقط في المدى؛ لذا فهذه دالة .
المجال = {−5,−3,−1,1,3}
المدى = {−1,0,1,2,3}

تمارين:

حدِّد كلًّا من مجال ومدى كلِّ علاقة فيما يأتي، ثم حدد ما إذا كانت دالة أم لا، وإذا كانت دالة، فهل هي متباينة أم لا؟

1) $\{(0.5, 3), (0.4, 2), (3.1, 1), (0.4, 0)\}$
المجال = {0.4,0.5,3.1}
المدى = {0,1,2,3}
ليست دالة

2) $\{(-5, 2), (4, -2), (3, -11), (-7, 2)\}$
المجال = {−7,−5,3,4}
المدى = {−11,−2,2}
دالة غير متباينة

3) $\{(0.5, -3), (0.1, 12), (6, 8)\}$
المجال = {0.1,0.5,6}
المدى = {−3,8,12}
دالة متباينة

4) $\{(-15, 12), (-14, 11), (-13, 10), (-12, 12)\}$
المجال = {−15,−14,−13,−12}
المدى = {10,11,12}
دالة غير متباينة

الاسم: ____________ التاريخ: ____________

1-2 تدريبات إعادة التعليم (تتمة)

العلاقات والدوال

معادلات العلاقات والدوال: المعادلات التي تمثل دوال غالبًا ما تكتب برمز الدالة، فعلى سبيل المثال: $y = 10 - 8x$ يمكنك كتابتها على الصورة $f(x) = 10 - 8x$، وهذه الصيغة تؤكد حقيقة أن قيم y **(المتغير التابع)** تعتمد على قيم x **(المتغير المستقل)**.

نعوِّض القيمة المعطاة من المجال في المعادلة؛ لإيجاد العنصر المرتبط بهذه القيمة في المدى، فيكون هو قيمة الدالة.

مثال إذا أعطيت الدالة $f(x) = x^2 + 2x$، فأوجد قيمة كلٍّ ممّا يأتي:

a) $f(3)$

$f(x) = x^2 + 2x$ الدّالة الأصلية

$f(3) = 3^2 + 2(3)$ بالتعويض

$= 15$ بالتبسيط

b) $f(5a)$

$f(x) = x^2 + 2x$ الدّالة الأصلية

$f(5a) = (5a)^2 + 2(5a)$ بالتعويض

$= 25a^2 + 10a$ بالتبسيط

إجابات تمارين:

1) **المجال = {جميع الأعداد الحقيقية}**
المدى = {3}
دالة، غير متباينة، متصلة

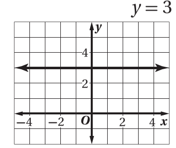
2) **المجال = {جميع الأعداد الحقيقية}**
المدى = {y|y≥−1}
دالة، غير متباينة، متصلة

3) **المجال = {جميع الأعداد الحقيقية}**
المدى = {جميع الأعداد الحقيقية}
دالة، متباينة، متصلة

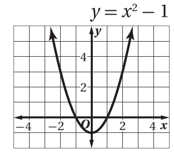
تمارين:

مثِّل كل علاقة أو معادلة، وحدِّد المجال والمدى لكلٍّ منها. وحدِّد فيما إذا كانت دالة أم لا، وإذا كانت دالة فهل هي متباينة؟ ثم حدد ما إذاكانت منفصلة أو متصلة.

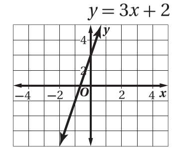
1) $y = 3$



2) $y = x^2 - 1$



3) $y = 3x + 2$



أوجد قيمة كلٍّ مما يأتي إذا كان: $f(x) = -2x + 4$.

4) $f(12)$ **−20** 5) $f(6)$ **−8** 6) $f(2b)$ **−4b+4**

أوجد قيمة كلٍّ مما يأتي إذا كان: $g(x) = x^3 - x$.

7) $g(5)$ **120** 8) $g(-2)$ **−6** 9) $g(7c)$ **$343c^3-7c$**

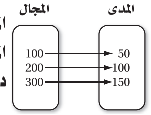
الاسم: ____________ التاريخ: ____________

1-2 تدريبات المهارات

العلاقات والدوال

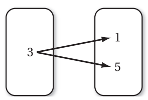
حدّد المجال والمدى لكل علاقة مما يأتي، ثم حدد إذا كانت دالة، و إذا كانت دالة، فهل هي متباينة؟

1)



المجال = {100,200,300}
المدى = {50,100,150}
دالة، متباينة

2)



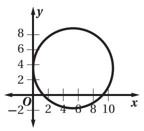
المجال = {3}
المدى = {1,5}
ليست دالة

3)

x	y
1	2
2	4
3	6

المجال = {1,2,3}
المدى = {2,4,6}
دالة متباينة

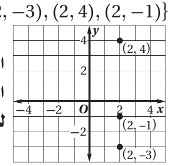
4)



المجال = {x|0≤x≤10}
المدى = {y|−2≤y≤8}
ليست دالة

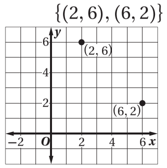
مثِّل كل علاقة أو معادلة مما يأتي وحدد مجالها ومداها، ثم حدد ما إذا كانت دالة أم لا، وإن كانت دالة، فهل هي متباينة؟ ثم حدد إذا كانت متصلة أم منفصلة.

5) $\{(2, -3), (2, 4), (2, -1)\}$



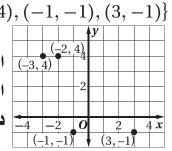
المجال = {2}
المدى = {−3,−1,4}
ليست دالة، منفصلة

6) $\{(2, 6), (6, 2)\}$



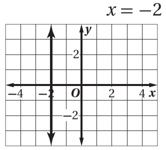
المجال = {2,6}
المدى = {2,6}
دالة، متباينة، منفصلة

7) $\{(-3, 4), (-2, 4), (-1, -1), (3, -1)\}$



المجال = {−3,−2,−1,3}
المدى = {−1,4}
دالة، غير متباينة، منفصلة

8) $x = -2$



المجال = {−2}
المدى = {جميع الأعداد الحقيقية}
ليست دالة، متصلة

إذا كان: $g(x) = 2 - x^2$ و $f(x) = 2x - 1$، فأوجد قيمة كلٍّ ممّا يأتي

9) $f(0)$ **−1** 10) $f(12)$ **23** 11) $g(4)$ **−14**

12) $f(-2)$ **−5** 13) $g(-1)$ **1** 14) $f(d)$ **2d−1**

الاسم: ________ التاريخ: ________

1-2 تدريبات حل المسألة

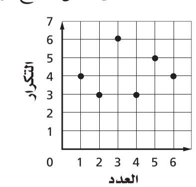
العلاقات والدوال

1) **كواكب:** يبيِّن الجدول الآتي متوسط المسافة بين الشمس والكواكب الثمانية الرئيسة في النظام الشمسي، ومدة دوران كلٍّ منها، فكِّر في متوسط المسافة على أنها المجال، ومدة الدوران على أنها المدى للعلاقة، هل هذه العلاقة دالة؟ فسر إجابتك.

الكوكب	متوسط المسافة من الشمس	مدة الدوران (سنوات)
عطارد	0.387	0.241
الزهرة	0.723	0.615
الأرض	1.0	1.0
المريخ	1.524	1.881
المشتري	5.204	11.75
زحل	9.582	29.5
أورانوس	19.201	84
نبتون	30.047	165

نعم؛ كل قيمة في المجال ارتبطت بقيمة واحدة في المدى.

2) **احتمالات:** قامت ليلى بإلقاء مكعب الأرقام مرات عدة، فكوَّنت التمثيل الآتي للبيانات. اكتب العلاقة التي تمثل هذه البيانات على شكل أزواج مرتبة.



{(1,4) (2,3) (3,6) (4,3) (5,5) (6,4)}

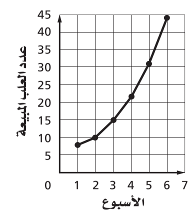
3) **مدرسة:** عدد الطلاب (N) في إحدى المدارس مُعطًى بالدالة: $N = 120 + 30G$، في حين أن G هو مستوى (ترتيب) الصف. هل العدد 285 ينتمي إلى مدى هذه الدالة؟

لا؛ لأنه إذا كانت N=285، فإن قيمة G المقابلة لها تساوي 5.5، وبما أن ترتيب الصف عدد صحيح، فإن 285 لا ينتمي إلى مدى الدالة.

4) **مبيعات:** الجدول الآتي يبيِّن مبيعات أحد المحالِّ التجارية من نوع معيَّن من الشوكلاتة في ستة أسابيع.

الأسبوع	1	2	3	4	5	6
عدد العلب المبيعة	8	10	15	22	31	44

a) مثِّل البيانات بيانيًّا.



b) حدِّد المجال والمدى.

المجال = {1,2,3,4,5,6}
المدى = {8,10,15,22,31,44}

c) هل تمثِّل هذه العلاقة دالة؟ فسِّر إجابتك.

نعم؛ لأن كل قيمة في المجال ترتبط بقيمة واحدة في المدى.

الاسم: ________ التاريخ: ________

1-2 التدريبات الإثرائية

علاقات ودوال على الأعداد الحقيقية

من الممتع التفكير في الارتباط واحد لواحد بين مجموعات جزئية من الأعداد الحقيقية.

مثال 1 هل هناك ارتباط واحد لواحد بين الأعداد الطبيعية والأعداد الصحيحة؟

ضع المجموعتين في الصورة الآتية:

$$\begin{array}{ccccccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9\ldots \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ 0 & 1 & -1 & 2 & -2 & 3 & -3 & 4 & -4\ldots \end{array}$$

رغم أن الأعداد الطبيعية مجموعة جزئية من الأعداد الصحيحة، إلَّا أنه يوجد عدد طبيعي وحيد لكل عدد صحيح؛ أي أنه يوجد ارتباط واحد لواحد بين المجموعتين.

مثال 2 هل هناك ارتباط واحد لواحد، بين الأعداد الطبيعية والأعداد الزوجية الموجبة؟

1 2 3 4...

2 4 6 8...

يوجد ارتباط واحد لواحد بين المجموعتين.

تمارين:

1) هل هناك ارتباط واحد لواحد بين الأعداد الكلية والأعداد الطبيعية؟
نعم

2) هل هناك ارتباط واحد لواحد بين الأعداد الكلية والأعداد الصحيحة؟
نعم

3) هل هناك ارتباط واحد لواحد بين الأعداد الصحيحة السالبة ومجموعة الأعداد الصحيحة؟
نعم

4) هل هناك ارتباط واحد لواحد بين الأعداد الطبيعية والأعداد النسبية؟
نعم

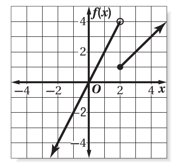
الاسم: ______ التاريخ: ______

1-3 تدريبات إعادة التعليم

دوال خاصة

الدالة متعددة التعريف: تُكتب هذه الدالة باستعمال عبارتين جبريتين أو أكثر، ويكون تمثيلها متقطعًا في العادة.

مثال مثِّل الدالة $f(x)=\begin{cases} 2x, & x<2 \\ x-1, & x\geq 2 \end{cases}$ بيانيًا.

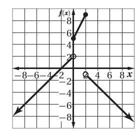


أولًا: مثِّل الدالة الخطية $f(x)=2x$ عندما $x<2$. بما أن العدد 2 لا يحقق هذه المتباينة، فإنه عند التمثيل نضع دائرة غير مظللة عند النقطة $(2, 4)$. ثم نمثِّل الدالة الخطية $f(x)=x-1$ عندما $x\geq 2$. وبما أن العدد 2 يحقق هذه المتباينة، فإننا نضع دائرة مغلقة عند النقطة $(2, 1)$.

تمارين:

مثِّل كل دالة فيما يأتي، ثمّ حدّد مجالها ومداها:

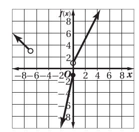
1) $f(x)=\begin{cases} x+2, & x<0 \\ 2x+5, & 0\leq x\leq 2 \\ -x+1, & x>2 \end{cases}$



المجال = {جميع الأعداد الحقيقية}

المدى = $\{f(x)\,|\,f(x)<2$ أو $5\leq f(x)\leq 9\}$

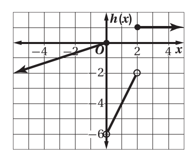
2) $f(x)=\begin{cases} -x-4, & x<-7 \\ 5x-1, & -7\leq x\leq 0 \\ 2x+1, & x>0 \end{cases}$



المجال = {جميع الأعداد الحقيقية}

المدى = $\{f(x)\,|\,f(x)>1$ أو $-36\leq f(x)\leq -1\}$

3) $h(x)=\begin{cases} \frac{x}{3}, & x\leq 0 \\ 2x-6, & 0<x<2 \\ 1, & x\geq 2 \end{cases}$



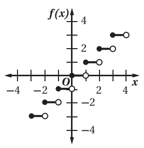
المجال = {جميع الأعداد الحقيقية}

المدى = $\{h(x)\,|\,h(x)=1$ أو $h(x)\leq 0\}$

1-3 تدريبات إعادة التعليم (تتمة)

دوال خاصة

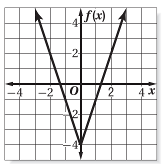
الدوال الدرجية ودوال القيمة المطلقة

الاسم	تكتب على الصيغة	تُمثل على الشكل التالي
دالة أكبر عدد صحيح	$f(x)=[x]$	
داله القيمة المطلقة	$f(x)=\|x\|$	نصفا مستقيم كلٌّ منهما انعكاس للآخر في محور ويلتقيان عند نقطة الرأس.

مثال مثِّل الدالة $f(x)=3\,|x|-4$ بيانيًا.

أوجد عددًا من الأزواج المرتبة. ثم مثِّلها بيانيًا وصِلْ بينها، يمكن أن تتوقع أن يكون الشكل مشابهًا للدالة الرئيسة (الأم) $f(x)=|x|$.

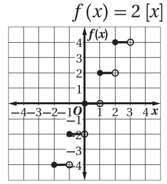
x	$3\,\|x\|-4$
0	−4
1	−1
2	2
−1	−1
−2	2



تمارين:

مثِّل الدالة بيانيًا، ثم حدِّد مجالها ومداها في كلٍّ مما يأتي .

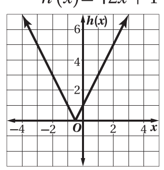
1) $f(x)=2\,[x]$



المجال = {جميع الأعداد الحقيقية}

المدى = {الصفر وجميع الأعداد الصحيحة الزوجية}

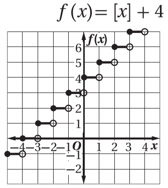
2) $h(x)=|2x+1|$



المجال = {جميع الأعداد الحقيقية}

المدى = $\{h(x)\,|\,h(x)\geq 0\}$

3) $f(x)=[x]+4$



المجال = {جميع الأعداد الحقيقية}

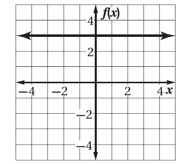
المدى = {جميع الأعداد الصحيحة}

1-3 تدريبات المهارات

دوال خاصة

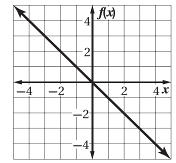
مثِّل الدالة بيانيًّا. ثم حدِّد مجالها ومداها في كلٍّ مما يأتي.

1) $f(x)=3$



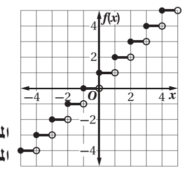
المجال = {جميع الأعداد الحقيقية}
المدى = {3}

2) $f(x)=-x$



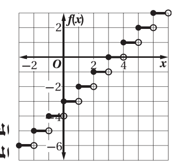
المجال = {جميع الأعداد الحقيقية}
المدى = {جميع الأعداد الحقيقية}

3) $f(x)=[x+1]$



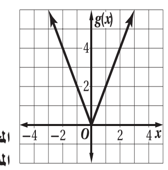
المجال = {جميع الأعداد الحقيقية}
المدى = {جميع الأعداد الصحيحة}

4) $f(x)=[x-3]$



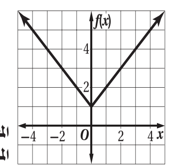
المجال = {جميع الأعداد الحقيقية}
المدى = {جميع الأعداد الصحيحة}

5) $g(x)=2|x|$



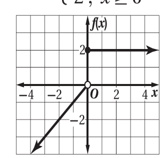
المجال = {جميع الأعداد الحقيقية}
المدى = $\{g(x)|g(x)\geq 0\}$

6) $f(x)=|x+1|$



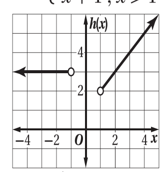
المجال = {جميع الأعداد الحقيقية}
المدى = $\{f(x)|f(x)\geq 1\}$

7) $f(x)=\begin{cases} x, x<0 \\ 2, x\geq 0 \end{cases}$



المجال = {جميع الأعداد الحقيقية}
المدى = $\{f(x)|f(x)<0$ أو $f(x)=2\}$

8) $h(x)=\begin{cases} 3, x<-1 \\ x+1, x>1 \end{cases}$



المجال = $\{x|x<-1$ أو $x>1\}$
المدى = $\{h(x)|h(x)>2\}$

1-3 تدريبات حل المسألة

دوال خاصة

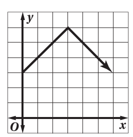
9) **توفير:** وضع صلاح 2000 ريال في حسابه المصرفي عندما تسلَّم راتبه الشهري. واستمر في التوفير خلال عمله. ويمكن تمثيل قيمة حسابه المصرفي بالصيغة $2000[x]$ في حين x هو عدد الشهور التي عمل فيها صلاح. كم أصبح حسابه المصرفي بعد 105 أيامٍ من بداية عمله؟

6000 ريال

10) **تقريب:** قام معلم العلوم بتوجيه طلابه لتقريب قياساتهم على النحو الآتي: إذا كان الكسر في العدد أقل من 0.5 من الملمتر، فإنهم يقومون بتقريبه إلى العدد السابق (الأقل)، أما إذا كان الكسر في العدد أكبر من أو يساوي 0.5، فإنهم يقومون بتقريبه إلى العدد التالي (الأكبر). اكتب صيغة تعطيك قيمة تقريبية لـ x بالملمترات.

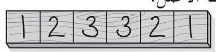
$I=[x+0.5]$

11) **فن العمارة:** المقطع العرضي لسقف إحدى الأبنية مبيَّن في الشكل الآتي. اكتب دالة قيمة مطلقة تمثل شكل هذا السقف؟



$y=6-|x-3|$

12) **ألعاب:** يلعب بعض الشباب لعبة إطلاق سهام صغيرة على لوحٍ خشبيٍّ مقسَّم إلى ستة أجزاء متطابقة. وهم يضعون في كل جزءٍ رقمًا يدل على الدرجة المستحقة للاعب إذا استقر السهم في ذلك الجزء. لتكن x تشير إلى الموقع الأفقي للسهم على اللوح الخشبي، على أن يكون مركز اللوح هو نقطة الأصل. والقيم السالبة عن يسار اللوح، والقيم الموجبة عن يمين اللوح. وتعتمد درجة اللاعب على المسافة التي يبعدها السهم عن نقطة الأصل.



a) اكتب صيغة رياضية تُعطي المسافة الأفقية بين السهم ونقطة الأصل.

$d=|x|$

b) مستعملًا دالة أكبر عدد صحيح اكتب صيغة رياضية يمكنك استخدامها لإيجاد درجة أيِّ لاعبٍ.

$S=3-[x]$

الاسم: ______________ التاريخ: ________

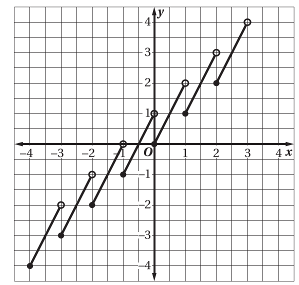
1-3 التدريبات الإثرائية

تمثيل دالة أكبر عدد صحيح بيانيًا

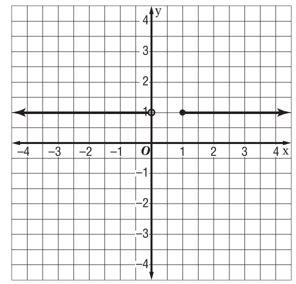
تنتج بعض المعادلات التي تحتوي على دالة أكبر عدد صحيح تمثيلات ممتعة ومفيدة، وسيكون من المفيد تكوين جدول للقيم لكل دالة واستخدام أقلام تلوين للتمثيل.

مثّل كل دالة من الدوال الآتية بيانيًا:

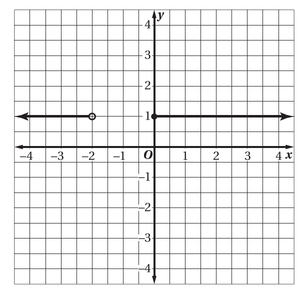
1) $y = 2x - [x]$



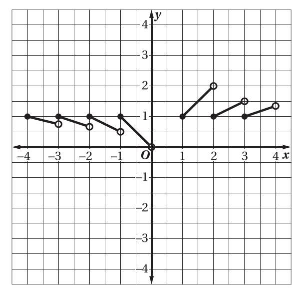
2) $y = \frac{[x]}{[x]}$



3) $y = \frac{[0.5x+1]}{[0.5x+1]}$



4) $y = \frac{x}{[x]}$



الاسم: ______________ التاريخ: ________

1-4 تدريبات إعادة التعليم

تمثيل المتباينات الخطية ومتباينات القيمة المطلقة بيانيًا

تمثيل المتباينة الخطية : المتباينة الخطية مثل $y \geq 2x - 1$ ، يمكنك تشبيهها بمعادلة خطية، ولكن نستعمل إشارة المتباينة بدلًا من إشارة المساواة، ومنحنى المعادلة الخطية المرتبطة بالمتباينة يقسم المستوى الإحداثي إلى نصفَي مستوى، ويكون المستقيم حدًّا لكلا النصفين.

لتمثيل المتباينة الخطية بيانيًا، اتبع الخطوات الآتية:

الخطوة 1: مثّل الحد الفاصل، وهو التمثيل البياني للمعادلة المرتبطة، إذا كانت إشارة المتباينة ($\leq$ أو $\geq$)، فإن الحد يكون متصلًا، أما إذا كانت إشارة المتباينة ($<$ أو $>$)، فإن الحد يكون متقطعًا.

الخطوة 2: اختر نقطة لا تكون على الحد، واختبر ما إذا كانت تحقق المتباينةأم لا، وإذا كانت النقطة $(0, 0)$ لا تقع على الحد الفاصل، فهي نقطة جيدة للاختبار.

الخطوة 3: إذا حققت النقطة التي اخترتها المتباينة، ظلل نصف المستوى الذي يحوي هذه النقطة، وإذا لم تحقق النقطة المتباينة ظلل النصف الآخر.

مثال مثّل $x+2y \geq 4$ بيانيًا .

الحد هو التمثيل البياني للمعادلة: $x + 2y = 4$.

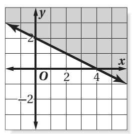
استعمل صيغة الميل والمقطع $y = 2 - \frac{1}{2}x$ لتمثيل حد المنطقة.

الحد يتعيَّن أن يكون متصلًا، اختبر النقطة $(0, 0)$.

$0+2(0) \overset{?}{\geq} 4$ $(x, y) = (0, 0)$

$0 \geq 4$ خطأ

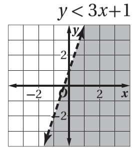
ظلل المنطقة التي لا تحتوي على $(0, 0)$.



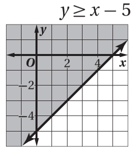
تمارين:

مثّل كلَّ متباينة ممَّا يأتي بيانيًا:

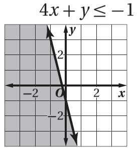
1) $y < 3x+1$



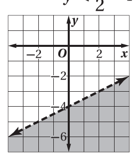
2) $y \geq x - 5$



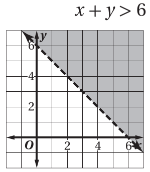
3) $4x + y \leq -1$



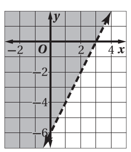
4) $y < \frac{x}{2} - 4$



5) $x + y > 6$



6) $0.5x - 0.25y < 1.5$



1-4 تدريبات إعادة التعليم

تمثيل المتباينات الخطية ومتباينات القيمة المطلقة بيانيًا (تتمة)

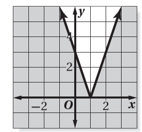
تمثيل متباينات القيمة المطلقة بيانيًا: تمثيل متباينات القيمة المطلقة مشابه لتمثيل المتباينات الخطية. فالتمثيل البياني لمعادلة القيمة المطلقة المرتبطة هو الحدّ(الفاصل). يكون الحدّ مرسوما على نحو متصل، إذا كانت المتباينة تحتوي على إشارة $\le$ أو $\ge$، ويرسم الحدّ متقطعًا إذا كانت تحوي $>$ أو $<$. اختر نقطة لا تقع على الحد لتحديد المنطقة التي يتعين تظليلها.

مثال مثّل $y \le 3|x-1|$ بيانيا.

أولًا. مثّل المعادلة $y = 3|x-1|$.

بما أن المتباينة تحتوي على إشارة المساواة($\le$)، فإن الحدّ سيكون متصلًا.

و لتكن نقطة الاختبار $(0, 0)$.



$0 \overset{?}{\le} 3|0-1|$ $(x, y) = (0, 0)$

$0 \overset{?}{\le} 3|-1|$ $|-1| = 1$

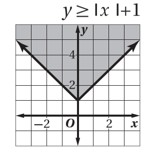
$0 \le 3$ صحيح

ظلّل المنطقة التي تحتوي على النقطة $(0, 0)$.

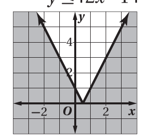
تمارين:

مثّل كل متباينة مما يأتي بيانيًا:

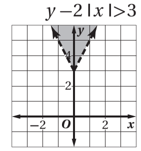
1) $y \ge |x|+1$



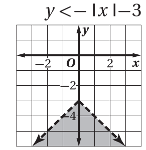
2) $y \le |2x-1|$



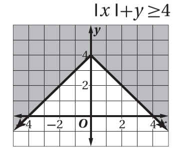
3) $y-2|x|>3$



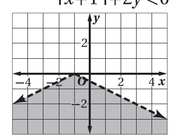
4) $y < -|x|-3$



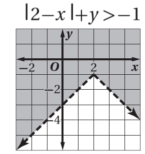
5) $|x|+y \ge 4$



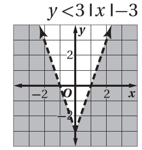
6) $|x+1|+2y<0$



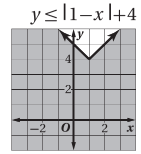
7) $|2-x|+y>-1$



8) $y<3|x|-3$



9) $y \le |1-x|+4$

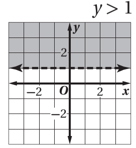


1-4 تدريبات المهارات

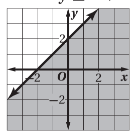
تمثيل المتباينات الخطية ومتباينات القيمة المطلقة بيانيًا

مثّل كل متباينة مما يأتي بيانيًا:

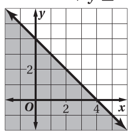
1) $y > 1$



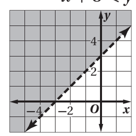
2) $y \le x+2$



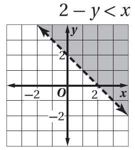
3) $x+y \le 4$



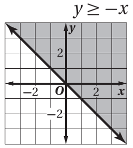
4) $x+3<y$



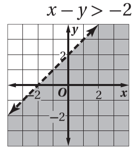
5) $2-y<x$



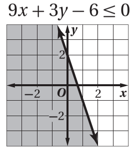
6) $y \ge -x$



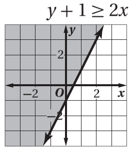
7) $x-y>-2$



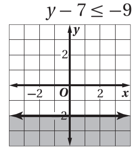
8) $9x+3y-6 \le 0$



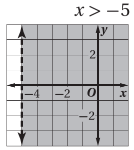
9) $y+1 \ge 2x$



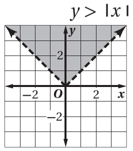
10) $y-7 \le -9$



11) $x>-5$



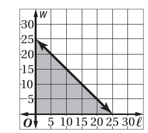
12) $y>|x|$



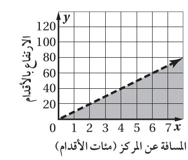
1-4 تدريبات حل المسألة

تمثيل المتباينات الخطية ومتباينات القيمة المطلقة بيانيًا

13) **إطارات:** إذا كانت أبعاد الإطار المستطيل الشكل الذي يمكنك عمله من قطعة خشب طولها 50 بوصة محددة بالمتباينة $\ell + w \le 25$. فمثّل هذه المتباينة بيانيًا.



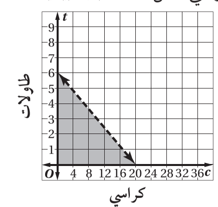
14) **تعليمات البناء:** تحدد البلدية في إحدى المدن ارتفاع الأبنية حول أحد المتنزهات الموجودة في وسط المدينة، على أن يكون ارتفاع البناية أقل من $0.1x$ في حين أن x هي المسافة بين البناية ومركز المتنزه. افترض أن مركز المتنزه يقع عند النقطة (0,0) ومثّل المتباينة التي تمثل ارتفاع البناية بيانيًا.



15) **مزارع:** خلال فصل الشتاء، يحتاج الحصان إلى 36 لترًا من الماء يوميًا، في حين يحتاج الخروف إلى 3.6 لترات يوميًا. إذا كان أحد المزارعين يستطيع أن يزوّد أحصنة وخرافًا بمقدار 300 لتر من الماء يوميًا، فاكتب متباينة تبين عدد الأحصنة وعدد الخراف التي يمكن أن يقتنيها هذا المزارع.

$36h+3.6s \le 300$

16) **كتلة:** تقوم مجموعة من العمال بتحميل إحدى الشاحنات بكراسي وطاولات، فإذا كانت المتباينة الآتية تمثل حدود الكتلة التي تستطيع الشاحنة حملها $200t + 60c < 1200$، في حين أن t هو عدد الطاولات و c عدد الكراسي فمثّل هذه المتباينة بيانيًا.

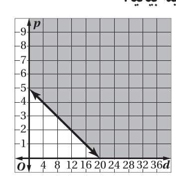


17) **فنون:** يبيع أحد الرسامين نوعين من اللوحات بمبلغ 100 ريال لكل لوحة من النوع الأول، و 400 ريال لكل لوحة من النوع الثاني، ويريد الرسام أن يحصل على مبلغ لا يقل عن 2000 ريال شهريًا.

a) اكتب متباينة تمثل عدد اللوحات من النوع الأول و/أو عدد اللوحات من النوع الثاني الذي يتعين أن يبيعها الرسام للوصول إلى هدفه.

$100d+400p\ge 2000$

b) مثّل المتباينة بيانيًا.



c) إذا باع الرسام 3 لوحاتٍ من النوع الثاني في أحد الشهور، فما عدد اللوحات من النوع الأول التي يتعين أن يبيعها ليحصل على 2000 ريال؟

8

1-4 التدريبات الإثرائية

النهايات

النهاية مفهوم رئيس في كثير من فروع الرياضيات، وخاصة في حساب التفاضل والتكامل. إذا أخذنا المقدار $3x+2$، عندما تقترب x من العدد 1، فإن قيمة هذا المقدار تقترب من العدد 5، ويبيّن الجداول أدناه طريقة اختيار قيم x القريبة من 1؛ للحصول على قيم للمقدار قريبة من 5، وهي إحدى طرق إيجاد نهاية المقدار.

x	$3x+2$
0.900	4.700
0.950	4.850
0.990	4.970
0.999	4.997
0.9999	4.9997

أوجد نهاية كلّ عبارة مما يأتي عند ما تقترب x من القيمة المعطاة:

1) $2x + 2$ عندما تقترب x من 5

12

2) $x - 5$ عندما تقترب x من 11

6

3) $\frac{3x+5}{x-6}$ عندما تقترب x من 1

$-\frac{8}{5}$

4) $\frac{5x+2}{x-1}$ عندما تقترب x من -1

$\frac{3}{2}$

5) $\frac{3x+5}{x-6}$ عندما تقترب x من 100

$\frac{305}{94} \approx 3.24$

6) $\frac{3x+5}{x-6}$ عندما تقترب x من 1000

$\frac{3005}{994} \approx 3.02$

7) $\frac{5x+2}{x-1}$ عندما تقترب x من 100

$\frac{502}{99} \approx 5.07$

8) $\frac{5x+2}{x-1}$ عندما تقترب x من 1000

$\frac{5002}{999} \approx 5.01$

9) ماذا تلاحظ في النهايات التي حصلت عليها في التمارين 8–5؟

في السؤالين 5 و 6 تقترب قيمة العبارة من العدد 3 كلما زادت قيمة x، وفي السؤالين 7 و 8 تقترب قيمة العبارة من العدد 5 كلما زادت قيمة x.

الاسم: ________ التاريخ: ________

1-5 تدريبات إعادة التعليم

حل أنظمة المتباينات الخطية بيانيًا

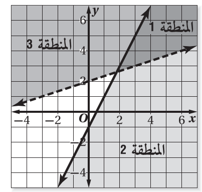
أنظمة المتباينات الخطية : لحل نظام من المتباينات الخطية، مثّل المتباينات بيانيًا على المستوى البياني نفسه. ومنطقة حل النظام هي المنطقة المظللة المشتركة لكل المتباينات.

مثال حل نظام المتباينات: $y > \frac{x}{3}+2 , y \le 2x-1$

المنطقتان 1 و 2 تمثلان حل المتباينة $y \le 2x - 1$

المنطقتان 1 و 3 تمثلان حل المتباينة $y > \frac{x}{3}+2$

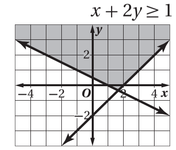
المنطقة 1 مشتركة بين هذه المناطق، فهي تمثل حل نظام المتباينات.



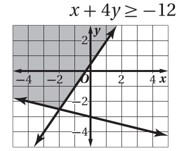
تمارين:

حلّ كلًا من أنظمة المتباينات الخطيّة بيانيًا.

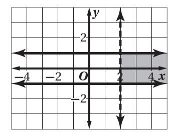
1) $x - y \le 2$, $x + 2y \ge 1$



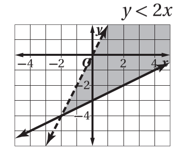
2) $3x - 2y \le -1$, $x + 4y \ge -12$



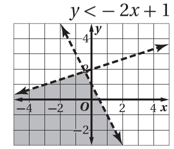
3) $|y| \le 1$, $x > 2$



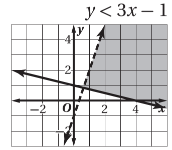
4) $y \ge \frac{x}{2} - 3$, $y < 2x$



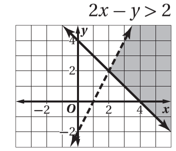
5) $y < \frac{x}{3} + 2$, $y < -2x + 1$



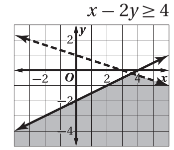
6) $y \ge -\frac{x}{4} + 1$, $y < 3x - 1$



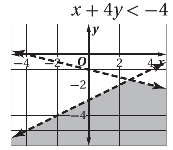
7) $x + y \ge 4$, $2x - y > 2$



8) $x + 3y < 3$, $x - 2y \ge 4$



9) $x - 2y > 6$, $x + 4y < -4$



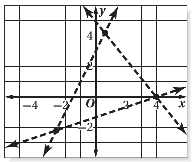
الاسم: ________ التاريخ: ________

1-5 تدريبات إعادة التعليم (تتمة)

حل أنظمة المتباينات الخطية بيانيًا

إيجاد رؤوس منطقة مغلقة : تكون منطقة الحل الناتجة عن حل نظام من المتباينات الخطية منطقة مغلقة على شكل مضلع أحيانًا. ويمكنك إيجاد رؤوس هذا المضلع مستعملًا أساليب سبقت دراستها مثل: التمثيل البياني، التعويض و/ أو الحذف.

مثال أوجد رؤوس المثلث الناتج عن تمثيل نظام المتباينات: $5x+4y < 20, y < 2x+3 , x-3y < 4$ بيانيًا.



مثّل كل متباينة بيانيًا. رؤوس المثلث الناتج هي النقاط الناتجة عن تقاطع المستقيمات التي تحد المنطقة. الرأس $(4, 0)$ يمكنك إيجاده من الرسم مباشرة. ولإيجاد الرأسين الآخرين حل نظامَي المعادلات:

$y= 2x+3$ و $y=2x+3$

$5x+4y=20$ $x-3y=4$

أعد كتابة المعادلة الأولى بالصورة القياسية على الصورة $2x-y=-3$ بالنسبة للنظام الأول، ثم اضربها في العدد 4، واجمع الناتج إلى المعادلة الثانية

$2x-y=-3$ بالضرب في 4 $\quad 8x-4y=-12$

$5x+4y=20$

$(+)\ 5x+4y=20$

$13x=8$

$x=\frac{8}{13}$

عوّض $x=\frac{8}{13}$ في إحدى المعادلتين الأصليتين لإيجاد قيمة y

$2\left(\frac{8}{13}\right)-y=-3$

$\frac{16}{13}-y=-3$

$y=\frac{55}{13}$

إحداثيات الرأس الثاني $\left(\frac{8}{13}, 4\frac{3}{13}\right)$،

استخدم التعويض، بالنسبة لنظام المعادلات الثاني. عوّض $2x+3$ بدلًا من y في المعادلة الثانية فتحصل على:

$x-3(2x+3) = 4$

$x-6x-9 = 4$

$-5x = 13$

$x=-\frac{13}{5}$

عوّض $x=-\frac{13}{5}$ في المعادلة الأولى لإيجاد قيمة y

$y=2\left(-\frac{13}{5}\right)+3$

$y=-\frac{26}{5}+3$

$y=-\frac{11}{5}$

إحداثيات الرأس الثالث $\left(-2\frac{3}{5}, -2\frac{1}{5}\right)$.

إذن إحداثيات الرؤوس الثلاثة للمثلث الناتج هي: $\left(\frac{8}{13}, 4\frac{3}{13}\right)$، $(4, 0)$ و$\left(-2\frac{3}{5}, -2\frac{1}{5}\right)$.

تمارين:

أوجد إحداثيات رؤوس المثلث الناتج عن التمثيل البياني لكلٍّ من أنظمة المتباينات الآتية:

1) $y \le -3x+7$, $y < \frac{1}{2}x$, $y > -2$ **(2,1)** **(−4,−2)** **(3,−2)**

2) $x > -3$, $y < -\frac{1}{3}x+3$, $y > x-1$ **(−3,4)** **(−3,−4)** **(3,2)**

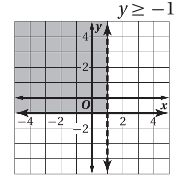
3) $y < -\frac{1}{2}x+3$, $y > \frac{1}{2}x+1$, $y < 3x+10$ **(−2,4)** **(2,2)** $\left(-3\frac{3}{5}, -\frac{4}{5}\right)$

1-5 تدريبات المهارات

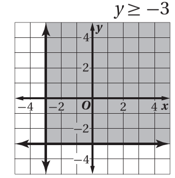
حل أنظمة المتباينات الخطية بيانيًا

حل كلًا من أنظمة المتباينات الآتية بيانيًا:

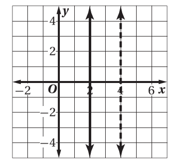
1) $x < 1$
$y \geq -1$



2) $x \geq -3$
$y \geq -3$

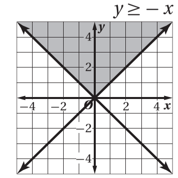


3) $x \leq 2$
$x > 4$

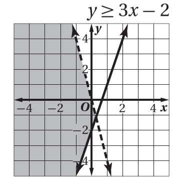


لا يوجد حل

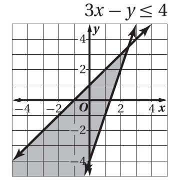
4) $y \geq x$
$y \geq -x$



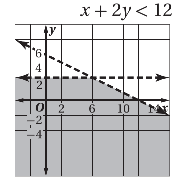
5) $y < -4x$
$y \geq 3x - 2$



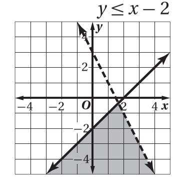
6) $x - y \geq -1$
$3x - y \leq 4$



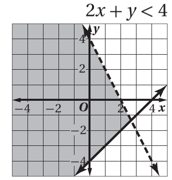
7) $y < 3$
$x + 2y < 12$



8) $y < -2x + 3$
$y \leq x - 2$



9) $x - y \leq 4$
$2x + y < 4$



أوجد إحداثيات كل رأس من رؤوس المثلث الناتج عن تمثيل كلٍّ من أنظمة المتباينات الخطية الآتية:

10) $y \leq 0$ **(0,0)**
$x \leq 0$ **(0,−1)**
$y \geq -x - 1$ **(−1,0)**

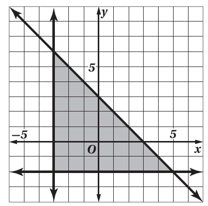
11) $y \leq 3 - x$ **(0,3)**
$y \geq 3$ **(−5,3)**
$x \geq -5$ **(−5,8)**

12) $x \geq -2$ **(−2,4)**
$y \geq x - 2$ **(−2,−4)**
$x + y \leq 2$ **(2,0)**

1-5 تدريبات حل المسألة

حل أنظمة المتباينات الخطية بيانيًا

1) **برج الحمام:** يريد أحمد وضع برج للحمام في حديقة منزله عند نقطة (x, y) داخل المنطقة المغلقة المظللة المبيَّنة في الشكل.



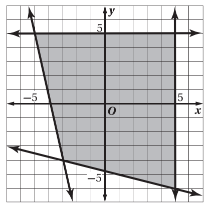
تأكد أحمد من أن: $x \geq -3$ و $y \geq -2$ متباينتان من نظام المتباينات التي كوَّنت المنطقة. ما المتباينة الخطية الثالثة التي يتعين أن تتحقق، على أن تكون (x, y) داخل المثلث؟ $x+y\leq3$

2) **مربعات:** وجد علي بقعة من الحبر على دفتر الرياضيات. ورأى جملة تقول: "المتباينتان الآتيتان تمثلان مربعًا $|x| \leq 8$ و ......" اكتب متباينة لتصبح هذه الجملة صحيحة.

إجابة ممكنة: $|y|\leq8$

3) **عطلة:** تلقَّى محمد مجموعة من الهدايا وبطاقات التهنئة من زملائه خلال العطلة الصيفية. إذا كانت كل هدية معها بطاقة، ولم يرسل له أيٌّ من أصدقائه أكثر من بطاقة واحدة.
وأقل من 10 من أصدقائه أرسلوا إليه بطاقة تهنئة بدون هدية.
عبّر عن هذا الوضع مستخدمًا نظامًا من المتباينات الخطية. **إذا كان p عدد الهدايا و c هو عدد البطاقات، فإن $p \leq c$ و $c-p < 10$**

4) **لوح بياني:** تعمل مجموعة من الطلاب مع معلمهم على صنع لوح بياني محدود بالمتباينات الآتية: $x \leq 5$ و $y \leq 5$ و $0.25x + y \geq -4.75$ و $4.5x + y \geq -17.5$ مثِّل هذه المتباينات بيانيًا لإيجاد إحداثيات أركان هذا اللوح.

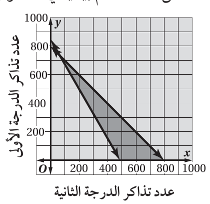


(5,5)
(−5,5)
(5,−6)
(−3,−4)

5) **تذاكر:** يتسع مسرح إلى 800 مقعد، وتعرض فيه مسرحية تاريخية، إذا علمت أن هناك نوعين من التذاكر. تذكرة من الدرجة الأولى بمبلغ 7 ريالاتٍ وتذكرة من الدرجة الثانية بمبلغ 4 ريالاتٍ، وكان هدف إدارة المسرح هو الحصول على 3400 ريالٍ في الليلة الواحدة.

a) اكتب نظامًا من المتباينات الخطية يمثل عدد المقاعد والمبلغ الإجمالي. **$800\geq x+y$**
$3400\leq7x+4y$

b) مثِّل هذا النظام بيانيًا في المستوى أدناه.



c) هل تصل المبيعات إلى المبلغ المستهدف إذا بيع 200 تذكرة من الدرجة الأولى و 475 تذكرة من الدرجة الثانية؟ **لا؛ لأن هذا العدد من التذاكر يجمع 3300 ريال فقط**

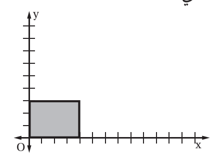
الاسم: ________ التاريخ: ________

1-5 التدريبات الإثرائية

(تصميم إبداعي)

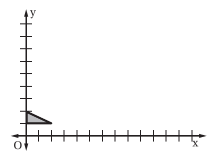
يمكنك استعمال أنظمة المتباينات الخطية لوصف مناطق مغلقة محدودة بأشكال هندسية مرسومه في المستوى الإحداثي.
فمثلًا المستطيل الممثل في الشكل المجاور يمكنك رسمه مستعملًا نظام المتباينات الآتي:

$x \le 4$
$x \ge 0$
$y \le 3$
$y \ge 0$



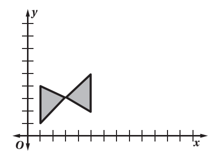
والمثلث في الشكل المجاور، يمكنك رسمه مستعملًا النظام الآتي:

$x+2y \le 4$
$x \ge 0$
$y \ge 1$



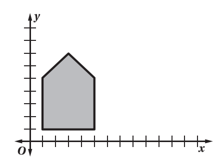
1) أوجد نظام المتباينات الخطية التي تصف المنطقة المظللة في الشكل المجاور.
في حين أن نقاط التقاطع هي: (5, 2)، (3, 3)، (1, 4)، (1, 1) و (5, 5)

$1 \le x \le 3$		$3 \le x \le 5$
$y \ge x$	و	$y \le x$
$x+2y \le 9$		$x+2y \ge 9$



2) أوجد نظام المتباينات الخطية التي تصف المنطقة المظللة المحدودة بشكل البيت في الشكل أدناه. نقاط التقاطع هي:
(5، 5)، (3، 7) (5، 1)، (1، 1) و (1، 5)

$x \ge 1$
$x \le 5$
$y \le x+4$
$y \le -x+10$
$y \ge 1$



الاسم: ________ التاريخ: ________

1-6 تدريبات إعادة التعليم

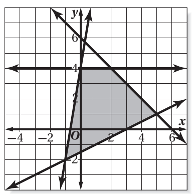
البرمجة الخطية والحل الأمثل

القيم العظمى والقيم الصغرى: عندما يكوّن نظام من المتباينات الخطية منطقة مضلعة محدودة، فإن القيم العظمى أو الصغرى لدالة مرتبطة بها يمكنك إيجادها عند رؤوس المضلع.

مثال

مثِّل نظام المتباينات الخطية الآتية بيانيًا، وحدِّد إحداثيات رؤوس منطقة الحل. ثم أوجد القيم العظمى والصغرى للدالة: $f(x, y) = 3x + 2y$ في هذه المنطقة.

$y \le 4$
$y \le -x+6$
$y \ge \frac{1}{2}x - \frac{3}{2}$
$y \le 6x+4$



أولًا، مثِّل المتباينات بيانيًا، ثم أوجد رؤوس منطقة الحل.
المضلع الناتج هو شكل رباعي رؤوسه هي:
(5, 1)، (2, 4)، (0, 4) و (−1, −2)
استعمل الجدول الآتي لإيجاد القيمة العظمى والقيمة الصغرى للدالة: $f(x, y) = 3x + 2y$

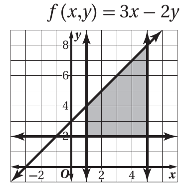
(x,y)	$3x+2y$	$f(x,y)$
(0,4)	3(0)+2(4)	8
(2,4)	3(2)+2(4)	14
(5,1)	3(5)+2(1)	17
(−1,−2)	3(−1)+2(−2)	−7

القيمة العظمى هي 17 عند النقطة (5, 1). والقيمة الصغرى هي −7 عند النقطة (−1, −2).

تمارين:

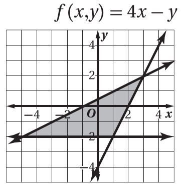
مثّل كلًّا من أنظمة المتباينات الآتية بيانيًا. وحدد رؤوس المضلع الذي يمثّل منطقة الحل. ثم أوجد القيمة العظمى والقيمة الصغرى للدالة المعطاة.

1) $y \ge 2$
$1 \le x \le 5$
$y \le x+3$
$f(x,y) = 3x - 2y$



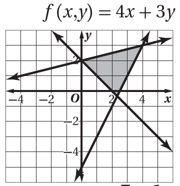
(1,2),(1,4),(5,8),(5,2)
العظمى = 11 ، الصغرى = −5

2) $y \ge -2$
$y \ge 2x - 4$
$x - 2y \ge -1$
$f(x,y) = 4x - y$



(−5,−2),(3,2),(1,−2)
العظمى = 10 ، الصغرى = −18

3) $x+y \ge 2$
$4y \le x+8$
$y \ge 2x - 5$
$f(x,y) = 4x + 3y$



$(0,2),(4,3),(\frac{7}{3},-\frac{1}{3})$
العظمى = 25 ، الصغرى = 6

1-6 تدريبات إعادة التعليم
البرمجة الخطية والحل الأمثل

(تتمة)

الحل الأمثل: عند حل أسئلة البرمجة الخطية استعمل الإجراءات الآتية:

1) حدّد المتغيرات.
2) اكتب نظامًا من المتباينات الخطية يمثّل المسألة.
3) مثّل هذا النظام بيانيًا.
4) أوجد إحداثيات رؤوس المضلع الناتج (منطقة الحل).
5) اكتب الدالة التي تريد إيجاد القيمة العظمى أو القيمة الصغرى لها.
6) عوّض إحداثيات الرؤوس في هذه الدالة.
7) اختر القيمة العظمى أو القيمة الصغرى لما هو مطلوب في المسألة.

مثال **لدى أحد الصبّاغين 32 وحدة صبغة من اللون الأصفر، و54 وحدة صبغة من اللون الأخضر. ويريد هذا الصباغ أن ينتج أكبر عدد ممكن من العُلب من اللونين A و B. إذا كانت كل علبة من اللون A تحتاج 4 وحدات من الصبغة الصفراء ووحدة واحدة من الصبغة الخضراء، وكل علبة من اللون B تحتاج وحدة واحدة من الصبغة الصفراء و6 وحدات من الصبغة الخضراء. فأوجد أكبر عدد ممكن من العلب التي يمكنه إنتاجها.**

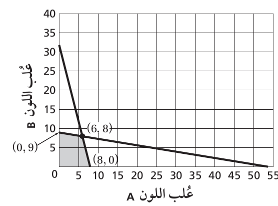
الخطوة 1: حدّد المتغيرات:

x= عدد العُلب من اللون A، y= عدد العُلب من اللون B

الخطوة 2: كوّن نظامًا من المتباينات الخطية. بما أن عدد العُلب لا يمكن أن يكون سالبًا، فإن: $x \geq 0$ و $y \geq 0$. وبما أن هناك 32 وحدة من اللون الأصفر واللون A يحتاج إلى 4 وحدات، واللون B يحتاج إلى وحدة واحدة، فإن:

$4x+y \leq 32$

وباتباع الطريقة نفسها لاستخدام الصبغة الخضراء، فإن: $x+6y \leq 54$



الخطوتان 3, 4: مثّل نظام المتباينات بيانيًا وحدد رؤوس منطقة الحل.

الرؤوس هي: $(0, 0)$ و $(0, 9)$ و $(6, 8)$ و $(8, 0)$

الخطوات 5–7: أوجد أكبر عدد ممكن من العُلب $x+y$. أكبر عدد من العُلب يمكنك صنعه 14 علبة: 6 عُلب من اللون A و 8 عُلبٍ من اللون B.

تمارين:

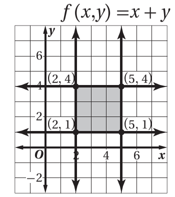
1) **طعام:** لدى أحد المطاعم 12 كيلوجرامًا من البهارات غير الحارة و 10 كيلوجرامات من البهارات الحارة. ويريد صاحب المطعم عمل نوعين جديدين من البهارات، على أن يحتوي الكيلوجرام من النوع الأول (A) على $\frac{3}{4}$ كيلوجرام بهارات غير حارة و $\frac{1}{4}$ كيلو جرام بهارات حارة، أما النوع الثاني (B) فيحتوي على $\frac{1}{2}$ كيلوجرام من البهارات غير الحارة، و $\frac{1}{2}$ كيلوجرام من البهارات الحارة. أوجد أكبر عدد ممكن من الكيلوجرامات يمكن إنتاجه من كلٍّ من النوعين A و B. **4 كيلوجرامات من النوع A و 18 كيلوجرامًا من النوع B**

2) **صناعة:** يوجد في أحد المصانع جهازان لإنتاج الحلوى. يُنتج الجهاز الأول (A) 30 قطعة من الحلوى في الساعة بتكلفة 8 ريالاتٍ للساعة الواحدة، أما الجهاز الثاني (B) فيُنتج 40 قطعة في الساعة بتكلفة 12 ريالًا للساعة الواحدة. يمكن استعمال الجهاز A لوحده أو B لوحده أو كلاهما معًا لإنتاج الحلوى. ما أقل عدد من الساعات يحتاجها المصنع لإنتاج 380 قطعة من الحلوى، على ألّا تزيد التكلفة عن 108 ريالاتٍ؟
6 ساعات؛ يعمل الجهاز A مدة 6 ساعات والجهاز B مدة 5 ساعات ضمن ساعات عمل الجهاز A.

1-6 تدريبات المهارات
البرمجة الخطية والحل الأمثل

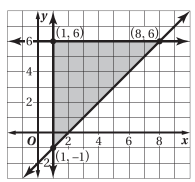
مثّل كلًا من أنظمة المتباينات الآتية بيانيًا، ثم حدّد إحداثيات رؤوس منطقة الحل، وأوجد القيمة العُظمى والقيمة الصغرى للدالة المعطاة.

1) $x \geq 2$ ، $x \leq 5$ ، $y \geq 1$ ، $y \leq 4$ ، $f(x,y) = x + y$



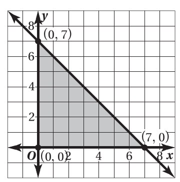
$(2,1),(2,4),(5,1),(5,4)$
العظمى = 9 ، الصغرى = 3

2) $x \geq 1$ ، $y \leq 6$ ، $y \geq x-2$ ، $f(x,y) = x - y$



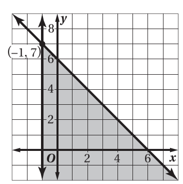
$(1,-1),(1,6),(8,6)$
العظمى = 2 ، الصغرى = −5

3) $x \geq 0$ ، $y \geq 0$ ، $y \leq 7 - x$ ، $f(x,y) = 3x + y$



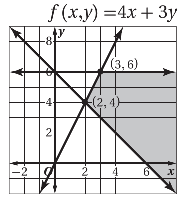
$(0,0),(0,7),(7,0)$
العظمى = 21 ، الصغرى = 0

4) $x \geq -1$ ، $x + y \leq 6$ ، $f(x,y) = x + 2y$



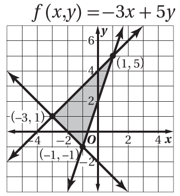
$(-1,7)$
العظمى = 13 ، لا توجد صغرى

5) $y \leq 2x$ ، $y \geq 6-x$ ، $y \leq 6$ ، $f(x,y) = 4x + 3y$



$(2,4),(3,6)$
الصغرى = 20 ، لا توجد عظمى

6) $y \geq -x-2$ ، $y \geq 3x+2$ ، $y \leq x + 4$ ، $f(x,y) = -3x + 5y$



$(-3,1),(-1,-1),(1,5)$
العظمى = 22 ، الصغرى = −2

7) **صناعة:** ينتج أحد المصانع إطارات داخلية وإطارات خارجية. افترض أن x تمثل عدد الإطارات الداخلية المصنّعة في الساعة الواحدة، وأن y تمثل عدد الإطارات الخارجية المصنعة في الساعة الواحدة. إن المتباينات: $x + 3y \leq 18$, $2x+y \leq 16$, $x \geq 0$, $y \geq 0$ تمثل القيود على إنتاج كلا النوعين من الإطارات. استعمل دالة الربح $f(x, y) = 50x+80y$ والقيود المعطاة لتحديد أقصى ربح يحققه المصنع. **620 ريالًا**

الاسم: ________ التاريخ: ________

1-6 تدريبات حل المسألة

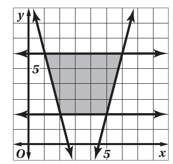
البرمجة الخطية والحل الأمثل

1) **مناطق:** تُحدد منطقة على الخريطة عن طريق المتباينات $x-y<3$ و $x-y>-3$ و $x+y>-3$.
فهل هذه المنطقة محدودة أم لا؟ فسّر ذلك.
المنطقة غير محدودة (مفتوحة)، والنقط (n,n) تقع في المنطقة لجميع قيم n الموجبة.

2) **صناعة:** يعمل ثمانون عاملًا في تجميع الطاولات والكراسي. ويتطلب العمل 5 عمال لتجميع الطاولة و3 عمال لتجميع الكرسي. ويصنع العمال عددًا من الطاولات يساوي عدد الكراسي على الأقل دائمًا. إذا كانت x تمثل عدد الطاولات، و y تمثّل عدد الكراسي، ونظام المتباينات الذي يمثّل ما يمكنهم تجميعه هو: $x>0$ و $y>0$ و $y\le x$ و $5x+3y\le 80$. ما أكبر عددٍ من الكراسي والطاولات يستطيع العمال صنعه؟
10 كراس و 10 طاولات

3) **أسماك:** حوض أسماك حجمه 7000 بوصة مكعبة. ويريد عبدالله أن يربي في الحوض نوعين من السمك وهما السمكة الذهبية وسمكة السلور.
وينصح بتوفير 170 بوصة مكعبة لكل سمكة ذهبية، و 700 بوصة مكعبة لكل سمكة سلور. ويرغب عبدالله في تربية سمكة سلور واحدة على الأقل مقابل كل 4 سمكات ذهبية. افترض أن n تمثّل عدد الأسماك الذهبية و c تمثّل عدد أسماك السلور.
والمتباينات الآتية تُكوّن منطقة الحل لهذا الوضع:
$n>0$ و $c>0$ و $4c\ge n$ و $170n+700c\le 7000$
ما هو أكبر عدد من الأسماك يمكن أن يضعه عبدالله في الحوض؟
20+5=25
5 سمكات سلور و 20 سمكة ذهبية

4) **مرتفع:** بُنيت حديقة على شكل شبه منحرف فوق منحدر بسيط. والدالة التي تمثل ارتفاع نقط المنحدر عن مستوى سطح البحر هي:
$f(x,y)=x-3y+20\,ft$، ما إحداثيات أعلى نقطة في الحديقة؟



(5,2)

5) **خزف:** لدى فهد 8 أيام ليصنع أواني وأطباقًا ليبيعها في معرض محلي. كتلة كل إناء 2 باوند وكتلة الطبق الواحد 1 باوند، ويمكنه الاشتراك في المعرض بأواني وأطباق لا تزيد كتلتها على 50 باوندًا. ويستطيع أن يصنع في كل يوم 5 أطباق و3 أواني على الأكثر. ويربح 12 ريالًا لكل طبق و25 ريالًا لكل إناء سيبيعه.

a) اكتب متباينة خطية تمثل عدد الأواني (P) وعدد الأطباق (n)، التي يستطيع أن يحضرها فهد إلى المعرض.
$n\ge 0$, $p\ge 0$, $2p+n\le 50$, $n\le 40$, $p\le 24$

b) اكتب إحداثيات رؤوس منطقة الحل.
(0,0) , (0,24), (40,0), (2,24), (40,5)
على أن يمثل المحور الأفقي المتغير n

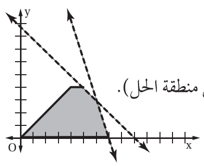
c) ما عدد الأطباق والأواني التي يتعيّن أن يصنعها فهد ليجعل ربحه أكبر ما يمكن؟
طبقان و 24 إناء

الاسم: ________ التاريخ: ________

1-6 التدريبات الإثرائية

تحليل الحساسية (الدقة)

يحتوي نموذج البرمجة الخطية على معاملات هدف محدد. فعلى سبيل المثال، إذا وجدت قيم نموذج ما من خلال المعادلة $2x+3y=5$، فإن معاملات الهدف هي $\{2,3\}$. ماذا لو كانت هذه المعاملات هي $\{2.1, 2.9\}$ أو $\{2.5, 3.1\}$؟
كيف ستؤثر هذه التغييرات في قيم الحل الأمثل للبرمجة الخطية؟ هذا النوع من التحقق يدعى **تحليل الحساسية (الدقة)**.
عمومًا، دوال الهدف في مسائل البرمجة الخطية بمتغيرين يمكنك كتابتها كما يلي:
إيجاد القيم العظمى أو الصغرى لدالة الهدف: $Ax+By=C$. وتكون خاضعة لعدد من معادلات القيود. التغيير في المعاملات A و B قد يغيّر ميل الخط. وهذا التغير في الميل قد يؤدي إلى تغيرٍ في الحل الأمثَل (تذكّر أن الحل الأمثل يكون عند إحدى رؤوس منطقة الحل).
هناك مدى لقيم الميل الناتجة عن هذا التغيير؛ لذا فإن هناك مدى لتغيير قيم A و B التي تُبقي على الحل الأمثل (انظر الرسم).



1) أوجد ميل $Ax+By=C$، ولاحظ كيف يمكن أن يُحدث التغيير في المعاملات A و B تغيرًا في ميل المستقيم.
$$m=-\frac{A}{B}$$

ادرس مسألة البرمجة الخطية الآتية:

القيم العظمى: $C=2x+3y$
القيود: $3x+y\le 21$
$x+y\le 9$
$y\le x$
$y\le 4$

(x,y)	(0,0)	(4,4)	(5,4)	(6,3)	(7,0)
C	0	20	22	21	14

بعد إيجاد التقاطعات وتقدير قيمة معادلة الهدف، نجد أن القيمة العظمى تقع عند (5, 4). إذا غُيّرت معاملات الهدف من 2 و 3 إلى B و A، سيبقى الحل الأمثل عند (5, 4) ما دام الميل بين ميل $x+y\le 9$ وميل $3x+y\le 21$، وإذا لم يكن كذلك، فإن الحل الأمثل سيكون عند (4, 4) أو (6, 3).

2) عبر عن العلاقة: ميل دالة الهدف يقع بين ميل المستقيم $x+y=9$، وميل المستقيم $3x+y=21$، بطريقة جبرية.
$-3\le m\le -1$