وزارة التربية والتعليم
Ministry of Education
المملكة العربية السعودية

الرياضيات

للصف الأول الثانوي

مصادر المعلم للأنشطة الصفية

الفصل الثالث: المثلثات المتطابقة

العبيكان Obeikan

McGraw Hill Education

يوزع مجانًا ولا يباع

١٤٣٥هـ - ٢٠١٤م

Glencoe Mathematics © 2010
CHAPTER RESOURCE MASTERS
Geometry

الرياضيات ـ الصف الأول الثانوي
مصادر المعلم للأنشطة الصفية

أعدَّ النسخة العربية: شركة العبيكان للتعليم

www.obeikaneducation.com

McGraw Hill Education

العبيكان Obeikan

Arabic Edition is published by Obeikan under agreement with
The McGraw-Hill Companies, Inc. © 2008.

الطبعة العربية: مجموعة العبيكان للاستثمار
وفقًا لاتفاقيتها مع شركة ماجروهل© ٢٠٠٨م/ ١٤٢٩هـ.

بِسْمِ اللَّهِ الرَّحْمَٰنِ الرَّحِيمِ

عزيزي المعلم / عزيزتي المعلمة

يسرنا أن نقدم هذه المجموعة من التدريبات المساندة، التي تراعي الفروق الفردية بين الطلاب. حيث نطمح أن يساعدك التنوع في هذه التدريبات على الوصول إلى جميع الطلاب في الصف، مهما تباينت مستوياتهم التحصيلية.

وقد تم تخصيص صفحتين لتدريبات إعادة التعليم وصفحة واحدة لكلٍّ من التدريبات الأخرى لكل درسٍ من دروس كتاب الطالب. حيث يمكنك أن تكلف الطلاب حل صفحة التدريبات المقابلة لكل درس حسب مستوى كلٍّ منهم؛ سواء أكان ذلك داخل الصف أم في المنزل. وليست هذه التدريبات بديلًا عن كتاب التمارين، ولكنها مساندة ومكملة له.

وهذه التدريبات هي:

تدريبات إعادة التعليم

تركِّز هذه التدريبات على الأفكار الرئيسة في الدرس وتقدمها بأسلوب تدريسي ومعالجة يختلفان أحيانًا عن كتابي الطالب والتمارين. وهي موجّهة إلى الطلاب ذوي المستوى دون المتوسط.

تدريبات المهارات

تركِّز هذه التدريبات على المهارات الحسابية الموجودة في الدرس؛ فتقدم تدريبات إضافية على مهارات الدرس وبعض المسائل التي تركز على تلك المهارات. وهي موجّهة إلى الطلاب ذوي المستوى ضمن المتوسط ودون المتوسط.

تدريبات حل المسألة

تأتي هذه التدريبات انطلاقًا من اهتمام هذه المناهج بحلّ المسألة، حيث تم تخصيصها؛ لتقديم تدريبات إضافية على حل المسألة ترتبط بكل درس من دروس كتاب الطالب. وهي موجهة إلى جميع الطلاب على اختلاف مستوياتهم التحصيلية.

التدريبات الإثرائية

تساعد هذه التدريبات الإثرائية على التوسع أو تدعيم مفاهيم الدرس، كما تؤدي إلى توسيع مدارك الطلاب حول تعلُّم الرياضيات بشكل عام. وهذه التدريبات موجهة إلى الطلاب ذوي المستوى ضمن المتوسط وفوق المتوسط.

الفهرس

الاسم ______________________ التاريخ ____________

3-1 تدريبات إعادة التعليم

تصنيف المثلثات

تصنيف المثلثات وفقًا لزواياها:

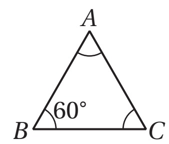
تصنّف المثلثات وفقًا لقياسات زواياها كما يأتي:

• إذا كانت زوايا المثلث الثلاث حادّة، سُمّي **مثلثًا حادّ الزوايا.**
• إذا كانت زوايا المثلث الثلاث متطابقة، سُمّي **مثلثًا متطابق الزوايا.**
• إذا كانت إحدى زوايا المثلث منفرجة، سُمّي **مثلثًا منفرج الزاوية.**
• إذا كانت إحدى زوايا المثلث قائمة، سُمّي **مثلثًا قائم الزاوية.**

مثال

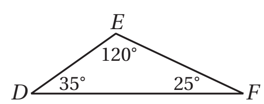
صنّف كلًّا من المثلثات الآتية وفقًا لزواياه.

(a



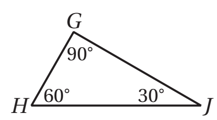
زوايا هذا المثلث الثلاث متطابقة، وقياس كلّ زاوية منها يساوي $60°$؛ لذا فهو مثلث متطابق الزوايا.

(b



يوجد في هذا المثلث زاوية قياسها $120°$؛ لذا فهو مثلث منفرج الزاوية.

(c

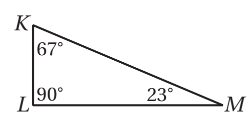


يوجد في هذا المثلث زاوية قياسها $90°$؛ لذا فهو مثلث قائم الزاوية.

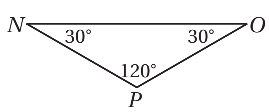
تمارين

صنّف كلًّا من المثلثات الآتية وفقًا لزواياه:

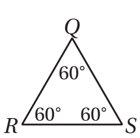
(1



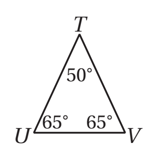
(2



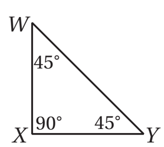
(3



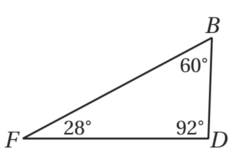
(4



(5



(6



3-1 تدريبات إعادة التعليم (تتمة)

تصنيف المثلثات

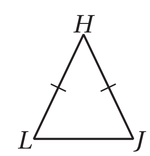
تصنيف المثلثات وفقًا لأضلاعها:

تصنّف المثلثات وفقًا لعدد الأضلاع المتطابقة فيها، ويُشار عادةً إلى الأضلاع المتطابقة في الرسوم، بوضع أعداد متساوية من الشرطات عليها.

• إذا كانت أضلاع المثلث الثلاثة متطابقة، سُمّي **مثلثًا متطابق الأضلاع.**
• إذا كان في المثلث ضلعان متطابقان على الأقل، سُمّي **مثلثًا متطابق الضلعين.** وبناءً عليه يكون المثلث المتطابق الأضلاع مثلثًا متطابق الضلعين أيضًا.
• إذا لم يوجد في المثلث ضلعان متطابقان، سُمّي **مثلثًا مختلف الأضلاع.**

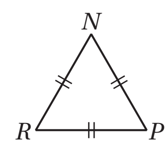
مثال 1 صنّف كلًّا من المثلثات الآتية وفقًا لأضلاعه.

a)



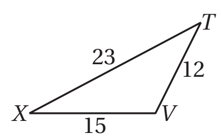
يوجد في هذا المثلث ضلعان متطابقان؛ لذا فهو متطابق الضلعين.

b)



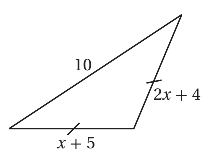
أضلاع هذا المثلث الثلاثة متطابقة؛ لذا فهو متطابق الأضلاع.

c)



لا يوجد في هذا المثلث أي ضلعين متطابقين؛ لذا فهو مختلف الأضلاع.

مثال 2 أوجد قيمة x وأطوال الأضلاع المجهولة في المثلث ABC .



الخطوة 1: أوجد قيمة x وذلك بمساواة طولَي الضلعين.

$2x + 4 = x + 5$ معطى

$x + 4 = 5$ اطرح x من الطرفين

$x = 1$ اطرح 4 من الطرفين

الخطوة 2: عوّض عن قيمة x بأحد الطولين

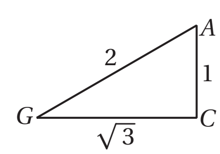
$2x + 4 = 2(1) + 4 = 6$

إذن طول كلٍّ من الضلعين 6

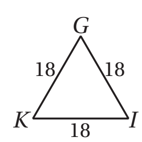
تمارين

صنّف كلًّا من المثلثات الآتية وفقًا لأضلاعه:

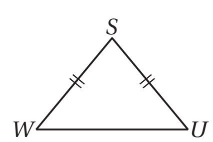
1)



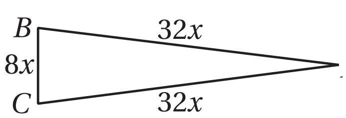
2)



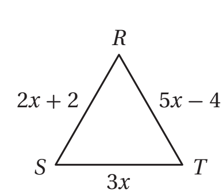
3)



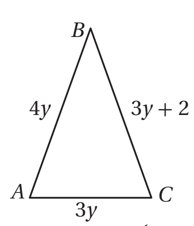
4)



5) **جبر:** أوجد قيمة x، وطول كلّ ضلع من أضلاع ΔRST المتطابق الأضلاع.



6) **جبر:** أوجد قيمة y، وطول كلّ ضلع من أضلاع ΔABC المتطابق الضلعين، علمًا بأن $AB = BC$.

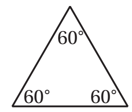


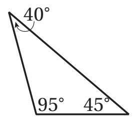
7) **هندسة إحداثية:** أوجد أطوال أضلاع ΔABC الذي رؤوسه: $A(-1,5)$, $B(6,1)$, $C(2,-6)$، ثمّ صنّفه وفقًا لأضلاعه.

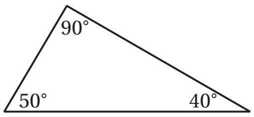
3-1 تدريبات المهارات

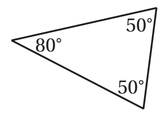
تصنيف المثلثات

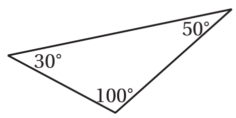
صنّف كلًّا من المثلثات الآتية وفقًا لزواياه:

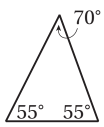
1) 

2) 

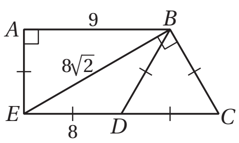
3) 

4) 

5) 

6) 

صنّف كلًّا من المثلثات الآتية وفقًا لأضلاعه:



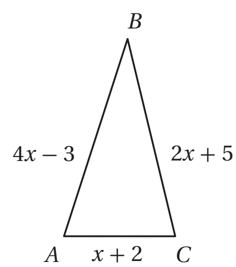
7) ΔABE

8) ΔEDB

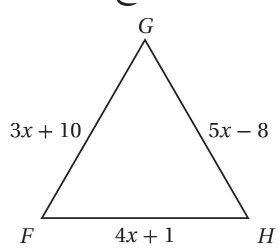
9) ΔEBC

10) ΔDBC

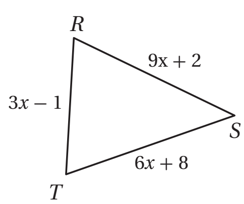
11) **جبر:** أوجد قيمة x، وطول كلِّ ضلعٍ من أضلاع ΔABC المتطابق الضلعين، علمًا بأن $\overline{AB} \cong \overline{BC}$.



12) **جبر:** أوجد قيمة x، وطول كلِّ ضلعٍ من أضلاع ΔFGH المتطابق الأضلاع.



13) **جبر:** أوجد قيمة x، وطول كلِّ ضلعٍ من أضلاع ΔRST المتطابق الضلعين، إذا كان $\overline{RS} \cong \overline{TS}$.

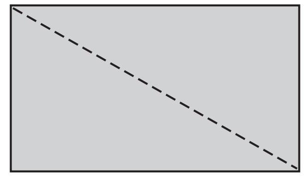


14) **هندسة إحداثية:** أوجد أطوال أضلاع ΔABC الذي رؤوسه: $A(0, 3)$ ، $B(-4, 0)$ ، $C(2, 2)$، ثم صنِّفه وفقًا لأضلاعه.

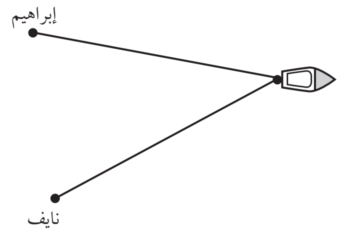
3-1 تدريبات حلّ المسألة

تصنيف المثلثات

1) ورق: قصّ سلطان ورقة مستطيلة نصفين على طول قُطرها. ونتج عن ذلك مثلثان. صنّف كلًّا من المثلثين وفقًا لزواياهما.

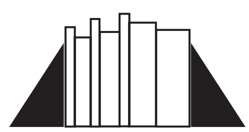


2) رياضة مائية: يتزلّج إبراهيم ونايف على المياه، وهما يُمسكان بحبلين لهما الطول نفسه، ومربوطين في قاربٍ سريعٍ كما في الشكل أدناه.



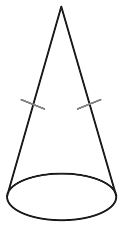
يُبحر القارب بأقصى سرعة والحبلان مشدودان، ويشكّل إبراهيم ونايف والنقطة التي رُبط عندها الحبلان في القارب رؤوس مثلث . إذا لم تكن المسافة بين إبراهيم ونايف مساوية لطول أيٍّ من الحبلين، فصنّف المثلث وفقًا لأضلاعه.

3) دعامات الكتب: تشكِّل كلٌّ من دعامتَي الكُتب أدناه مثلثًا قائم الزاوية.

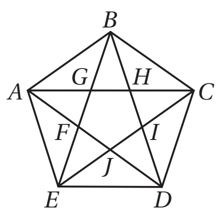


طول ضلع قاعدة كلِّ مثلث منهما يساوي نصف طول الوتر في المثلث، إذا أُبعدت الكُتب الموضوعة بين الدعامتين جميعها، وقرّبت الدعامتان إحداهما إلى الأخرى، فإنهما تشكِّلان مثلثًا واحدًا. صنّف هذا المثلث وفقًا لأضلاعه.

4) ديكور: يريد مهندس ديكور استعمال المخروط المُبيَّن في الشكل أدناه، فإذا قام بقصِّه طوليًّا، من الرأس،فما نوع المثلث الذي يظهر؟



5) تصاميم: شاهد خالد النمط أدناه على بلاطة خماسيّة، وقد لاحظ وجود أنواع كثيرة ومختلفة من المثلثات التي شكّلتها المستقيمات المرسومة على البلاطة.



a) عيّن خمسة مثلثات حادّة الزوايا ومتطابقة الضلعين.

b) عيّن خمسة مثلثات منفرجة الزاوية ومتطابقة الضلعين.

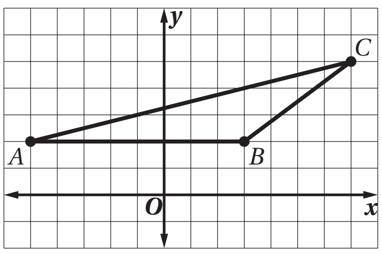
الاسم ________________ التاريخ ________

3-1 التدريبات الإثرائيّة

قراءة الرياضيّات

عندما تقرأ الهندسة، قد تحتاج أن ترسم شكلًا توضيحيًّا ليسهل عليك فهم النص.

مثال **عيّن النقاط A, B, C في المستوى الإحداثي، على أن يكون إحداثيًّا y للنقطتين A و B متساويين، ويكون الإحداثي x للنقطة B أكبر من الإحداثي x للنقطة A، وأن يكون كلٌّ من إحداثيّي النقطة C أكبر من الإحداثي المناظر للنقطة B. صنِّف ΔABC وفقًا لزواياه؟**



للإجابة عن هذا السؤال، لا بدّ من رسم شكل يحقّق المعطيات.

ويتعيّن أن يكون الضلع $\overline{AB}$ أفقيًّا؛ لأن الإحداثيّ y لكلٍّ من النقطتين A, B هو نفسه،

ويجب أن تعيّن النقطة B عن يمين النقطة A، وأن تعيّن

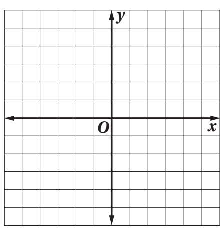
النقطة C عن يمين B وإلى أعلى.

تلاحظ من الشكل أن ΔABC منفرج الزاوية.

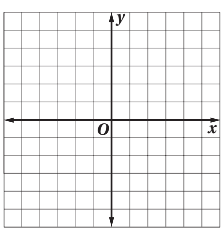
تمارين

عيّن على الشبكة؛ لمساعدتك على حلّ كلٍّ من الأسئلة الآتية:

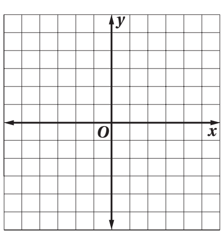
1) ثلاث نقاطٍ R, S, T في المستوى الإحداثي، على أن يكون إحداثيّا x للنقطتين R , S متساويين، ويقع الإحداثي y للنقطة T بين إحداثيَّيْ y للنقطتين R , S، على أن يقل الإحداثي x للنقطة T عن الإحداثيّ x للنقطة R. صنِّف ΔRST وفقًا لزواياه.



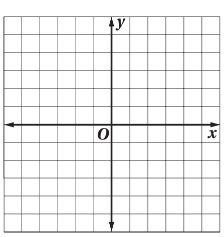
2) ثلاث نقاطٍ ليست على استقامةٍ واحدةٍ في المستوى الإحداثيّ وسمّها J, K, L، على أن يكون إحداثيّا y للنقطتين J , K متساويين، ويكون إحداثيّا x للنقطتين K , L متساويين. صنِّف ΔJKL وفقًا لزواياه.



3) ثلاث نقاط ليست على استقامة واحدة في المستوى الإحداثي وسمّها D, E, F، على أن يكون إحداثيّا x للنقطتين D, E متساويين ومختلفي الإشارة، ويكون إحداثيّا y للنقطتين D , E متساويين، والإحداثيّ x للنقطة F يساوي 0. صنِّف ΔDEF وفقًا لأضلاعه.



4) النقاط G, H, I في المستوى الإحداثي، على أن تقع النقطتان G , H على المحور y الموجب، ويكون الإحداثيّ y للنقطة G مِثْلَي الإحداثيّ y للنقطة H. إذا وقعت I على المحور x الموجب، وكان الإحداثيّ x للنقطة I أكبر من الإحداثيّ y للنقطة G، فصنِّف ΔGHI وفقًا لأضلاعه.

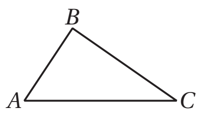


3-2 تدريبات إعادة التعليم

زوايا المثلثات

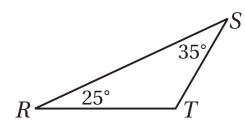
نظرية مجموع قياسات زوايا المثلث:

إذا عُلِم قياسا زاويتين في المثلثُ، فإنه يُمكِنك إيجاد قياس الزاوية الثالثة مستعملًا النظرية الآتية دائمًا:

نظرية مجموع قياسات زوايا المثلث	مجموع قياسات زوايا المثلث يساوي $180°$. في الشكل المجاور: $m\angle A + m\angle B + m\angle C = 180°$. 

ونتيجةً لنظرية مجموع قياسات زوايا المثلث؛ نستطيع القول بأنه في أيِّ مثلثٍ قائمٍ تكون الزاويتان الحادتان متتامتين، وكذلك نستنتج أنه لا يمكن وجود مثلث يحوي أكثر من زاويةٍ قائمةٍ أو أكثر من زاويةٍ منفرجةٍ.

مثال 1 أوجد $m\angle T$.



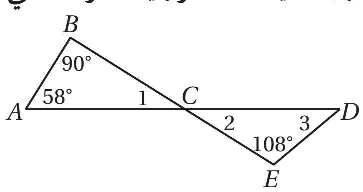
$m\angle R + m\angle S + m\angle T = 180°$ نظرية مجموع زوايا المثلث

$25° + 35° + m\angle T = 180°$ بالتعويض

$60° + m\angle T = 180°$ بالتبسيط

$m\angle T = 120°$ بطرح 60 من الطرفين.

مثال 2 أوجد قياسات الزوايا المرقّمة في الشكل الآتي:



$m\angle 1 + m\angle A + m\angle B = 180°$ نظرية مجموع زوايا المثلث

$m\angle 1 + 58° + 90° = 180°$ بالتعويض

$m\angle 1 + 148° = 180°$ بالتبسيط

$m\angle 1 = 32°$ بطرح $148°$ من الطرفين

$m\angle 2 = 32°$ الزوايا المتقابلة بالرأس متطابقة

$m\angle 3 + m\angle 2 + m\angle E = 180°$ نظرية مجموع زوايا المثلث

$m\angle 3 + 32° + 108° = 180°$ بالتعويض

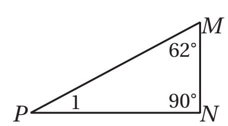
$m\angle 3 + 140° = 180°$ بالتبسيط

$m\angle 3 = 40°$ بطرح $140°$ من الطرفين

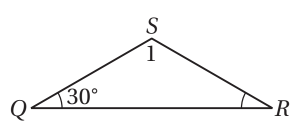
تمارين

أوجد قياسات الزوايا المرقّمة في كلٍّ من الأشكال الآتية:

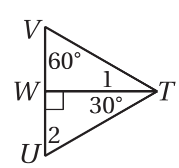
(1



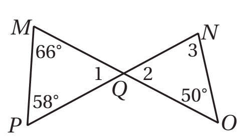
(2



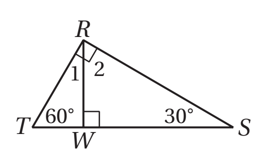
(3



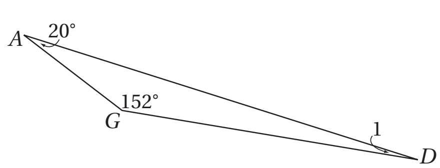
(4



(5



(6

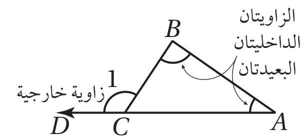


3-2 تدريبات إعادة التعليم (تتمة)

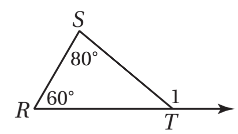
زوايا المثلث

نظريّة الزاوية الخارجيّة:

الزاوية المتشكّلة من أحد أضلاع المثلث وامتداد الضلع الآخر عند كلّ رأس من رؤوسه تُسّمى **زاوية خارجية للمثلث**. ويقابل كلّ زاوية خارجيّة للمثلث **زاويتان داخليّتان بعيدتان**، وهما زاويتان داخليّتان غير مجاورتين لها. في الشكل الآتي $\angle A, \angle B$ هما الزاويتان الداخليّتان البعيدتان بالنسبة للزاوية الخارجيّة $\angle DCB$.

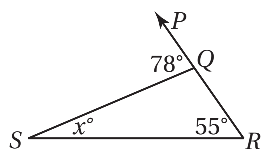
نظرية الزاوية الخارجيّة	قياس الزاوية الخارجيّة للمثلث يساوي مجموع قياسَي الزاويتين الداخليّتين البعيدتين. $m\angle 1 = m\angle A + m\angle B$	

مثال 1 أوجد $m\angle 1$.



$m\angle 1 = m\angle R + m\angle S$	نظرية الزاوية الخارجية
$= 60° + 80°$	بالتعويض
$= 140°$	بالجمع

مثال 2 أوجد قيمة x.

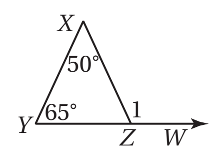


$m\angle PQS = m\angle R + m\angle S$	نظرية الزاوية الخارجية
$78 = 55 + x$	بالتعويض
$23 = x$	بطرح 55 من الطرفين

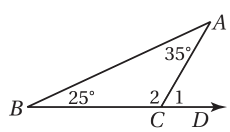
تمارين

أوجد قياسات الزوايا المرقّمة في كلٍّ من الأشكال الآتية:

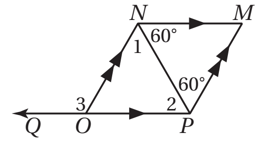
1)



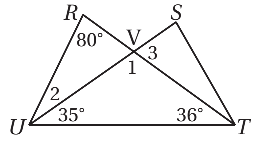
2)



3)

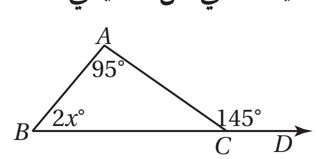


4)

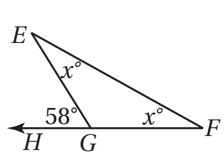


أوجد قيمة x في كلٍّ مما يأتي:

5)



6)



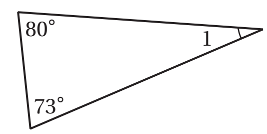
الاسم ______________________ التاريخ ____________

3-2 تدريبات المهارات

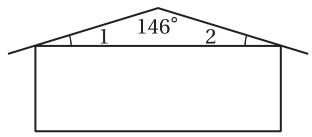
زوايا المثلث

أوجد قياس كلّ زاوية مرقّمة في السؤالين الآتيين:

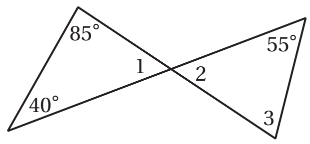
(1



(2



أوجد كلًّا من القياسات الآتية في الشكل المجاور.

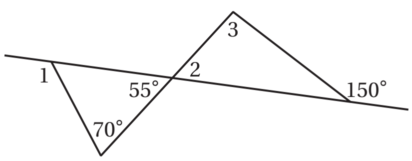


3) $m\angle 1$

4) $m\angle 2$

5) $m\angle 3$

أوجد كلًّا من القياسات الآتية في الشكل المجاور.

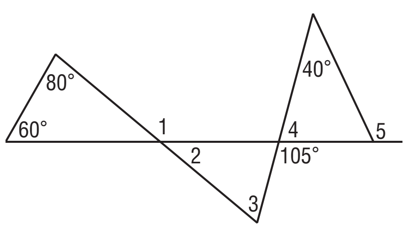


6) $m\angle 1$

7) $m\angle 2$

8) $m\angle 3$

أوجد كلًّا من القياسات الآتية في الشكل المجاور.



9) $m\angle 1$

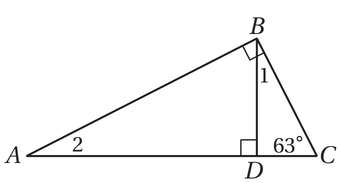
10) $m\angle 2$

11) $m\angle 3$

12) $m\angle 4$

13) $m\angle 5$

أوجد كلًّا من القياسين الآتيين في الشكل المجاور.



14) $m\angle 1$

15) $m\angle 2$

3-2 تدريبات حلّ المسألة

زوايا المثلث

لعبة تحدي: قام خالد ومحمد بإجراء لعبة التحدي، بأن يعطي أحدهما مواصفات مثلث، ويقوم الآخر برسم المثلث إذا كان ممكنًا، وإلا فعليه أن يقول مباشرة: غير ممكن.

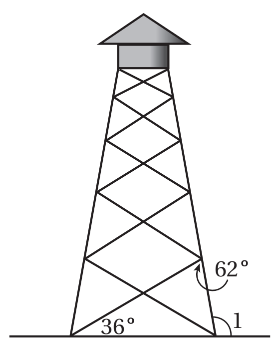
1) إذا طلب خالد إلى محمدٍ رسم مثلث فيه زاوية قائمة وزاوية منفرجة، فهل يمكن لمحمدٍ رسم المثلث؟ ولماذا؟

2) إذا طلب محمد إلى خالد رسم مثلث قائم الزاوية، وقياس الزاويتين الأخريين °20، °80، فهل يمكن لخالدٍ رسم هذا المثلث؟ ولماذا؟

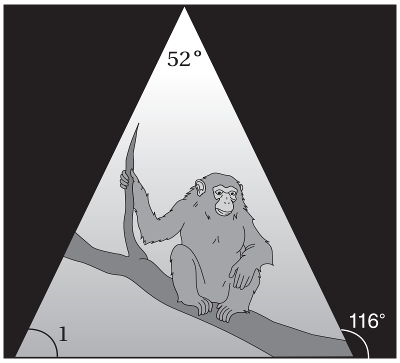
3) إذا طلب خالد إلى محمدٍ رسم مثلث متطابق الأضلاع، ومتطابق الزوايا، فهل يمكن لمحمدٍ رسم هذا المثلث؟

4) إذا طلب محمد إلى خالد رسم مثلث قياسات زواياه: °70، °30، °80، وقياس زاوية من زواياه الخارجية °120، فهل يمكن لخالد رسم هذا المثلث؟ ولماذا؟

5) أبراج: يرتكز برج مراقبةٍ على مجموعةٍ من الدعامات والقوائم، إذا كان قياس زاويتين على البرج كما هو موضح أدناه، فما قياس الزاوية 1؟

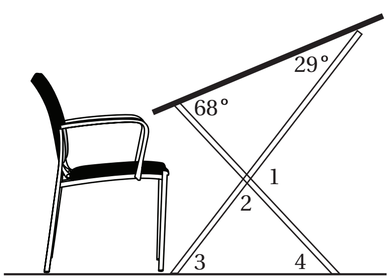


6) حديقة حيوانات: تُضاء بيوت القُرود ليلًا عن طريق ضوء علويّ. فإذا صنع شعاعان من الأشعة الصادرة من الضوء الشكل التالي:



فما قياس الزاوية 1؟

7) طاولة رسم: اشترى سامي طاولة رسم، وثبّتها بطريقة تمكّنه من الرسم بسهولة وهو جالس على كرسيه، وقد قاس سامي الزاويتين المتكوّنتين بين الساقين وسطح الطاولة؛ ليستطيع أن يُعيد الطاولة إلى وضعها الحاليّ إذا أراد نقلها.



a) أيّ الزوايا الأربعة المرقّمة في الشكل أعلاه يمكن لسامي أن يحدّدها من معرفته قياس كلٍّ من الزاويتين المتشكّلتين من سطح الطاولة والساقين؟ وما قياساتها؟

b) ما الاستنتاج الذي يمكن أن يتوصّل إليه سامي بخصوص الزوايا غير المعلومة الأخرى قبل أن يقيسها؛ ليجد قياساتها الدقيقة؟

3-2 التدريبات الإثرائيّة

إيجاد قياسات الزوايا في المثلث:

يمكنك استعمال الجبر لحلّ مسائل تتضمّن قياسات زوايا المثلث.

مثال **في المثلث ABC، إذا كان $m\angle A$ مِثْلَيْ $m\angle B$، ويزيد $m\angle C$ على $m\angle B$ بمقدار $8°$، فما قياس كلِّ زاويةٍ من زوايا هذا المثلث؟**

اكتب معادلة ثم حُلّها، افترض أن $x° = m\angle B$

$$m\angle A + m\angle B + m\angle C = 180°$$
$$2x° + x° + (x° + 8°) = 180°$$
$$4x° + 8° = 180°$$
$$4x° = 172°$$
$$x° = 43°$$

ولذلك فإن: $m\angle A = 2(43°) = 86°,\ m\angle B = 43°,\ m\angle C = 43° + 8° = 51°$.

حُلَّ كلًّا من المسائل الآتية:

1) في المثلث DEF، إذا كان $m\angle E$ ثلاثة أمثال $m\angle D$، ويقلّ $m\angle F$ عن $m\angle E$ بمقدار $9°$، فما قياسات زوايا المثلث؟

2) في المثلث RST، يزيد $m\angle T$ على $m\angle R$ بمقدار $5°$، ويقلّ $m\angle S$ عن $m\angle T$ بمقدار $10°$، فما قياسات زوايا المثلث؟

3) في المثلث JKL، إذا كان $m\angle K$ أربعة أمثال $m\angle J$، وكان $m\angle L$ خمسة أمثال $m\angle J$، فما قياسات زوايا المثلث؟

4) في المثلث XYZ، يزيد $m\angle Z$ على مثْلَي $m\angle X$ بمقدار $2°$، ويقلّ $m\angle Y$ عن مثْلَي $m\angle X$ بمقدار $7°$، فما قياسات زوايا المثلث؟

5) في المثلث GHI، إذا كان $m\angle H$ يزيد $20°$ على $m\angle G$، وكان $m\angle G$ يزيد $8°$ على $m\angle I$، فما قياسات زوايا المثلث؟

6) في المثلث MNO، إذا كان $m\angle M$ يساوي $m\angle N$، ويزيد $m\angle O$ على ثلاثة أمثال $m\angle N$ بمقدار $5°$، فما قياسات زوايا المثلث؟

7) في المثلث STU، إذا كان $m\angle U$ نصف $m\angle T$، ويزيد $m\angle S$ على $m\angle T$ بمقدار $30°$، فما قياسات زوايا المثلث؟

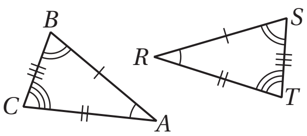
8) في المثلث PQR، إذا كان $m\angle P$ يساوي $m\angle Q$، ويقلّ $m\angle R$ عن $m\angle P$ بمقدار $24°$، فما قياسات زوايا المثلث؟

9) اكتب مسألة عن قياسات الزوايا في المثلث، بحيث تكون مشابهةً للمسائل السابقة ثم حلَّها.

الاسم ________________ التاريخ ________________

3-3 تدريبات إعادة التعليم

المثلثات المتطابقة



التطابق والعناصر المتناظرة:

المثلثات التي لها القياس نفسه والشكل نفسه تُسمَّى **مثلثات متطابقة**، ويتطابق مثلثان إذا وفقط إذا كانت **العناصر المتناظرة** متطابقة؛ أي أزواج الزوايا المتناظرة الثلاث متطابقة، وكانت أزواج الأضلاع المتناظرة الثلاثة متطابقة.

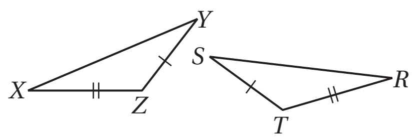
نظريّة الزاوية الثالثة	إذا تطابقت زاويتان في مثلث مع زاويتين في مثلث آخر، فإن الزاوية الثالثة في المثلث الأول تطابق الزاوية الثالثة في المثلث الثاني.

مثال

إذا كان $\Delta XYZ \cong \Delta RST$، فسمّ أزواج الزوايا المتطابقة وأزواج الأضلاع المتطابقة .

$\angle X \cong \angle R, \angle Y \cong \angle S, \angle Z \cong \angle T$

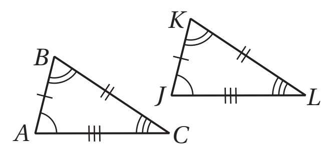
$\overline{XY} \cong \overline{RS}$, $\overline{XZ} \cong \overline{RT}$, $\overline{YZ} \cong \overline{ST}$



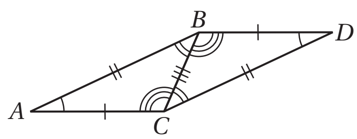
تمارين

في كلٍّ من الأسئلة الآتية، بيّن أن المضلعين متطابقان بتعيين جميع العناصر المتناظرة المتطابقة، ثم اكتب عبارة التطابق.

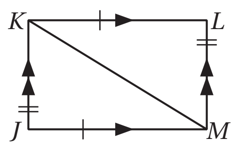
(1



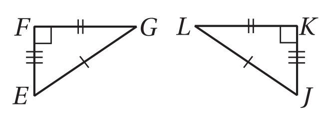
(2



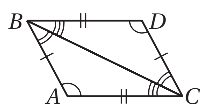
(3



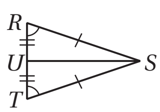
(4



(5



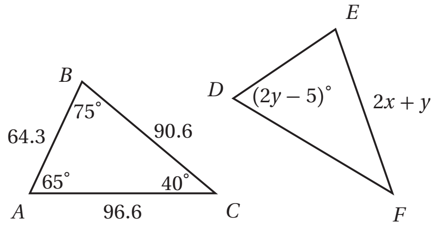
(6



في الشكل المجاور، إذا كان $\Delta ABC \cong \Delta DEF$، فأوجد قيمة كلٍّ ممّا يأتي:

y (7

x (8



3-3 تدريبات إعادة التعليم (تتمة)

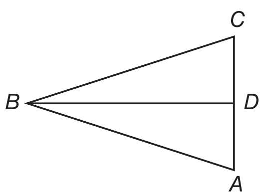
المثلثات المتطابقة

إثبات تطابق مثلثين:

يتطابق مثلثان إذا وفقط إذا كانت عناصرهما المتناظرة متطابقة، وتتضمن العناصر المتناظرة الزوايا والأضلاع. إن العبارة " إذا.. وفقط إذا" تعني أن العبارة الشرطية وعكسها صحيحتان.

وعند إثبات تطابق مثلثين، يمكن استعمال خصائص الانعكاس والتماثل والتعدي للتطابق.

مثال اكتب برهانًا ذا عمودين.



المعطيات: $\angle BAD \cong \angle BCD$, $\overline{AD} \cong \overline{CD}$, $\overline{AB} \cong \overline{CB}$ ، $\overline{BD}$ تنصف $\angle ABC$.

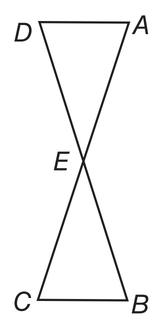
المطلوب: إثبات أن $\Delta ABD \cong \Delta CBD$.

البرهان:

العبارات	المبرّرات
1) $\overline{AB} \cong \overline{CB}, \overline{AD} \cong \overline{CD}$	**1)** معطيات.
2) $\overline{BD} \cong \overline{BD}$	**2)** خاصية الانعكاس للتطابق.
3) $\angle BAD \cong \angle BCD$	**3)** معطيات.
4) $\angle ABD \cong \angle CBD$	**4)** تعريف منصف الزاوية.
5) $\angle BDA \cong \angle BDC$	**5)** نظرية الزاوية الثالثة.
6) $\Delta ABD \cong \Delta CBD$	**6)** جميع العناصر المتناظرة متطابقة.

تمارين

1) اكتب برهانًا ذا عمودين.



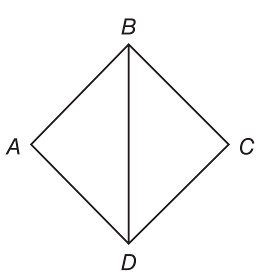
المعطيات: $\angle A \cong \angle C, \angle D \cong \angle B,$

$\overline{AD} \cong \overline{CB}$, $\overline{AE} \cong \overline{CE}$

$\overline{BD}$ تنصف $\overline{AC}$

المطلوب: إثبات أن $\Delta AED \cong \Delta CEB$

2) اكتب برهانًا حرًّا.



المعطيات: $\overline{BD}$ تنصف كلًّا من $\angle ABC$ ، $\angle ADC$ ،

$\overline{AB} \cong \overline{CB}$, $\overline{AB} \cong \overline{AD}$, $\overline{CB} \cong \overline{DC}$

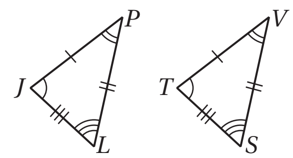
المطلوب: إثبات أن $\Delta ABD \cong \Delta CBD$

3-3 تدريبات المهارات

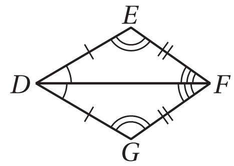
المثلثات المتطابقة

بيّن تطابق المثلثين في كلٍّ من السؤالين الآتيين، بتعيين جميع العناصر المتناظرة والمتطابقة، ثم اكتب عبارة التطابق.

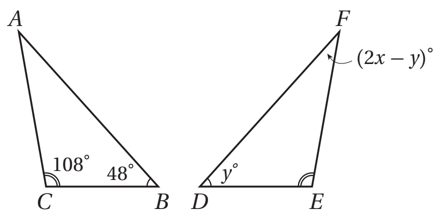
(1



(2



في الشكل المجاور، إذا كان: $\Delta ABC \cong \Delta FDE$، فأوجد قيمة كلٍّ ممَّا يأتي:



(3 y

(4 x

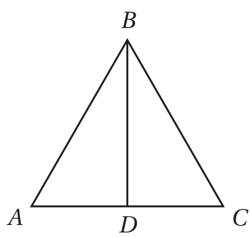
(5 برهان: اكتب برهانًا ذا عمودين.

المعطيات: $\overline{AB} \cong \overline{CB}$, $\overline{AD} \cong \overline{CD}$, $\angle ABD \cong \angle CBD$

$\angle ADB \cong \angle CDB$

المطلوب: إثبات أن $\Delta ABD \cong \Delta CBD$.

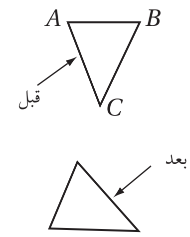
البرهان:



3-3 تدريبات حل المسألة

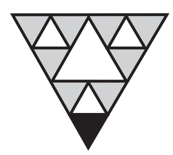
المثلثات المتطابقة

1) مناظر: علّق منصورٌ منظرًا طبيعيًّا مُحاطًا بإطارٍ مثلثٍ الشكل على حائط في غرفته.

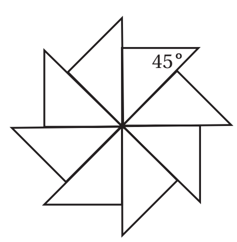


وفي أحد الأيام سقط الإطار على الأرض من دون أن ينكسر أو أن ينثني، والشكل أعلاه يبيّن الإطار قبل سقوطه وبعده. اكتب أسماء رؤوس الإطار بعد السقوط تبعًا للتسمية المبيَّنة على الإطار قبل السقوط.

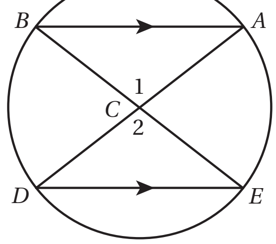
2) مثلث سيربنسكي: يبيّن الشكل أدناه جزءًا من مثلث سيربنسكي، ويمتاز هذا المثلث بأن المثلثات الموجودة فيه جميعها متطابقة الأضلاع، ما عدد المثلثات الظاهرة في هذا الجزء من مثلث سيربنسكي التي تطابق المثلث المظلّل في الركن السفلي؟



3) تصميم هندسي: الشكل أدناه نموذج لنقش على أحد الألحفة، وهو عبارة عن مثلثات متطابقة ناتجة عن تكرار رسم المثلث المتطابق الضلعين القائم الزاوية نفسه، ما القياسان المجهولان لزاويتي هذا المثلث؟



4) قامت هند بزخرفة جدار غرفتها بالرسوم المبينة في الشكل أدناه.



فسألتها أختها: هل DCE وَ ACB متطابقان؟

فأجابتها: ما عليك سوى قياس $\overline{AB}$ وَ $\overline{DE}$، فإذا كانتا متطابقتين، فالمثلثان متطابقان.

ما الأساس الذي بنت هند إجابتها عليه؟

5) خرائط: لاحظ سامي على خريطة للحيّ أن المثلث الذي رؤوسه المركز التجاري(S) والمسجد (M) والحديقة (P)، يطابق المثلث الذي رؤوسه بيت عامر(A) وبيت فايز (F) وبيت حسن (H)؛ أي أن $\Delta SMP \cong \Delta AFH$.

a) إذا كانت المسافة بين المركز التجاريّ والحديقة $1\,km$، فأيّ مسار في ΔAFH يطابق هذه المسافة؟

b) إذا كان قياس$\angle MPS$ يساوي $40°$، فأيُّ زوايا ΔAFH تطابق هذه الزاوية ؟

الاسم ________________ التاريخ ________

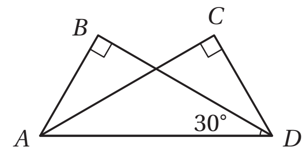
3-3 التدريبات الإثرائيّة

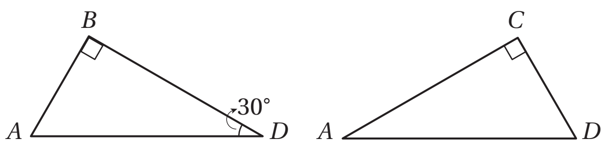
المثلثات المتداخلة

عندما تتداخل المثلثات، فإنها تشترك في بعض العناصر المتناظرة أحيانًا، ولتحديد العناصر المتناظرة بسهولةٍ، حاول أن تُعيد رسم المثلثين منفصلين.

مثال

في الشكل الآتي: $\triangle ABD \cong \triangle DCA$, $m\angle BDA = 30^\circ$، أوجد $m\angle CAD$, $m\angle CDA$.





أعد رسم $\triangle ABD$, $\triangle DCA$ منفصلين على النحو الآتي:

والآن تلاحظ أن $\angle BDA \cong \angle CAD$؛ لأنهما عنصران متناظران في مثلثين متطابقين؛ لذا فإن $m\angle CAD = 30^\circ$،

وباستعمال نظرية مجموع زوايا المثلث تجد أن:

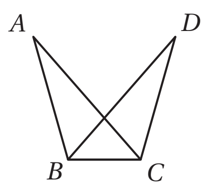
$$m\angle CDA = 180^\circ - (90^\circ + 30^\circ) = 60^\circ$$

تمارين

1) في الشكل المجاور:

$\triangle ABC \cong \triangle DCB$, $m\angle ABC = 110^\circ$, $m\angle D = 20^\circ$

أوجد $m\angle ACB$, $m\angle DCB$.

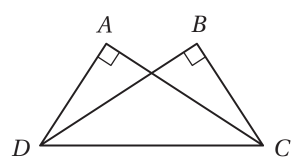


2) اكتب برهانًا ذا عمودين.

المعطيات: $\angle A$, $\angle B$ زاويتان قائمتان،

$\angle ACD \cong \angle BDC$, $\overline{AD} \cong \overline{BC}$, $\overline{AC} \cong \overline{BD}$

المطلوب: إثبات أن $\triangle ADC \cong \triangle BCD$.



3-4 تدريبات إعادة التعليم

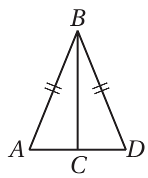
إثبات تطابق المثلثات: SSS, SAS

المسلّمة SSS:

تعلم أن المثلثين يكونان متطابقين إذا كانت أضلاعهما المتناظرة متطابقة، وكانت زواياهما المتناظرة متطابقة. المسلّمة: ضلع – ضلع – ضلع (SSS)، وتمكّنك من أن تثبت تطابق مثلثين إذا علمت أن أضلاعهما المتناظرة متطابقة .

مسلمة التطابق بثلاثة أضلاع (SSS):	إذا طابقت الأضلاع الثلاثة في مثلث الأضلاع المناظرة لها في مثلثٍ آخر، فإن المثلثين متطابقان.

مثال اكتب برهانًا ذا عمودين.



المعطيات: $\overline{AB} \cong \overline{DB}$, C نقطة منتصف $\overline{AD}$.

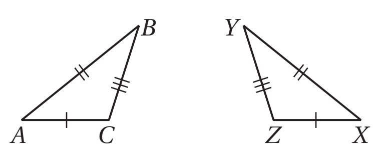
المطلوب: إثبات أن $\triangle ABC \cong \triangle DBC$.

العبارات	المبرّرات
1) $\overline{AB} \cong \overline{DB}$	1) معطيات
2) C **نقطة منتصف** $\overline{AD}$	2) معطيات
3) $\overline{AC} \cong \overline{DC}$	3) تعريف نقطة المنتصف
4) $\overline{BC} \cong \overline{BC}$	4) خاصية الانعكاس للتطابق
5) $\triangle ABC \cong \triangle DBC$	5) المسلّمة SSS

تمارين

اكتب برهانًا من النوع المحدد في كلٍّ من السؤالين الآتيين:

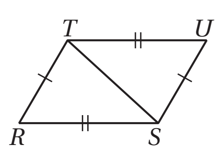
1) برهان ذو عمودين:



المعطيات: $\overline{AB} \cong \overline{XY}, \overline{AC} \cong \overline{XZ}, \overline{BC} \cong \overline{YZ}$

المطلوب: إثبات أن $\triangle ABC \cong \triangle XYZ$

2) برهان تسلسلي:



المعطيات: $\overline{RS} \cong \overline{UT}, \overline{RT} \cong \overline{US}$

المطلوب: إثبات أن $\triangle RST \cong \triangle UTS$

3-4 تدريبات إعادة التعليم (تتمة)

إثبات تطابق المثلثات: SSS, SAS

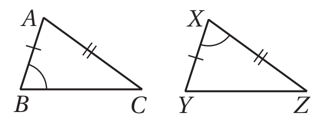
مسلّمة التطابق بضلعين وزاوية محصورة بينهما SAS:

يمكنك إثبات تطابق مثلثين بطريقةٍ أخرى مستعملًا المسلّمة: ضلع زاوية ضلع (SAS) .

مسلّمة التطابق بضلعين وزاويةٍ **محصورةٍ** بينهما (SAS)	إذا طابق ضلعان و**الزاوية المحصورة** بينهما في مثلثٍ نظائرها في مثلث آخر، فإن المثلثين متطابقان.

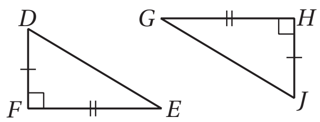
مثال **أي أزواج المثلثات الآتية يُمكِنك إثبات تطابقها باستعمال المسلّمة SAS.**

a)



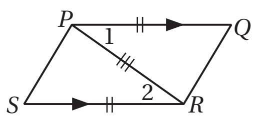
الزاوية المحددة في $\triangle ABC$ ليست محصورة بين الضلعين $\overline{AB}$ و $\overline{AC}$. وبناءً عليه لا يمكنك إثبات تطابق هذين المثلثين مستعملًا المسلّمة SAS.

b)



الزاويتان القائمتان متطابقتان، وهما محصورتان بين الأضلاع المتناظرة المتطابقة، وبناءً عليه فإن $\triangle DEF \cong \triangle JGH$ وفق المسلّمة SAS.

c)



$\angle 1, \angle 2$ متطابقتان؛ لأنهما متبادلتان داخليًّا بين مستقيمين متوازيين ومستقيم يقطعهما، وهما محصورتان بين الأضلاع المتناظرة المتطابقة. وبناءً عليه فإن $\triangle PSR \cong \triangle RQP$ وفق المسلّمة SAS.

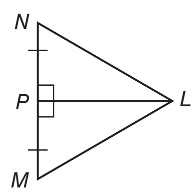
تمارين

اكتب برهانًا من النوع المحدد في كلٍّ من الأسئلة الآتية.

1) برهان ذو عمودين.

المعطيات: $\overline{NP} \perp \overline{PL}$, $\overline{NP} \cong \overline{PM}$

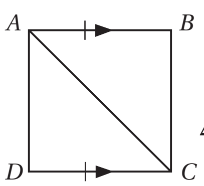
المطلوب: إثبات أن $\triangle NPL \cong \triangle MPL$



2) برهان تسلسلي:

المعطيات: $\overline{AB} \cong \overline{CD}$, $\overline{AB} \parallel \overline{CD}$

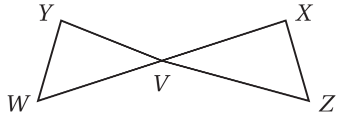
المطلوب: إثبات أن $\triangle ACD \cong \triangle CAB$



3) برهان حر.

المعطيات: V نقطة منتصف $\overline{YZ}$ و V نقطة منتصف $\overline{WX}$.

المطلوب: إثبات أن $\triangle XVZ \cong \triangle WVY$.



3-4 تدريبات المهارات

إثبات تطابق المثلثات: SSS, SAS

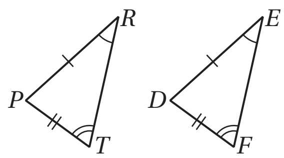
حدّد ما إذا كان $\triangle ABC \cong \triangle KLM$ في كلٍّ من السؤالين الآتيين ، وبرّر إجابتك.

1) $A(-3, 3), B(-1, 3), C(-3, 1), K(1, 4), L(3, 4), M(1, 6)$

2) $A(-4, -2), B(-4, 1), C(-1, -1), K(0, -2), L(0, 1), M(4, 1)$

برهان: اكتب برهانًا من النوع المحدّد في كلٍّ من السؤالين الآتيين:

3) برهان تسلسلي.

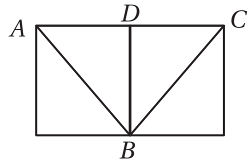


المعطيات: $\overline{PR} \cong \overline{DE}, \overline{PT} \cong \overline{DF}$

$\angle R \cong \angle E, \angle T \cong \angle F$

المطلوب: إثبات أن $\triangle PRT \cong \triangle DEF$

4) برهان ذو عمودين.



المعطيات: $\overline{AB} \cong \overline{CB}$ و D نقطة منتصف $\overline{AC}$.

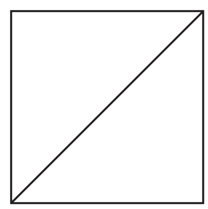
المطلوب: إثبات أن $\triangle ABD \cong \triangle CBD$.

3-4 تدريبات حلّ المسألة

إثبات تطابق المثلثات: SSS, SAS

1) **أعواد:** تقوم كلٌّ من هند ومها بصنع مجسم باستعمال أعوادٍ خشبيةٍ، فإذا تناولت كلٌّ منهما 3 أعواد أطوالها 30 cm, 28 cm, 29 cm وصنعت مثلثًا، فهل يمكن أن تحصلا على مثلثين غير متطابقين؟ ولماذا؟

2) **حلوى:** خبزت سعاد رقاقتين لصنع البقلاوة، وهناك علامات على الطبق الذي خبزتها فيه، مكّنتها من تقسيم الرقاقة مربّعاتٍ كبيرةً، ثم قسّمت كلّ مربّع قطريًّا لتكوين مثلثين متطابقين.
ما المسلّمة التي يمكنك استعمالها لإثبات تطابق المثلثين؟

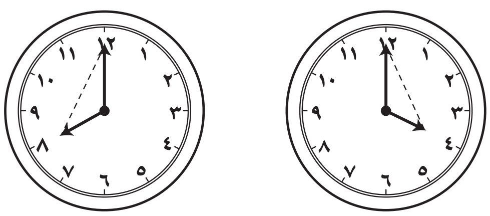


3) **ورق جدران:** يستعمل سليمان ورقة جدران على شكل مثلث متطابق الضلعين، وزواياه هي: °77 ,°77 ,°26، وأراد أن يقسم الورقة جزأين متطابقين، فقسَمها من رأس الزاوية °26 إلى منتصف الضلع المقابل، وقال إن القطعتين متطابقتان؛ لأنه قسَمها من نقطة منتصف أحد الأضلاع. فهل هذه المعلومة كافية لإثبات التطابق؟ وضّح إجابتك.

4) **بلاط:** يعمل مُصطفى في تركيب البلاط، ولديه صندوقان من البلاط، يحوي كلٌّ منهما على بلاطات متطابقةً فيما بينها ومتطابقة الأضلاع، إذا أراد أن يتأكدً من أن جميع البلاط في الصندوقين متطابق، فما الذي يتعيَّن عليه فعله؟ وضّح إجابتك.

5) **عقارب الساعة:** إذا اعتبرنا عقربَي الساعة يشكّلان ضلعين في مثلث، فحدّد هل المثلثان متطابقان في كلٍّ من الفقرتين a, b. ولماذا؟

a) عندما تكون الساعة 4، عندما تكون الساعة 8؟



b) عندما تكون الساعة 4 وعندما تكون مثلث الساعة 8 في ساعتين مختلفتين بأطوال عقاربها؟

c) اقترح توقيتًا يتطابق مثلثه مع مثلث الساعة 5.

3-4 التدريبات الإثرائيّة

تطابق المثلثات القائمة :

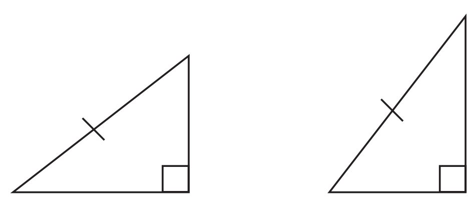
عرفنا تطابق مثلثين، ثم اكتفينا ببعض العناصر لإثبات تطابق مثلثين، إذا كان المثلثان قائمين، فهل يمكن تقليل عدد العناصر اللّازمة للتطابق.

انفِ أو أثبت صحة كل من العبارات الآتية:

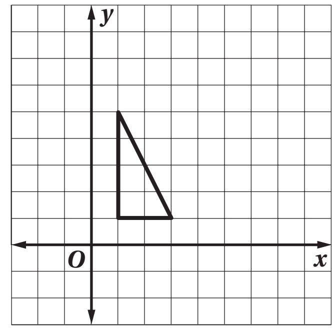
1) يتطابق مثلثان قائمان، إذا تطابق ضلعا الزاوية القائمة في المثلث الأول مع نظائرها من المثلث الثاني؟

2) يتطابق مثلثان قائمان، إذا تطابق وتر وأحد ضلعي الزاوية القائمة من الأول مع نظائرها من المثلث الثاني.

3) يتطابق مثلثان قائمان إذا تطابق وتراهما.



4) استعمل معلومات تطابق المثلث القائم لرسم مثلثٍ يطابق المثلث المرسوم على الشبكة، وحدِّد إحداثيات رؤوسه.



الاسم ______________ التاريخ ______________

3-5 تدريبات إعادة التعليم

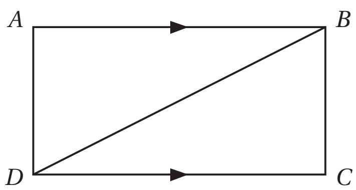
إثبات تطابق المثلثات: ASA, AAS

مسلّمة التطابق بزاويتين وضلع محصور بينهما (ASA):

يمكنك إثبات تطابق مثلثين مستعملاً المسلّمة: زاوية – ضلع – زاوية (ASA) .

مسلّمة التطابق بزاويتين وضلع محصور بينهما **(ASA)**	إذا طابقت زاويتان و**الضلع المحصور** بينهما في مثلث نظائرهما في مثلثٍ آخر، فإن المثلثين متطابقان.

مثال اكتب برهانًا ذا عمودين.



المعطيات: $\overline{AB} \parallel \overline{CD}$

المطلوب: إثبات أن $\Delta ABD \cong \Delta CDB$

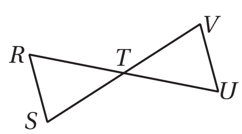
البرهان:

العبارات	المبرّرات
1) $\overline{AB} \parallel \overline{CD}$	**1)** معطيات
2) $\angle CBD \cong \angle ADB$	**2)** نظرية الزاويتين المتبادلتين داخليًّا
3) $\angle ABD \cong \angle BDC$	**3)** نظرية الزاويتين المتبادلتين داخليًّا
4) $\overline{BD} \cong \overline{BD}$	**4)** خاصية الانعكاس للتطابق
5) $\Delta ABD \cong \Delta CDB$	**5)** المسلّمة ASA

تمارين

اكتب برهانًا من النوع المحدّد في كلٍّ من السؤالين الآتيين:

1) برهان ذو عمودين.

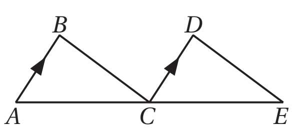


المعطيات: $\angle S \cong \angle V$

T نقطة منتصف $\overline{SV}$.

المطلوب: إثبات أن $\Delta RTS \cong \Delta UTV$

2) برهان حر.



المعطيات: $\overline{AE}$ تنصف $\overline{CD}$

$\overline{AB} \parallel \overline{CD}$ و $\angle E \cong \angle BCA$

المطلوب: إثبات أن $\Delta ABC \cong \Delta CDE$

3-5 تدريبات إعادة التعليم (تتمة)

إثبات تطابق المثلثات: ASA, AAS

التطابق بزاويتين وضلع غير محصور بينهما (AAS):

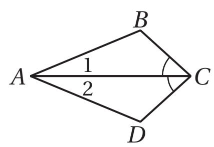
يمكنك إثبات تطابق مثلثين مستعملًا نظرية: زاوية – زاوية – ضلع (AAS) .

التطابق بزاويتين وضلع غير محصورٍ بينهما (AAS)	إذا طابقت زاويتان وضلع غير محصور بينهما في مثلث نظائرها في مثلث آخر فإن المثلثين متطابقان.

لقد أصبح لديك الآن خمس طرائق لإثبات تطابق مثلثين هي:

- المسلّمة ASA
- المسلّمة SSS
- المسلّمة AAS
- المسلّمة SAS

مثال **في الشكل المجاور: $\angle BCA \cong \angle DCA$، ما الأضلاع المتطابقة في الشكل؟ ما العنصران المتناظران الآخران اللذان يتعيّن أن يكونا متطابقين، حتى يكون المثلثان متطابقين وفق النظرية AAS؟**



الأضلاع المتطابقة: $\overline{AC} \cong \overline{AC}$ وفق خاصية الانعكاس للتطابق.

لا يمكن أن يكون العنصران الآخران هما $\angle 1$ و$\angle 2$ ؛ لأن $\overline{AC}$ يكون الضلع المحصور بينهما في هذه الحالة؛ لذا يتعين أن تكون $\angle B \cong \angle D$، وعندها يكون $\Delta ABC \cong \Delta ADC$ وفق النظرية AAS.

تمارين

برهان: اكتب برهانًا من النوع المحدّد في كل من السؤالين الآتيين:

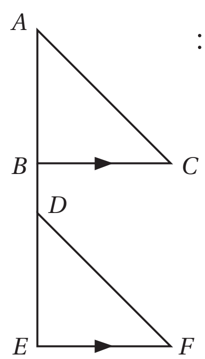
1) برهان ذو عمودين.

المعطيات: $\overline{BC} \parallel \overline{EF}$

$\overline{AB} \cong \overline{ED}$

$\angle C \cong \angle F$

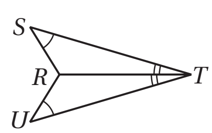
المطلوب: إثبات أن $\Delta ABC \cong \Delta DEF$.



2) برهان تسلسلي.

المعطيات: $\angle S \cong \angle U$; $\overline{TR}$ تنصّف $\angle STU$

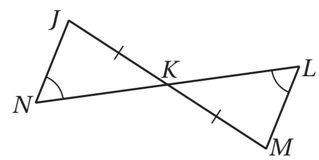
المطلوب: إثبات أن $\angle SRT \cong \angle URT$



3-5 تدريبات المهارات

إثبات تطابق المثلثات: ASA, AAS

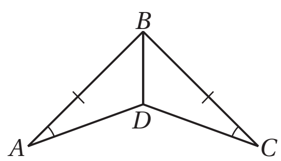
1) اكتب برهانًا تسلسليًا.



المعطيات: $\angle N \cong \angle L$ ، $\overline{JK} \cong \overline{MK}$.

المطلوب: إثبات أن $\triangle JKN \cong \triangle MKL$.

2) اكتب برهانًا تسلسليًا



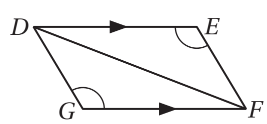
المعطيات: $\overline{AB} \cong \overline{CB}$

$\angle A \cong \angle C$.

$\overline{DB}$ تنصّف $\angle ABC$.

المطلوب: إثبات أن $\overline{AD} \cong \overline{CD}$.

3) اكتب برهانًا حرًا.



المعطيات: $\overline{DE} \parallel \overline{FG}$.

$\angle E \cong \angle G$

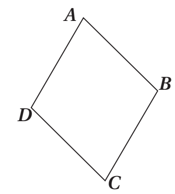
المطلوب: إثبات أن $\triangle DFG \cong \triangle FDE$

الاسم ____________________ التاريخ ____________

3-5 تدريبات حلّ المسألة

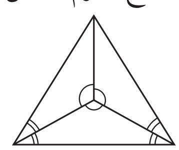
إثبات تطابق المثلثات: ASA, AAS

1) أراد أخوان اقتسام قطعة الأرض التالية بالتساوي،



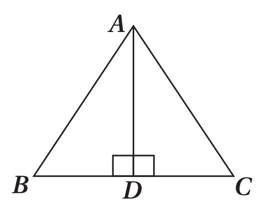
فقام أحدهما بوضع حدٍّ فاصلٍ $\overline{DB}$ يقسم الأرض إلى قطعتين متطابقتين، خمن المعلومة التي كانت لديه حتى يتيقن من أن قطعتي الأرض متطابقتان؟

2) هرم: أراد خالد صنع الهرم المبين بالشكل من الورق المقوى،

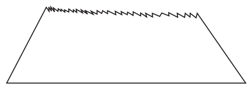


فاستنتج أن عليه القيام بقصِّ 3 مثلثاتٍ متطابقة على الأقل. فهل استنتاجه صحيح؟ برِّر إجابتك.

3) نجارة: لدى نجار قطعة خشبية على شكل مثلث متطابق الأضلاع، إذا أراد أن يقسمها إلى قسمين متطابقين، فرسم بالقلم قطعةً مستقيمةً من النقطة A وعموديةً على الضلع المقابل لِـA، فهل ما قام به النجار يضمن تطابق المثلثين الناتجين؟ برِّر ذلك.



4) ديكور: استعمل مهندس ديكور 5 أنواع مختلفة من القطع الزجاجية المثلثة الشكل لعمل ديكور للحائط، إذا وجد إحدى قطع الزجاج مكسورة والباقي منها هو الجزء المبين أدناه،



فهل يستطيع معرفة هذه القطعة من أي نوع من الأنواع الخمسة المختلفة التي استعملها؟ برِّر إجابتك.

5) صيانة الحدائق: تحتاج إدارة حديقة إلى غطاء على هيئة مثلث لتغطية حقل على هيئة مثلث متطابق الأضلاع، طول ضلعه $200\,ft$.

a) إذا وُجد غطاء على هيئة مثلث فيه زاويتان، قياس كلٍّ منهما $60°$، وطول أحد أضلاعه $200\,ft$، فهل هذا الغطاء مناسب لذلك الحقل؟ وضِّح إجابتك.

b) إذا علمت أن قياس كلٍّ من الزوايا الثلاث في غطاءٍ مثلث الشكل يساوي $60°$، فهل يكون هذا الغطاء مناسبًا لذلك الحقل بالضرورة؟

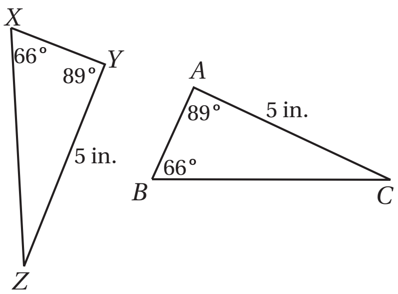
الاسم ______________________________ التاريخ ______________

3-5 التدريبات الإثرائيّة

هل يمكن إثبات تطابق المثلثات باستعمال AAA؟

لقد تعلمت إثبات تطابق المثلثات باستعمال المسلّمتين SSS , ASA، فهل تعتقد أنه يمكنك إثبات تطابق المثلثات باستعمال AAA؟

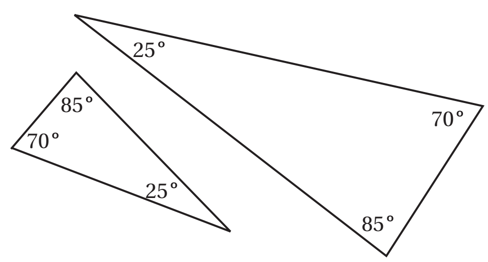
استقصِ النظريّة AAS التي تنصّ على أنه يتطابق المثلثان إذا طابق زوجٌ من الزوايا المتناظرة وضلع غير محصور في المثلث الأول نظائرها في المثلث الثاني، فعلى سبيل المثال، في الشكل المجاور: $\overline{AC} \cong \overline{YZ}, \angle A \cong \angle Y, \angle B \cong \angle X$



1) ارجع إلى الشكل السابق، وأوجد قياس الزاوية المجهولة في المثلث الأول، وأوجد قياس الزاوية المجهولة في المثلث الثاني.

2) مستعملًا المعلومات التي في السؤال 1، ما المسلّمة التي يُمكِنك استعمالها الآن لإثبات تطابق المثلثين؟

والآن استقصِ التخمين AAA الذي ينصّ على أنه يتطابق مثلثان إذا كانت الأزواج الثلاثة من الزوايا المتناظرة متطابقة، والمثلثان الآتيان يوضِّحان التخمين AAA.



3) هل هذان المثلثان متطابقان؟ وضِّح إجابتك.

4) هل يمكنك رسم مثلثين زواياهما المتناظرة الثلاث متطابقة ولكنهما غير متطابقين؟ وهل يمكنك استعمال AAA لإثبات تطابق مثلثين؟

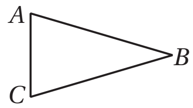
5) ما الخاصيّة التي يحقّقها هذان المثلثان المرسومان وفق AAA؟

3-6 تدريبات إعادة التعليم

المثلثات المتطابقة الضلعين والمثلثات المتطابقة الأضلاع

خصائص المثلثات المتطابقة الضلعين:

في المثلث المتطابق الضلعين يوجد ضلعان متطابقان، يطلق عليهما اسم **الساقين**. وتُسمَّى الزاوية التي ضلعاها ساقا المثلث **زاوية الرأس**. وتُسمَّى الزاويتان الأخريان **زاويتي القاعدة**. ويمكنك إثبات النظرية الآتية الخاصة بالمثلث المتطابق الضلعين وعكسها.

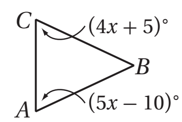


- إذا تطابق ضلعان في مثلثٍ، فإن الزاويتين المقابلتين لهما متطابقتان (نظرية المثلث المتطابق الضلعين) .
- إذا تطابقت زاويتان في مثلثٍ، فإن الضلعين المقابلين لهما متطابقان (عكس نظرية المثلث المتطابق الضلعين) .

إذا كانت: $\overline{CB} \cong \overline{AB}$، فإن: $\angle A \cong \angle C$

إذا كانت: $\angle C \cong \angle A$ ، فإن: $\overline{AB} \cong \overline{CB}$

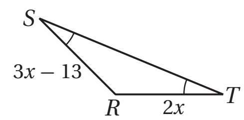
مثال 1 **أوجد قيمة x في الشكل أدناه، إذا علمت أن $\overline{BC} \cong \overline{BA}$.**



بما أن $BC = BA$، فإن:

$m\angle A = m\angle C$	نظريّة المثلث المتطابق الضلعين
$5x - 10 = 4x + 5$	بالتعويض
$x - 10 = 5$	بطرح $4x$ من كلا الطرفين
$x = 15$	بإضافة 10 إلى كلا الطرفين

مثال 2 **أوجد قيمة x في الشكل أدناه.**



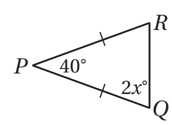
بما أن $m\angle S = m\angle T$، فإن:

$SR = TR$	عكس نظرية المثلث المتطابق الضلعين
$3x - 13 = 2x$	بالتعويض
$3x = 2x + 13$	بإضافة 13 إلى كلا الطرفين
$x = 13$	بطرح $2x$ من كلا الطرفين

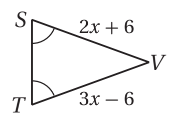
تمارين

جبر: أوجد قيمة المتغير في كلٍّ من الأسئلة الآتية:

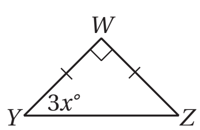
1)



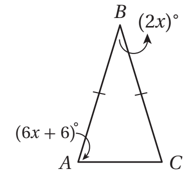
2)



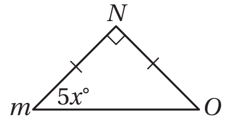
3)



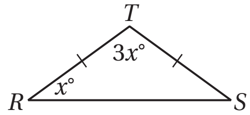
4)



5)



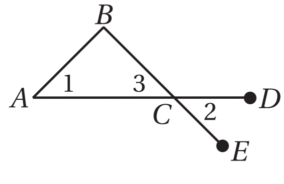
6)



7) برهان: اكتب برهانًا ذا عمودين.

المعطيات: $\angle 1 \cong \angle 2$

المطلوب: إثبات أن $\overline{AB} \cong \overline{CB}$



3-6 تدريبات إعادة التعليم (تتمة)

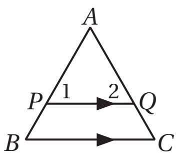
المثلثات المتطابقة الضلعين والمثلثات المتطابقة الأضلاع

خصائص المثلثات المتطابقة الأضلاع:

الأضلاع في المثلث المتطابق الأضلاع تكون متطابقة، تقود نظريّة المثلث المتطابق الضلعين إلى النتيجتين الآتيتين المتعلقتين بزوايا المثلث المتطابق الأضلاع:

1) يكون المثلث متطابق الأضلاع، إذا وفقط إذا كان متطابق الزوايا.
2) قياس كلّ زاويةٍ في المثلث المتطابق الأضلاع يساوي $60°$.

مثال **أثبت أنه إذا وازَى مستقيمٌ أحد أضلاع مثلثٍ متطابق الأضلاع، فإنه يُكوّن مثلثًا آخر متطابق الأضلاع.**



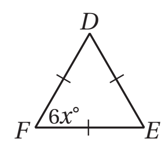
البرهان:

العبارات	المبرّرات
1) $\triangle ABC$ متطابق الأضلاع $\overline{PQ} \parallel \overline{BC}$	**1)** معطيات
2) $m\angle A = m\angle B = m\angle C = 60°$	**2)** قياس كلّ زاوية في المثلث المتطابق الأضلاع يساوي $60°$.
3) $\angle 1 \cong \angle B, \angle 2 \cong \angle C$	**3)** إذا توازَى مستقيمان، فإن الزاويتين المتناظرتين متطابقتان.
4) $m\angle 1 = 60°, m\angle 2 = 60°$	**4)** بالتعويض
5) $\triangle APQ$ متطابق الأضلاع.	**5)** إذا كان المثلث متطابق الزوايا، فإنه يكون متطابق الأضلاع.

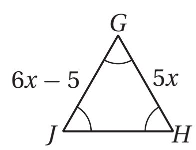
تمارين

جبر: أوجد قيمة المتغيّر في كلٍّ من الأسئلة الآتية:

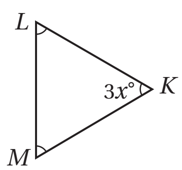
1)



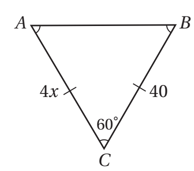
2)



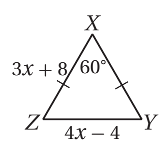
3)



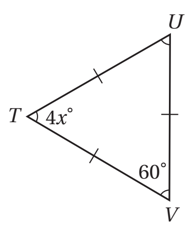
4)



5)



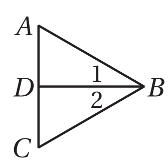
6)



7) برهان: اكتب برهانًا ذا عمودين.

المعطيات: $\triangle ABC$ متطابق الأضلاع؛ $\angle 2 \cong \angle 1$.

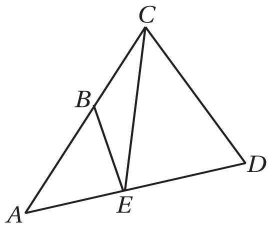
المطلوب: إثبات أن $\angle ADB \cong \angle CDB$



3-6 تدريبات المهارات

المثلثات المتطابقة الضلعين والمثلثات المتطابقة الأضلاع

استعمل الشكل المجاور للإجابة عن الأسئلة 4–1.



1) إذا كانت: $\overline{AC} \cong \overline{AD}$ ، فسَمِّ زاويتين متطابقتين.

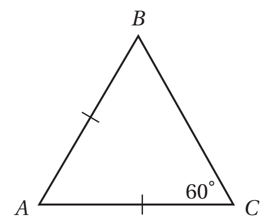
2) إذا كانت: $\overline{BE} \cong \overline{BC}$، فسَمِّ زاويتين متطابقتين.

3) إذا كانت: $\angle EBA \cong \angle EAB$، فسَمِّ قطعتين مستقيمتين متطابقتين.

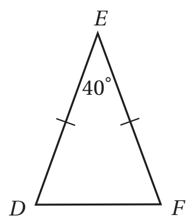
4) إذا كانت: $\angle CED \cong \angle CDE$، فسَمِّ قطعتين مستقيمتين متطابقتين.

أوجد القياس المحدّد في السؤالين الآتيين:

5) $m\angle ABC$

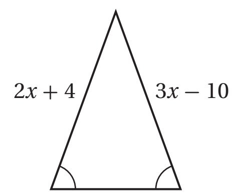


6) $m\angle EDF$

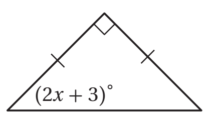


جبر: أوجد قيمة المتغيّر في كلٍّ من السؤالين الآتيين:

7)



8)

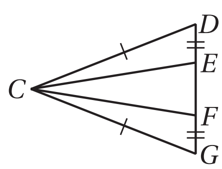


9) برهان: اكتب برهانًا ذا عمودين.

المعطيات: $\overline{CD} \cong \overline{CG}$

$\overline{DE} \cong \overline{GF}$

المطلوب : إثبات أن $\overline{CE} \cong \overline{CF}$.



3-6 تدريبات حلّ المسألة

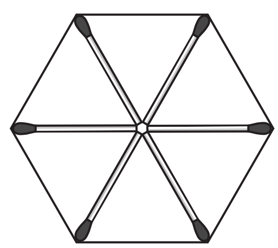
المثلثات المتطابقة الضلعين والمثلثات المتطابقة الأضلاع

1) **مخطط هندسي:** في مخطط هندسيٍّ يرسمه ياسر، يريد تحديد نقطة C على الرسم أدناه، بحيث يصبح المثلث ABC متطابق الضلعين، فيه: $AB = AC$ ، $m\angle ACB = 40^\circ$

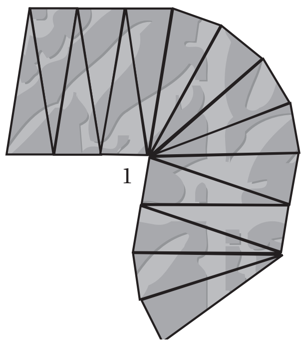
هل يستطيع إجراء ذلك؟ وضّح الخطوات.

2) **مساطر:** على مسطرة قابلة للطيّ مفصلتان تقسمانها إلى ثلاثة أجزاء متساوية. فإذا طوي طرفا المسطرة إلى أعلى حتى يتلامسا، فما نوع المثلث الناتج؟

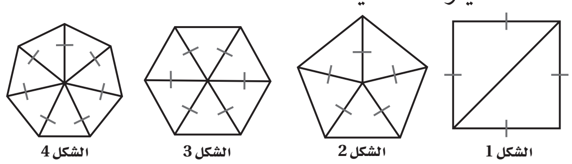
3) **أشكال سداسيّة:** وضع هشام 6 أعواد ثقاب، بحيث تلتقي أطرافها عند نقطة واحدة. ثم جُعلت أطرافها الأخرى على أبعاد متساوية بعضها عن بعض، ورُسمت مستقيمات تصل بينها، فكانت النتيجة شكلًا سداسيًّا منتظمًا كما في الشكل أدناه. صنّف المثلثات الستة المكونة للشكل، ووضِّح إجابتك.



4) **ممرّات:** أُنشيء ممرٌّ من الرخام بصفّ عدة مثلثات متطابقة ومتطابقة الضلعين. إذا كانت زاوية الرأس في كلٍّ من هذه المثلثات °20، فما قياس الزاوية 1 في الشكل الآتي؟



5) **زخارف هندسية:** أراد مصمم أن يختار وحدة زخارف هندسية منتظمة تتكون من عدة مثلثات متطابقة، فكان أمامه الخيارات التالية:



a) ما نوع المثلثات المستعملة في كل حالةٍ؟

b) إذا وجد المصمم أن لديه مجموعة من المثلثات المتطابقة الضلعين، والتي قياس إحدى زوايا القاعدة فيها 54، فهل يمكنه استخدامها لتكوين شكل 4؟ ولماذا؟

c) أيُّ الأشكال يمكن تكوينها من المثلثات التي لدى المصمم؟

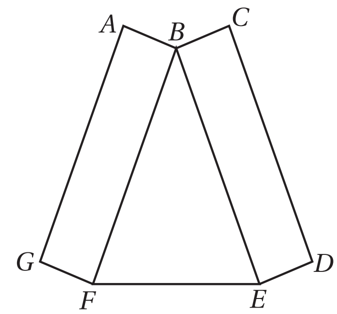
3-6 التدريبات الإثرائية

قياسات زوايا:

تحوي بعض المسائل رسومًا، إذا لم تكن متأكّدًا من طريقة حلّ المسألة، فابدأ بالمعطيات، وأوجد قياس أكبر عددٍ ممكنٍ من الزوايا في الشكل، واكتب كلّ قياسٍ على الشكل، فقد يوفّر هذا الأمر أدلّة إضافيّة تساعدك على حلّ المسألة.

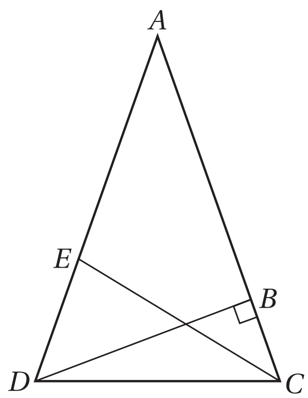
1) **المعطيات:** $BE = BF, \angle BFG \cong \angle BEF \cong \angle BED, m\angle BFE = 82^\circ$، والأضلاع المتقابلة في كلٍّ من المضلعين $ABFG$, $BCDE$ متوازية ومتطابقة.

المطلوب: **إيجاد** $m\angle ABC$.



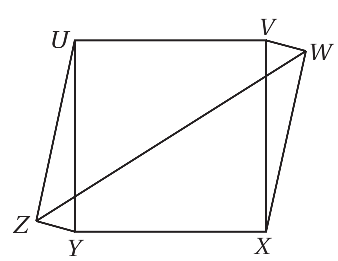
2) **المعطيات:** $AC = AD, \overline{AB} \perp \overline{BD}$ و $m\angle DAC = 44$ ، $\overline{CE}$ تنصّف $\angle ACD$.

المطلوب: **إيجاد** $m\angle DEC$.



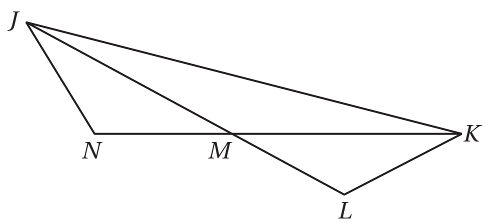
3) **المعطيات:** $m\angle UZY = 90^\circ, m\angle ZWX = 45^\circ$, $\Delta YZU \cong \Delta VWX$
$UVXY$ مربع (أي أن جميع أضلاعه متطابقة، وجميع زواياه قوائم).

المطلوب: إيجاد $m\angle WZY$.



4) **المعطيات:** $m\angle N = 120^\circ, \overline{JN} \cong \overline{MN}$.
$\Delta JNM \cong \Delta KLM$

المطلوب: إيجاد $m\angle JKM$.



3-7 تدريبات إعادة التعليم

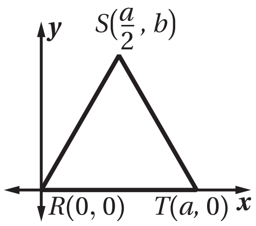
المثلثات والبرهان الإحداثيّ

رسم المثلثات وتحديد مواقعها:

يستعمل **البرهان الإحداثيّ** الأشكال في المستوى الإحداثي والجبر؛ لإثبات خصائص هندسيّة، والخطوة الأولى في البرهان الإحداثيّ هي رسم الشكل في المستوى الإحداثيّ، وكتابة إحداثيّات رؤوسه. استعمل الإرشادات الآتية عند رسم الشكل في المستوى الإحداثيّ:

1) اجعل نقطة الأصل رأسًا أو مركزًا للشكل.
2) ارسم ضلعًا واحدًا على الأقلّ من أضلاع المضلّع على أحد المحورين.
3) ارسم الشكل في الربع الأوّل من المستوى الإحداثيّ إن أمكن.
4) استعمل الإحداثيّات التي تجعل الحسابات أبسط ما يمكن.

مثال **ارسم ΔRST المتطابق الضلعين في المستوى الإحداثيّ، وحدِّد إحداثيات رؤوسه، على أن تكون قاعدته على المحور x الموجب، ويكون طولها a وحدةً.**

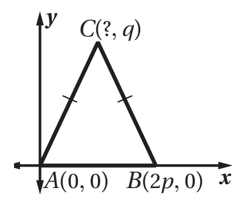


- ابدأ بوضع الرأس R عند نقطة الأصل $R(0, 0)$ ، وارسم القاعده $\overline{RT}$ على المحور x الموجب، فإذا كان RT يساوي a وحدةً، فإن إحداثيَّي T هما $(a, 0)$.
- أما الرأس S، فإنه يقابل نقطة منتصف $\overline{RT}$ ؛ لأن المثلث متطابق الضلعين، فسيكون الإحداثيّ x له يساوي $\frac{a}{2}$، وبما أننا لا نستطيع أن نكتب الإحداثيّ الصاديّ للرأس S بدلالة a، إذن سنفترض أن هذا الإحداثيّ يساوي b ، فيكون الرأس الثالث $S\left(\frac{a}{2}, b\right)$.

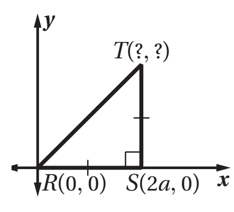
تمارين

أوجد الإحداثيّات المجهولة في كلٍّ من المثلثات الآتية:

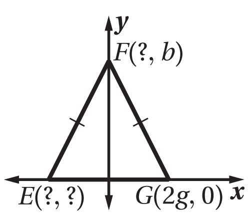
1)



2)

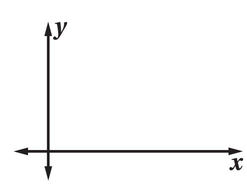


3)

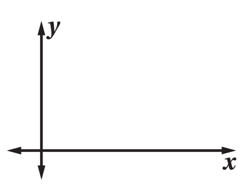


ارسم كلَّ مثلثٍ ممَّا يأتي في المستوى الإحداثيّ، وحدّد إحداثيّات رؤوسه:

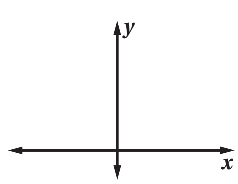
4) المثلث المتطابق الضلعين RST ، والذي طول قاعدته $\overline{RS}$ يساوي $4a$ وحدة.



5) المثلث القائم الزاوية المتطابق الساقين DEF الذي طول ساقه e وحدة.



6) المثلث المتطابق الأضلاع EQI الذي طول ضلعه $2b$ وحدة، ورأسه $Q(0, \sqrt{3}b)$.

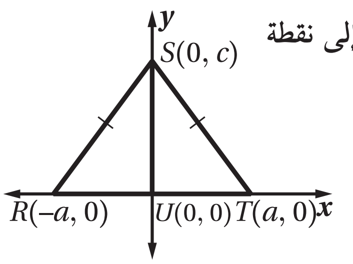


3-7 تدريبات إعادة التعليم (تتمة)

المثلثات والبرهان الإحداثيّ

كتابة البرهان الإحداثيّ:

نستعمل البراهين الإحداثيّة لإثبات بعض النظريّات، والتحقّق من بعض خصائص الأشكال الهندسيّة، ونستعمل قانون المسافة أو قانون الميل أو قانون نقطة منتصف القطعة المستقيمة في كثيرٍ من البراهين الإحداثيّة.



مثال

اكتب برهانًا إحداثيًّا لإثبات أن القطعة المستقيمة المرسومة من الرأس إلى نقطة منتصف القاعدة في المثلث المتطابق الضلعين تكون عموديّة على القاعدة.

ارسم مثلثًا متطابق الضلعين في المستوى الإحداثيّ أوّلًا،
ولتسهيل عمليّة كتابة البرهان، اجعل رؤوس المثلث عند:
$S(0, c)$, $R(-a, 0)$, $T(a, 0)$، وعندها تكون $U(0, 0)$ نقطة منتصف $\overline{RT}$.

المعطيات: $\triangle RST$ متطابق الضلعين، وU نقطة منتصف القاعدة $\overline{RT}$.

المطلوب: إثبات أن $\overline{SU} \perp \overline{RT}$.

البرهان: بما أن U نقطة منتصف $\overline{RT}$ ، فإن إحداثيّيها هما $\left(\frac{-a+a}{2}, \frac{0+0}{2}\right)$؛ أيْ $(0, 0)$، وعندها فإن $\overline{SU}$ تكون واقعةً على المحور y ، وقد رسم $\triangle RST$ ، بحيث كانت $\overline{RT}$ على المحور x ، ومن المعلوم أن المحورين متعامدان، وبناءً عليه فإن $\overline{SU} \perp \overline{RT}$.

تمارين

برهان: اكتب برهانًا إحداثيًا لإثبات كلٍّ من العبارتين الآتيتين:

1) "القطع المستقيمة الثلاث الواصلة بين منتصفات أضلاع المثلث القائم الزاوية تشكّل مثلثًا قائم الزاوية".

2) في أيِّ مثلثٍ قائمٍ، مربع طول الوتر يساوي مجموع مربعَي طولَي الضلعين الآخرين "نظرية فيثاغورس".

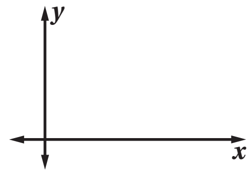
الاسم ______________________ التاريخ ____________

3-7 تدريبات المهارات

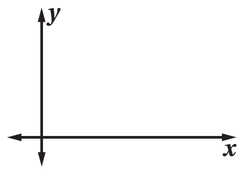
المثلثات والبرهان الإحداثيّ

ارسم كلًّا من المثلثات الآتية في المستوى الإحداثيّ، وحدّد إحداثيّات رؤوسها:

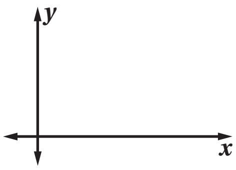
1) ΔFGH قائم الزاوية وطولا ساقيه a وحدة و b وحدة.



2) ΔKLP متطابق الضلعين، وطول قاعدته $\overline{KP}$ يساوي $6b$ وحدة.

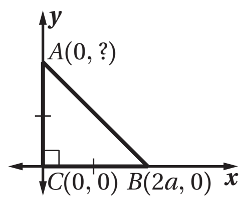


3) ΔAND متطابق الضلعين، وطول قاعدته $\overline{AD}$ يساوي $5a$ وحدة.

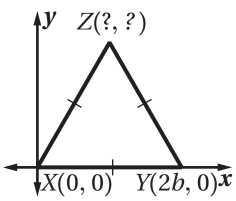


أوجد الإحداثيّات المجهولة في كلٍّ من المثلثات الآتية:

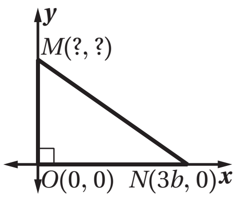
4)



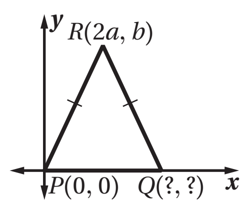
5)



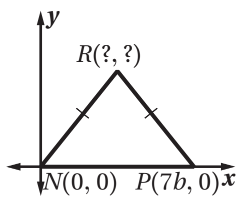
6)



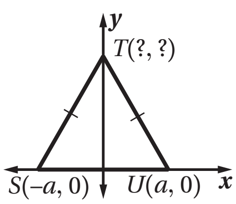
7)



8)



9)



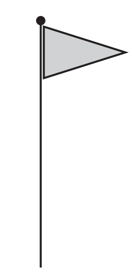
10) برهان: اكتب برهانًا إحداثيًّا لإثبات أن القطعة المستقيمة الواصلة بين رأس الزاوية القائمة ومنتصف الوتر في المثلث القائم الزاوية المتطابق الساقين، تكون عموديّةً على الوتر.

3-7 تدريبات حلّ المسألة

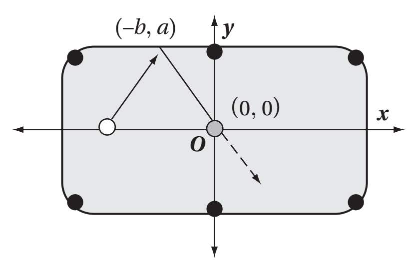
المثلثات والبرهان الإحداثيّ

1) رفوف: لدى سلطان دعامة كُتب على هيئة مثلث قائم الزاوية متطابق الساقين، ويريد أن يعرف طول الوتر مقارنة بساقَي المثلث وليس لديه مسطرة، ولكنه يتذكّر صيغة المسافة، وبناءً عليه رسم الدعامة في المستوى الإحداثيّ، على أن يكون رأس الزاوية القائمة عند نقطة الأصل، ويكون طول كلٍّ من الساقين a وحدة، فما إحداثيات الرأسين اللذين يشكّلان الزاويتين الحادّتين؟

2) رايات: راية على صورة مثلث متطابق الضلعين، ويريد مصمِّمٌ أن يرسمها في المستوى الإحداثيّ، على أن تكون القاعدة على المحور y، وأحد طرفَيها عند $(0, 0)$، فإذا كان موقع رأس الراية عند $\left(a, \frac{b}{2}\right)$، فما إحداثيات الرأس الثالث؟



3) بلياردو: يبيّن الشكل الآتي أحد الأوضاع على طاولة البلياردو،



فما إحداثيّات الكرة البيضاء قبل أن تُضرَبَ؟

4) خيام: مدخل خيمة فايز على شكل مثلثٍ متطابق الضلعين، إذا رسم هذا المثلث في المستوى الإحداثيّ، على أن تكون قاعدته على المحور x، وركنه الأيسر عند $(0, 0)$، فسيكون ركنه الأيمن عند $(6, 0)$، ورأسه عند $(3, 4)$، أثبت أن هذا المثلث متطابق الضلعين.

5) رسمٌ هندسيٌّ: يصمّم مهندس شبكة طرق، على أن تتقاطع ثلاث طُرُق لتشكّل مثلثًا. وقد عيّن المهندس اثنين من رؤوس المثلث في المستوى الإحداثيّ عند $(-5, 0)$ و $(5, 0)$.

a) صِفْ مجموعة النقاط في المستوى الإحداثيّ التي لا يمكنها أن تكون الرأس الثالث للمثلث.

b) صِفْ مجموعة النقاط في المستوى الإحداثيّ التي يمكنها أن تكون رأس مثلث متطابق الضلعين يلتقي عنده ضلعاه المتطابقان.

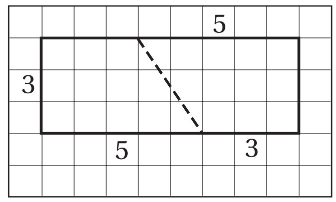
c) صِفْ مجموعة النقاط في المستوى الإحداثيّ التي تكوّن مع النقطتين الأخريين مثلثًا قائم الزاوية، على أن يكون رأس زاويته القائمة عند $(-5, 0)$.

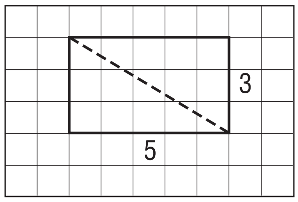
الاسم ______________ التاريخ ______

3-7 التدريبات الإثرائيّة

غرائب المستطيل

ارسم مستطيلين في ورق المربّعات، كما في الصورة المبيَّنة في الشكلين الآتيين وقُصَّهما على طول الخط المتقطع.





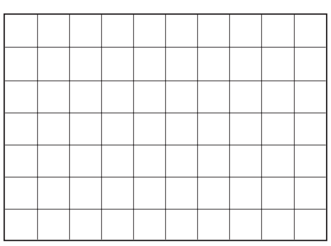
1) استعمل القطع الأربع، على أن تكوّن منها مستطيلًا جديدًا، واكتب الأبعاد عليه.

2) ما مجموع مساحتَي المستطيلين الأصليين؟

3) ما مساحة الشكل الجديد؟

4) اكتب تخمينًا لسبب وجود اختلاف بين المساحتين .

5) استعمل حافةً مستقيمةً لرسم الأشكال الأربعة التي تكوّن المستطيل الكبير بدقّة، ماذا تلاحظ من هذا الرسم؟



ملحق الإجابات

الاسم ____________ التاريخ ____________

3-1 تدريبات إعادة التعليم
تصنيف المثلثات

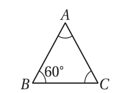
تصنيف المثلثات وفقًا لزواياها:

تصنّف المثلثات وفقًا لقياسات زواياها كما يأتي:

• إذا كانت زوايا المثلث الثلاث حادّة، سُمّي **مثلثًا حادّ الزوايا.**
• إذا كانت زوايا المثلث الثلاث متطابقة، سُمّي **مثلثًا متطابق الزوايا.**
• إذا كانت إحدى زوايا المثلث منفرجة، سُمّي **مثلثًا منفرج الزاوية.**
• إذا كانت إحدى زوايا المثلث قائمة، سُمّي **مثلثًا قائم الزاوية.**

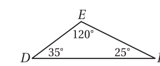
مثال صنّف كلًّا من المثلثات الآتية وفقًا لزواياه.

a)



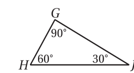
زوايا هذا المثلث الثلاث متطابقة، وقياس كلّ زاوية منها يساوي 60°؛ لذا فهو مثلث متطابق الزوايا.

b)



يوجد في هذا المثلث زاوية قياسها 120°؛ لذا فهو مثلث منفرج الزاوية.

c)

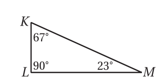


يوجد في هذا المثلث زاوية قياسها 90°؛ لذا فهو مثلث قائم الزاوية.

تمارين

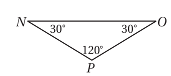
صنّف كلًّا من المثلثات الآتية وفقًا لزواياه:

1)



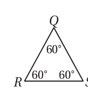
قائم الزاوية

2)



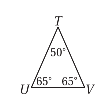
منفرج الزاوية

3)



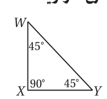
متطابق الزوايا

4)



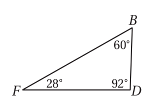
حادّ الزوايا

5)



قائم الزاوية

6)



منفرج الزاوية

الاسم ____________ التاريخ ____________

3-1 تدريبات إعادة التعليم (تتمة)
تصنيف المثلثات

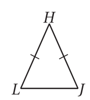
تصنيف المثلثات وفقًا لأضلاعها:

تصنّف المثلثات وفقًا لعدد الأضلاع المتطابقة فيها، ويُشار عادةً إلى الأضلاع المتطابقة في الرسوم، بوضع أعداد متساوية من الشرطات عليها.

• إذا كانت أضلاع المثلث الثلاثة متطابقة، سُمّي **مثلثًا متطابق الأضلاع.**
• إذا كان في المثلث ضلعان متطابقان على الأقل، سُمّي **مثلثًا متطابق الضلعين.** وبناءً عليه يكون المثلث المتطابق الأضلاع مثلثًا متطابق الضلعين أيضًا.
• إذا لم يوجد في المثلث ضلعان متطابقان، سُمّي **مثلثًا مختلف الأضلاع.**

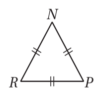
مثال 1 صنّف كلًّا من المثلثات الآتية وفقًا لأضلاعه.

a)



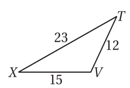
يوجد في هذا المثلث ضلعان متطابقان؛ لذا فهو متطابق الضلعين.

b)



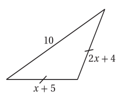
أضلاع هذا المثلث الثلاثة متطابقة؛ لذا فهو متطابق الأضلاع.

c)



لا يوجد في هذا المثلث أي ضلعين متطابقين؛ لذا فهو مختلف الأضلاع.

مثال 2 أوجد قيمة x وأطوال الأضلاع المجهولة في المثلث ABC.



الخطوة 1: أوجد قيمة x وذلك بمساواة طولَي الضلعين.

$2x + 4 = x + 5$ معطى

$x + 4 = 5$ اطرح x من الطرفين

$x = 1$ اطرح 4 من الطرفين

الخطوة 2: عوِّض عن قيمة x بأحد الطولين

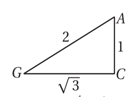
$2x + 4 = 2(1) + 4 = 6$

إذن طول كلٍّ من الضلعين 6

تمارين

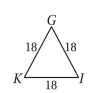
صنّف كلًّا من المثلثات الآتية وفقًا لأضلاعه:

1)



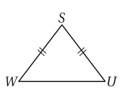
مختلف الأضلاع

2)



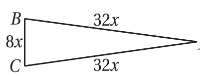
متطابق الأضلاع

3)



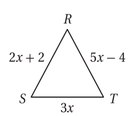
متطابق الضلعين

4)



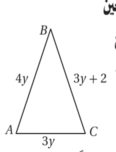
متطابق الضلعين

5) **جبر:** أوجد قيمة x، وطول كلّ ضلع من أضلاع ΔRST المتطابق الأضلاع.



2 ;6

6) **جبر:** أوجد قيمة y، وطول كلّ ضلع من أضلاع ΔABC المتطابق الضلعين، علمًا بأن $AB = BC$



2;AB = 8; BC = 8, AC = 6

7) **هندسة إحداثية:** أوجد أطوال أضلاع ΔABC الذي رؤوسه: $A(-1,5)$, $B(6,1)$, $C(2,-6)$، ثمّ صنّفه وفقًا لأضلاعه.

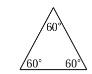
بما أن: $AB = BC = \sqrt{65}$, $AC = \sqrt{130}$ إذن ΔABC متطابق الضلعين.

الاسم ______________ التاريخ ______________

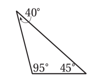
3-1 تدريبات المهارات

تصنيف المثلثات

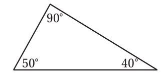
صنّف كلًّا من المثلثات الآتية وفقًا لزواياه:

1) 

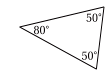
متطابق الزوايا

2) 

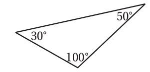
منفرج الزاوية

3) 

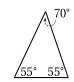
قائم الزاوية

4) 

حادّالزوايا

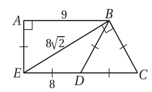
5) 

منفرج الزاوية

6) 

حادّ الزوايا

صنّف كلًّا من المثلثات الآتية وفقًا لأضلاعه:



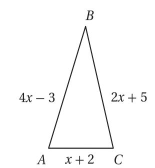
7) ΔABE **مختلف الأضلاع .**

8) ΔEDB **متطابق الضلعين .**

9) ΔEBC **مختلف الأضلاع .**

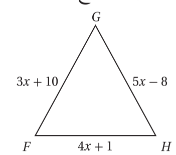
10) ΔDBC **متطابق الأضلاع .**

11) **جبر:** أوجد قيمة x، وطول كلِّ ضلعٍ من أضلاع ΔABC المتطابق الضلعين، علمًا بأن $\overline{AB} \cong \overline{BC}$.



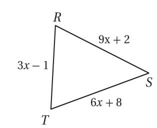
x = 4; AB = BC = 13; AC = 6

12) **جبر:** أوجد قيمة x، وطول كلِّ ضلعٍ من أضلاع ΔFGH المتطابق الأضلاع.



x = 9; FG = GH = FH = 37

13) **جبر:** أوجد قيمة x، وطول كلِّ ضلعٍ من أضلاع ΔRST المتطابق الضلعين، إذا كان $\overline{RS} \cong \overline{TS}$.



x = 2; RS = ST = 20; RT = 5

14) **هندسة إحداثية:** أوجد أطوال أضلاع ΔABC الذي رؤوسه: $A(0, 3)$ ، $B(-4, 0)$ ، $C(2, 2)$، ثم صنّفه وفقًا لأضلاعه.

$AB = 5$ ، $BC = 2\sqrt{10}$ ، $AC = \sqrt{5}$ ، **مختلف الأضلاع.**

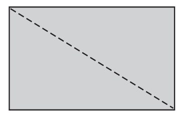
الصف: الأول الثانوي 8 الفصل 3: المثلثات المتطابقة

الاسم ______________ التاريخ ______________

3-1 تدريبات حلّ المسألة

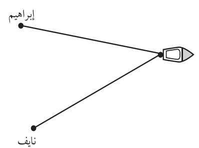
تصنيف المثلثات

1) **ورق:** قصّ سلطان ورقة مستطيلة نصفين على طول قُطرها، ونتج عن ذلك مثلثان. صنّف كلًّا من المثلثين وفقًا لزواياهما.



قائما الزاوية

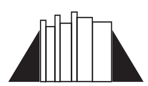
2) **رياضة مائية:** يتزلّج إبراهيم ونايف على المياه، وهما يُمسكان بحبلين لهما الطول نفسه، ومربوطين في قاربٍ سريعٍ كما في الشكل أدناه.



يُبحر القارب بأقصى سرعة والحبلان مشدودان، ويشكّل إبراهيم ونايف والنقطة التي رُبط عندها الحبلان في القارب رؤوس مثلث . إذا لم تكن المسافة بين إبراهيم ونايف مساوية لطول أيٍّ من الحبلين، فصنّف المثلث وفقًا لأضلاعه.

متطابق الضلعين

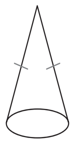
3) **دعامات الكتب:** تشكّل كلٌّ من دعامتَي الكُتب أدناه مثلثًا قائم الزاوية.



طول ضلع قاعدة كلِّ مثلث منهما يساوي نصف طول الوتر في المثلث، إذا أُبعدت الكُتب الموضوعة بين الدعامتين جميعها، وقرّبت الدعامتان إحداهما إلى الأخرى، فإنهما تشكّلان مثلثًا واحدًا. صنّف هذا المثلث وفقًا لأضلاعه.

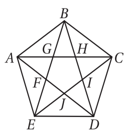
متطابق الأضلاع

4) **ديكور:** يريد مهندس ديكور استعمال المخروط المُبيَّن في الشكل أدناه، فإذا قام بقصّه طوليًّا، من الرأس،فما نوع المثلث الذي يظهر؟



متطابق الضلعين

5) **تصاميم:** شاهد خالد النمط أدناه على بلاطة خماسيّة، وقد لاحظ وجود أنواع كثيرة ومختلفة من المثلثات التي شكّلتها المستقيمات المرسومة على البلاطة.



a) عيّن خمسة مثلثات حادّة الزوايا ومتطابقة الضلعين.

إجابة ممكنة:

$\Delta EBD, \Delta CAE, \Delta ADC, \Delta BGH, \Delta CHI$

b) عيّن خمسة مثلثات منفرجة الزاوية ومتطابقة الضلعين.

إجابة ممكنة:

$\Delta AFE, \Delta EJD, \Delta CID, \Delta BHC, \Delta BGA$

الصف: الأول الثانوي 9 الفصل 3: المثلثات المتطابقة

الاسم ______________ التاريخ ________

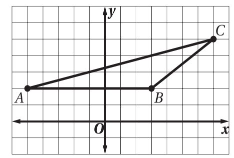
3-1 التدريبات الإثرائيّة

قراءة الرياضيّات

عندما تقرأ الهندسة، قد تحتاج أن ترسم شكلًا توضيحيًّا ليسهل عليك فهم النص.

مثال

عيّن النقاط A, B, C في المستوى الإحداثي، على أن يكون إحداثيًّا y للنقطتين A و B متساويين، ويكون الإحداثي x للنقطة B أكبر من الإحداثي x للنقطة A، وأن يكون كلٌّ من إحداثيّي النقطة C أكبر من الإحداثي المناظر للنقطة B. صنِّف ΔABC وفقًا لزواياه؟

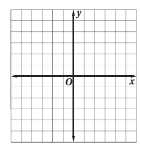


للإجابة عن هذا السؤال، لا بدّ من رسم شكل يحقّق المعطيات.
ويتعيّن أن يكون الضلع $\overline{AB}$ أفقيًّا؛ لأن الإحداثيّ y لكلٍّ من النقطتين A, B هو نفسه،
ويجب أن تعيّن النقطة B عن يمين النقطة A، وأن تعيّن
النقطة C عن يمين B وإلى أعلى.
تلاحظ من الشكل أن ΔABC منفرج الزاوية.

تمارين

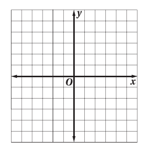
عيّن على الشبكة؛ لمساعدتك على حلّ كلٍّ من الأسئلة الآتية:

1) ثلاث نقاط R, S, T في المستوى الإحداثي، على أن يكون إحداثيًّا x للنقطتين R , S متساويين، ويقع الإحداثي y للنقطة T بين إحداثيّيْ y للنقطتين R , S، على أن يقل الإحداثي x للنقطة T عن الإحداثيّ x للنقطة R. صنّف ΔRST وفقًا لزواياه.



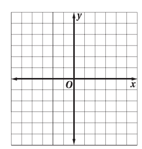
حاد الزوايا

2) ثلاث نقاط ليست على استقامة واحدةٍ في المستوى الإحداثيّ وسمّها J, K, L، على أن يكون إحداثيًّا y للنقطتين J , K متساويين، ويكون إحداثيًّا x للنقطتين K , L متساويين. صنّف ΔJKL وفقًا لزواياه.



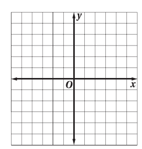
قائم الزاوية

3) ثلاث نقاط ليست على استقامة واحدة في المستوى الإحداثي وسمّها D, E, F، على أن يكون إحداثيًّا x للنقطتين D , E متساويين ومختلفي الإشارة، ويكون إحداثيًّا y للنقطتين D , E متساويين، والإحداثيّ x للنقطة F يساوي 0. صنّف ΔDEF وفقًا لأضلاعه.



متطابق الضلعين

4) النقاط G, H, I في المستوى الإحداثي، على أن تقع النقطتان G , H على المحور y الموجب، ويكون الإحداثيّ y للنقطة G مثلَي الإحداثيّ y للنقطة H. إذا وقعت I على المحور x الموجب، وكان الإحداثيّ x للنقطة I أكبر من الإحداثيّ y للنقطة G، فصنّف ΔGHI وفقًا لأضلاعه.



مختلف الأضلاع

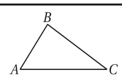
الاسم ______________ التاريخ ________

3-2 تدريبات إعادة التعليم

زوايا المثلثات

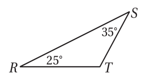
نظرية مجموع قياسات زوايا المثلث:

إذا عُلِم قياسا زاويتين في المثلثُ، فإنه يُمكِنك إيجاد قياس الزاوية الثالثة مستعملًا النظرية الآتية دائمًا:

نظرية مجموع قياسات زوايا المثلث	مجموع قياسات زوايا المثلث يساوي $180°$. في الشكل المجاور: $m\angle A + m\angle B + m\angle C = 180°$. 

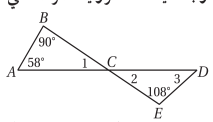
ونتيجةً لنظرية مجموع قياسات زوايا المثلث؛ نستطيع القول بأنه في أيِّ مثلثٍ قائمٍ تكون الزاويتان الحادثتان متتامتين، وكذلك نستنتج أنه لا يمكن وجود مثلث يحوي أكثر من زاويةٍ قائمةٍ أو أكثر من زاويةٍ منفرجةٍ.

مثال 1 أوجد $m\angle T$.



$m\angle R + m\angle S + m\angle T = 180°$	نظرية مجموع زوايا المثلث
$25° + 35° + m\angle T = 180°$	بالتعويض
$60° + m\angle T = 180°$	بالتبسيط
$m\angle T = 120°$	بطرح 60 من الطرفين.

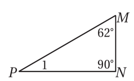
مثال 2 أوجد قياسات الزوايا المرقّمة في الشكل الآتي:



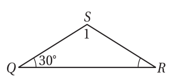
$m\angle 1 + m\angle A + m\angle B = 180°$	نظرية مجموع زوايا المثلث
$m\angle 1 + 58° + 90° = 180°$	بالتعويض
$m\angle 1 + 148° = 180°$	بالتبسيط
$m\angle 1 = 32°$	بطرح $148°$ من الطرفين
$m\angle 2 = 32°$	الزوايا المتقابلة بالرأس متطابقة
$m\angle 3 + m\angle 2 + m\angle E = 180°$	نظرية مجموع زوايا المثلث
$m\angle 3 + 32° + 108° = 180°$	بالتعويض
$m\angle 3 + 140° = 180°$	بالتبسيط
$m\angle 3 = 40°$	بطرح $140°$ من الطرفين

تمارين

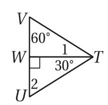
أوجد قياسات الزوايا المرقّمة في كلٍّ من الأشكال الآتية:

1) 

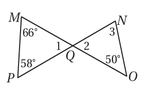
$m\ \angle 1 = 28°$

2) 

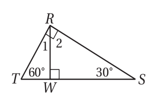
$m\ \angle 1 = 120°$

3) 

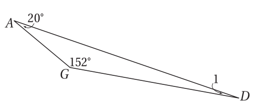
$m\angle 1 = 30°, m\angle 2 = 60°$

4) 

$m\angle 1 = m\angle 2 = 56°,$
$m\angle 3 = 74°$

5) 

$m\angle 1 = 30°, m\angle 2 = 60°$

6) 

$m\angle 1 = 8°$

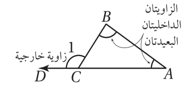
الاسم ____________ التاريخ ____________

3-2 تدريبات إعادة التعليم (تتمة)

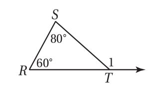
زوايا المثلث

نظريّة الزاوية الخارجيّة:

الزاوية المتشكّلة من أحد أضلاع المثلث وامتداد الضلع الآخر عند كلّ رأس من رؤوسه تُسمى **زاوية خارجية للمثلث**. ويقابل كلّ زاوية خارجيّة للمثلث **زاويتان داخليّتان بعيدتان**، وهما زاويتان داخليّتان غير مجاورتين لها. في الشكل الآتي $\angle A, \angle B$ هما الزاويتان الداخليّتان البعيدتان بالنسبة للزاوية الخارجيّة $\angle DCB$.

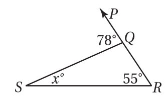
نظرية الزاوية الخارجيّة	قياس الزاوية الخارجيّة للمثلث يساوي مجموع قياسَي الزاويتين الداخليّتين البعيدتين. $m\angle 1 = m\angle A + m\angle B$ 

مثال 1 أوجد $m\angle 1$.



$m\angle 1 = m\angle R + m\angle S$	نظرية الزاوية الخارجية
$= 60^\circ + 80^\circ$	بالتعويض
$= 140^\circ$	بالجمع

مثال 2 أوجد قيمة x.

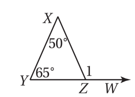


$m\angle PQS = m\angle R + m\angle S$	نظرية الزاوية الخارجية
$78 = 55 + x$	بالتعويض
$23 = x$	بطرح 55 من الطرفين

تمارين

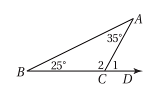
أوجد قياسات الزوايا المرقّمة في كلٍّ من الأشكال الآتية:

1)



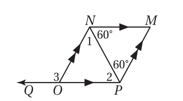
m∠1 = 115°

2)



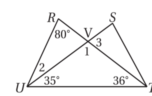
m∠1 = 60°, m∠2 = 120°

3)



m∠1 = 60°, m∠2 = 60°, m∠3 = 120°

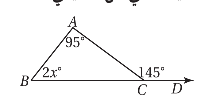
4)



m∠1 = 109°, m∠2 = 29°, m∠3 = 71°

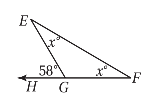
أوجد قيمة x في كلٍّ مما يأتي:

5)



25

6)



29

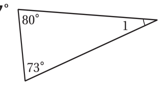
الاسم ____________ التاريخ ____________

3-2 تدريبات المهارات

زوايا المثلث

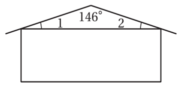
أوجد قياس كلّ زاوية مرقّمة في السؤالين الآتيين:

1)



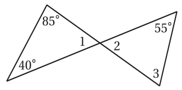
$m\angle 1 = 27^\circ$

2)



$m\angle 1 = m\angle 2 = 17^\circ$

أوجد كلًّا من القياسات الآتية في الشكل المجاور.

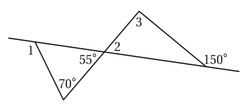


3) $m\angle 1$ 55°

4) $m\angle 2$ 55°

5) $m\angle 3$ 70°

أوجد كلًّا من القياسات الآتية في الشكل المجاور.

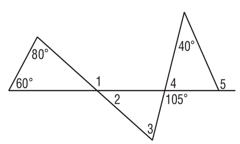


6) $m\angle 1$ 125°

7) $m\angle 2$ 55°

8) $m\angle 3$ 95°

أوجد كلًّا من القياسات الآتية في الشكل المجاور.



9) $m\angle 1$ 140°

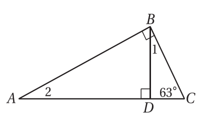
10) $m\angle 2$ 40°

11) $m\angle 3$ 65°

12) $m\angle 4$ 75°

13) $m\angle 5$ 115°

أوجد كلًّا من القياسين الآتيين في الشكل المجاور.



14) $m\angle 1$ 27°

15) $m\angle 2$ 27°

الاسم ______________ التاريخ ______________

3-2 تدريبات حلّ المسألة

زوايا المثلث

لعبة تحدي: قام خالد ومحمد بإجراء لعبة التحدي، بأن يعطي أحدهما مواصفات مثلث، ويقوم الآخر برسم المثلث إذا كان ممكنًا، وإلا فعليه أن يقول مباشرة: غير ممكن.

1) إذا طلب خالد إلى محمد رسم مثلث فيه زاوية قائمة وزاوية منفرجة، فهل يمكن لمحمد رسم المثلث؟ ولماذا؟

لا؛ إجابة ممكنة: لأن الزاوية القائمة قياسها $90°$ والمنفرجة أكثر من $90°$، وبذلك يكون مجموع الزاويتين أكثر من $180°$، وذلك لا يتّفق مع نظرية مجموع زوايا المثلث.

2) إذا طلب محمد إلى خالد رسم مثلث قائم الزاوية، وقياس الزاويتين الأخريين $20°$، $80°$، فهل يمكن لخالد رسم هذا المثلث؟ ولماذا؟

لا؛ لأن الزاويتين الحادّتين في المثلث القائم متتامتان.

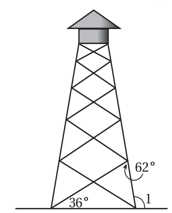
3) إذا طلب خالد إلى محمد رسم مثلث متطابق الأضلاع، ومتطابق الزوايا، فهل يمكن لمحمد رسم هذا المثلث؟

نعم

4) إذا طلب محمد إلى خالد رسم مثلث قياسات زواياه: $70°$، $30°$، $80°$، وقياس زاوية من زواياه الخارجية $120°$، فهل يمكن لخالد رسم هذا المثلث؟ ولماذا؟

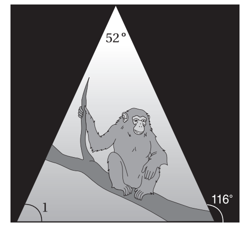
لا؛ إجابة ممكنة: لأن $120°$ لا يمكن أن تكون حاصل جمع أي زاويتين من زوايا المثلث.

5) **أبراج:** يرتكز برج مراقبة على مجموعة من الدعامات والقوائم، إذا كان قياس زاويتين على البرج كما هو موضح أدناه، فما قياس الزاوية 1؟



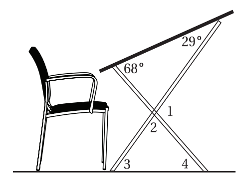
$\angle 1$ زاوية خارجية، إذن: $m\angle 1 = 62° + 36° = 98°$

6) **حديقة حيوانات:** تُضاء بيوت القُرود ليلًا عن طريق ضوء علويّ. فإذا صنع شعاعان من الأشعة الصادرة من الضوء الشكل التالي:



فما قياس الزاوية 1؟ **$64°$**

7) **طاولة رسم:** اشترى سامي طاولة رسم، وثبّتها بطريقة تمكّنه من الرسم بسهولة وهو جالس على كرسيه، وقد قاس سامي الزاويتين المتكوّنتين بين الساقين وسطح الطاولة؛ ليستطيع أن يُعيد الطاولة إلى وضعها الحاليّ إذا أراد نقلها.



a) أيّ الزوايا الأربعة المرقّمة في الشكل أعلاه يمكن لسامي أن يحدّدها من معرفته قياس كلٍّ من الزاويتين المتشكّلتين من سطح الطاولة والساقين؟ وما قياساتها؟

$\angle 1$, $\angle 2$; $m\angle 1 = 97°$, $m\angle 2 = 83°$

b) ما الاستنتاج الذي يمكن أن يتوصّل إليه سامي بخصوص الزوايا غير المعلومة الأخرى قبل أن يقيسها؛ ليجد قياساتها الدقيقة؟

إجابة ممكنة: مجموع قياسي الزاويتين 4 ,3 يساوي قياس الزاوية 1، $m\angle 3 + m\angle 4 = 97°$.

الاسم ______________ التاريخ ______________

3-2 التدريبات الإثرائيّة

إيجاد قياسات الزوايا في المثلث:

يمكنك استعمال الجبر لحلّ مسائل تتضمّن قياسات زوايا المثلث.

مثال **في المثلث ABC، إذا كان $m\angle A$ مِثْلَيْ $m\angle B$، ويزيد $m\angle C$ على $m\angle B$ بمقدار $8°$، فما قياس كلٍّ زاويةٍ من زوايا هذا المثلث؟**

اكتب معادلة ثم حُلّها، افترض أن $x° = m\angle B$

$$m\angle A + m\angle B + m\angle C = 180°$$
$$2x° + x° + (x° + 8°) = 180°$$
$$4x° + 8° = 180°$$
$$4x° = 172°$$
$$x° = 43°$$

ولذلك فإن: $m\angle A = 2(43°) = 86°, m\angle B = 43°, m\angle C = 43° + 8° = 51°$.

حُلَّ كلًّا من المسائل الآتية:

1) في المثلث DEF، إذا كان $m\angle E$ ثلاثة أمثال $m\angle D$، ويقلّ $m\angle F$ عن $m\angle E$ بمقدار $9°$، فما قياسات زوايا المثلث؟

$m\angle D = 27°, m\angle E = 81°, m\angle F = 72°$

2) في المثلث RST، يزيد $m\angle T$ على $m\angle R$ بمقدار $5°$، ويقلّ $m\angle S$ عن $m\angle T$ بمقدار $10°$، فما قياسات زوايا المثلث؟

$m\angle R = 60°, m\angle S = 55°, m\angle T = 65°$

3) في المثلث JKL، إذا كان $m\angle K$ أربعة أمثال $m\angle J$، وكان $m\angle L$ خمسة أمثال $m\angle J$، فما قياسات زوايا المثلث؟

$m\angle J = 18°, m\angle K = 72°, m\angle L = 90°$

4) في المثلث XYZ، يزيد $m\angle Z$ على مثلَي $m\angle X$ بمقدار $2°$، ويقلّ $m\angle Y$ عن مثلَي $m\angle X$ بمقدار $7°$، فما قياسات زوايا المثلث؟

$m\angle X = 37°, m\angle Y = 67°, m\angle Z = 76°$

5) في المثلث GHI، إذا كان $m\angle H$ يزيد $20°$ على $m\angle G$، وكان $m\angle G$ يزيد $8°$ على $m\angle I$، فما قياسات زوايا المثلث؟

$m\angle G = 56°, m\angle H = 76°, m\angle I = 48°$

6) في المثلث MNO، إذا كان $m\angle M$ يساوي $m\angle N$، ويزيد $m\angle O$ على ثلاثة أمثال $m\angle N$ بمقدار $5°$، فما قياسات زوايا المثلث؟

$m\angle M = m\angle N = 35°, m\angle O = 110°$

7) في المثلث STU، إذا كان $m\angle U$ نصف $m\angle T$، ويزيد $m\angle S$ على $m\angle T$ بمقدار $30°$، فما قياسات زوايا المثلث؟

$m\angle S = 90°, m\angle T = 60°, m\angle U = 30°$

8) في المثلث PQR، إذا كان $m\angle P$ يساوي $m\angle Q$، ويقلّ $m\angle R$ عن $m\angle P$ بمقدار $24°$، فما قياسات زوايا المثلث؟

$m\angle P = m\angle Q = 68°, m\angle R = 44°$

9) اكتب مسألة عن قياسات الزوايا في المثلث، بحيث تكون مشابهةً للمسائل السابقة ثم حلَّها.

انظر إجابات الطلاب.

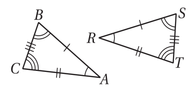
الاسم ______________ التاريخ ______________

3-3 تدريبات إعادة التعليم

المثلثات المتطابقة

التطابق والعناصر المتناظرة:

المثلثات التي لها القياس نفسه والشكل نفسه تُسمَّى **مثلثات متطابقة**، ويتطابق مثلثان إذا وفقط إذا كانت **العناصر المتناظرة** متطابقة؛ أي أزواج الزوايا المتناظرة الثلاث متطابقة، وكانت أزواج الأضلاع المتناظرة الثلاثة متطابقة.



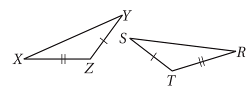
$\Delta ABC \cong \Delta RST$

نظريّة الزاوية الثالثة	إذا تطابقت زاويتان في مثلث مع زاويتين في مثلث آخر، فإن الزاوية الثالثة في المثلث الأول تطابق الزاوية الثالثة في المثلث الثاني.

مثال إذا كان $\Delta XYZ \cong \Delta RST$، فسمّ أزواج الزوايا المتطابقة وأزواج الأضلاع المتطابقة .

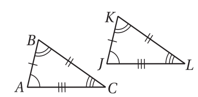
$\angle X \cong \angle R, \angle Y \cong \angle S, \angle Z \cong \angle T$

$\overline{XY} \cong \overline{RS}, \overline{XZ} \cong \overline{RT}, \overline{YZ} \cong \overline{ST}$

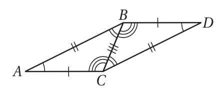


تمارين

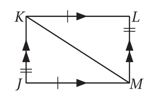
في كلٍّ من الأسئلة الآتية، بيّن أن المضلعين متطابقان بتعيين جميع العناصر المتناظرة المتطابقة، ثم اكتب عبارة التطابق.

1) 

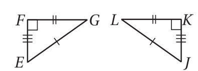
$\angle A \cong \angle J$; $\angle B \cong \angle K$; $\angle C \cong \angle L$; $\overline{AB} \cong \overline{JK}$; $\overline{BC} \cong \overline{KL}$; $\overline{AC} \cong \overline{JL}$; $\Delta ABC \cong \Delta JKL$

2) 

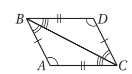
$\angle A \cong \angle D$; $\angle ABC \cong \angle DCB$; $\angle ACB \cong \angle DBC$; $\overline{AC} \cong \overline{BD}$; $\overline{BC} \cong \overline{CB}$; $\overline{AB} \cong \overline{DC}$; $\Delta ABC \cong \Delta DCB$

3) 

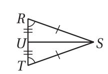
$\angle J \cong \angle L$; $\angle JKM \cong \angle LMK$; $\angle KMJ \cong \angle MKL$; $\overline{KJ} \cong \overline{ML}$; $\overline{KM} \cong \overline{MK}$; $\overline{KL} \cong \overline{MJ}$; $\Delta JKM \cong \Delta LMK$

4) 

$\angle E \cong \angle J$; $\angle F \cong \angle K$; $\angle G \cong \angle L$; $\overline{EF} \cong \overline{JK}$; $\overline{EG} \cong \overline{JL}$; $\overline{FG} \cong \overline{KL}$; $\Delta FGE \cong \Delta KLJ$

5) 

$\angle A \cong \angle D$; $\angle ABC \cong \angle DCB$; $\angle ACB \cong \angle DBC$; $\overline{AC} \cong \overline{DB}$; $\overline{BC} \cong \overline{CB}$; $\overline{AB} \cong \overline{DC}$; $\Delta ABC \cong \Delta DCB$

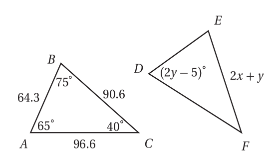
6) 

$\angle R \cong \angle T$; $\angle RSU \cong \angle TSU$; $\angle RUS \cong \angle TUS$; $\overline{RU} \cong \overline{TU}$; $\overline{RS} \cong \overline{TS}$; $\overline{SU} \cong \overline{SU}$; $\Delta RSU \cong \Delta TSU$

في الشكل المجاور، إذا كان $\Delta ABC \cong \Delta DEF$، فأوجد قيمة كلٍّ ممّا يأتي:

7) y **35**

8) x **27.8**



الاسم ______________ التاريخ ______________

3-3 تدريبات إعادة التعليم (تتمة)

المثلثات المتطابقة

إثبات تطابق مثلثين:

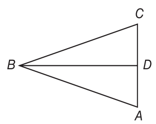
يتطابق مثلثان إذا وفقط إذا كانت عناصرهما المتناظرة متطابقة، وتتضمن العناصر المتناظرة الزوايا والأضلاع. إن العبارة " إذا.. وفقط إذا" تعني أن العبارة الشرطية وعكسها صحيحتان.

وعند إثبات تطابق مثلثين، يمكن استعمال خصائص الانعكاس والتماثل والتعدي للتطابق.

مثال **اكتب برهانًا ذا عمودين.**

المعطيات: $\overline{BD}$ تنصف $\angle ABC$ ، $\overline{AB} \cong \overline{CB}, \overline{AD} \cong \overline{CD}, \angle BAD \cong \angle BCD$.

المطلوب: إثبات أن $\Delta ABD \cong \Delta CBD$.



البرهان:

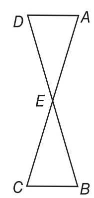
العبارات	المبرِّرات
1) $\overline{AB} \cong \overline{CB}, \overline{AD} \cong \overline{CD}$	1) معطيات.
2) $\overline{BD} \cong \overline{BD}$	2) خاصية الانعكاس للتطابق.
3) $\angle BAD \cong \angle BCD$	3) معطيات.
4) $\angle ABD \cong \angle CBD$	4) تعريف منصف الزاوية.
5) $\angle BDA \cong \angle BDC$	5) نظرية الزاوية الثالثة.
6) $\Delta ABD \cong \Delta CBD$	6) جميع العناصر المتناظرة متطابقة.

تمارين

1) اكتب برهانًا ذا عمودين.

المعطيات: $\angle A \cong \angle C, \angle D \cong \angle B$، $\overline{AD} \cong \overline{CB}, \overline{AE} \cong \overline{CE}$، $\overline{BD}$ تنصف $\overline{AC}$

المطلوب: إثبات أن $\Delta AED \cong \Delta CEB$



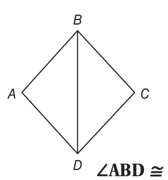
1) **البرهان:**

العبارات	المبرِّرات
1) $\angle A \cong \angle C, \angle D \cong \angle B$	1) **معطيات.**
2) $\angle AED \cong \angle CEB$	2) **زاويتان متقابلتان بالرأس.**
3) $\overline{AD} \cong \overline{CB}, \overline{AE} \cong \overline{CE}$	3) **معطيات.**
4) $\overline{DE} \cong \overline{BE}$	4) **تعريف منصف قطعة مستقيمة.**
5) $\Delta AED \cong \Delta CEB$	5) **جميع العناصر المتناظرة في المثلثين متطابقة.**

2) اكتب برهانًا حرًّا.

المعطيات: $\overline{BD}$ تنصف كلًّا من $\angle ABC$ ، $\angle ADC$ ، $\overline{AB} \cong \overline{CB}, \overline{AB} \cong \overline{AD}, \overline{CB} \cong \overline{DC}$

المطلوب: إثبات أن $\Delta ABD \cong \Delta CBD$



2) **البرهان:**

بما أن BD تنصف كلًّا من $\angle ADC, \angle ABC$ ، بحسب المعطيات؛ فإن: $\angle ABD \cong \angle CBD$ ، $\angle ADB \cong \angle CDB$

بحسب تعريف منصف زاوية، وباستعمال نظرية الزاوية الثالثة في المثلث نجد أن $\angle A \cong \angle C$

وبما أننا نعلم من المعطيات أن: $\overline{AB} \cong \overline{AD}$ ، $\overline{AB} \cong \overline{CB}$ وأن $\overline{CB} \cong \overline{DC}$ وباستعمال خاصية التعويض ، فإن $\overline{AD} \cong \overline{CD}$

وبحسب خاصية الانعكاس للتطابق فإن $\overline{BD} \cong \overline{BD}$ ، وهذا يعني أن $\Delta ABD \cong \Delta CBD$ ؛ لأن جميع العناصر المتناظرة في المثلثين متطابقة.

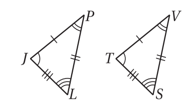
الاسم ____________ التاريخ ________

3-3 تدريبات المهارات

المثلثات المتطابقة

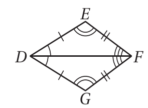
بيّن تطابق المثلثين في كلٍّ من السؤالين الآتيين، بتعيين جميع العناصر المتناظرة والمتطابقة، ثم اكتب عبارة التطابق.

1)



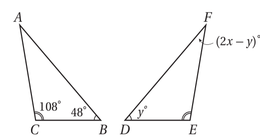
$\angle J \cong \angle T; \angle P \cong \angle V;$
$\angle L \cong \angle S; \overline{JP} \cong \overline{TV}$
$\overline{PL} \cong \overline{VS}; \overline{JL} \cong \overline{TS}$
$\triangle JPL \cong \triangle TVS$

2)



$\angle EDF \cong \angle GDF; \angle E \cong \angle G;$
$\angle EFD \cong \angle GFD; \overline{DE} \cong \overline{DG}; \overline{DF} \cong \overline{DF};$
$\overline{GF} \cong \overline{EF}; \triangle DEF \cong \triangle DGF$

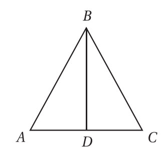
في الشكل المجاور، إذا كان: $\triangle ABC \cong \triangle FDE$، فأوجد قيمة كلٍّ ممّا يأتي:



3) y **48**

4) x **36**

5) **برهان:** اكتب برهانًا ذا عمودين.



المعطيات: $\overline{AB} \cong \overline{CB}, \overline{AD} \cong \overline{CD}, \angle ABD \cong \angle CBD$
$\angle ADB \cong \angle CDB$

المطلوب: إثبات أن $\triangle ABD \cong \triangle CBD$.

البرهان:

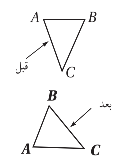
العبارات	المبرِّرات
1) $\overline{AB} \cong \overline{CB}, \overline{AD} \cong \overline{CD}$	**1) معطيات**
2) $\angle ABD \cong \angle CBD, \angle ADB \cong \angle CDB$	**2) معطيات**
3) $\angle A \cong \angle C$	**3) نظرية الزاوية الثالثة**
4) $\overline{BD} \cong \overline{BD}$	**4) خاصية الانعكاس للتطابق**
5) $\triangle ABD \cong \triangle CBD$	**5) جميع العناصر المتناظرة في المثلثين متطابقة**

الاسم ____________ التاريخ ________

3-3 تدريبات حل المسألة

المثلثات المتطابقة

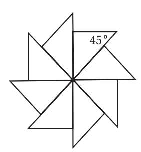
1) **مناظر:** علّق منصورٌ منظرًا طبيعيًّا مُحاطًا بإطار مثلثٍ الشكل على حائط في غرفته.



وفي أحد الأيام سقط الإطار على الأرض من دون أن ينكسر أو أن ينثني، والشكل أعلاه يبيّن الإطار قبل سقوطه وبعده. اكتب أسماء رؤوس الإطار بعد السقوط تبعًا للتسمية المبيَّنة على الإطار قبل السقوط.

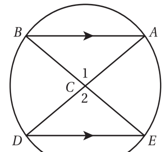
2) **مثلث سيربنسكي:** يبيّن الشكل أدناه جزءًا من مثلث سيربنسكي، ويمتاز هذا المثلث بأن المثلثات الموجودة فيه جميعها متطابقة الأضلاع، ما عدد المثلثات الظاهرة في هذا الجزء من مثلث سيربنسكي التي تطابق المثلث المظلّل في الركن السفلي؟ **11**

3) **تصميم هندسي:** الشكل أدناه نموذج لنقش على أحد الألحفة، وهو عبارة عن مثلثات متطابقة ناتجة عن تكرار رسم المثلث المتطابق الضلعين القائم الزاوية نفسه، ما القياسان المجهولان لزاويتي هذا المثلث؟



90°, 45°

4) قامت هند بزخرفة جدار غرفتها بالرسوم المبينة في الشكل أدناه.



فسألتها أختها: هل $\triangle DCE$ وَ $\triangle ACB$ متطابقان؟
فأجابتها: ما عليك سوى قياس $\overline{AB}$ وَ $\overline{DE}$، فإذا كانتا متطابقتين، فالمثلثان متطابقان.
ما الأساس الذي بنت هند إجابتها عليه؟

إجابة ممكنة: $m\angle 1 = m\angle 2$ لأنهما متقابلتان بالرأس، وكذلك $m\angle E = m\angle B$ لأنهما متبادلتان داخليًا، $m\angle A = m\angle D$ لأنهما متبادلتان داخليًا، $BC = CE$، $AC = DC$ وَ أنصاف أقطار للدائرة. وبذلك تتطابق جميع العناصر المتناظرة.

5) **خرائط:** لاحظ سامي على خريطة للحيّ أن المثلث الذي رؤوسه المركز التجاري(S) والمسجد (M) والحديقة (P)، يطابق المثلث الذي رؤوسه بيت عامر(A) وبيت فايز (F) وبيت حسن (H)؛ أي أن $\triangle SMP \cong \triangle AFH$.

a) إذا كانت المسافة بين المركز التجاريّ والحديقة 1 km، فأيّ مسار في $\triangle AFH$ يطابق هذه المسافة؟

المسار بين بيتَي عامر وحسن يطابق المسار بين المركز التجاري والحديقة، وطوله يساوي 1 km

b) إذا كان قياس$\angle MPS$ يساوي 40°، فأيُّ زوايا $\triangle AFH$ تطابق هذه الزاوية ؟ **$\angle FHA$**

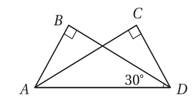
الاسم ______________ التاريخ ______________

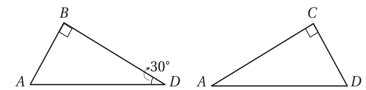
3-3 التدريبات الإثرائيّة

المثلثات المتداخلة

عندما تتداخل المثلثات، فإنها تشترك في بعض العناصر المتناظرة أحيانًا، ولتحديد العناصر المتناظرة بسهولةٍ، حاول أن تُعيد رسم المثلثين منفصلين.

مثال في الشكل الآتي: $\Delta ABD \cong \Delta DCA$ ، $m\angle BDA = 30°$، أوجد $m\angle CAD$ ، $m\angle CDA$.





أعد رسم ΔABD ، ΔDCA منفصلين على النحو الآتي:

والآن تلاحظ أن $\angle BDA \cong \angle CAD$؛ لأنها عنصران متناظران في مثلثين متطابقين؛ لذا فإن $m\angle CAD = 30°$،

وباستعمال نظرية مجموع زوايا المثلث تجد أن:

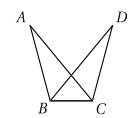
$m\angle CDA = 180° - (90° + 30°) = 60°$

تمارين

1) في الشكل المجاور:

$\Delta ABC \cong \Delta DCB$, $m\angle ABC = 110°$, $m\angle D = 20°$

أوجد $m\angle ACB$ ، $m\angle DCB$.



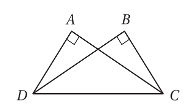
$m\angle DCB = 110°$, $m\angle ACB = 50°$

2) اكتب برهانًا ذا عمودين.

المعطيات: $\angle A$ ، $\angle B$ زاويتان قائمتان،

$\angle ACD \cong \angle BDC$, $\overline{AD} \cong \overline{BC}$, $\overline{AC} \cong \overline{BD}$

المطلوب: إثبات أن $\Delta ADC \cong \Delta BCD$.



البرهان:

العبارات	المبررات
1) $\angle A$ و $\angle B$ قائمتان	1) معطيات
2) $\angle A \cong \angle B$	2) الزوايا القوائم متطابقة
3) $\angle ACD \cong \angle BDC$	3) معطيات
4) $\angle ADC \cong \angle BCD$	4) نظرية الزاوية الثالثة
5) $\overline{AD} \cong \overline{BC}, \overline{AC} \cong \overline{BD}$	5) معطيات
6) $\overline{DC} \cong \overline{CD}$	6) خاصية الانعكاس
7) $\Delta ADC \cong \Delta BCD$	7) جميع العناصر المتناظرة في المثلثين متطابقة

الاسم ______________ التاريخ ______________

3-4 تدريبات إعادة التعليم

إثبات تطابق المثلثات: SSS, SAS

المسلّمة SSS:

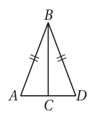
تعلم أن المثلثين يكونان متطابقين إذا كانت أضلاعهما المتناظرة متطابقة، وكانت زواياهما المتناظرة متطابقة. المسلّمة: ضلع – ضلع – ضلع (SSS)، وتمكّنك من أن تثبت تطابق مثلثين إذا علمت أن أضلاعهما المتناظرة متطابقة .

مسلمة التطابق بثلاثة أضلاع (SSS):	إذا طابقت الأضلاع الثلاثة في مثلث الأضلاع المناظرة لها في مثلثٍ آخر، فإن المثلثين متطابقان.

مثال اكتب برهانًا ذا عمودين.

المعطيات: C نقطة منتصف $\overline{AD}$ ، $\overline{AB} \cong \overline{DB}$.

المطلوب: إثبات أن $\Delta ABC \cong \Delta DBC$.

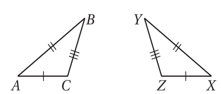


العبارات	المبرّرات
1) $\overline{AB} \cong \overline{DB}$	1) معطيات
2) C نقطة منتصف $\overline{AD}$	2) معطيات
3) $\overline{AC} \cong \overline{DC}$	3) تعريف نقطة المنتصف
4) $\overline{BC} \cong \overline{BC}$	4) خاصية الانعكاس للتطابق
5) $\Delta ABC \cong \Delta DBC$	5) المسلّمة SSS

تمارين

اكتب برهانًا من النوع المحدد في كلٍّ من السؤالين الآتيين:

1) برهان ذو عمودين:



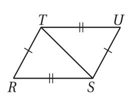
المعطيات: $\overline{AB} \cong \overline{XY}, \overline{AC} \cong \overline{XZ}, \overline{BC} \cong \overline{YZ}$

المطلوب: إثبات أن $\Delta ABC \cong \Delta XYZ$

البرهان:

العبارات	المبرّرات
1) $\overline{AB} \cong \overline{XY}$ $\overline{AC} \cong \overline{XZ}$ $\overline{BC} \cong \overline{YZ}$	1) معطيات
2) $\Delta ABC \cong \Delta XYZ$	2) المسلّمة SSS

2) برهان تسلسلي:



المعطيات: $\overline{RS} \cong \overline{UT}, \overline{RT} \cong \overline{US}$

المطلوب: إثبات أن $\Delta RST \cong \Delta UTS$

البرهان:

$\boxed{\overline{RS} \cong \overline{UT}, \overline{RT} \cong \overline{US}}$
معطى

$\boxed{\overline{TS} \cong \overline{ST}}$
خاصية الانعكاس للتطابق

$\boxed{\Delta RST \cong \Delta UTS}$
المسلمة SSS

الاسم ____________ التاريخ ________

3-4 تدريبات إعادة التعليم (تتمة)

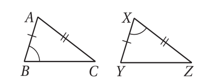
إثبات تطابق المثلثات: SSS, SAS

مسلّمة التطابق بضلعين وزاوية محصورة بينهما SAS:

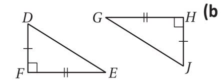
يمكنك إثبات تطابق مثلثين بطريقةٍ أخرى مستعملًا المسلّمة: ضلع زاوية ضلع (SAS) .

مسلّمة التطابق بضلعين وزاويةٍ محصورةٍ بينهما (SAS)	إذا طابق ضلعان والزاوية المحصورة بينهما في مثلثٍ نظائرها في مثلث آخر، فإن المثلثين متطابقان.

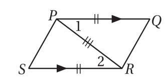
مثال أي أزواج المثلثات الآتية يُمكِنك إثبات تطابقها باستعمال المسلّمة SAS.

a) 

الزاوية المحددة في $\triangle ABC$ ليست محصورة بين الضلعين $\overline{AB}$ و $\overline{AC}$. وبناءً عليه لا يمكنك إثبات تطابق هذين المثلثين مستعملًا المسلّمة SAS.

b) 

الزاويتان القائمتان متطابقتان، وهما محصورتان بين الأضلاع المتناظرة المتطابقة، وبناءً عليه فإن $\triangle DEF \cong \triangle JGH$ وفق المسلّمة SAS.

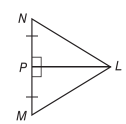
c) 

$\angle 2$,$\angle 1$ متطابقتان؛ لأنها متبادلتان داخليًّا بين مستقيمين متوازيين ومستقيم يقطعهما، وهما محصورتان بين الأضلاع المتناظرة المتطابقة. وبناءً عليه فإن $\triangle PSR \cong \triangle RQP$ وفق المسلّمة SAS.

تمارين

اكتب برهانًا من النوع المحدد في كلٍّ من الأسئلة الآتية.

1) برهان ذو عمودين.



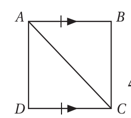
المعطيات: $\overline{NP} \perp \overline{PL}$, $\overline{NP} \cong \overline{PM}$

المطلوب: إثبات أن $\triangle NPL \cong \triangle MPL$

البرهان:

العبارات	المبرزات
1) $\overline{NP} \cong \overline{PM}$, $\overline{NP} \perp \overline{PL}$	1) معطيات
2) $\angle NPL$ قائمة، $\angle MPL$ قائمة	2) القطع المتعامدة تكوّن زوايا قائمة
3) $\angle MPL \cong \angle NPL$	3) الزوايا القائمة متطابقة
4) $\overline{PL} \cong \overline{PL}$	4) خاصية الانعكاس للتطابق
5) $\triangle NPL \cong \triangle MPL$	5) المسلّمة SAS

2) برهان تسلسلي:



المعطيات: $\overline{AB} \cong \overline{CD}$, $\overline{AB} \parallel \overline{CD}$

المطلوب: إثبات أن $\triangle ACD \cong \triangle CAB$

البرهان:

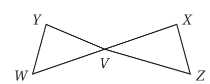
$\boxed{\overline{AB} \cong \overline{CD}, \overline{AB} \parallel \overline{CD}}$ معطى

$\boxed{\angle BAC \cong \angle DCA}$ نظرية الزوايا المتبادلة داخليًا

$\boxed{\overline{AC} \cong \overline{AC}}$ خاصية الانعكاس للتطابق

$\boxed{\triangle ACD \cong \triangle CAB}$ المسلّمة SAS

3) برهان حر.



المعطيات: V نقطة منتصف $\overline{YZ}$ و V نقطة منتصف $\overline{WX}$.

المطلوب: إثبات أن $\triangle XVZ \cong \triangle WVY$.

البرهان:

بما أن V نقطة منتصف كلٍّ من $\overline{YZ}$, $\overline{WX}$ ، فإن: $\overline{WV} \cong \overline{VX}$ ، $\overline{YV} \cong \overline{VZ}$ من تعريف نقطة المنتصف،

كما أن $m\angle YVW \cong m\angle XVZ$ بالتقابل بالرأس، وعليه فإن $\triangle XVZ \cong \triangle WVY$ بحسب المسلّمة SAS.

الاسم ____________ التاريخ ________

3-4 تدريبات المهارات

إثبات تطابق المثلثات: SSS, SAS

حدّد ما إذا كان $\triangle ABC \cong \triangle KLM$ في كلٍّ من السؤالين الآتيين ، وبرّر إجابتك.

1) $A(-3, 3), B(-1, 3), C(-3, 1), K(1, 4), L(3, 4), M(1, 6)$

$AB = 2, KL = 2, BC = 2\sqrt{2}, LM = 2\sqrt{2}, AC = 2, KM = 2$.

أطوال الأضلاع المتناظرة متساوية؛ لذا فهي متطابقة،إذن $\triangle ABC \cong \triangle KLM$ وفق المسلّمة SSS.

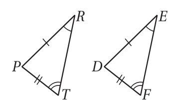
2) $A(-4, -2), B(-4, 1), C(-1, -1), K(0, -2), L(0, 1), M(4, 1)$

$AB = 3, KL = 3, BC = \sqrt{13}, LM = 4, AC = \sqrt{10}, KM = 5$.

أطوال الأضلاع المتناظرة غير متساوية، لذا فهي غير متطابقة، وعليه يكون المثلثان $\triangle ABC$, $\triangle KLM$ غير متطابقين.

برهان: اكتب برهانًا من النوع المحدّد في كلٍّ من السؤالين الآتيين:

3) برهان تسلسلي.



المعطيات: $\overline{PR} \cong \overline{DE}, \overline{PT} \cong \overline{DF}$

$\angle R \cong \angle E, \angle T \cong \angle F$

المطلوب: إثبات أن $\triangle PRT \cong \triangle DEF$

البرهان :

$\boxed{\overline{PR} \cong \overline{DE}}$ معطيات

$\boxed{\overline{PT} \cong \overline{DF}}$ معطيات

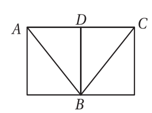
$\boxed{\angle R \cong \angle E}$ معطيات

$\boxed{\angle T \cong \angle F}$ معطيات

$\boxed{\angle P \cong \angle D}$ نظرية الزاوية الثالثة

$\boxed{\triangle PRT \cong \triangle DEF}$ SAS

4) برهان ذو عمودين.



المعطيات: D نقطة منتصف $\overline{AC}$ و $\overline{AB} \cong \overline{CB}$.

المطلوب: إثبات أن $\triangle ABD \cong \triangle CBD$.

البرهان:

العبارات	المبرزات
1) $\overline{AC}$ نقطة منتصف D; $\overline{AB} \cong \overline{CB}$	1) معطيات
2) $\overline{AD} \cong \overline{CD}$	2) تعريف نقطة المنتصف
3) $\overline{BD} \cong \overline{BD}$	3) خاصية الانعكاس للتطابق
4) $\triangle ABD \cong \triangle CBD$	4) المسلّمة SSS

الاسم ____________ التاريخ ________

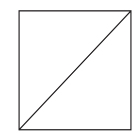
3-4 تدريبات حلّ المسألة

إثبات تطابق المثلثات: SSS, SAS

1) **أعواد:** تقوم كلٌّ من هند ومها بصنع مجسم باستعمال أعوادٍ خشبيةٍ، فإذا تناولت كلٌّ منهما 3 أعواد أطوالها 30 cm, 28 cm, 29 cm وصنعت مثلثًا، فهل يمكن أن تحصلا على مثلثين غير متطابقين؟ ولماذا؟

لا، أطوال الأعواد ثابتة، وعليه فإن أي ترتيب لها يُعطي المثلث نفسه.

2) **حلوى:** خبزت سعاد رقاقتين لصنع البقلاوة، وهناك علامات على الطبق الذي خبزتها فيه، مكّنتها من تقسيم الرقاقة مربّعاتٍ كبيرةً، ثم قسّمت كلّ مربّع قطريًّا لتكوين مثلثين متطابقين.
ما المسلّمة التي يمكنك استعمالها لإثبات تطابق المثلثين؟



إما مسلّمة SSS أو SAS

3) **ورق جدران:** يستعمل سليمان ورقة جدران على شكل مثلث متطابق الضلعين، وزواياه هي: $77°, 77°, 26°$، وأراد أن يقسم الورقة جزأين متطابقين، فقسَمها من رأس الزاوية $26°$ إلى منتصف الضلع المقابل، وقال إن القطعتين متطابقتان؛ لأنه قسَمَها من نقطة منتصف أحد الأضلاع. فهل هذه المعلومة كافية لإثبات التطابق؟ وضّح إجابتك.

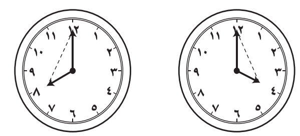
إجابة ممكنة: لا؛ لأنه وضّح تطابق ضلع وزاوية في القطعة الأولى مع ضلع وزاوية في القطعة الثانية فقط، وهي ليست عناصر كافية للتطابق.

4) **بلاط:** يعمل مُصطفى في تركيب البلاط، ولديه صندوقان من البلاط، يحوي كلٌّ منهما على بلاطات متطابقةً فيما بينها ومتطابقة الأضلاع، إذا أراد أن يتأكدّ من أن جميع البلاط في الصندوقين متطابق، فما الذي يتعيَّن عليه فعله؟ وضّح إجابتك.

إجابة ممكنة: يحتاج فقط إلى قياس طول أحد الأضلاع لبلاطة من الصندوق الأول؛ وطول أحد الأضلاع لبلاطة من الصندوق الثاني.

5) **عقارب الساعة:** إذا اعتبرنا عقربَي الساعة يشكّلان ضلعين في مثلث، فحدّد هل المثلثان متطابقان في كلٍّ من الفقرتين a, b. ولماذا؟

a) عندما تكون الساعة 4، عندما تكون الساعة 8؟



متطابقان، تطابق ضلعين وزاوية محصورة بينهما، مسلمة SAS

b) عندما تكون الساعة 4 وعندما تكون مثلث الساعة 8 في ساعتين مختلفتين بأطوال عقاربها؟

لا؛ لأن العناصر المتناظرة غير متطابقة.

c) اقترح توقيتًا يتطابق مثلثه مع مثلث الساعة 5.

إجابة ممكنة: مثلث الساعة 7.

الاسم ____________ التاريخ ________

3-4 التدريبات الإثرائيّة

تطابق المثلثات القائمة:

عرفنا تطابق مثلثين، ثم اكتفينا ببعض العناصر لإثبات تطابق مثلثين، إذا كان المثلثان قائمين، فهل يمكن تقليل عدد العناصر اللّازمة للتطابق.

انفِ أو أثبت صحة كل من العبارات الآتية:

1) يتطابق مثلثان قائمان، إذا تطابق ضلعا الزاوية القائمة في المثلث الأول مع نظائرها من المثلث الثاني؟

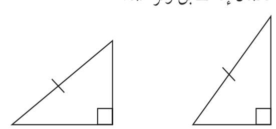
صحيحة، بما أن المثلثين قائمان، إذن فقد تحققت حالة SAS

2) يتطابق مثلثان قائمان، إذا تطابق وتر وأحد ضلعي الزاوية القائمة من الأول مع نظائرها من المثلث الثاني.

صحيحة، إجابة ممكنة يمكن إيجاد طول الضلع الثالث باستعمال نظرية فيثاغورس، وبذلك تنطبق على المثلثين المسلّمة SSS.

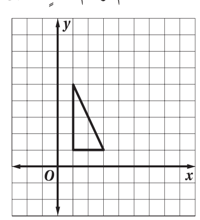
3) يتطابق مثلثان قائمان إذا تطابق وتراهما.

لا، مثال مضاد



4) استعمل معلومات تطابق المثلث القائم لرسم مثلثٍ يطابق المثلث المرسوم على الشبكة، وحدّد إحداثيات رؤوسه.

انظر إجابات الطلاب.



الاسم ____________ التاريخ ________

3-5 تدريبات إعادة التعليم

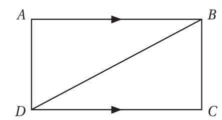
إثبات تطابق المثلثات: ASA, AAS

مسلّمة التطابق بزاويتين وضلع محصور بينهما (ASA):

يمكنك إثبات تطابق مثلثين مستعملًا المسلّمة: زاوية – ضلع – زاوية (ASA) .

مسلّمة التطابق بزاويتين وضلع محصور بينهما (ASA)	إذا طابقت زاويتان والضلع المحصور بينهما في مثلث نظائرهما في مثلثٍ آخر، فإن المثلثين متطابقان.

مثال اكتب برهانًا ذا عمودين.



المعطيات: $\overline{AB} \parallel \overline{CD}$

المطلوب: إثبات أن $\Delta ABD \cong \Delta CDB$

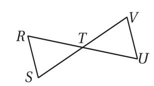
البرهان:

العبارات	المبرّرات
1) $\overline{AB} \parallel \overline{CD}$	1) معطيات
2) $\angle CBD \cong \angle ADB$	2) نظرية الزاويتين المتبادلتين داخليًّا
3) $\angle ABD \cong \angle BDC$	3) نظرية الزاويتين المتبادلتين داخليًّا
4) $\overline{BD} \cong \overline{BD}$	4) خاصية الانعكاس للتطابق
5) $\Delta ABD \cong \Delta CDB$	5) المسلّمة ASA

تمارين

اكتب برهانًا من النوع المحدّد في كلٍّ من السؤالين الآتيين:

1) برهان ذو عمودين.



المعطيات: $\angle S \cong \angle V$

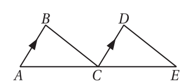
T نقطة منتصف $\overline{SV}$.

المطلوب: إثبات أن $\Delta RTS \cong \Delta UTV$

البرهان:

العبارات	المبرّرات
1) $\angle S \cong \angle V$ ؛ T **نقطة منتصف** $\overline{SV}$	**1) معطيات**
2) $\overline{ST} \cong \overline{TV}$	**2) تعريف نقطة المنتصف**
3) $\angle RTS \cong \angle VTU$	**3) نظرية الزاويتين المتقابلتين بالرأس**
4) $\Delta RTS \cong \Delta UTV$	**4) المسلّمة ASA**

2) برهان حر.



المعطيات: $\overline{AE}$ تنصف $\overline{CD}$

$\angle E \cong \angle BCA$ و $\overline{AB} \parallel \overline{CD}$

المطلوب: إثبات أن $\Delta ABC \cong \Delta CDE$

البرهان:

تعلم أن: $\angle E \cong \angle BCA$، و$\overline{CD}$ تنصف $\overline{AE}$، وعليه يكون $\overline{AC} \cong \overline{CE}$، وتعلم أيضًا من المعطيات أن $\overline{AC} \parallel \overline{CD}$، وعليه فإن $\angle A \cong \angle DCE$، بحسب مسلّمة الزاويتين المتناظرتين،

إذن $\Delta ABC \cong \Delta CDE$ بحسب المسلّمة ASA.

الاسم ____________ التاريخ ________

3-5 تدريبات إعادة التعليم (تتمة)

إثبات تطابق المثلثات: ASA, AAS

التطابق بزاويتين وضلع غير محصور بينهما (AAS):

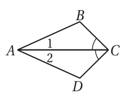
يمكنك إثبات تطابق مثلثين مستعملًا نظرية: زاوية – زاوية – ضلع (AAS) .

التطابق بزاويتين وضلع غير محصور بينهما (AAS)	إذا طابقت زاويتان وضلع غير محصور بينهما في مثلث نظائرها في مثلث آخر فإن المثلثين متطابقان.

لقد أصبح لديك الآن خمس طرائق لإثبات تطابق مثلثين هي:

- المسلّمة ASA
- المسلّمة SSS
- المسلّمة AAS
- المسلّمة SAS

مثال في الشكل المجاور: $\angle BCA \cong \angle DCA$، ما الأضلاع المتطابقة في الشكل؟



ما العنصران المتناظران الآخران اللذان يتعيّن أن يكونا متطابقين، حتى يكون المثلثان متطابقين وفق النظرية AAS؟

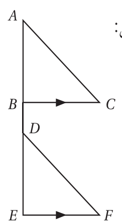
الأضلاع المتطابقة: $\overline{AC} \cong \overline{AC}$ وفق خاصية الانعكاس للتطابق.

لا يمكن أن يكون العنصران الآخران هما $\angle 1$ و$\angle 2$ ؛ لأن $\overline{AC}$ يكون الضلع المحصور بينهما في هذه الحالة؛ لذا يتعين أن تكون $\angle B \cong \angle D$، وعندها يكون $\Delta ABC \cong \Delta ADC$ وفق النظرية AAS.

تمارين

برهان: اكتب برهانًا من النوع المحدّد في كل من السؤالين الآتيين:

1) برهان ذو عمودين.



المعطيات: $\overline{BC} \parallel \overline{EF}$

$\overline{AB} \cong \overline{ED}$

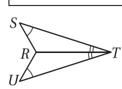
$\angle C \cong \angle F$

المطلوب: إثبات أن $\Delta ABC \cong \Delta DEF$.

البرهان:

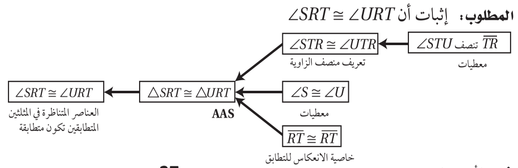
العبارات	المبرّرات
1) $\overline{BC} \parallel \overline{EF}, \overline{AB} \cong \overline{ED}$ $\angle C \cong \angle F$	**1) معطيات**
2) $\angle ABC \cong \angle DEF$	**2) مسلمة الزاويتين المتناظرتين**
3) $\Delta ABC \cong \Delta DEF$	**3) النظرية AAS**

2) برهان تسلسلي.



المعطيات: $\angle S \cong \angle U$ ؛ $\overline{TR}$ تنصّف $\angle STU$

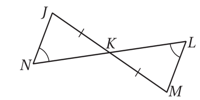
المطلوب: إثبات أن $\angle SRT \cong \angle URT$



3-5 تدريبات المهارات

إثبات تطابق المثلثات: ASA, AAS

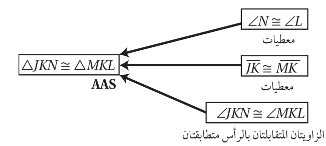
1) اكتب برهانًا تسلسليًا.



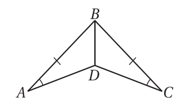
المعطيات: $\angle N \cong \angle L$، $\overline{JK} \cong \overline{MK}$.

المطلوب: إثبات أن $\triangle JKN \cong \triangle MKL$.

البرهان:



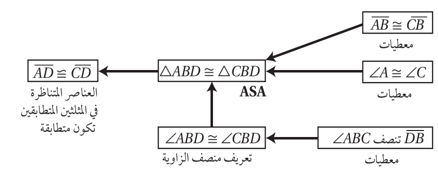
2) اكتب برهانًا تسلسليًا.



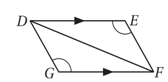
المعطيات: $\overline{AB} \cong \overline{CB}$، $\angle A \cong \angle C$، $\overline{DB}$ تنصّف $\angle ABC$.

المطلوب: إثبات أن $\overline{AD} \cong \overline{CD}$.

البرهان :



3) اكتب برهانًا حرًّا.



المعطيات: $\overline{DE} \parallel \overline{FG}$. $\angle E \cong \angle G$

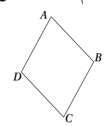
المطلوب: إثبات أن $\triangle DFG \cong \triangle FDE$

البرهان : لما كان $\overline{FG} \parallel \overline{DE}$، فإن $\angle GFD \cong \angle EDF$؛ لأن الزاويتين المتبادلتين داخليًا بين مستقيمين متوازيين وقاطع لهما تكونان متطابقتين، وتعلم أن $\angle E \cong \angle G$، وكذلك $\overline{FD} \cong \overline{DF}$ وفق خاصية الانعكاس للتطابق، وعليه فإن $\triangle FDE \cong \triangle DFG$ وفق النظرية AAS.

3-5 تدريبات حلّ المسألة

إثبات تطابق المثلثات: ASA, AAS

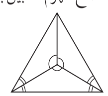
1) أراد أخوان اقتسام قطعة الأرض التالية بالتساوي،



فقام أحدهما بوضع حدٍّ فاصلٍ $\overline{DB}$ يقسم الأرض إلى قطعتين متطابقتين، خمن المعلومة التي كانت لديه حتى يتيقن من أن قطعتي الأرض متطابقتان؟

إجابة ممكنة: $\overline{DB}$ تنصف كلًا من $\angle B$ و $\angle D$، المسلمة ASA

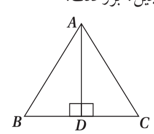
2) هرم: أراد خالد صنع الهرم المبين بالشكل من الورق المقوى،



فاستنتج أن عليه القيام بقصِّ 3 مثلثاتٍ متطابقة على الأقل. فهل استنتاجه صحيح؟ برِّر إجابتك.

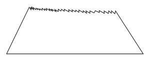
نعم؛ لأن مثلث القاعدة يطابق كُلًا من المثلثين الآخرين الظاهرين؛ المسلمة ASA.

3) نجارة: لدى نجار قطعة خشبية على شكل مثلث متطابق الأضلاع، إذا أراد أن يقسمها إلى قسمين متطابقين، فرسم بالقلم قطعةً مستقيمةً من النقطة A وعموديةً على الضلع المقابل لـ A، فهل ما قام به النجار يضمن تطابق المثلثين الناتجين؟ برِّر ذلك.



إجابة ممكنة: نعم؛ بما أن المثلث الأصلي متطابق الأضلاع، فإن هناك زوجًا من الزوايا المتطابقة إضافة إلى زوج الزاويتين القائمتين، والضلع المشترك، وبذلك يكون المثلثان متطابقين بحسب النظرية .

4) ديكور: استعمل مهندس ديكور 5 أنواع مختلفة من القطع الزجاجية المثلثة الشكل لعمل ديكور للحائط، إذا وجد إحدى قطع الزجاج مكسورة والباقي منها هو الجزء المبين أدناه،



فهل يستطيع معرفة هذه القطعة من أي نوع من الأنواع الخمسة المختلفة التي استعملها؟ برِّر إجابتك.

نعم، بما أن القطعة تحدد قياس زاويتين وضلع من المثلث، فإنه يمكن تحديد المثلث المطابق للقطعة قبل الكسر. بحسب المسلمة ASA.

5) صيانة الحدائق: تحتاج إدارة حديقة إلى غطاء على هيئة مثلث لتغطية حقل على هيئة مثلث متطابق الأضلاع، طول ضلعه $200\,ft$.

a) إذا وُجد غطاء على هيئة مثلث فيه زاويتان، قياس كلٍّ منهما $60°$، وطول أحد أضلاعه $200\,ft$، فهل هذا الغطاء مناسب لذلك الحقل؟ وضِّح إجابتك.

نعم؛ لأن هناك زاويتين قياس كلٍ منهما $60°$، فإن قياس الزاوية الثالثة يساوي $60°$، ويمكن استعمال ASA أو AAS لإثبات أن الغطاء مناسب.

b) إذا علمت أن قياس كلٍّ من الزوايا الثلاث في غطاءٍ مثلث الشكل يساوي $60°$، فهل يكون هذا الغطاء مناسبًا لذلك الحقل بالضرورة؟

لا؛ لأن هناك مثلثات متطابقة الزوايا من كافة الأطوال.

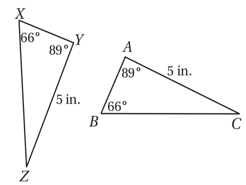
الاسم ____________ التاريخ ________

3-5 التدريبات الإثرائيّة

هل يمكن إثبات تطابق المثلثات باستعمال AAA؟

لقد تعلمت إثبات تطابق المثلثات باستعمال المسلّمتين ASA ، SSS، فهل تعتقد أنه يمكنك إثبات تطابق المثلثات باستعمال AAA؟

استقصِ النظريّة AAS التي تنصّ على أنه يتطابق المثلثان إذا طابق زوجٌ من الزوايا المتناظرة وضلع غير محصور في المثلث الأول نظائرها في المثلث الثاني، فعلى سبيل المثال، في الشكل المجاور: $\angle X \cong \angle B, \angle Y \cong \angle A, \overline{YZ} \cong \overline{AC}$



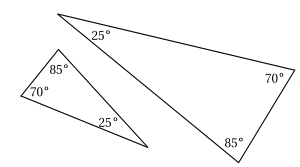
1) ارجع إلى الشكل السابق، وأوجد قياس الزاوية المجهولة في المثلث الأول، وأوجد قياس الزاوية المجهولة في المثلث الثاني.

25° ; 25°

2) مستعملًا المعلومات التي في السؤال 1، ما المسلّمة التي يُمكِنك استعمالها الآن لإثبات تطابق المثلثين؟

ASA

والآن استقصِ التخمين AAA الذي ينصّ على أنه يتطابق مثلثان إذا كانت الأزواج الثلاثة من الزوايا المتناظرة متطابقة، والمثلثان الآتيان يوضّحان التخمين AAA.



3) هل هذان المثلثان متطابقان؟ وضّح إجابتك.

لا؛ لأن أطوال الأضلاع المتناظرة في المثلثين مختلفة.

4) هل يمكنك رسم مثلثين زواياهما المتناظرة الثلاث متطابقة ولكنهما غير متطابقين؟ وهل يمكنك استعمال AAA لإثبات تطابق مثلثين؟

نعم؛ لا.

5) ما الخاصيّة التي يحقّقها هذان المثلثان المرسومان وفق AAA؟

لهما الشكل نفسه، ولكن أبعادهما مختلفة.

الصف: الأول الثانوي 30 الفصل 3: المثلثات المتطابقة

الاسم ____________ التاريخ ________

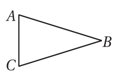
3-6 تدريبات إعادة التعليم

المثلثات المتطابقة الضلعين والمثلثات المتطابقة الأضلاع

خصائص المثلثات المتطابقة الضلعين:

في المثلث المتطابق الضلعين يوجد ضلعان متطابقان، يطلق عليهما اسم **الساقين**. وتُسمَّى الزاوية التي ضلعاها ساقا المثلث **زاوية الرأس**. وتُسمَّى الزاويتان الأخريان **زاويتي القاعدة**. ويمكنك إثبات النظرية الآتية الخاصة بالمثلث المتطابق الضلعين وعكسها.

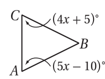
- إذا تطابق ضلعان في مثلث، فإن الزاويتين المقابلتين لهما متطابقتان (نظرية المثلث المتطابق الضلعين).
- إذا تطابقت زاويتان في مثلث، فإن الضلعين المقابلين لهما متطابقان (عكس نظرية المثلث المتطابق الضلعين).



إذا كانت: $\overline{AB} \cong \overline{CB}$، فإن: $\angle A \cong \angle C$

إذا كانت: $\angle A \cong \angle C$، فإن: $\overline{AB} \cong \overline{CB}$

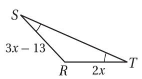
مثال 1 أوجد قيمة x في الشكل أدناه، إذا علمت أن $\overline{BA} \cong \overline{BC}$.



بما أن $BC = BA$، فإن:

$m\angle A = m\angle C$	نظريّة المثلث المتطابق الضلعين
$5x - 10 = 4x + 5$	بالتعويض
$x - 10 = 5$	بطرح $4x$ من كلا الطرفين
$x = 15$	بإضافة 10 إلى كلا الطرفين

مثال 2 أوجد قيمة x في الشكل أدناه.



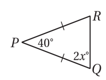
بما أن $m\angle S = m\angle T$، فإن:

$SR = TR$	عكس نظرية المثلث المتطابق الضلعين
$3x - 13 = 2x$	بالتعويض
$3x = 2x + 13$	بإضافة 13 إلى كلا الطرفين
$x = 13$	بطرح $2x$ من كلا الطرفين

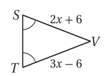
تمارين

جبر: أوجد قيمة المتغير في كلٍّ من الأسئلة الآتية:

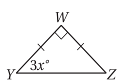
1) **35**



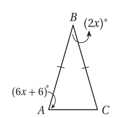
2) **12**



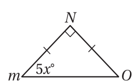
3) **15**



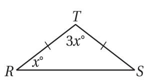
4) **12**



5) **9**



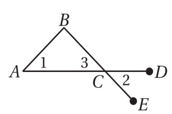
6) **36**



7) **برهان:** اكتب برهانًا ذا عمودين.

المعطيات: $\angle 1 \cong \angle 2$

المطلوب: إثبات أن $\overline{AB} \cong \overline{CB}$



البرهان:

العبارات	المبرِّرات
1) $\angle 1 \cong \angle 2$	1) معطيات
2) $\angle 2 \cong \angle 3$	2) الزاويتان المتقابلتان بالرأس متطابقتان
3) $\angle 1 \cong \angle 3$	3) خاصية التعدي للتطابق
4) $\overline{AB} \cong \overline{CB}$	4) عكس نظرية المثلث المتطابق الضلعين

الصف: الأول الثانوي 31 الفصل 3: المثلثات المتطابقة

الاسم ____________ التاريخ ____________

3-6 تدريبات إعادة التعليم (تتمة)

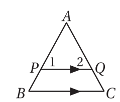
المثلثات المتطابقة الضلعين والمثلثات المتطابقة الأضلاع

خصائص المثلثات المتطابقة الأضلاع:

الأضلاع في المثلث المتطابق الأضلاع تكون متطابقة، تقود نظريّة المثلث المتطابق الضلعين إلى النتيجتين الآتيتين المتعلقتين بزوايا المثلث المتطابق الأضلاع:

1) يكون المثلث متطابق الأضلاع، إذا وفقط إذا كان متطابق الزوايا.
2) قياس كلّ زاويةٍ في المثلث المتطابق الأضلاع يساوي $60°$.

مثال أثبت أنه إذا وازى مستقيمٌ أحد أضلاع مثلثٍ متطابق الأضلاع، فإنه يُكوّن مثلثًا آخر متطابق الأضلاع.



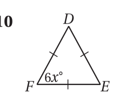
البرهان:

العبارات	المبرّرات
1) $\triangle ABC$ متطابق الأضلاع $\overline{PQ} \parallel \overline{BC}$	1) معطيات
2) $m\angle A = m\angle B = m\angle C = 60°$	2) قياس كلّ زاوية في المثلث المتطابق الأضلاع يساوي $60°$.
3) $\angle 1 \cong \angle B, \angle 2 \cong \angle C$	3) إذا توازَى مستقيمان، فإن الزاويتين المتناظرتين متطابقتان.
4) $m\angle 1 = 60°, m\angle 2 = 60°$	4) بالتعويض
5) $\triangle APQ$ متطابق الأضلاع.	5) إذا كان المثلث متطابق الزوايا، فإنه يكون متطابق الأضلاع.

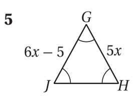
تمارين

جبر: أوجد قيمة المتغيّر في كلٍّ من الأسئلة الآتية:

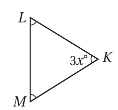
1) 10



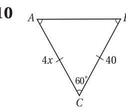
2) 5



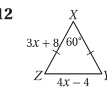
3) 20



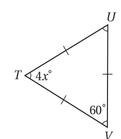
4) 10



5) 12



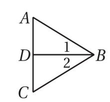
6) 15



7) **برهان:** اكتب برهانًا ذا عمودين.

المعطيات: $\triangle ABC$ متطابق الأضلاع؛ $\angle 2 \cong \angle 1$.

المطلوب: إثبات أن $\angle ADB \cong \angle CDB$



البرهان:

العبارات	المبرّرات
1) $\triangle ABC$ متطابق الأضلاع	1) معطيات
2) $\overline{AB} \cong \overline{CB}; \angle A \cong \angle C$	2) زوايا المثلث المتطابق الأضلاع متطابقة وأضلاعه متطابقة
3) $\angle 1 \cong \angle 2$	3) معطيات
4) $\triangle ABD \cong \triangle CBD$	4) المسلّمة ASA
5) $\angle ABD \cong \angle CDB$	5) العناصر المتناظرة في المثلثين المتطابقين متطابقة

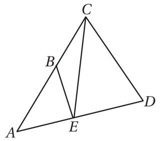
الصف: الأول الثانوي 32 الفصل 3: المثلثات المتطابقة

الاسم ____________ التاريخ ____________

3-6 تدريبات المهارات

المثلثات المتطابقة الضلعين والمثلثات المتطابقة الأضلاع

استعمل الشكل المجاور للإجابة عن الأسئلة 4–1.



1) إذا كانت: $\overline{AC} \cong \overline{AD}$ ، فسَمِّ زاويتين متطابقتين.

$\angle ACD \cong \angle CDA$

2) إذا كانت: $\overline{BE} \cong \overline{BC}$، فسَمِّ زاويتين متطابقتين.

$\angle BEC \cong \angle BCE$

3) إذا كانت: $\angle EBA \cong \angle EAB$، فسَمِّ قطعتين مستقيمتين متطابقتين.

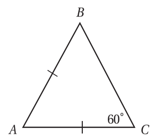
$\overline{EB} \cong \overline{EA}$

4) إذا كانت: $\angle CED \cong \angle CDE$، فسَمِّ قطعتين مستقيمتين متطابقتين.

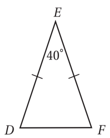
$\overline{CE} \cong \overline{CD}$

أوجد القياس المحدّد في السؤالين الآتيين:

5) $m\angle ABC$ **60°**

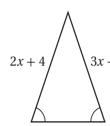


6) $m\angle EDF$ **70°**

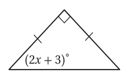


جبر: أوجد قيمة المتغيّر في كلٍّ من السؤالين الآتيين:

7) **14**



8) **21**

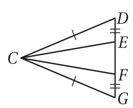


9) **برهان:** اكتب برهانًا ذا عمودين.

المعطيات: $\overline{CD} \cong \overline{CG}$

$\overline{DE} \cong \overline{GF}$

المطلوب: إثبات أن $\overline{CE} \cong \overline{CF}$.



البرهان:

العبارات	المبرّرات
1) $\overline{CD} \cong \overline{CG}$	1) معطيات
2) $\angle D \cong \angle G$	2) إذا تطابق ضلعان في مثلث، فإن الزاويتين المقابلتين لهما متطابقتان.
3) $\overline{DE} \cong \overline{GF}$	3) معطيات
4) $\triangle CDE \cong \triangle CGF$	4) المسلّمة SAS
5) $\overline{CE} \cong \overline{CF}$	5) العناصر المتناظرة في المثلثين المتطابقين متطابقة.

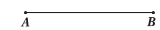
الصف: الأول الثانوي 33 الفصل 3: المثلثات المتطابقة

الاسم ______________ التاريخ ______________

3-6 تدريبات حلّ المسألة

المثلثات المتطابقة الضلعين والمثلثات المتطابقة الأضلاع

1) **مخطط هندسي:** في مخطط هندسيٍّ يرسمه ياسر، يريد تحديد نقطة C على الرسم أدناه، بحيث يصبح المثلث ABC متطابق الضلعين، فيه: $AB = AC$ ، $m\angle ACB = 40^\circ$



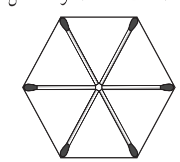
هل يستطيع إجراء ذلك؟ وضّح الخطوات.

نعم؛ بما أن ΔABC متطابق الضلعين، إذن زاويتا القاعدة متطابقتان. يرسم ياسر $\angle ABC$ والتي قياسها 40°، ثم يحدد C باستعمال الفرجار، بحيث يكون $AB = BC$

2) **مساطر:** على مسطرة قابلة للطيّ مفصلتان تقسمانها إلى ثلاثة أجزاء متساوية. فإذا طوي طرفا المسطرة إلى أعلى حتى يتلامسا، فما نوع المثلث الناتج؟

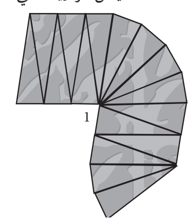
مثلث متطابق الأضلاع

3) **أشكال سداسيّة:** وضع هشام 6 أعواد ثقاب، بحيث تلتقي أطرافها عند نقطة واحدة. ثم جُعلت أطرافُها الأخرى على أبعاد متساوية بعضها عن بعض، ورُسمت مستقيمات تصل بينها، فكانت النتيجة شكلًا سداسيًّا منتظمًا كما في الشكل أدناه. صنّف المثلثات الستة المكونة للشكل، ووضّح إجابتك.



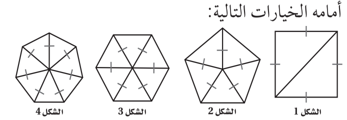
إجابة ممكنة: لما كان في كلّ مثلث ضلعان متطابقان، فإن جميع المثلثات متطابقة الضلعين. وبما أن الأعواد على أبعاد متساوية عن بعضها البعض، فإن زاوية الرأس عند المركز تساوي $\frac{360^\circ}{6}$ أي 60°. ولذلك فإن زوايا القاعدة تساوي $\frac{(180^\circ - 60^\circ)}{2}$ أي 60°. وبما أن جميع زوايا كلّ مثلث تساوي 60°، فإن الأضلاع جميعها ستكون متطابقة؛ أي أن هذه المثلثات متطابقة الأضلاع.

4) **ممرات:** أُنشىء ممرٌّ من الرخام بصفّ عدة مثلثات متطابقة ومتطابقة الضلعين. إذا كانت زاوية الرأس في كلٍّ من هذه المثلثات 20°، فما قياس الزاوية 1 في الشكل الآتي؟



80°

5) **زخارف هندسية:** أراد مصمم أن يختار وحدة زخارف هندسية منتظمة تتكون من عدة مثلثات متطابقة، فكان أمامه الخيارات التالية:



a) ما نوع المثلثات المستعملة في كل حالة؟

جميع المثلثات متطابقة الضلعين، ما عدا شكل 3 مثلثات متطابقة الأضلاع.

b) إذا وجد المصمم أن لديه مجموعة من المثلثات المتطابقة الضلعين، والتي قياس إحدى زوايا القاعدة فيها 54°، فهل يمكنه استخدامها لتكوين شكل 4؟ ولماذا؟

لا، إجابة ممكنة: في الشكل 4 لا يكون قياس زاوية القاعدة 54°

c) أيُّ الأشكال يمكن تكوينها من المثلثات التي لدى المصمم؟

الشكل رقم 2: لأن قياس زاوية الرأس في المثلث $\frac{360^\circ}{5} = 72^\circ$ ، إذن مجموع قياسَي زاويتَي القاعدة $180^\circ - 72^\circ = 108^\circ$، إذن قياس زاوية القاعدة يساوي 54°

الاسم ______________ التاريخ ______________

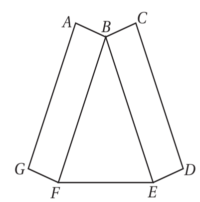
3-6 التدريبات الإثرائية

قياسات زوايا:

تحوي بعض المسائل رسومًا، إذا لم تكن متأكّدًا من طريقة حلّ المسألة، فابدأ بالمعطيات، وأوجد قياس أكبر عددٍ ممكنٍ من الزوايا في الشكل، واكتب كلّ قياسٍ على الشكل، فقد يوفّر هذا الأمر أدلّة إضافيّة تساعدك على حلّ المسألة.

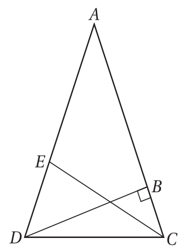
1) **المعطيات:** $BE = BF, \angle BFG \cong \angle BEF \cong \angle BED, m\angle BFE = 82^\circ$، والأضلاع المتقابلة في كلٍّ من المضلعين $ABFG$، $BCDE$ متوازية ومتطابقة.

المطلوب: إيجاد $m\angle ABC$. **148°**



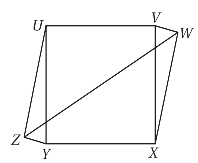
2) **المعطيات:** $AC = AD, \overline{AB} \perp \overline{BD}$ و $m\angle DAC = 44^\circ$، $\overline{CE}$ تنصّف $\angle ACD$.

المطلوب: إيجاد $m\angle DEC$. **78°**



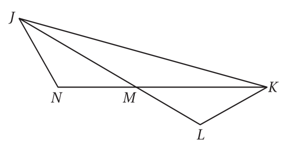
3) **المعطيات:** $m\angle UZY = 90^\circ, m\angle ZWX = 45^\circ$، $\Delta YZU \cong \Delta VWX$، $UVXY$ مربع (أي أن جميع أضلاعه متطابقة، وجميع زواياه قوائم).

المطلوب: إيجاد $m\angle WZY$. **45°**



4) **المعطيات:** $m\angle N = 120^\circ, \overline{JN} \cong \overline{MN}$، $\Delta JNM \cong \Delta KLM$

المطلوب: إيجاد $m\angle JKM$. **15°**



الاسم ــــــــــــــــــــ التاريخ ــــــــــــ

3-7 تدريبات إعادة التعليم

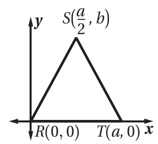
المثلثات والبرهان الإحداثيّ

رسم المثلثات وتحديد مواقعها:

يستعمل **البرهان الإحداثيّ** الأشكال في المستوى الإحداثي والجبر؛ لإثبات خصائص هندسيّة، والخطوة الأولى في البرهان الإحداثيّ هي رسم الشكل في المستوى الإحداثيّ، وكتابة إحداثيّات رؤوسه. استعمل الإرشادات الآتية عند رسم الشكل في المستوى الإحداثيّ:

1) اجعل نقطة الأصل رأسًا أو مركزًا للشكل.
2) ارسم ضلعًا واحدًا على الأقلّ من أضلاع المضلّع على أحد المحورين.
3) ارسم الشكل في الربع الأوّل من المستوى الإحداثيّ إن أمكن.
4) استعمل الإحداثيّات التي تجعل الحسابات أبسط ما يمكن.

مثال ارسم ΔRST المتطابق الضلعين في المستوى الإحداثيّ، وحدِّد إحداثيات رؤوسه، على أن تكون قاعدته على المحور x الموجب، ويكون طولها a وحدةً.

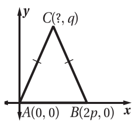


- ابدأ بوضع الرأس R عند نقطة الأصل$(0, 0)R$، وارسم القاعدة $\overline{RT}$ على المحور x الموجب، فإذا كان RT يساوي a وحدةً، فإن إحداثيَّي T هما $(a, 0)$.
- أما الرأس S، فإنه يقابل نقطة منتصف$\overline{RT}$؛ لأن المثلث متطابق الضلعين، فسيكون الإحداثيّ x له يساوي$\frac{a}{2}$ وبما أننا لا نستطيع أن نكتب الإحداثيّ الصاديّ للرأس S بدلالة a، إذن سنفترض أن هذا الإحداثيّ يساوي b، فيكون الرأس الثالث $S\left(\frac{a}{2}, b\right)$.

تمارين

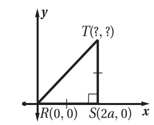
أوجد الإحداثيّات المجهولة في كلٍّ من المثلثات الآتية:

1)



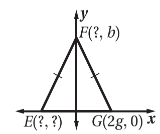
C(p, q)

2)



T(2a, 2a)

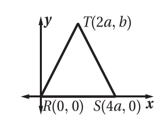
3)



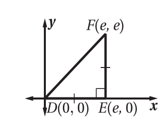
E(−2g, 0); F(0, b)

ارسم كلَّ مثلثٍ ممَّا يأتي في المستوى الإحداثيّ، وحدّد إحداثيّات رؤوسه: **الإجابات المعطاة هي بعض الإجابات الممكنة:**

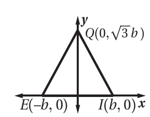
4) المثلث المتطابق الضلعين RST، والذي طول قاعدته $\overline{RS}$ يساوي $4a$ وحدة.



5) المثلث القائم الزاوية المتطابق الساقين DEF الذي طول ساقه e وحدة.



6) المثلث المتطابق الأضلاع EQI الذي طول ضلعه $2b$ وحدة، ورأسه $Q(0, \sqrt{3}b)$.



الاسم ــــــــــــــــــــ التاريخ ــــــــــــ

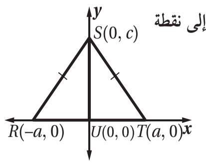
3-7 تدريبات إعادة التعليم (تتمة)

المثلثات والبرهان الإحداثيّ

كتابة البرهان الإحداثيّ:

نستعمل البراهين الإحداثيّة لإثبات بعض النظريّات، والتحقّق من بعض خصائص الأشكال الهندسيّة، ونستعمل قانون المسافة أو قانون الميل أو قانون نقطة منتصف القطعة المستقيمة في كثيرٍ من البراهين الإحداثيّة.

مثال اكتب برهانًا إحداثيًّا لإثبات أن القطعة المستقيمة المرسومة من الرأس إلى نقطة منتصف القاعدة في المثلث المتطابق الضلعين تكون عموديّة على القاعدة.



ارسم مثلثًا متطابق الضلعين في المستوى الإحداثيّ أوّلًا، ولتسهيل عمليّة كتابة البرهان، اجعل رؤوس المثلث عند: $S(0, c)$، $R(-a, 0)$، $T(a, 0)$، وعندها تكون $U(0, 0)$ نقطة منتصف$\overline{RT}$.

المعطيات: ΔRST متطابق الضلعين، وU نقطة منتصف القاعدة $\overline{RT}$.

المطلوب: إثبات أن $\overline{SU} \perp \overline{RT}$.

البرهان: بما أن U نقطة منتصف $\overline{RT}$، فإن إحداثيّيها هما $\left(\frac{-a+a}{2}, \frac{0+0}{2}\right)$؛ أيْ $(0, 0)$، وعندها فإن $\overline{SU}$ تكون واقعةً على المحور y، وقد رسم ΔRST، بحيث كانت $\overline{RT}$ على المحور x، ومن المعلوم أن المحورين متعامدان، وبناءً عليه فإن $\overline{SU} \perp \overline{RT}$.

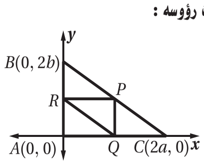
تمارين

برهان: اكتب برهانًا إحداثيًّا لإثبات كلٍّ من العبارتين الآتيتين:

1) "القطع المستقيمة الثلاث الواصلة بين منتصفات أضلاع المثلث القائم الزاوية تشكّل مثلثًا قائم الزاوية".

إجابة ممكنة: ارسم في المستوى الإحداثي ΔABC القائم الزاوية، بحيث تكون إحداثيات رؤوسه:

$A(0, 0), B(0, 2b), 0\ C(2a, 0)$



نقطة منتصف BC هي $P\left(\frac{0+2a}{2}, \frac{2b+0}{2}\right)$؛ أي $P(a, b)$

نقطة منتصف AC هي $Q\left(\frac{0+2a}{2}, \frac{0+0}{2}\right)$؛ أي $Q(a, 0)$

نقطة منتصف AB هي $R\left(\frac{0+0}{2}, \frac{0+2b}{2}\right)$؛ أي $R(0, b)$

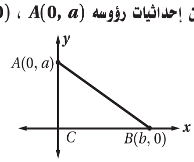
ميل $\overline{RP}$ يساوي $\frac{b-b}{a-0}$ **أي 0 أي أن $\overline{RP}$ أفقية.**

وميل $\overline{PQ}$ يساوي $\frac{b-0}{a-a}$ **أي** $\frac{b}{0}$**، وهذا غير معرف؛ إذن $\overline{PQ}$ رأسية؛**

إذن $\angle RPQ$ زاوية قائمة؛ لأن كل مستقيم رأسي يعامد كل مستقيم أفقي؛ إذن ΔPRQ قائم الزاوية.

2) في أيِّ مثلثٍ قائمٍ، مربع طول الوتر يساوي مجموع مربعَي طولَي الضلعين الآخرين "نظرية فيثاغورس".

إجابة ممكنة: ارسمْ في المستوى الإحداثي ΔABC القائم الزاوية في C، بحيث تكون إحداثيات رؤوسه $B(b, 0)$، $A(0, a)$، $C(0, 0)$.



- **أوجد AB باستعمال صيغة البعد بين نقطتين**

$$AB = \sqrt{(b-0)^2+(0-a)^2} = \sqrt{b^2+a^2}$$

$$(AB)^2 = b^2+a^2 = (CB)^2+(CA)^2$$

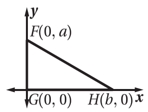
الاسم ______________ التاريخ ________

3-7 تدريبات المهارات

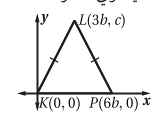
المثلثات والبرهان الإحداثيّ

ارسم كلًّا من المثلثات الآتية في المستوى الإحداثيّ، وحدّد إحداثيّات رؤوسها: **الإجابات المعطاة هي بعض الإجابات الممكنة.**

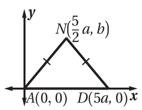
1) ΔFGH قائم الزاوية وطولا ساقيه a وحدة و b وحدة.



2) ΔKLP متطابق الضلعين، وطول قاعدته $\overline{KP}$ يساوي $6b$ وحدة.

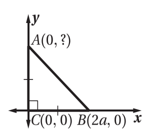


3) ΔAND متطابق الضلعين، وطول قاعدته $\overline{AD}$ يساوي $5a$ وحدة.



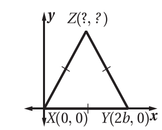
أوجد الإحداثيّات المجهولة في كلٍّ من المثلثات الآتية:

4)



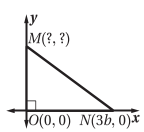
2a

5)



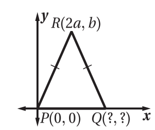
Z(b, b $\sqrt{3}$)

6)



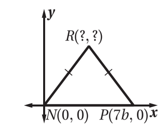
M(0, c)

7)



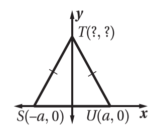
Q(4a, 0)

8)



R($\frac{7}{2}$ b, c)

9)



T(0, b)

10) **برهان:** اكتب برهانًا إحداثيًّا لإثبات أن القطعة المستقيمة الواصلة بين رأس الزاوية القائمة ومنتصف الوتر في المثلث القائم الزاوية المتطابق الساقين، تكون عموديّةً على الوتر.

المعطيات: ΔABC قائم الزاوية ومتطابق الضلعين؛ فيه $\angle$ABC زاوية قائمة، و M نقطة منتصف $\overline{AC}$.

المطلوب: إثبات أن $\overline{BM} \perp \overline{AC}$.

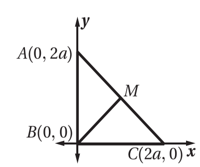
البرهان:

باستعمال قانون نقطة المنتصف، نجد أن إحداثيي M هما:

$\left(\frac{0+2a}{2}, \frac{2a+0}{2}\right)$ ؛ أي (a, a)، وميل $\overline{AC}$ يساوي

$\frac{2a-0}{0-2a}=-1$ ، وميل $\overline{BM}$ يساوي $1 = \frac{a-0}{a-0}$ ، وبما أن

ناتج ضرب ميليهما يساوي 1− ؛ إذن $\overline{BM} \perp \overline{AC}$.



الاسم ______________ التاريخ ________

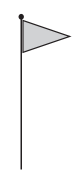
3-7 تدريبات حلّ المسألة

المثلثات والبرهان الإحداثيّ

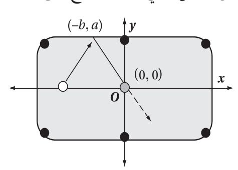
1) **رفوف:** لدى سلطان دعامة كُتب على هيئة مثلث قائم الزاوية متطابق الساقين، ويريد أن يعرف طول الوتر مقارنة بساقَي المثلث وليس لديه مسطرة، ولكنه يتذكّر صيغة المسافة، وبناءً عليه رسم الدعامة في المستوى الإحداثيّ، على أن يكون رأس الزاوية القائمة عند نقطة الأصل، ويكون طول كلٍّ من الساقين a وحدة، فما إحداثيات الرأسين اللذين يشكّلان الزاويتين الحادّتين؟

(0, a) و (a, 0)

2) **رايات:** راية على صورة مثلث متطابق الضلعين، ويريد مصمِّمٌ أن يرسمها في المستوى الإحداثيّ، على أن تكون القاعدة على المحور y، وأحد طرفَيها عند (0, 0)، فإذا كان موقع رأس الراية عند $(a, \frac{b}{2})$، فما إحداثيات الرأس الثالث؟ **(0, b)**



3) **بلياردو:** يبيّن الشكل الآتي أحد الأوضاع على طاولة البلياردو،



فما إحداثيّات الكرة البيضاء قبل أن تُضرَبَ؟

.(−2b, 0)

4) **خيام:** مدخل خيمة فايز على شكل مثلث متطابق الضلعين، إذا رسم هذا المثلث في المستوى الإحداثيّ، على أن تكون قاعدته على المحور x، وركنه الأيسر عند (0 ,0)، فسيكون ركنه الأيمن عند (0 ,6)، ورأسه عند (4 ,3)، أثبت أن هذا المثلث متطابق الضلعين.

إجابة ممكنة: طول كلٍّ من الضلعين الواصلين من طرفي القاعدة إلى الرأس يساوي 5 وحدات، وبما أن الضلعين متطابقان، فإن المثلث متطابق الضلعين .

5) **رسمٌ هندسيٌّ:** يصمّم مهندس شبكة طرق، على أن تتقاطع ثلاث طُرُق لتشكّل مثلثًا. وقد عيّن المهندس اثنين من رؤوس المثلث في المستوى الإحداثيّ عند (0 ,5−) و (0 ,5) .

a) صِفْ مجموعة النقاط في المستوى الإحداثيّ التي لا يمكنها أن تكون الرأس الثالث للمثلث.

جميع نقاط المحور x .

b) صِفْ مجموعة النقاط في المستوى الإحداثيّ التي يمكنها أن تكون رأس مثلث متطابق الضلعين يلتقي عنده ضلعاه المتطابقان.

جميع نقاط المحور y باستثناء نقطة الأصل.

c) صِفْ مجموعة النقاط في المستوى الإحداثيّ التي تكوّن مع النقطتين الأخريين مثلثًا قائم الزاوية، على أن يكون رأس زاويته القائمة عند (0 ,5−).

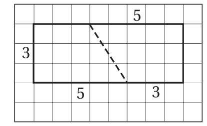
جميع النقاط التي إحداثيُّها x يساوي 5− باستثناء النقطة (0 ,5−).

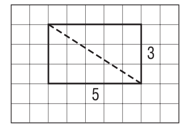
الاسم ______________ التاريخ ______________

3-7 التدريبات الإثرائيّة

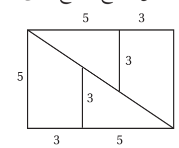
غرائب المستطيل

ارسم مستطيلين في ورق المربّعات، كما في الصورة المبيَّنة في الشكلين الآتيين وقُصَّهما على طول الخط المتقطع.





1) استعمل القطع الأربع، على أن تكوّن منها مستطيلًا جديدًا، واكتب الأبعاد عليه.



2) ما مجموع مساحتَي المستطيلين الأصليين؟

39 وحدة مربعة

3) ما مساحة الشكل الجديد؟

40 وحدة مربعة

4) اكتب تخمينًا لسبب وجود اختلاف بين المساحتين .

انظر إجابات الطلاب.

5) استعمل حافةً مستقيمةً لرسم الأشكال الأربعة التي تكوّن المستطيل الكبير بدقّة، ماذا تلاحظ من هذا الرسم؟

هناك فجوة صغيرة، فلا تغطّي القطع الأربع المستطيل الكبير تمامًا.