وزارة التربية والتعليم
Ministry of Education
المملكة العربية السعودية

الرياضيات

للصف الثالث الثانوي

مصادر المعلم للأنشطة الصفية

الفصل الخامس: المتجهات

العبيكان Obeikan

McGraw Hill Education

١٤٣٥ هـ - ٢٠١٤ م

Glencoe Mathematics © 2010

CHAPTER RESOURCE MASTERS

Precalculus

الرياضيات ـ الصف الثالث الثانوي

مصادر المعلم للأنشطة الصفية

أعدَّ النسخة العربية: شركة العبيكان للتعليم

www.obeikaneducation.com

McGraw Hill Education

العبيكان Obeikan

بِسْمِ اللَّهِ الرَّحْمَٰنِ الرَّحِيمِ

المقدمة

الحمد لله، والصلاة والسلام على نبينا محمد، وعلى آله وصحبه أجمعين، وبعد:

عزيزي المعلم / عزيزتي المعلمة

يسرنا أن نقدِّم هذه المجموعة من التدريبات المساندة، التي تراعي الفروق الفردية بين الطلاب. حيث نطمح أن يساعدك التنوع في هذه التدريبات على الوصول إلى جميع الطلاب في الصف، مهما تباينت مستوياتهم.

وقد تم تخصيص صفحة أو أكثر لكل نوعٍ من هذه التدريبات؛ لتغطي درسًا من دروس كتاب الطالب. حيث يمكنك أن تكلف الطلاب حل صفحة التدريبات المقابلة لكل درس بحسب مستوى كل منهم؛ سواء في داخل الصف أم في المنزل. وليست هذه التدريبات بديلًا عن كتاب التمارين، ولكنها مساندة ومكملة له.

وتشمل هذه التدريبات الأنواع التالية:

تدريبات إعادة التعليم

تركِّز هذه التدريبات على محتوى الدروس في كتاب الطالب، وتقدِّمه بأسلوب تدريسي ومعالجة يختلفان عن كتابي الطالب والتمارين. وهي موجَّهة إلى الطلاب ذوي المستوى دون المتوسط.

تدريبات حل المسألة

تأتي هذه التدريبات انطلاقًا من اهتمام هذه المناهج بحلّ المسألة، حيث تم تخصيصها لتقديم تدريبات إضافية على حل المسألة ترتبط بكل درس من دروس كتاب الطالب. وهي موجَّهة إلى جميع الطلاب على اختلاف مستوياتهم التحصيلية.

التدريبات الإثرائية

تساعد هذه التدريبات على التوسُّع في مفاهيم الدرس، كما تؤدي إلى توسيع مدارك الطلاب حول تعلم الرياضيات بشكل عام. وهذه التدريبات موجَّهة إلى الطلاب ذوي المستوى فوق المتوسط.

ملحق الإجابات:

يتضمن هذا المصدر في آخره ملحقًا بالإجابات، حيث تظهر باللون الأسود الغامق على صفحات مصغَّرة.

الفهرس

5-1 تدريبات إعادة التعليم

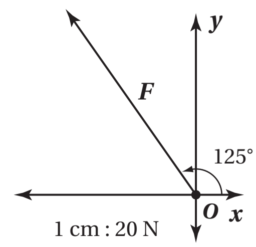
مقدمة في المتجهات

تمثيل المتجهات: المتجه هو كمية لها مقدار واتجاه، و**مقدار المتجه** هو طول القطعة المستقيمة المتجهة، و**اتجاهه** هو قياس الزاوية المتجهة بين الاتجاه الموجب للمحور x والمتجه، ويمكن استعمال **قاعدة متوازي الأضلاع** أو **قاعدة المثلث** لجمع المتجهات أو طرحها.

مثال **استعمل المسطرة والمنقلة؛ لرسم متجه لكلٍّ من الكميتين الآتيتين، واكتب عليه مقياس الرسم.**

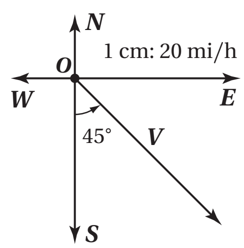
a) قوة مقدارها $F = 60\ N$ بزاوية قياسها $125°$ مع الاتجاه الأفقي.

استعمل مقياس رسم $1\ cm : 20\ N$، وارسم سهمًا طوله $60 \div 20 = 3\ cm$، في وضع قياسي ويصنع زاوية قياسها $125°$ مع الاتجاه الموجب للمحور x.



b) سرعة مقدارها $V = 55\ mi/h$، باتجاه $S\,45°\,E$.

استعمل مقياس رسم $20\ mi/h : 1\ cm$، وارسم سهمًا طوله $55 \div 20 = 2.75\ cm$ ويصنع زاوية قياسها $45°$ في اتجاه جنوب شرق.



تمارين

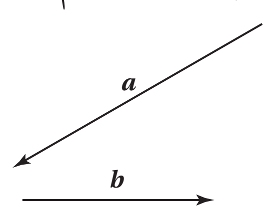
استعمل مسطرة ومنقلة؛ لرسم متجه لكلٍّ من الكميتين الآتيتين، واكتب عليه مقياس الرسم.

1) $r = 30\ m$ باتجاه $N\,45°\,W$.

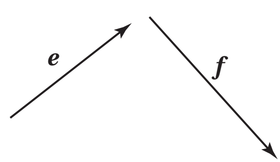
2) $t = 150\ in$ ويصنع زاوية قياسها $40°$ مع الأفقي.

أوجد محصلة كل زوج من المتجهات في السؤالين 3,4 ، مستعملًا قاعدة المثلث أو متوازي الأضلاع، واكتب مقدار المحصلة بالسنتمترات، ثم حدّد اتجاهها بالنسبة للأفقي.

3)



4)



5-1 تدريبات إعادة التعليم

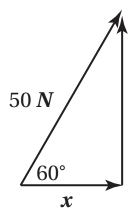
(تتمة)

مقدمة في المتجهات

تطبيقات المتجهات: يمكن تحليل أيّ متجه إلى مركبتين أفقية ورأسية.

مثال **يسحب جمال زورقًا صغيرًا مثبتًا بحبل بقوة مقدارها 50 N، ويصنع زاوية قياسها °60 مع المحور الأفقي.**

a) ارسم شكلًا يوضح تحليل القوة التي يبذلها جمال إلى مركّبتين متعامدتين.



يمكن تحليل القوة التي يسحب بها جمال القارب إلى قوة أفقية x إلى الأمام، ورأسية y إلى أعلى، كما في الشكل المجاور.

b) أوجد مقدار كلٍّ من المركّبتين الأفقية والرأسية للقوة.

تكوّن القوة ومركبتاها الأفقية والرأسية مثلثًا قائم الزاوية.

استعمل تعريف الجيب وجيب التمام؛ لإيجاد مقدار كلٍّ من المركبتين.

$\cos 60° = \frac{\|x\|}{50}$	تعريف الجيب وجيب التمام	$\sin 60 = \frac{\|y\|}{50}$
$\|y\| = 50 \sin 60°$	حُل بالنسبة لِـ x و y	$\|x\| = 50 \cos 60°$
$\|y\| \approx 43.3$	استعمل الآلة الحاسبة	$\|x\| = 25$

مقدار المركبة الأفقية 25 N، ومقدار المركبة الرأسية 43 N تقريبًا.

تمارين

ارسم شكلًا يوضح تحليل كلٍّ من المتجهين إلى مركبتين أفقية ورأسية، ثم أوجد مقدار كلٍّ منهما.

1) 7 in باتجاه °120 مع الأفقي.

2) 2.5 cm/h باتجاه $N\,50°\,W$.

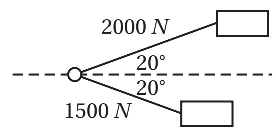
3) **شغل:** يسحب علي عربة على سطح مائل يصنع مع الأرض زاوية قياسها °50، بقوة مقدارها 25 N، أوجد المركبتين الأفقية والرأسية للقوة.

5-1 تدريبات حل المسألة

مقدمة في المتجهات

1) **إبحار:** سار قارب 200 كلم باتجاه $S\,30°\,E$، ارسم متجهًا يصف هذه الكمية باستعمال المسطرة والمنقلة، وحدّد مقياس الرسم.

2) **زراعة:** يقوم جرّاران زراعيان بإزالة جذع شجرة على نحو ما هو موضح في الشكل، فيسحب الأول الجذع بقوة مقدارها 2000 N، والثاني بقوة مقدارها 1500 N، وقياس الزاوية بين الجرّارين يساوي °40.



a) ما مقدار محصلة جمع المركّبتين الأفقيتين لقوتَي الجرارين؟ وما مقدار محصلة جمع المركبتين الرأسيتين لقوتَي الجرارين؟

b) ما مقدار محصلة القوة المؤثرة في جذع الشجرة؟

c) إذا بقي قياس الزاوية بين الجرّارين °40، فهل سيؤثر تغيير قياسَي زاويتَي الجرّارين مع الأفقي في القوة المحصلة؟ وضح إجابتك.

3) **سفر:** يسحب سالم حقيبة سفره على أرض المطار بقوة مقدارها 22 N على مقبض الحقيبة التي تصنع زاوية قياسها °72 مع الأرض، فما مقدار القوة التي تحرك الحقيبة إلى الأمام؟ إذا قصّر سالم طول المقبض حتى أصبح أقرب إلى الأرض، فما أثر نقصان قياس الزاوية في الحركة؟

4) **رياضة المشي:** في مسابقة المشي على الأقدام، سار سعيد 200 m باتجاه $N\,70°\,W$، ثم سار 90 m في اتجاه الشرق. فكم مترًا يبعد سعيد عن نقطة البداية؟ وما اتجاهه؟

5) **تزلُّج:** قطع متزلج مسافة 35 مترًا بزاوية قياسها °20 مع المحور الأفقي، ثم غير مساره باتجاه °30 مع المحور الأفقي فقطع 45 m.

a) ارسم متجهًا باستعمال المسطرة والمنقلة يمثل الموقف.

b) أوجد محصلة المسافة واتجاه الحركة.

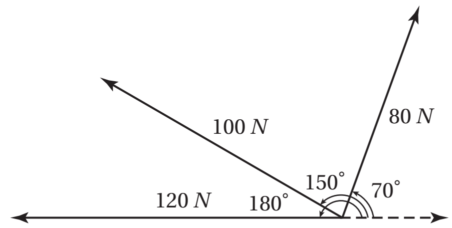
5-1 التدريبات الإثرائية

تأثير أكثر من قوتين في جسم

قد تؤثر في جسم ثلاث قوى أو أكثر في وقت واحد، ويمكن تمثيل كل قوة من هذه القوى بمتجه. ولإيجاد متجه المحصلة الذي يؤثر في الجسم، يمكنك جمع كل متجهين معًا.

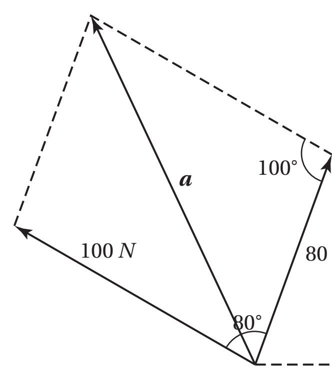
مثال

بناء: يسحب عامل صندوقًا يحتوي على مواد بناء بقوة مقدارها 80 N بزاوية قياسها °70 مع الأرض. وفي الوقت نفسه، يسحب عامل آخر الصندوق بقوة 100 N بزاوية قياسها °150 مع الأرض، وتؤثر في الصندوق قوة ثالثة مقدارها 120 N بزاوية قياسها °180، أوجد مقدار محصلة القوى المؤثرة في الصندوق واتجاهها.

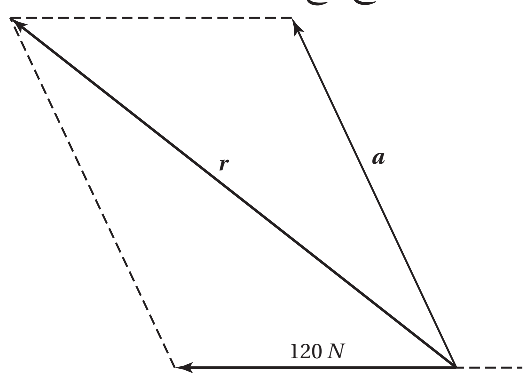


أولًا، اجمع أيَّ متجهين من المتجهات، وتذكّر أن ترتيب الاختيار غير مهم عندما تجمع المتجهات.

اجمع المتجه الذي مقداره 80 N مع المتجه الذي مقداره 100 N أولًا؛



والآن، أضف ناتج جمع المتجهين إلى المتجه 120 N؛



فتكون القوة المحصلة 219 N وبزاوية قياسها °145 مع الأرض

تمارين

أوجد مقدار القوة المحصلة واتجاهها التي تؤثر في كل جسم في السؤالين الآتيين:

6) **خيول:** تجر ثلاثة خيول عربة، يؤثر أحدها في العربة بقوة 40 N بزاوية °50 مع الخط الأفقي، ويؤثر الثاني بقوة مقدارها 100 N وبزاوية °110 مع الخط الأفقي، والثالث بقوة 10 N وبزاوية °150 مع الخط الأفقي، أوجد مقدار القوة المحصلة واتجاهها.

7) **إزاحة:** يحاول ثلاثة رجال تحريك أريكة، فيقوم أحدهم بدفعها بقوة 40 N بزاوية °50 مع الأرض، ويؤثر فيها الثاني بقوة 100 N بزاوية °110، والثالث بقوة 10 N بزواية °150، أوجد مقدار القوة المحصلة واتجاهها.

الاسم: ________________ التاريخ: ________

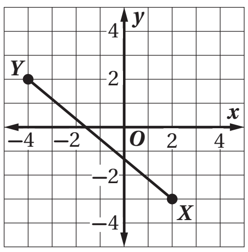
5-2 تدريبات إعادة التعليم

المتجهات في المستوى الإحداثي

المتجهات في المستوى الإحداثي: تُستعمل صيغة المسافة بين نقطتين لإيجاد طول متجه.

مثال 1

أوجد طول $\overrightarrow{XY}$ الذي نقطة بدايته $X(2, -3)$، ونقطة نهايته $Y(-4, 2)$، ثم اكتبه على الصورة الإحداثية.



أوجد طول $\overrightarrow{XY}$ باستعمال صيغة المسافة بين نقطتين.

$|\overrightarrow{XY}| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$ صيغة المسافة بين نقطتين

$= \sqrt{(-4-2)^2 + [2-(-3)]^2}$ $(x_1, y_1) = (2, -3), (x_2, y_2) = (-4, 2)$

$= \sqrt{(-6)^2 + 5^2} = \sqrt{61}$ بسّط

اكتب $\overrightarrow{XY}$ على الصورة الإحداثية.

$\overrightarrow{XY} = \langle x_2 - x_1, y_2 - y_1 \rangle$

$= \langle -4 - 2, 2 - (-3) \rangle$ $(x_1, y_1) = (2, -3), (x_2, y_2) = (-4, 2)$

$= \langle -6, 5 \rangle$ بسّط

مثال 2

أوجد كلًّا مما يأتي للمتجهات $\mathbf{s} = \langle 4, 2 \rangle, \mathbf{t} = \langle -1, 3 \rangle$:

a) $\mathbf{s} + \mathbf{t}$

$\mathbf{s} + \mathbf{t} = \langle 4, 2 \rangle + \langle -1, 3 \rangle$ عوّض

$= \langle 4 + (-1), 2 + 3 \rangle = \langle 3, 5 \rangle$ جمع المتجهات

b) $3\mathbf{s} + \mathbf{t}$

$3\mathbf{s} + \mathbf{t} = 3\langle 4, 2 \rangle + \langle -1, 3 \rangle$ عوّض

$= \langle 12, 6 \rangle + \langle -1, 3 \rangle$ ضرب متجه في عدد حقيقي

$= \langle 11, 9 \rangle$ جمع المتجهات

تمارين

أوجد الصورة الإحداثية لـ $\overrightarrow{AB}$ الذي نقطة بدايته A ونقطة نهايته B في السؤالين 2 , 1، ثم أوجد طوله:

1) $A(12, 41), B(52, 33)$

2) $A(-15, 0), B(7, -19)$

إذا كان: $\mathbf{a} = \langle 4, -2 \rangle, \mathbf{b} = \langle 24, 21 \rangle, \mathbf{c} = \langle -1, -3 \rangle$ فأوجد كلًّا ممّا يأتي:

3) $\mathbf{a} - \mathbf{b}$

4) $8\mathbf{b} - 2\mathbf{a} + 3\mathbf{c}$

5) $2\mathbf{b} + \mathbf{c}$

6) $\mathbf{a} - 2(\mathbf{b} + 2\mathbf{c})$

5-2 تدريبات إعادة التعليم

(تتمة)

المتجهات في المستوى الإحداثي

متجهات الوحدة: يُسمى المتجه الذي طوله 1 **متجه وحدة**، ويرمز له بالرمز **u**، ولإيجاد متجه الوحدة **u** الذي له نفس اتجاه المتجه **v**، نستخدم العلاقة $\mathbf{u} = \frac{1}{|\mathbf{v}|}\mathbf{v}$.

وكحالة خاصة من متجهات الوحدة، متجه الوحدة باتجاه المحور X الموجب بالرمز $\mathbf{i} = \langle 1, 0 \rangle$، ويرمز إلى متجه الوحدة باتجاه محور y الموجب بالرمز $\mathbf{j} = \langle 0, 1 \rangle$، ويمكن كتابة أي متجه بدلالة متجهَي الوحدة في صورة توافق خطِّيٍّ لمتجهات الوحدة **i** و **j**.

مثال 1 أوجد متجه الوحدة **u** الذي له نفس اتجاه $\mathbf{v} = \langle -4, -1 \rangle$

$\mathbf{u} = \frac{1}{|\mathbf{v}|}\mathbf{v}$ متجه وحدة باتجاه **v**

$= \frac{1}{|\langle -4, -1 \rangle|}\langle -4, -1 \rangle$ عوّض

$= \frac{1}{\sqrt{(-4)^2 + (-1)^2}}\langle -4, -1 \rangle$ $\quad |\langle a, b \rangle| = \sqrt{a^2 + b^2}$

$= \frac{1}{\sqrt{17}}\langle -4, -1 \rangle$ بسّط

$= \left\langle \frac{-4}{\sqrt{17}}, \frac{-1}{\sqrt{17}} \right\rangle = \left\langle \frac{-4\sqrt{17}}{17}, \frac{-\sqrt{17}}{17} \right\rangle$ أنطق المقام

مثال 2 إذا كان $\overrightarrow{MP}$ متجهًا، نقطة بدايته $M(2, 2)$ ونقطة نهايته $P(5, 4)$، فاكتب $\overrightarrow{MP}$ على صورة توافق خطيٍّ لمتجهَي الوحدة **i, j** .

أوجد الصورة الإحداثية لِـ $\overrightarrow{MP}$ أولًا.

$\overrightarrow{MP} = \langle x_2 - x_1, y_2 - y_1 \rangle$ الصورة الإحداثية

$= \langle 5 - 2, 4 - 2 \rangle = \langle 3, 2 \rangle$ $\quad (x_1, y_1) = (2, 2)\ ,\ (x_2, y_2) = (5, 4)$

ثم أعد كتابة المتجه على صورة توافق خطِّيٍّ لمتجهَي الوحدة.

$\overrightarrow{MP} = \langle 3, 2 \rangle$ الصورة الإحداثية

$= 3\mathbf{i} + 2\mathbf{j}$ $\quad \langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle = \mathbf{a}\mathbf{i} + \mathbf{b}\mathbf{j}$

تمارين

أوجد متجه وحدة u، له اتجاه المتجه v نفسه في السؤالين 1, 2:

1) $\mathbf{p} = \langle 4, -3 \rangle$

2) $\mathbf{v} = \langle 10, 25 \rangle$

اكتب $\overrightarrow{MN}$ المعطاة نقطتا بدايته ونهايته، على صورة توافق خطِّي لمتجهَي الوحدة i, j في السؤالين 3 , 4:

3) $M(2, 8), N(-5, -3)$

4) $M(0, 6), N(18, 4)$

أوجد الصورة الإحداثية للمتجه v المعطى طوله وزاوية اتجاهه مع الاتجاه الموجب للمحور x في السؤالين 5, 6:

5) $|\mathbf{v}| = 18, \theta = 240°$

6) $|\mathbf{v}| = 5, \theta = 95°$

أوجد زاوية اتجاه كلٍّ من المتجهين في السؤالين 7 , 8:

7) $-4\mathbf{i} + 2\mathbf{j}$

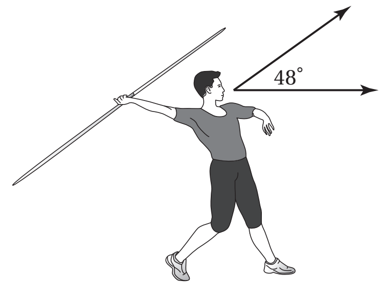
8) $\langle 2, 17 \rangle$

الاسم: ______________________ التاريخ: __________

5-2 تدريبات حل المسألة

المتجهات في المستوى الإحداثي

1) **ألعاب قوى:** في مسابقة رمي الرمح، رمى لاعب الرمح بسرعة $28\ m/s$ بزاوية قياسها 48°.



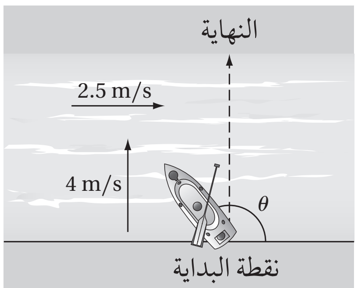
a) ما مقدار المركبة الأفقية لسرعة الرمح؟

b) ما مقدار المركبة العمودية لسرعة الرمح؟

2) **مواصلات:** تحركت حافلة $4.5\ mi$ إلى الشمال، ثم $2\ mi$ إلى الشرق، ثم $1.5\ mi$ شمال شرق بزاوية 30°، اكتب محصلة سير الحافلة على صورة توافقٍ خطِّي لمتجهَي الوحدة $\mathbf{i}, \mathbf{j}$.

3) **مسافات:** سار سلطان من منزله $2\ mi$ باتجاه الغرب، ثم سار $3.4\ mi$ إلى الشمال فوصل إلى المسجد. إذا سار سلطان من منزله إلى المسجد في خط مستقيم، فكم ميلًا يختصر من المسافة التي قطعها؟

4) **زورق:** يُبحر شخص في نهر سرعة التيار فيه 2.5 ، فإذا كان الشخص يجدف بسرعة 4 باتجاه عمودي على الشاطئ، فأجب عمّا يأتي:



a) ما محصلة سرعة الزورق؟

b) ما قياس الزاوية التي سيسير بها الزورق بالنسبة للشاطئ؟

5-2 التدريبات الإثرائية

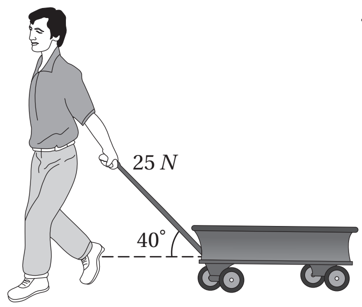
الاحتكاك والقوة العمودية

بناءً على قانون نيوتن الأول في الحركة، إذا تحرك جسم بسرعة ثابتة، فإن القوى المؤثرة فيه جميعها تكون متزنةً، وإذا لم يتحرك الجسم بسرعة ثابتة، فإن القوة المؤثرة تكون غير متزنة؛ لذا إذا دفع شخص جسمًا وتحرك بسرعة ثابتة، فإن قوة دفع الشخص للجسم توازن قوة الاحتكاك.

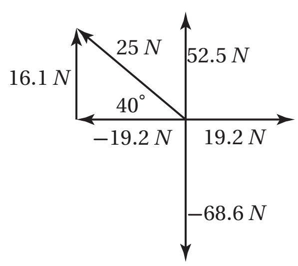
معامل الاحتكاك μ (ويقرأ *mu*) هو النسبة بين قوة الاحتكاك بين سطحين وقوة الدفع المؤثرة في السطحين معًا. إذا ارتكز جسم على سطح الأرض، فإنه يمكن حساب قوة الدفع المؤثرة في السطحين معًا، بضرب الكتلة (بالكيلو جرام) في تسارع الجاذبية الأرضية $-9.8\ \text{m/s}^2$، القوة العمودية n هي قوة دفع الأرض للجسم إلى أعلى.

مثال

يسحب شخص عربة كتلتها 7 kg بسرعة ثابتة كما في الشكل. فإذا كان الشخص يسحب العربة بقوة مقدارها 25 N وكان مقبض العربة يصنع °40 مع المحور الأفقي، فأوجد معامل الاحتكاك في هذا الوضع.



يمكن استعمال مخطط القوى لتوضيح المسألة. احسب المركّبة الأفقية والمركّبة الرأسية للقوة 25 N، لما كانت العربة تتحرك بسرعة ثابتة، فإن قوة الاحتكاك تساوي المركبة الأفقية ولكن باتجاه معاكس. وتعادل قوة الجاذبية مجموع القوتين؛ المركبة الرأسية والقوة العمودية.



المركبة الأفقية $x = 25\ cos\ 40° \approx 19.2$

المركبة الرأسية $y = 25\ sin\ 40° \approx 16.1$

قوة الجاذبية بالنسبة للأرض = الكتلة × تسارع الجاذبية الأرضية

$7\,(-9.8) = -68.6$

القوة العمودية $n = 68.6 - 16.1 = 52.6$

معامل الاحتكاك $\mu = \dfrac{19.2}{52.5} \approx 0.37$

لذا، فإن معامل الاحتكاك هو 0.37

تمارين

1) يسحب شخص عربة طفل كتلتها 41 kg بقوة 50 N، فإذا كان الحبل يصنع زاوية قياسها °45 مع الأرض، فأوجد معامل الاحتكاك بين العربة والأرض.

2) يدفع شخص صندوقًا كتلته 25 kg على سجادة بقوة 75 N، فإذا كانت قوة الدفع تصنع زاوية °25 مع الأرض، فأوجد معامل الاحتكاك بين السجادة والصندوق.

5-3 تدريبات إعادة التعليم

الضرب الداخلي

الضرب الداخلي: يُعرّف الضرب الداخلي للمتجهين $\mathbf{a} = \langle a_1, a_2 \rangle$, $\mathbf{b} = \langle b_1, b_2 \rangle$ بالقاعدة $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = a_1 b_1 + a_2 b_2$، ويكون المتجهان غير الصفريين $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ متعامدين، إذا وفقط إذا كان $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = 0$.

مثال أوجد حاصل الضرب الداخلي للمتجهين $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}$، ثم تحقق مما إذا كانا متعامدين أم لا.

a) $\mathbf{u} = \langle 5, 1 \rangle, \mathbf{v} = \langle -3, 15 \rangle$

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = \mathbf{5(-3) + 1(15)}$$
$$= 0$$

بما أن $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = \mathbf{0}$، فإن $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$ متعامدان.

b) $\mathbf{u} = \langle 4, 5 \rangle, \mathbf{v} = \langle 8, -6 \rangle$

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = \mathbf{4(8) + 5(-6)}$$
$$= 2$$

بما أن $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} \neq \mathbf{0}$، فإن $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$ غير متعامدين.

تمارين

أوجد حاصل الضرب الداخلي للمتجهين $\mathbf{u}, \mathbf{v}$ في كلٍّ مما يأتي، ثم تحقق مما إذا كانا متعامدين أم لا.

1) $\mathbf{u} = \langle 2, 4 \rangle, \mathbf{v} = \langle -12, 6 \rangle$

2) $\mathbf{u} = -8\mathbf{i} + 5\mathbf{j}, \mathbf{v} = 3\mathbf{i} - 6\mathbf{j}$

3) $\mathbf{u} = \langle 2, -1 \rangle, \mathbf{v} = \langle -12, 5 \rangle$

4) $\mathbf{u} = -2\mathbf{i} + 5\mathbf{j}, \mathbf{v} = 6\mathbf{j}$

استعمل الضرب الداخلي لإيجاد طول المتجه المعطى في السؤالين 5, 6:

5) $\mathbf{a} = \langle 9, 3 \rangle$

6) $\mathbf{c} = \langle -12, 4 \rangle$

5-3 تدريبات إعادة التعليم

(تتمة)

الضرب الداخلي

الزاوية بين متجهين: إذا كانت θ هي الزاوية بين متجهين غير صفريين $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ فإن:

$$\cos\theta = \frac{\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}}{|\mathbf{a}|\,|\mathbf{b}|}$$

مثال أوجد قياس الزاوية θ بين المتجهين $\mathbf{u}, \mathbf{v}$ إذا كان $\mathbf{u} = \langle 5, 1\rangle$ ، $\mathbf{v} = \langle -2, 3\rangle$.

الزاوية بين متجهين $$\cos\theta = \frac{\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}}{|\mathbf{u}|\,|\mathbf{v}|}$$

$\mathbf{u} = \langle 5, 1\rangle$, $\mathbf{v} = \langle -2, 3\rangle$ $$\cos\theta = \frac{\langle 5, 1\rangle\cdot\langle -2, 3\rangle}{|\langle 5, 1\rangle|\,|\langle -2, 3\rangle|}$$

الضرب الداخلي لمتجهَين، طول متجه $$\cos\theta = \frac{-10+3}{\sqrt{26}\,\sqrt{13}}$$

معكوس جيب التمام $$\theta = \cos^{-1}\frac{-7}{\sqrt{26}\,\sqrt{13}} \approx 112^\circ$$

أيْ أن قياس الزاوية بين المتجهين $\mathbf{u}, \mathbf{v}$ يساوي 112° تقريبًا.

تمارين

أوجد الزاوية θ بين المتجهين $\mathbf{u}, \mathbf{v}$ في كلٍّ مما يأتي:

1) $\mathbf{u} = \langle -3, -5\rangle, \mathbf{v} = \langle 7, 12\rangle$

2) $\mathbf{u} = 13\mathbf{i} - 5\mathbf{j}, \mathbf{v} = 6\mathbf{i} + 2\mathbf{j}$

3) $\mathbf{u} = \langle 4, 3\rangle, \mathbf{v} = \langle 1, 2\rangle$

4) $\mathbf{u} = \mathbf{i} + \mathbf{j}, \mathbf{v} = \mathbf{i}$

5) $\mathbf{u} = \langle -1, 1\rangle, \mathbf{v} = \langle 1, -1\rangle$

6) $\mathbf{u} = \langle -2, 3\rangle, \mathbf{v} = \langle 1, 5\rangle$

5-3 تدريبات حل المسألة

الضرب الداخلي

1) غواصات: يمثل المتجه $\mathbf{v} = \langle 8, 3\rangle$ مسار غواصة، فإذا غيّرت الغواصة اتجاه حركتها ليصبح باتجاه $\mathbf{u} = \langle 2, 5\rangle$، فأوجد المسافة التي تحركتها الغواصة.

2) ألعاب أطفال: تم تشغيل لعبتين كهربائيتين للأطفال في وقت واحد، فإذا مثَّل المتجهان $\mathbf{u} = \langle 42, 58\rangle$ و $\mathbf{v} = \langle 59, 73\rangle$ مسارَي اللعبتين، فما قياس الزاوية بين مسارَيهما؟

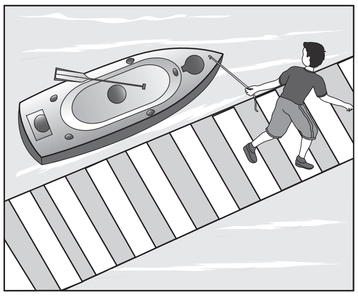
3) صيد طيور: خلال رحلة لصيد الطيور، سار أحمد وهايل في اتجاهين مختلفين، فإذا مثّل المتجه $\langle 9, 18\rangle$ مسار أحمد، ومثّل المتجه $\langle 12, -15\rangle$ مسار هايل، فأيهما سار مسافة أطول؟

4) مرتبات: يمثل المتجه $\mathbf{u} = \langle 20, 15\rangle$ أعداد العاملين والسائقين في شركة، والمتجه $\mathbf{v} = \langle 2500, 3000\rangle$ يمثل مرتب العامل والسائق في الشركة نفسها.

a) أوجد $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}$

b) فسّر النتيجة التي حصلت عليها في الفرع **a** في سياق المسألة.

5) قوارب: سحب شخص قاربًا مسافة $10\,m$ على طول رصيف الميناء بواسطة حبلٍ، وبقوةٍ مقدارها $200\,N$.



a) أوجد مقدار الشغل المبذول، إذا كان قياس الزاوية التي يصنعها الحبل مع الأفقي $40°$، ثم إذا كان قياس الزاوية $90°$.

b) وضّح سبب نقصان الشغل، إذا زاد قياس الزاوية التي يصنعها الحبل مع الأفقي، اعتمادًا على النتائج التي حصلت عليها في فرع **a**.

5-3 التدريبات الإثرائية

المعادلات المتجهة

إذا كانت $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ ثلاثة متجهات محددة، فإن المعادلة $\mathbf{f}(x) = \mathbf{a} - 2x\mathbf{b} + x^2\mathbf{c}$ تعتبر مثالًا لدالة متجهة في x. والجدول الآتي يبيّن المتجهات المرتبطة ببعض قيم x.

x	-2	-1	0	1	2
$f(x)$	$\mathbf{a} + 4\mathbf{b} + 4\mathbf{c}$	$\mathbf{a} + 2\mathbf{b} + \mathbf{c}$	$\mathbf{a}$	$\mathbf{a} - 2\mathbf{b} + \mathbf{c}$	$\mathbf{a} - 4\mathbf{b} + 4\mathbf{c}$

إذا كان: $\mathbf{a} = \langle 0, 1\rangle, \mathbf{b} = \langle 1, 1\rangle, \mathbf{c} = \langle 2, -2\rangle$ ، فإن المتجهات المرتبطة بقيم x تظهر كما في الجدول الآتي.

x	-2	-1	0	1	2
$f(x)$	$\langle 12, -3\rangle$	$\langle 4, 1\rangle$	$\langle 0, 1\rangle$	$\langle 0, -3\rangle$	$\langle 4, -11\rangle$

أكمل الجدول لكلٍّ مما يأتي:

1) $\mathbf{f}(x) = x^3\mathbf{a} - 2x^2\mathbf{b} + 3x\mathbf{c}$

$\mathbf{a} = \langle 1, 1\rangle \quad \mathbf{b} = \langle 2, 3\rangle \quad c = \langle 3, -1\rangle$

x	-1	0	1	2
$f(x)$	$\langle -14, -4\rangle$	$\langle 0, 0\rangle$	$\langle 6, -8\rangle$	$\langle 10, -22\rangle$

2) $\mathbf{f}(x) = 2x^2\mathbf{a} + 3x\mathbf{b} - 5\mathbf{c}$

$\mathbf{a} = \langle 0, 1\rangle \quad \mathbf{b} = \langle 1, 0\rangle \quad c = \langle 1, 1\rangle$

x	-2	-1	0	1
$f(x)$	$\langle -11, 3\rangle$	$\langle -8, -3\rangle$	$\langle -5, -5\rangle$	$\langle -2, -3\rangle$

3) $\mathbf{f}(x) = x^2\mathbf{c} + 3x\mathbf{a} - 4\mathbf{b}$

$\mathbf{a} = \langle 1, 1\rangle \quad \mathbf{b} = \langle 3, 2\rangle \quad \mathbf{c} = \langle 0, 1\rangle$

x	0	1	2	3
$f(x)$	$\langle -12, -8\rangle$	$\langle -9, -4\rangle$	$\langle -6, 2\rangle$	$\langle -3, 10\rangle$

4) $\mathbf{f}(x) = x^3\mathbf{a} - x\mathbf{b} + 3\mathbf{c}$

$\mathbf{a} = \langle 0, 1\rangle \quad \mathbf{b} = \langle 1, -2\rangle \quad \mathbf{c} = \langle -2, 0\rangle$

x	0	1	2	3
$f(x)$	$\langle -6, 0\rangle$	$\langle -7, 3\rangle$	$\langle -8, 12\rangle$	$\langle -9, 33\rangle$

5-4 تدريبات إعادة التعليم

المتجهات في الفضاء الثلاثي الأبعاد

الإحداثيات في الفضاء الثلاثي الأبعاد: يمكن استعمال ثلاثيات مرتبة من الأعداد الحقيقية؛ لتمثيل المتجهات كما هو الحال في الأزواج المرتبة، ويمكن إجراء العمليات التي سبق لك إجراؤها على المتجهات الممثلة بالأزواج المرتبة على المتجهات الممثلة بالثلاثيات المرتبة.

مثال

طيور: إذا كان موقعا طائرين يُمثَّلان بالنقطتين $A(10, 2, -5)$, $B(7, -9, 3)$؛ حيث يُعبَّر عن الإحداثيات بالكيلومترات، فأجب عما يأتي:

a) كم المسافة بين الطائرين؟

استعمل صيغة المسافة بين نقطتين في الفضاء.

$$AB = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2} \quad \text{صيغة المسافة}$$

$$= \sqrt{(7 - 10)^2 + ((-9) - 2)^2 + (3 - (-5))^2} \quad (x_1, y_1, z_1) = (10, 2, -5)$$

$$\approx 13.93 \quad (x_2, y_2, z_2) = (7, -9, 3)$$

أي أن المسافة بين الطائرين هي $14\,\mathbf{km}$ تقريبًا.

b) إذا التقى الطائران في نقطة منتصف المسافة بينهما، فأوجد إحداثيات هذه النقطة.

$$\left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2}, \frac{z_1 + z_2}{2}\right) = \left(\frac{10 + 7}{2}, \frac{2 + (-9)}{2}, \frac{-5 + 3}{2}\right) \quad \text{صيغة نقطة المنتصف}$$

$$\left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2}, \frac{z_1 + z_2}{2}\right) = \left(\frac{10 + 7}{2}, \frac{2 + (-9)}{2}, \frac{-5 + 3}{2}\right) \quad (x_1, y_1, z_1) = (10, 2, -5)$$

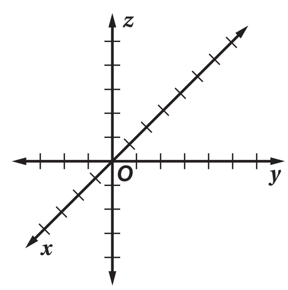
$$\approx (8.5, -3.5, -1) \quad (x_2, y_2, z_2) = (7, -9, 3)$$

فعندئذٍ تكون إحداثيات نقطة المنتصف هي: $(8.5, -3.5, -1)$.

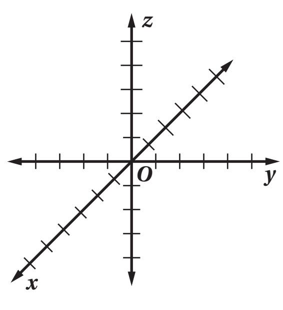
تمارين

عيّن كل نقطة من النقطتين الآتيتين في نظام الإحداثيات الثلاثي الأبعاد:

1) $(3, 2, 1)$



2) $(4, -2, -1)$.



أوجد طول القطعة المستقيمة المعطاة نقطتا نهايتها وبدايتها، ثم أوجد إحداثيات نقطة منتصفها في كلٍّ مما يأتي:

3) $(8, -3, 9), (2, 8, -4)$

4) $(-6, -12, -8), (7, -2, -11)$

5-4 تدريبات إعادة التعليم

(تتمة)

المتجهات في الفضاء الثلاثي الأبعاد

المتجهات في الفضاء: العمليات على المتجهات في الفضاء تُشبه العمليات على المتجهات في المستوى، فيمكن جمع، أو طرح متجهين في الفضاء أو ضربه في عدد ثابت، كما هو الحال في المتجهات في المستوى.
إذا كانت (v_1, v_2, v_3) نقطة نهاية متجه $\mathbf{v}$ في الفضاء في وضع قياسي، فإننا نعبر عنه بالصورة الإحداثية $\langle v_1, v_2, v_3 \rangle$.
كما نعبر عن المتجه الصفري بالصورة $\mathbf{0} = \langle 0, 0, 0\rangle$، ومتجهات الوحدة القياسية $\mathbf{i} = \langle 1, 0, 0\rangle$, $\mathbf{j} = \langle 0, 1, 0\rangle$, $\mathbf{k} = \langle 0, 0, 1\rangle$. ويمكن كتابة المتجه $\mathbf{v}$ بالصورة الإحداثية على صورة توافق خطِّي لمتجهات الوحدة $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$ بالآتي:
$\langle v_1, v_2, v_3\rangle = v_1\mathbf{i} + v_2\mathbf{j} + v_3\mathbf{k}$.

مثال

أوجد الصورة الإحداثية، وطول $\overrightarrow{AB}$ الذي نقطة بدايته $A\,(-3, 5, 1)$، ونقطة نهايته $B\,(3, 2, -4)$، ثم أوجد متجه الوحدة باتجاه $\overrightarrow{AB}$.

$\overrightarrow{AB} = \langle x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1\rangle$ الصورة الإحداثية للمتجه

$= \langle 3-(-3), 2-5, -4-1\rangle = \langle 6, -3, -5\rangle$ $\quad (x_1, y_1, z_1) = (-3, 5, 1)\,,\,(x_2, y_2, z_2) = (3, 2, -4)$

وباستعمال الصورة الإحداثية فإن طول $\overrightarrow{AB}$ هو:

$\left|\overrightarrow{AB}\right| = \sqrt{6^2 + (-3)^2 + (-5)^2} = \sqrt{70}$ $\quad \overrightarrow{AB} = \langle 6, -3, -5\rangle$

استعمل طول المتجة $\overrightarrow{AB}$ والصورة الإحداثية لإيجاد متجه وحدة $\mathbf{u}$ باتجاه $\overrightarrow{AB}$.

$\mathbf{u} = \dfrac{\overrightarrow{AB}}{\left|\overrightarrow{AB}\right|}$ متجه الوحدة باتجاه $\overrightarrow{AB}$

$= \dfrac{\langle 6, -3, -5\rangle}{\sqrt{70}} = \left\langle \dfrac{3\sqrt{70}}{35}, -\dfrac{3\sqrt{70}}{70}, -\dfrac{\sqrt{70}}{14}\right\rangle$ $\quad \overrightarrow{AB} = \langle 6, -3, -5\rangle\,,\,\left|\overrightarrow{AB}\right| = \sqrt{70}$

تمارين

أوجد الصورة الإحداثية، وطول $\overrightarrow{AB}$ الذي نقطة بدايته A ونقطة نهايته B، ثم أوجد متجه وحدة $\mathbf{u}$ باتجاه $\overrightarrow{AB}$.

1) $A(-10, 3, 9), B(8, -7, 3)$ **2)** $A(-1, -4, -7), B(8, 4, 10)$

أوجد كلًّا مما يأتي للمتجهات: $X = 3\mathbf{i} + 2\mathbf{j} - 5\mathbf{k},\ Y = \mathbf{i} - 5\mathbf{j} + 7\mathbf{k},\ Z = -2\mathbf{i} + 12\mathbf{j} + 4\mathbf{k}$:

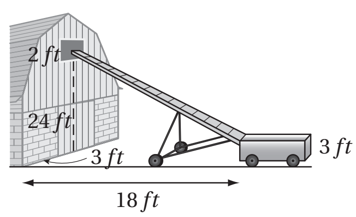
3) $3X + 2Y - 4Z$ **4)** $-6Y + 2Z$

5-4 تدريبات حل المسألة

المتجهات في الفضاء الثلاثي الأبعاد

1) **طائر:** طار طائر من النقطة $(24.38, 46.43, 600)$، إلى النقطة $(21.40, 39.09, 0)$ في مسار مستقيم، أوجد إحداثيات منتصف مساره.

2) **رافعة:** يستعمل مزارع رافعةً لرفع حزم من القش إلى نافذة، في الجزء العلوي لحظيرة ماشية، تعلو 24 ft عن سطح الأرض، وتبعد 18 ft عن مكان تحميل القش و3 ft إلى اليمين من مكان التحميل؛ حيث تمثل النافذة بالنقطة $(3, 18, 24)$، وسيتم رفع حزم القش ابتداءً من 3 ft فوق سطح الأرض، وهذا يُمثَّل بالنقطة $(0, 0, 3)$.



a) أوجد طول الرافعة إلى أقرب قدم لتصل إلى النافذة.

b) إذا احتاج المزارع إلى إدخال الرافعة قدمين داخل النافذة، فكم سيكون طول الرافعة؟

3) **طيران:** تنصُّ قوانين السلامة على أن تكون المسافة بين طائرتين في الهواء نصف ميل على الأقل، فإذا كانت النقطتان: $(300, 455, 2800)$, $(-250, 400, 5000)$ تمثلان موقعَي طائرتين على مقربة من المطار، حيث يُعبَّر عن الإحداثيات بالأقدام.

a) فكم قدمًا المسافة بين الطائرتين؟

b) وهل خالفت الطائرتان قوانين السلامة؟

4) **تنزُّه:** توجد مجموعة من خطوط السير التي يمكن أن يسلكها الشخص في أحد أماكن التنزه المشجرة. فإذا كانت النقطة $(1.5, 0.5, 0.4)$ تمثل منصة انطلاق خط السير الأول، والنقطة $(1.8, 1, 0.2)$ تمثل المنصة الثانية لهذا الخط، وإذا مثّلت كلُّ وحدةِ إحداثياتٍ ميلًا واحدًا، فما طول هذا الخط؟

5) **دراجات هوائية:** نظَّمت مجموعة من الشباب سباقًا للدراجات الهوائية، على أن يتكون فريق التنافس من شخصين، وأن يُبدّل أعضاء الفريق بعد قطع نصف مسافة السباق، فإذا مثّلت النقطة $(0, 0, 3)$ بداية السباق والنقطة $(2, -1, 9)$ نهايته، فما النقطة التي سيتبدل عندها أعضاء الفريق؟

الاسم: ______________________ التاريخ: ______________

5-4 التدريبات الإثرائية

متجهات أساسية في الفضاء الثلاثي الأبعاد

العبارة $\mathbf{v} = r\mathbf{u} + s\mathbf{w} + t\mathbf{z}$ تمثِّل جمع ثلاثة متجهات، ضُرب كلٌّ منها في عدد، وتسمى العبارة توافقًا خطيًّا من المتجهات $\mathbf{z}, \mathbf{w}, \mathbf{u}$.

يمكن التعبير عن أي متجهٍ في الفضاء $\mathbf{v}$ على صورة توافق خطِّي من ثلاثة متجهات غير متوازية مثنى مثنى.

مثال

مثال: اكتب المتجه $\mathbf{v} = \langle -1, -4, 3 \rangle$ على صورة توافق خطِّي من المتجهات: $\mathbf{u} = \langle 1, 3, 1 \rangle, \mathbf{w} = \langle 1, -2, 1 \rangle, \mathbf{z} = \langle -1, -1, 1 \rangle$.

$$\langle -1, -4, 3 \rangle = r\,\langle 1, 3, 1 \rangle + s\,\langle 1, -2, 1 \rangle + t\,\langle -1, -1, 1 \rangle = \langle r + s - t, 3r - 2s - t, r + s + t \rangle$$

بمساواة الإحداثيات المتناظرة:

$$-1 = r + s - t$$
$$-4 = 3r - 2S - t$$
$$3 = r + s + t$$

بحل نظام المعادلات ينتج أن $r=0$, $s=1$, $t=2$؛

لذا فإن $\boldsymbol{v} = w + 2\,z$.

اكتب المتجه $\mathbf{v}$ على صورة توافق خطِّي من المتجهات $\mathbf{u}, \mathbf{w}, \mathbf{z}$ في كلٍّ مما يأتي:

1) $\mathbf{v} = \langle -6, -2, 2 \rangle, \mathbf{u} = \langle 1, 1, 0 \rangle, \mathbf{w} = \langle 1, 0, 1 \rangle, \mathbf{z} = \langle 0, 1, 1 \rangle$

2) $\mathbf{v} = \langle 5, -2, 0 \rangle, \mathbf{u} = \langle 1, -2, 3 \rangle, \mathbf{w} = \langle -1, 0, 1 \rangle, \mathbf{z} = \langle 4, 2, -1 \rangle$

3) $\mathbf{v} = \langle 1, -1, 2 \rangle, \mathbf{u} = \langle 1, 2, -1 \rangle, \mathbf{w} = \langle 2, 2, 1 \rangle, \mathbf{z} = \langle 1, 0, 1 \rangle$

5-5 تدريبات إعادة التعليم

الضرب الداخلي والضرب الاتجاهي للمتجهات في الفضاء

الضرب الداخلي في الفضاء: **الضرب الداخلي لمتجهَين في الفضاء يشبه الضرب الداخلي لمتجهَين في المستوى، وناتج الضرب الداخلي لمتجهَين يعطي عددًا.**

ويُعرَّف الضرب الداخلي للمتجهين $\mathbf{a} = \langle a_1, a_2, a_3 \rangle$, $\mathbf{b} = \langle b_1, b_2, b_3 \rangle$ على النحو الآتي:

$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3$.

يكون المتجهان غير الصفريين $\mathbf{b}, \mathbf{a}$ متعامدين، إذا وفقط إذا كان $\mathbf{a}.\mathbf{b}=0$.

وكما هو الحال في المتجهات في المستوى، إذا كانت θ هي الزاوية بين متجهَين غير صفريين $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ في الفضاء،

فإن $\cos \theta = \dfrac{\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}}{|\mathbf{a}||\mathbf{b}|}$

مثال 1 **أوجد حاصل الضرب الداخلي للمتجهَين $\mathbf{u}, \mathbf{v}$ في كلٍّ مما يأتي، ثم حدّد ما إذا كانا متعامدين أم لا:**

a) $\mathbf{u} = \langle -3, 1, 0 \rangle, \mathbf{v} = \langle 2, 6, 4 \rangle$

$$\begin{aligned} \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} &= u_1 v_1 + u_2 v_2 + u_3 v_3 \\ &= -3(2) + 1(6) + 0(4) \\ &= -6 + 6 + 0 = 0 \end{aligned}$$

بما أن $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}=0$، فإن المتجهين $\mathbf{u}, \mathbf{v}$ متعامدان.

b) $\mathbf{u} = \langle 3, -2, 1 \rangle, \mathbf{v} = \langle 4, 5, -1 \rangle$

$$\begin{aligned} \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} &= u_1 v_1 + u_2 v_2 + u_3 v_3 \\ &= 3(4) + (-2)(5) + 1(-1) \\ &= 12 + (-10) - 1 = 1 \end{aligned}$$

بما أن $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} \neq 0$، فإن المتجهين $\mathbf{u}, \mathbf{v}$ غير متعامدين.

مثال 2 **أوجد قياس الزاوية θ بين المتجهَين $\mathbf{u}, \mathbf{v}$، إذا كان: $\mathbf{u} = \langle 4, 8, -3 \rangle$, $\mathbf{v} = \langle 9, -3, 0 \rangle$.**

$\cos \theta = \dfrac{\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}}{|\mathbf{u}||\mathbf{v}|}$ الزاوية بين متجهين

$\cos \theta = \dfrac{\langle 4, 8, -3 \rangle \cdot \langle 9, -3, 0 \rangle}{|\langle 4, 8, -3 \rangle||\langle 9, -3, 0 \rangle|}$ $\mathbf{u} = \langle 4, 8, -3 \rangle$, $\mathbf{v} = \langle 9, -3, 0 \rangle$

$\cos \theta = \dfrac{12}{\sqrt{89}\sqrt{90}}$ أوجد الضرب الداخلي وطول كلٍّ من المتجهين

$\theta = \cos^{-1} \dfrac{12}{89.5} \simeq 82.3°$

أي أن قياس الزاوية بين المتجهين $\mathbf{u}, \mathbf{v}$ يساوي $82.3°$ تقريبًا.

تمارين

أوجد حاصل الضرب الداخلي للمتجهين $\mathbf{u}, \mathbf{v}$ في كلٍّ مما يأتي، ثم حدّد ما إذا كانا متعامدين أم لا:

1) $\mathbf{u} = \langle 3, -2, 9 \rangle, \mathbf{v} = \langle 1, 2, 4 \rangle$

2) $\mathbf{u} = \langle -2, -4, -6 \rangle, \mathbf{v} = \langle -3, 7, -4 \rangle$

3) $\mathbf{u} = \langle 4, -3, 8 \rangle, \mathbf{v} = \langle 2, -2, -3 \rangle$

4) $\mathbf{u} = 3\mathbf{i} + 6\mathbf{j} - 3\mathbf{k}, \mathbf{v} = -5\mathbf{i} - 2\mathbf{j} - 9\mathbf{k}$

أوجد قياس الزاوية θ بين المتجهين $\mathbf{u}, \mathbf{v}$ لكلٍّ مما يأتي:

5) $\mathbf{u} = \langle 5, -22, 9 \rangle, \mathbf{v} = \langle 14, 2, 4 \rangle$

6) $\mathbf{u} = \langle 4, -5, 7 \rangle, \mathbf{v} = \langle 11, -8, 2 \rangle$

7) $\mathbf{u} = -4\mathbf{i} + 5\mathbf{j} - 3\mathbf{k}, \mathbf{v} = -8\mathbf{i} - 12\mathbf{j} - 9\mathbf{k}$

8) $\mathbf{u} = \mathbf{i} + 2\mathbf{j} - \mathbf{k}, \mathbf{v} = -\mathbf{i} + 4\mathbf{j} - 3\mathbf{k}$

5-5 تدريبات إعادة التعليم

(تتمة)

الضرب الداخلي والضرب الاتجاهي للمتجهات في الفضاء

الضرب الاتجاهي: يختلف عن الضرب الداخلي، إذ إن **الضرب الاتجاهي** لمتجهَين هو متجه لا يقع في مستوى هذين المتجهين، ولكنه عمودي عليه.

الضرب الاتجاهي لمتجهين في الفضاء
إذا كان: $\mathbf{a}=a_1\mathbf{i}+a_2\mathbf{j}+a_3\mathbf{k}$, $\mathbf{b}=b_1\mathbf{i}+b_2\mathbf{j}+b_3\mathbf{k}$ ، فإن الضرب الاتجاهي للمتجهَين **a, b** هو المتجه: $(a_2 b_3 - a_3 b_2)\mathbf{i} - (a_1 b_3 - a_3 b_1)\mathbf{j} + (a_1 b_2 - a_2 b_1)\mathbf{k}$.

إذا كان لمتجهين نقطة البداية نفسها، وشكّلا ضلعين متجاورين لمتوازي أضلاع، فإن القيمة المطلقة للضرب الاتجاهي للمتجهين تُعطِي مساحة متوازي الأضلاع.

إذا كان لثلاثة متجهات نقطة البداية نفسها، وشكّلت أحرفًا متجاورة لمتوازي سطوح، فإن القيمة المطلقة للضرب القياسي الثلاثي تعطي حجم متوازي السطوح. لإيجاد الضرب القياسي الثلاثي، استعمل المصفوفة نفسها المستعملة للضرب الاتجاهي، على أن توضع إحداثيات المتجه الثالث مكان **i , j , k**.

مثال

أوجد الضرب الاتجاهي للمتجهين $\mathbf{u}=\langle 0, 4, 1\rangle$, $\mathbf{v}=\langle 0, 1, 3\rangle$، ثم بيّن أن $\mathbf{u}\times\mathbf{v}$ يعامد كلًّا من u , v.

$\mathbf{u} = 0\mathbf{i} + 4\mathbf{j} + \mathbf{k}$, $\mathbf{v} = 0\mathbf{i} + \mathbf{j} + 3\mathbf{k}$

$$\mathbf{u}\times\mathbf{v} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 0 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 4 & 1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix}\mathbf{i} - \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 3 \end{vmatrix}\mathbf{j} + \begin{vmatrix} 0 & 4 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}\mathbf{k}$$ قاعدة من الدرجة الثالثة

$$= (12 - 1)\mathbf{i} - (0 - 0)\,\mathbf{j} + (0 - 0)\mathbf{k}$$ محددات مصفوفات من الدرجة الثانية

$$= 11\mathbf{i} - 0\mathbf{j} + 0\mathbf{k}$$ بسّط

$$= 11\mathbf{i} = \langle 11, 0, 0\rangle$$ الصورة الإحداثية

لإثبات أن $\mathbf{u}\times\mathbf{v}$ يعامد كلًّا من **u , v**، أوجد الضرب الداخلي لـ $\mathbf{u}\times\mathbf{v}$ مع كلٍّ من **u, v**.

$$\begin{aligned}&(\mathbf{u}\times\mathbf{v})\cdot\mathbf{u}\\ &= \langle 11, 0, 0\rangle\cdot\langle 0, 4, 1\rangle\\ &= 11(0) + 0(4) + 0(1)\\ &= 0 + 0 + 0\\ &= 0 \checkmark\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}&(\mathbf{u}\times\mathbf{v})\cdot\mathbf{v}\\ &= \langle 11, 0, 0\rangle\cdot\langle 0, 1, 3\rangle\\ &= 11(0) + 0(1) + 0(3)\\ &= 0 + 0 + 0\\ &= 0 \checkmark\end{aligned}$$

بما أن حاصل الضرب الداخلي صفر في الحالتين، فإن $\mathbf{u}\times\mathbf{v}$ عمودي على كلٍّ من **u, v**.

تمارين

أوجد الضرب الاتجاهي للمتجهين u, v في السؤالين الآتيين، ثم بيّن أن $\mathbf{u}\times\mathbf{v}$ يعامد كلًّا من u, v :

1) $\mathbf{u} = \langle 2, 3, -1\rangle$, $\mathbf{v} = \langle 6, -2, -4\rangle$

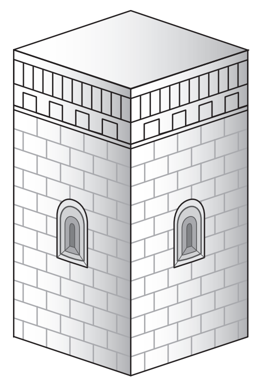
2) $\mathbf{u} = \langle 5, 2, 8\rangle$, $\mathbf{v} = \langle -1, 2, 4\rangle$

5-5 تدريبات حل المسألة

الضرب الداخلي والضرب الاتجاهي للمتجهات في الفضاء

1) مرآة: إذا كان المتجهان $\langle 3, 4, 2\rangle$, $\langle -4, 4, 3\rangle$ يمثلان ضلعين متجاورين لمرآة في غرفة قياس ملابس، فأوجد مساحة المرآة.

2) بناء: شُيّد بناء مزخرف على شكل متوازي سطوح، فإذا كانت المتجهات: $t = \langle 15, 12, 10\rangle$ ، $\mathbf{u} = \langle 13, -8, -5\rangle$ ، $\mathbf{v} = \langle -9, 13, 12\rangle$ تمثل ثلاثة أحرف متجاورة للبناء، فأوجد مساحة سطحه.



3) إنتاج: إذا كان المتجه $\mathbf{u} = \langle 150, 100, 500\rangle$ ، يمثل أعداد 3 أنواع من المنتجات، وكان المتجه $\mathbf{v} = \langle 5, 7, 2\rangle$ يمثل تكلفة وحدة واحدة من كل منتج.

a) أوجد $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}$

b) ماذا يمثل ناتج $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}$؟

4) صواريخ: أُطلق صاروخان في آنٍ واحدٍ، حيث انطلق الصاروخ الأول من النقطة $(0, 1, 0)$، وبعد ثانية واحدة كان عند النقطة $(3, 7, 12)$، في حين أُطلق الصاروخ الثاني من النقطة $(0, -1, 0)$، ووصل إلى النقطة $\langle 3, -8, 10\rangle$ بعد ثانية واحدة.

a) أوجد المتجه الذي يمثل مسار الصاروخ الأول.

b) أوجد المتجه الذي يمثل مسار الصاروخ الثاني.

c) أوجد قياس الزاوية بين مسارَي الصاروخين.

d) إذا بقيت سرعتا الصاروخين ثابتتين، فما المتجهان اللذان يمثّلان الصاروخين بعد 3 ثوانٍ؟

5-5 التدريبات الإثرائية

بعض خصائص ضرب المتجهات

بعض خصائص ضرب المتجهات: إذا كانت $\mathbf{a} = \langle a_1, a_2, a_3\rangle, \mathbf{b} = \langle b_1, b_2, b_3\rangle, \mathbf{c} = \langle c_1, c_2, c_3\rangle$، فأجب عن الأسئلة الآتية لاستنتاج بعض خصائص ضرب المتجهات.

1) أوجد $\mathbf{b} + \mathbf{c}$

2) أوجد $\mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} + \mathbf{c})$

3) أوجد $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} + \mathbf{a} \cdot \mathbf{c}$

4) ماذا تلاحظ؟ وهل هذه النتيجة صحيحة دائمًا.

5) أوجد $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$

6) أوجد $\mathbf{b} \times \mathbf{a}$

7) ماذا تلاحظ؟ وهل هذه النتيجة صحيحة دائمًا.

8) أوجد $\mathbf{0} \cdot \mathbf{a}$

9) ماذا تلاحظ؟ وهل هذه النتيجة صحيحة دائمًا.

10) استعمل النتائج التي توصَّلْت إليها أعلاه لإيجاد:
$\big((\mathbf{a} \times \mathbf{b}) + (\mathbf{b} \times \mathbf{a})\big) \cdot (\mathbf{a} \times \mathbf{c})$

ملحق الإجابات

الاسم: ________ التاريخ: ________

5-1 تدريبات إعادة التعليم

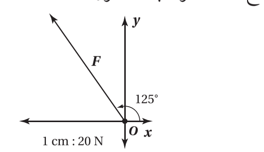
مقدمة في المتجهات

تمثيل المتجهات: المتجه هو كمية لها مقدار واتجاه، و**مقدار المتجه** هو طول القطعة المستقيمة المتجهة، و**اتجاهه** هو قياس الزاوية المتجهة بين الاتجاه الموجب للمحور x والمتجه، ويمكن استعمال **قاعدة متوازي الأضلاع** أو **قاعدة المثلث** لجمع المتجهات أو طرحها.

مثال **استعمل المسطرة والمنقلة؛ لرسم متجه لكلٍّ من الكميتين الآتيتين، واكتب عليه مقياس الرسم.**

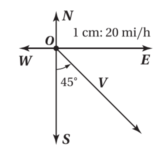
a) قوة مقدارها $F = 60\ N$ بزاوية قياسها $125°$ مع الاتجاه الأفقي.

استعمل مقياس رسم 1 cm : 20 N،
وارسم سهمًا طوله $3\ cm = 20 \div 60$،
في وضع قياسي ويصنع زاوية قياسها $125°$
مع الاتجاه الموجب للمحور x.



b) سرعة مقدارها $V = 55\ mi/h$، باتجاه $S45°E$.

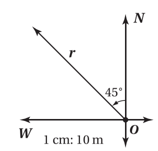
استعمل مقياس رسم 1 cm: 20 mi/h، وارسم سهمًا طوله $2.75\ cm = 20 \div 55$ ويصنع زاوية قياسها $45°$ في اتجاه جنوب شرق.



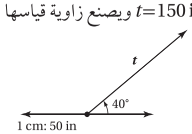
تمارين

استعمل مسطرة ومنقلة؛ لرسم متجه لكلٍّ من الكميتين الآتيتين، واكتب عليه مقياس الرسم.

1) $r = 30\ m$ باتجاه $N45°W$.

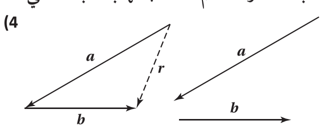


2) $t = 150\ in$ ويصنع زاوية قياسها $40°$ مع الأفقي.



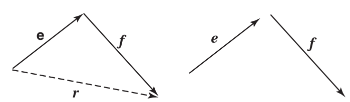
أوجد محصلة كل زوج من المتجهات في السؤالين 3,4 ، مستعملًا قاعدة المثلث أو متوازي الأضلاع، واكتب مقدار المحصلة بالسنتمترات، ثم حدّد اتجاهها بالنسبة للأفقي.

3)



2 cm, 140°

4)



3 cm, 142°

الاسم: ________ التاريخ: ________

5-1 تدريبات إعادة التعليم (تتمة)

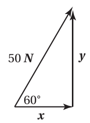
مقدمة في المتجهات

تطبيقات المتجهات: يمكن تحليل أيّ متجه إلى مركبتين أفقية ورأسية.

مثال **يسحب جمال زورقًا صغيرًا مثبتًا بحبل بقوة مقدارها 50 N، ويصنع زاوية قياسها $60°$ مع المحور الأفقي.**

a) ارسم شكلًا يوضح تحليل القوة التي يبذلها جمال إلى مركّبتين متعامدتين.

يمكن تحليل القوة التي يسحب بها جمال القارب إلى قوة أفقية x إلى الأمام، ورأسية y إلى أعلى، كما في الشكل المجاور.



b) أوجد مقدار كلٍّ من المركّبتين الأفقية والرأسية للقوة.

تكوّن القوة ومركبتاها الأفقية والرأسية مثلثًا قائم الزاوية.

استعمل تعريف الجيب وجيب والتمام؛ لإيجاد مقدار كلٍّ من المركبتين.

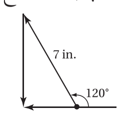
$\cos 60° = \frac{\lvert x\rvert}{50}$	تعريف الجيب وجيب التمام	$\sin 60 = \frac{\lvert y\rvert}{50}$
$\lvert y\rvert = 50 \sin 60°$	حُل بالنسبة لـ x و y	$\lvert x\rvert = 50 \cos 60°$
$\lvert y\rvert \approx 43.3$	استعمل الآلة الحاسبة	$\lvert x\rvert = 25$

مقدار المركبة الأفقية 25 N، ومقدار المركبة الرأسية 43 N تقريبًا.

تمارين

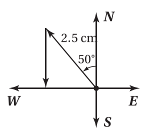
ارسم شكلًا يوضح تحليل كلٍّ من المتجهين إلى مركبتين أفقية ورأسية، ثم أوجد مقدار كلٍّ منهما.

1) 7 in باتجاه $120°$ مع الأفقي.



3.5, 6.1

2) 2.5 cm/h باتجاه $N50°W$.



1.9, 1.6

3) **شغل:** يسحب علي عربة على سطح مائل يصنع مع الأرض زاوية قياسها $50°$، بقوة مقدارها 25 N، أوجد المركبتين الأفقية والرأسية للقوة.

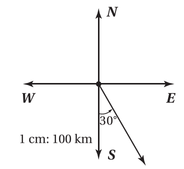
16.08 N ؛ 19.15 N

الاسم: ______ التاريخ: ______

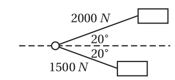
5-1 تدريبات حل المسألة

مقدمة في المتجهات

1) **إبحار:** سار قارب 200 كلم باتجاه $S\ 30°\ E$، ارسم متجهًا يصف هذه الكمية باستعمال المسطرة والمنقلة، وحدِّد مقياس الرسم.



2) **زراعة:** يقوم جرّاران زراعيان بإزالة جذع شجرة على نحو ما هو موضح في الشكل، فيسحب الأول الجذع بقوة مقدارها 2000 N، والثاني بقوة مقدارها 1500 N، وقياس الزاوية بين الجرّارين يساوي °40.



a) ما مقدار محصلة جمع المركّبتين الأفقيتين لقوتَي الجرارين؟ وما مقدار محصلة جمع المركبتين الرأسيتين لقوتَي الجرارين؟
3288.9N ؛ 171N

b) ما مقدار محصلة القوة المؤثرة في جذع الشجرة؟
3293N

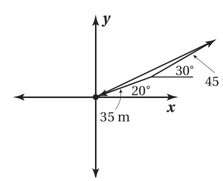
c) إذا بقي قياس الزاوية بين الجرّارين °40، فهل سيؤثر تغيير قياسَي زاويتَي الجرّارين مع الأفقي في القوة المحصلة؟ وضح إجابتك.
لا يؤثر؛ إجابة ممكنة: إذا استعملت قاعدة المثلث لإيجاد المجموع، فستكون المحصلة في الموقع نفسه، ولا يوجد تأثير لكلٍّ من زاويتَي اتجاه الجرارين.

3) **سفر:** يسحب سالم حقيبة سفره على أرض المطار بقوة مقدارها 22 N على مقبض الحقيبة التي تصنع زاوية قياسها °72 مع الأرض، فما مقدار القوة التي تحرك الحقيبة إلى الأمام؟ إذا قصّر سالم طول المقبض حتى أصبح أقرب إلى الأرض، فما أثر نقصان قياس الزاوية في الحركة؟
6.8 N؛ تزداد القوة اللازمة مع نقصان الزاوية.

4) **رياضة المشي:** في مسابقة المشي على الأقدام، سار سعيد 200 m باتجاه $N\ 70°\ W$، ثم سار 90 m في اتجاه الشرق. فكم مترًا يبعد سعيد عن نقطة البداية؟ وما اتجاهه؟
$N55.1°\ W$؛ 119.5 m

5) **تزلج:** قطع متزلج مسافة 35 مترًا بزاوية قياسها °20 مع المحور الأفقي، ثم غير مساره باتجاه °30 مع المحور الأفقي فقطع 45 m.

a) ارسم متجهًا باستعمال المسطرة والمنقلة يمثل الموقف.



b) أوجد محصلة المسافة واتجاه الحركة.
79.7m بزاوية قياسها °25.6 مع المحور الأفقي.

الاسم: ______ التاريخ: ______

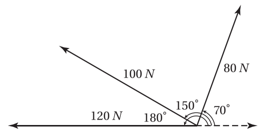
5-1 التدريبات الإثرائية

تأثير أكثر من قوتين في جسم

قد تؤثر في جسم ثلاث قوى أو أكثر في وقت واحد، ويمكن تمثيل كل قوة من هذه القوى بمتجه. ولإيجاد متجه المحصلة الذي يؤثر في الجسم، يمكنك جمع كل متجهين معًا.

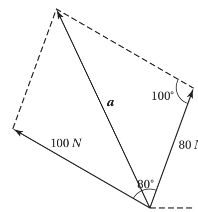
مثال

بناء: يسحب عامل صندوقًا يحتوي على مواد بناء بقوة مقدارها 80 N بزاوية قياسها °70 مع الأرض. وفي الوقت نفسه، يسحب عامل آخر الصندوق بقوة 100 N بزاوية قياسها °150 مع الأرض، وتؤثر في الصندوق قوة ثالثة مقدارها 120 N بزاوية قياسها °180، أوجد مقدار محصلة القوى المؤثرة في الصندوق واتجاهها.

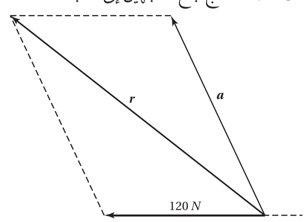


أولًا، اجمع أيَّ متجهين من المتجهات، وتذكّر أن ترتيب الاختيار غير مهم عندما تجمع المتجهات.

اجمع المتجه الذي مقداره 80 N مع المتجه الذي مقداره 100 N أولًا؛



والآن، أضف ناتج جمع المتجهين إلى المتجه 120 N؛



فتكون القوة المحصلة 219 N وبزاوية قياسها °145 مع الأرض

تمارين

أوجد مقدار القوة المحصلة واتجاهها التي تؤثر في كل جسم في السؤالين الآتيين:

6) **خيول:** تجر ثلاثة خيول عربة، يؤثر أحدها في العربة بقوة 40 N بزاوية °50 مع الخط الأفقي، ويؤثر الثاني بقوة مقدارها 100 N وبزاوية °110 مع الخط الأفقي، والثالث بقوة 10 N وبزاوية °150 مع الخط الأفقي، أوجد مقدار القوة المحصلة واتجاهها.
98° ؛ 131 N

7) **إزاحة:** يحاول ثلاثة رجال تحريك أريكة، فيقوم أحدهم بدفعها بقوة 40 N بزاوية °50 مع الأرض، ويؤثر فيها الثاني بقوة 100 N بزاوية °110، والثالث بقوة 10 N بزاوية °150، أوجد مقدار القوة المحصلة واتجاهها.
130.7 N ، قياس الزاوية °97.7 مع الأرض

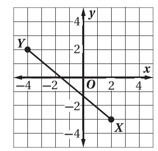
الاسم: ________ التاريخ: ________

5-2 تدريبات إعادة التعليم

المتجهات في المستوى الإحداثي

المتجهات في المستوى الإحداثي: تُستعمل صيغة المسافة بين نقطتين لإيجاد طول متجه.

مثال 1 أوجد طول $\overrightarrow{XY}$ الذي نقطة بدايته $X(2, -3)$، ونقطة نهايته $Y(-4, 2)$، ثم اكتبه على الصورة الإحداثية.



أوجد طول $\overrightarrow{XY}$ باستعمال صيغة المسافة بين نقطتين.

$|\overrightarrow{XY}| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$ صيغة المسافة بين نقطتين

$= \sqrt{(-4-2)^2 + [2-(-3)]^2}$ $(x_1, y_1) = (2, -3), (x_2, y_2) = (-4, 2)$

$= \sqrt{(-6)^2 + 5^2} = \sqrt{61}$ بسّط

اكتب $\overrightarrow{XY}$ على الصورة الإحداثية.

$\overrightarrow{XY} = \langle x_2 - x_1, y_2 - y_1 \rangle$

$= \langle -4 - 2, 2 - (-3) \rangle$ $(x_1, y_1) = (2, -3), (x_2, y_2) = (-4, 2)$

$= \langle -6, 5 \rangle$ بسّط

مثال 2 أوجد كلًّا مما يأتي للمتجهات $\mathbf{s} = \langle 4, 2 \rangle$ ، $\mathbf{t} = \langle -1, 3 \rangle$:

a) $\mathbf{s} + \mathbf{t}$

$\mathbf{s} + \mathbf{t} = \langle 4, 2 \rangle + \langle -1, 3 \rangle$ عوّض

$= \langle 4 + (-1), 2 + 3 \rangle = \langle 3, 5 \rangle$ جمع المتجهات

b) $3\mathbf{s} + \mathbf{t}$

$3\mathbf{s} + \mathbf{t} = 3\langle 4, 2 \rangle + \langle -1, 3 \rangle$ عوّض

$= \langle 12, 6 \rangle + \langle -1, 3 \rangle$ ضرب متجه في عدد حقيقي

$= \langle 11, 9 \rangle$ جمع المتجهات

تمارين

أوجد الصورة الإحداثية لـ $\overrightarrow{AB}$ الذي نقطة بدايته A ونقطة نهايته B في السؤالين 1 , 2، ثم أوجد طوله:

1) $A(12, 41), B(52, 33)$
$\langle 40, -8 \rangle, 8\sqrt{26}$

2) $A(-15, 0), B(7, -19)$
$\langle 22, -19 \rangle, 13\sqrt{5}$

إذا كان: $\mathbf{a} = \langle 4, -2 \rangle, \mathbf{b} = \langle 24, 21 \rangle, \mathbf{c} = \langle -1, -3 \rangle$ فأوجد كلًّا مما يأتي:

3) $\mathbf{a} - \mathbf{b}$
$\langle -20, -23 \rangle$

4) $8\mathbf{b} - 2\mathbf{a} + 3\mathbf{c}$
$\langle 181, 163 \rangle$

5) $2\mathbf{b} + \mathbf{c}$
$\langle 47, 39 \rangle$

6) $\mathbf{a} - 2(\mathbf{b} + 2\mathbf{c})$
$\langle -40, -32 \rangle$

الاسم: ________ التاريخ: ________

5-2 تدريبات إعادة التعليم

(تتمة)

المتجهات في المستوى الإحداثي

متجهات الوحدة: يُسمى المتجه الذي طوله 1 **متجه وحدة**، ويرمز له بالرمز **u**، ولإيجاد متجه الوحدة **u** الذي له نفس اتجاه المتجه **v**، نستخدم العلاقة $\mathbf{u} = \frac{1}{|\mathbf{v}|}\mathbf{v}$.

وكحالة خاصة من متجهات الوحدة، متجه الوحدة باتجاه المحور X الموجب بالرمز $\mathbf{i} = \langle 1, 0 \rangle$ ، ويرمز إلى متجه الوحدة باتجاه محور y الموجب بالرمز $\mathbf{j} = \langle 0, 1 \rangle$ ، ويمكن كتابة أي متجه بدلالة متجهَي الوحدة في صورة توافق خطيٍّ لمتجهات الوحدة **i** و **j**.

مثال 1 أوجد متجه الوحدة **u** الذي له نفس اتجاه $\mathbf{v} = \langle -4, -1 \rangle$

$\mathbf{u} = \frac{1}{|\mathbf{v}|}\mathbf{v}$ متجه وحدة باتجاه **v**

$= \frac{1}{|\langle -4, -1 \rangle|}\langle -4, -1 \rangle$ عوّض

$= \frac{1}{\sqrt{(-4)^2 + (-1)^2}}\langle -4, -1 \rangle$ $|\langle a, b \rangle| = \sqrt{a^2 + b^2}$

$= \frac{1}{\sqrt{17}}\langle -4, -1 \rangle$ بسّط

$= \left\langle \frac{-4}{\sqrt{17}}, \frac{-1}{\sqrt{17}} \right\rangle = \left\langle \frac{-4\sqrt{17}}{17}, \frac{-\sqrt{17}}{17} \right\rangle$ أنطق المقام

مثال 2 إذا كان $\overrightarrow{MP}$ متجهًا، نقطة بدايته $M(2, 2)$ ونقطة نهايته $P(5, 4)$ ، فاكتب $\overrightarrow{MP}$ على صورة توافق خطيٍّ لمتجهَي الوحدة **i, j** .

أوجد الصورة الإحداثية لـ $\overrightarrow{MP}$ أولًا.

$\overrightarrow{MP} = \langle x_2 - x_1, y_2 - y_1 \rangle$ الصورة الإحداثية

$= \langle 5 - 2, 4 - 2 \rangle = \langle 3, 2 \rangle$ $(x_1, y_1) = (2, 2)$, $(x_2, y_2) = (5, 4)$

ثم أعد كتابة المتجه على صورة توافق خطيٍّ لمتجهَي الوحدة.

$\overrightarrow{MP} = \langle 3, 2 \rangle$ الصورة الإحداثية

$= 3\mathbf{i} + 2\mathbf{j}$ $\langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle = \mathbf{a}\mathbf{i} + \mathbf{b}\mathbf{j}$

تمارين

أوجد متجه وحدة **u**، له اتجاه المتجه **v** نفسه في السؤالين 1, 2:

1) $\mathbf{p} = \langle 4, -3 \rangle$ **$\left\langle \frac{4}{5}, \frac{-3}{5} \right\rangle$**

2) $\mathbf{v} = \langle 10, 25 \rangle$ **$\left\langle \frac{2\sqrt{29}}{29}, \frac{5\sqrt{29}}{29} \right\rangle$**

اكتب $\overrightarrow{MN}$ المعطاة نقطتا بدايته ونهايته، على صورة توافق خطيٍّ لمتجهَي الوحدة **i, j** في السؤالين 3 , 4:

3) $M(2, 8), N(-5, -3)$ **$-7\mathbf{i} - 11\mathbf{j}$**

4) $M(0, 6), N(18, 4)$ **$18\mathbf{i} - 2\mathbf{j}$**

أوجد الصورة الإحداثية للمتجه **v** المعطى طوله وزاوية اتجاهه مع الاتجاه الموجب للمحور x في السؤالين 5, 6:

5) $|\mathbf{v}| = 18, \theta = 240°$ **$\langle -9, -9\sqrt{3} \rangle$**

6) $|\mathbf{v}| = 5, \theta = 95°$ **$\langle -0.4, 5.0 \rangle$**

أوجد زاوية اتجاه كلٍّ من المتجهين في السؤالين 7 , 8:

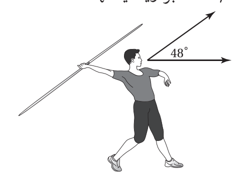
7) $-4\mathbf{i} + 2\mathbf{j}$ **153.4°**

8) $\langle 2, 17 \rangle$ **83.3°**

5-2 تدريبات حل المسألة

المتجهات في المستوى الإحداثي

1) **ألعاب قوى:** في مسابقة رمي الرمح، رمى لاعب الرمح بسرعة $28\,m/s$ بزاوية قياسها 48°.



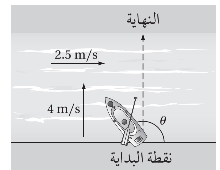
a) ما مقدار المركبة الأفقية لسرعة الرمح؟
18.7 m/s

b) ما مقدار المركبة العمودية لسرعة الرمح؟
20.8 m/s

2) **مواصلات:** تحركت حافلة 4.5 mi إلى الشمال، ثم 2 mi إلى الشرق، ثم 1.5 mi شمال شرق بزاوية 30°، اكتب محصلة سير الحافلة على صورة توافقٍ خطّي لمتجهَي الوحدة **i, j**.
3.3i+5.25j

3) **مسافات:** سار سلطان من منزله 2 mi باتجاه الغرب، ثم سار 3.4 mi إلى الشمال فوصل إلى المسجد.
إذا سار سلطان من منزله إلى المسجد في خط مستقيم، فكم ميلًا يختصر من المسافة التي قطعها؟
1.5 mi

4) **زورق:** يُبحر شخص في نهر سرعة التيار فيه $2.5\,m/s$، فإذا كان الشخص يجدف بسرعة $4\,m/s$ باتجاه عمودي على الشاطئ، فأجب عمّا يأتي:



a) ما محصلة سرعة الزورق؟
4.7 m/s

b) ما قياس الزاوية التي سيسير بها الزورق بالنسبة للشاطئ؟
58°

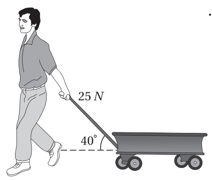
5-2 التدريبات الإثرائية

الاحتكاك والقوة العمودية

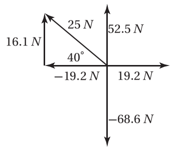
بناءً على قانون نيوتن الأول في الحركة، إذا تحرك جسم بسرعة ثابتة، فإن القوى المؤثرة فيه جميعها تكون متزنةً، وإذا لم يتحرك الجسم بسرعة ثابتة، فإن القوة المؤثرة تكون غير متزنة؛ لذا إذا دفع شخص جسمًا وتحرك بسرعة ثابتة، فإن قوة دفع الشخص للجسم توازن قوة الاحتكاك.
معامل الاحتكاك μ (ويقرأ *mu*) هو النسبة بين قوة الاحتكاك بين سطحين وقوة الدفع المؤثرة في السطحين معًا. إذا ارتكز جسم على سطح الأرض، فإنه يمكن حساب قوة الدفع المؤثرة في السطحين معًا، بضرب الكتلة (بالكيلو جرام) في تسارع الجاذبية الأرضية $-9.8\,m/s^2$، القوة العمودية n هي قوة دفع الأرض للجسم إلى أعلى.

مثال

يسحب شخص عربة كتلتها 7 kg بسرعة ثابتة كما في الشكل. فإذا كان الشخص يسحب العربة بقوة مقدارها 25 N وكان مقبض العربة يصنع 40° مع المحور الأفقي، فأوجد معامل الاحتكاك في هذا الوضع.



يمكن استعمال مخطط القوى لتوضيح المسألة. احسب المركّبة الأفقية والمركّبة الرأسية للقوة 25 N، لما كانت العربة تتحرك بسرعة ثابتة، فإن قوة الاحتكاك تساوي المركبة الأفقية ولكن باتجاه معاكس. وتعادل قوة الجاذبية مجموع القوتين؛ المركبة الرأسية والقوة العمودية.



المركبة الأفقية $x = 25\cos 40^\circ \approx 19.2$

المركبة الرأسية $y = 25\sin 40^\circ \approx 16.1$

قوة الجاذبية بالنسبة للأرض = الكتلة × تسارع الجاذبية الأرضية

$7(-9.8) = -68.6$

القوة العمودية $n = 68.6 - 16.1 = 52.6$

معامل الاحتكاك $\mu = \frac{19.2}{52.5} \approx 0.37$

لذا، فإن معامل الاحتكاك هو 0.37

تمارين

1) يسحب شخص عربة طفل كتلتها 41 kg بقوة 50 N، فإذا كان الحبل يصنع زاوية قياسها 45° مع الأرض، فأوجد معامل الاحتكاك بين العربة والأرض.
0.10

2) يدفع شخص صندوقًا كتلته 25 kg على سجادة بقوة 75 N، فإذا كانت قوة الدفع تصنع زاوية 25° مع الأرض، فأوجد معامل الاحتكاك بين السجادة والصندوق.
0.32

الاسم: ______________ التاريخ: ______________

5-3 تدريبات إعادة التعليم

الضرب الداخلي

الضرب الداخلي: يُعرّف الضرب الداخلي للمتجهين $\mathbf{a} = \langle a_1, a_2 \rangle$ ، $\mathbf{b} = \langle b_1, b_2 \rangle$ بالقاعدة $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = a_1b_1 + a_2b_2$، ويكون المتجهان غير الصفريين $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ متعامدين، إذا وفقط إذا كان $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = 0$.

مثال أوجد حاصل الضرب الداخلي للمتجهين u, v، ثم تحقق مما إذا كانا متعامدين أم لا.

a) $\mathbf{u} = \langle 5, 1 \rangle, \mathbf{v} = \langle -3, 15 \rangle$

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = 5(-3) + 1(15)$$
$$= 0$$

بما أن $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = 0$، فإن $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$ متعامدان.

b) $\mathbf{u} = \langle 4, 5 \rangle, \mathbf{v} = \langle 8, -6 \rangle$

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = 4(8) + 5(-6)$$
$$= 2$$

بما أن $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} \neq 0$، فإن $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$ غير متعامدين.

تمارين

أوجد حاصل الضرب الداخلي للمتجهين $\mathbf{u}, \mathbf{v}$ في كلٍّ مما يأتي، ثم تحقق مما إذا كانا متعامدين أم لا.

1) $\mathbf{u} = \langle 2, 4 \rangle, \mathbf{v} = \langle -12, 6 \rangle$

صفر؛ متعامدان

2) $\mathbf{u} = -8\mathbf{i} + 5\mathbf{j}, \mathbf{v} = 3\mathbf{i} - 6\mathbf{j}$

-54؛ غير متعامدين

3) $\mathbf{u} = \langle 2, -1 \rangle, \mathbf{v} = \langle -12, 5 \rangle$

-29؛ غير متعامدان

4) $\mathbf{u} = -2\mathbf{i} + 5\mathbf{j}, \mathbf{v} = 6\mathbf{j}$

30؛ غير متعامدين

استعمل الضرب الداخلي لإيجاد طول المتجه المعطى في السؤالين 5, 6:

5) $\mathbf{a} = \langle 9, 3 \rangle$

$\mathbf{3\sqrt{10}}$

6) $\mathbf{c} = \langle -12, 4 \rangle$

$\mathbf{4\sqrt{10}}$

الاسم: ______________ التاريخ: ______________

5-3 تدريبات إعادة التعليم

(تتمة)

الضرب الداخلي

الزاوية بين متجهين: إذا كانت θ هي الزاوية بين متجهين غير صفريين $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ فإن:

$$\cos\theta = \frac{\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}}{|\mathbf{a}|\,|\mathbf{b}|}$$

مثال أوجد قياس الزاوية θ بين المتجهين $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$ إذا كان $\mathbf{u} = \langle 5, 1 \rangle$ ، $\mathbf{v} = \langle -2, 3 \rangle$.

$\cos\theta = \dfrac{\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}}{|\mathbf{u}|\,|\mathbf{v}|}$ الزاوية بين متجهين

$\cos\theta = \dfrac{\langle 5, 1 \rangle \cdot \langle -2, 3 \rangle}{|\langle 5, 1 \rangle|\,|\langle -2, 3 \rangle|}$ $\mathbf{u} = \langle 5, 1 \rangle$, $\mathbf{v} = \langle -2, 3 \rangle$

$\cos\theta = \dfrac{-10 + 3}{\sqrt{26}\,\sqrt{13}}$ الضرب الداخلي لمتجهَين، طول متجه

$\theta = \cos^{-1}\dfrac{-7}{\sqrt{26}\,\sqrt{13}} \approx 112°$ معكوس جيب التمام

أيْ أن قياس الزاوية بين المتجهين $\mathbf{u}, \mathbf{v}$ يساوي $112°$ تقريبًا.

تمارين

أوجد الزاوية θ بين المتجهين $\mathbf{u}, \mathbf{v}$ في كلٍّ مما يأتي:

1) $\mathbf{u} = \langle -3, -5 \rangle, \mathbf{v} = \langle 7, 12 \rangle$

179.3°

2) $\mathbf{u} = 13\mathbf{i} - 5\mathbf{j}, \mathbf{v} = 6\mathbf{i} + 2\mathbf{j}$

39.5°

3) $\mathbf{u} = \langle 4, 3 \rangle, \mathbf{v} = \langle 1, 2 \rangle$

26.57° تقريبًا

4) $\mathbf{u} = \mathbf{i} + \mathbf{j}, \mathbf{v} = \mathbf{i}$

45°

5) $\mathbf{u} = \langle -1, 1 \rangle, \mathbf{v} = \langle 1, -1 \rangle$

180°

6) $\mathbf{u} = \langle -2, 3 \rangle, \mathbf{v} = \langle 1, 5 \rangle$

45°

5-3 تدريبات حل المسألة

الضرب الداخلي

1) **غواصات:** يمثل المتجه $\mathbf{v} = \langle 8, 3\rangle$ مسار غواصة، فإذا غيّرت الغواصة اتجاه حركتها ليصبح باتجاه $\mathbf{u} = \langle 2, 5\rangle$، فأوجد المسافة التي تحركتها الغواصة.

13.9 وحدة تقريبًا

2) **ألعاب أطفال:** تم تشغيل لعبتين كهربائيتين للأطفال في وقت واحد، فإذا مثّل المتجهان $\mathbf{u} = \langle 42, 58\rangle$ و $\mathbf{v} = \langle 59, 73\rangle$ مسارَي اللعبتين، فما قياس الزاوية بين مسارَيهما؟

3°

3) **صيد طيور:** خلال رحلة لصيد الطيور، سار أحمد وهايل في اتجاهين مختلفين، فإذا مثّل المتجه $\langle 9, 18\rangle$ مسار أحمد، ومثّل المتجه $\langle -15, 12\rangle$ مسار هايل، فأيهما سار مسافة أطول؟

سار أحمد مسافة أطول.

4) **مرتبات:** يمثل المتجه $\mathbf{u} = \langle 20, 15\rangle$ أعداد العاملين والسائقين في شركة، والمتجه $\mathbf{v} = \langle 2500, 3000\rangle$ يمثل مرتب العامل والسائق في الشركة نفسها.

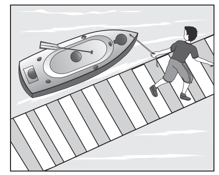
a) أوجد $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}$

95000

b) فسّر النتيجة التي حصلت عليها في الفرع **a** في سياق المسألة.

إجمالي مرتبات العمال والسائقين في الشركة.

5) **قوارب:** سحب شخص قاربًا مسافة 10 m على طول رصيف الميناء بواسطة حبلٍ، وبقوةٍ مقدارها 200 N.



a) أوجد مقدار الشغل المبذول، إذا كان قياس الزاوية التي يصنعها الحبل مع الأفقي 40°، ثم إذا كان قياس الزاوية 90°.

1532j, 0j

b) وضّح سبب نقصان الشغل، إذا زاد قياس الزاوية التي يصنعها الحبل مع الأفقي، اعتمادًا على النتائج التي حصلت عليها في فرع **a**.

إجابة ممكنة: كلما زادت الزاوية نقصت مركبة القوة في اتجاه الحركة، لذا ينقص الشغل.

5-3 التدريبات الإثرائية

المعادلات المتجهة

إذا كانت **a, b, c** ثلاثة متجهات محددة، فإن المعادلة $\mathbf{f}(x) = \mathbf{a} - 2x\mathbf{b} + x^2\mathbf{c}$ تعتبر مثالًا لدالة متجهة في x. والجدول الآتي يبيّن المتجهات المرتبطة ببعض قيم x.

x	-2	-1	0	1	2
$f(x)$	$\mathbf{a}+4\mathbf{b}+4\mathbf{c}$	$\mathbf{a}+2\mathbf{b}+\mathbf{c}$	$\mathbf{a}$	$\mathbf{a}-2\mathbf{b}+\mathbf{c}$	$\mathbf{a}-4\mathbf{b}+4\mathbf{c}$

إذا كان: $\mathbf{a} = \langle 0, 1\rangle, \mathbf{b} = \langle 1, 1\rangle, \mathbf{c} = \langle 2, -2\rangle$ ، فإن المتجهات المرتبطة بقيم x تظهر كما في الجدول الآتي.

x	-2	-1	0	1	2
$f(x)$	$\langle 12, -3\rangle$	$\langle 4, 1\rangle$	$\langle 0, 1\rangle$	$\langle 0, -3\rangle$	$\langle 4, -11\rangle$

أكمل الجدول لكلٍّ مما يأتي:

1) $\mathbf{f}(x) = x^3\mathbf{a} - 2x^2\mathbf{b} + 3x\mathbf{c}$

$\mathbf{a} = \langle 1, 1\rangle \quad \mathbf{b} = \langle 2, 3\rangle \quad c = \langle 3, -1\rangle$

x	-1	0	1	2
$f(x)$	$\langle -14, -4\rangle$	$\langle 0, 0\rangle$	$\langle 6, -8\rangle$	$\langle 10, -22\rangle$

2) $\mathbf{f}(x) = 2x^2\mathbf{a} + 3x\mathbf{b} - 5\mathbf{c}$

$\mathbf{a} = \langle 0, 1\rangle \quad \mathbf{b} = \langle 1, 0\rangle \quad c = \langle 1, 1\rangle$

x	-2	-1	0	1
$f(x)$	$\langle -11, 3\rangle$	$\langle -8, -3\rangle$	$\langle -5, -5\rangle$	$\langle -2, -3\rangle$

3) $\mathbf{f}(x) = x^2\mathbf{c} + 3x\mathbf{a} - 4\mathbf{b}$

$\mathbf{a} = \langle 1, 1\rangle \quad \mathbf{b} = \langle 3, 2\rangle \quad \mathbf{c} = \langle 0, 1\rangle$

x	0	1	2	3
$f(x)$	$\langle -12, -8\rangle$	$\langle -9, -4\rangle$	$\langle -6, 2\rangle$	$\langle -3, 10\rangle$

4) $\mathbf{f}(x) = x^3\mathbf{a} - x\mathbf{b} + 3\mathbf{c}$

$\mathbf{a} = \langle 0, 1\rangle \quad \mathbf{b} = \langle 1, -2\rangle \quad \mathbf{c} = \langle -2, 0\rangle$

x	0	1	2	3
$f(x)$	$\langle -6, 0\rangle$	$\langle -7, 3\rangle$	$\langle -8, 12\rangle$	$\langle -9, 33\rangle$

الاسم: __________ التاريخ: __________

5-4 تدريبات إعادة التعليم

المتجهات في الفضاء الثلاثي الأبعاد

الإحداثيات في الفضاء الثلاثي الأبعاد: يمكن استعمال ثلاثيات مرتبة من الأعداد الحقيقية؛ لتمثيل المتجهات كما هو الحال في الأزواج المرتبة، ويمكن إجراء العمليات التي سبق لك إجراؤها على المتجهات الممثلة بالأزواج المرتبة على المتجهات الممثلة بالثلاثيات المرتبة.

مثال

طيور، إذا كان موقعا طائرين يُمثَّلان بالنقطتين $A(10, 2, -5)$, $B(7, -9, 3)$؛ حيث يُعبَّر عن الإحداثيات بالكيلومترات، فأجب عما يأتي:

a) كم المسافة بين الطائرين؟

استعمل صيغة المسافة بين نقطتين في الفضاء.

$$AB = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$$ صيغة المسافة

$$= \sqrt{(7 - 10)^2 + ((-9) - 2)^2 + (3 - (-5))^2}$$ $(x_1, y_1, z_1) = (10, 2, -5)$

$$\approx 13.93$$ $(x_2, y_2, z_2) = (7, -9, 3)$

أي أن المسافة بين الطائرين هي 14 km تقريبًا.

b) إذا التقى الطائران في نقطة منتصف المسافة بينهما، فأوجد إحداثيات هذه النقطة.

$$\left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2}, \frac{z_1 + z_2}{2}\right) = \left(\frac{10 + 7}{2}, \frac{2 + (-9)}{2}, \frac{-5 + 3}{2}\right)$$ صيغة نقطة المنتصف

$$\left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2}, \frac{z_1 + z_2}{2}\right) = \left(\frac{10 + 7}{2}, \frac{2 + (-9)}{2}, \frac{-5 + 3}{2}\right)$$ $(x_1, y_1, z_1) = (10, 2, -5)$

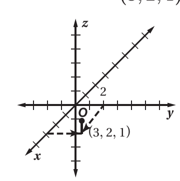
$$\approx (8.5, -3.5, -1)$$ $(x_2, y_2, z_2) = (7, -9, 3)$

فعندئذٍ تكون إحداثيات نقطة المنتصف هي: $(8.5, -3.5, -1)$.

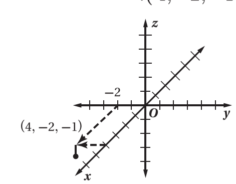
تمارين

عيّن كل نقطة من النقطتين الآتيتين في نظام الإحداثيات الثلاثي الأبعاد:

1) $(3, 2, 1)$



2) $(4, -2, -1)$.



أوجد طول القطعة المستقيمة المعطاة نقطتا نهايتها وبدايتها، ثم أوجد إحداثيات نقطة منتصفها في كلٍّ مما يأتي:

3) $(8, -3, 9), (2, 8, -4)$

$\mathbf{18.06; \left(5, \frac{5}{2}, \frac{5}{2}\right)}$

4) $(-6, -12, -8), (7, -2, -11)$

$\mathbf{16.67; \left(\frac{1}{2}, -7, -\frac{19}{2}\right)}$

الاسم: __________ التاريخ: __________

5-4 تدريبات إعادة التعليم (تتمة)

المتجهات في الفضاء الثلاثي الأبعاد

المتجهات في الفضاء: العمليات على المتجهات في الفضاء تُشبه العمليات على المتجهات في المستوى، فيمكن جمع، أو طرح متجهين في الفضاء أو ضربه في عدد ثابت، كما هو الحال في المتجهات في المستوى.

إذا كانت (v_1, v_2, v_3) نقطة نهاية متجه $\mathbf{v}$ في الفضاء في وضع قياسي، فإننا نعبر عنه بالصورة الإحداثية $\langle v_1, v_2, v_3 \rangle$.

كما نعبر عن المتجه الصفري بالصورة $\langle 0, 0, 0 \rangle = \mathbf{0}$، ومتجهات الوحدة القياسية $\mathbf{i} = \langle 1, 0, 0 \rangle$, $\mathbf{j} = \langle 0, 1, 0 \rangle$, $\mathbf{k} = \langle 0, 0, 1 \rangle$. ويمكن كتابة المتجه $\mathbf{v}$ بالصورة الإحداثية على صورة توافق خطِّي لمتجهات الوحدة $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$ بالآتي: $\langle v_1, v_2, v_3 \rangle = v_1\mathbf{i} + v_2\,\mathbf{j} + v_3\mathbf{k}$.

مثال

أوجد الصورة الإحداثية، وطول $\overrightarrow{AB}$ الذي نقطة بدايته $A(-3, 5, 1)$، ونقطة نهايته $B(3, 2, -4)$، ثم أوجد متجه الوحدة باتجاه $\overrightarrow{AB}$.

$$\overrightarrow{AB} = \langle x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1 \rangle$$ الصورة الإحداثية للمتجه

$$= \langle 3-(-3), 2-5, -4-1 \rangle = \langle 6, -3, -5 \rangle$$ $(x_1, y_1, z_1) = (-3, 5, 1)$, $(x_2, y_2, z_2) = (3, 2, -4)$

وباستعمال الصورة الإحداثية فإن طول $\overrightarrow{AB}$ هو:

$$\left|\overrightarrow{AB}\right| = \sqrt{6^2 + (-3)^2 + (-5)^2} = \sqrt{70}$$ $\overrightarrow{AB} = \langle 6, -3, -5 \rangle$

استعمل طول المتجه $\overrightarrow{AB}$ والصورة الإحداثية لإيجاد متجه وحدة $\mathbf{u}$ باتجاه $\overrightarrow{AB}$.

$$\mathbf{u} = \frac{\overrightarrow{AB}}{\left|\overrightarrow{AB}\right|}$$ متجه الوحدة باتجاه $\overrightarrow{AB}$

$$= \frac{\langle 6, -3, -5 \rangle}{\sqrt{70}} = \left\langle \frac{3\sqrt{70}}{35}, -\frac{3\sqrt{70}}{70}, -\frac{\sqrt{70}}{14} \right\rangle$$ $\overrightarrow{AB} = \langle 6, -3, -5 \rangle$, $\left|\overrightarrow{AB}\right| = \sqrt{70}$

تمارين

أوجد الصورة الإحداثية، وطول $\overrightarrow{AB}$ الذي نقطة بدايته A ونقطة نهايته B، ثم أوجد متجه وحدة $\mathbf{u}$ باتجاه $\overrightarrow{AB}$.

1) $A(-10, 3, 9), B(8, -7, 3)$

$\mathbf{\langle 18, -10, -6 \rangle, 2\sqrt{115};}$

$\mathbf{\left\langle \frac{9\sqrt{115}}{115}, \frac{\sqrt{115}}{23}, -\frac{3\sqrt{115}}{115} \right\rangle}$

2) $A(-1, -4, -7), B(8, 4, 10)$

$\mathbf{\langle 9, 8, 17 \rangle, \sqrt{434};}$

$\mathbf{\left\langle \frac{9\sqrt{434}}{434}, \frac{4\sqrt{434}}{217}, \frac{17\sqrt{434}}{434} \right\rangle}$

أوجد كلًّا مما يأتي للمتجهات: $\mathbf{X = 3i + 2j - 5k}$, $\mathbf{Y = i - 5j + 7k}$, $\mathbf{Z = -2i + 12j + 4k}$:

3) $3X + 2Y - 4Z$

$\mathbf{\langle 19, -52, -17 \rangle}$

4) $-6Y + 2Z$

$\mathbf{\langle -10, 54, -34 \rangle}$

الاسم: ________ التاريخ: ________

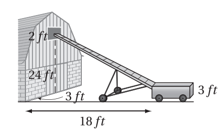
5-4 تدريبات حل المسألة

المتجهات في الفضاء الثلاثي الأبعاد

1) **طائر:** طار طائر من النقطة $(24.38, 46.43, 600)$، إلى النقطة $(21.40, 39.09, 0)$ في مسار مستقيم، أوجد إحداثيات منتصف مساره.

$(22.89, 42.76, 300)$

2) **رافعة:** يستعمل مزارع رافعةً لرفع حزم من القش إلى نافذة، في الجزء العلوي لحظيرة ماشية، تعلو 24 ft عن سطح الأرض، وتبعد 18 ft عن مكان تحميل القش و3 ft إلى اليمين من مكان التحميل؛ حيث تمثل النافذة بالنقطة $(3, 18, 24)$، وسيتم رفع حزم القش ابتداءً من 3 ft فوق سطح الأرض، وهذا يُمثَّل بالنقطة $(0, 0, 3)$.



a) أوجد طول الرافعة إلى أقرب قدم لتصل إلى النافذة.

28 ft

b) إذا احتاج المزارع إلى إدخال الرافعة قدمين داخل النافذة، فكم سيكون طول الرافعة؟

30 ft

3) **طيران:** تنصُّ قوانين السلامة على أن تكون المسافة بين طائرتين في الهواء نصف ميل على الأقل، فإذا كانت النقطتان: $(-250, 400, 5000)$ ، $(300, 455, 2800)$ تمثلان موقعَي طائرتين على مقربة من المطار، حيث يُعبَّر عن الإحداثيات بالأقدام.

a) فكم قدمًا المسافة بين الطائرتين؟

2268 ft

b) وهل خالفت الطائرتان قوانين السلامة؟

نعم

4) **تنزُّه:** توجد مجموعة من خطوط السير التي يمكن أن يسلكها الشخص في أحد أماكن التنزه المشجرة. فإذا كانت النقطة $(1.5, 0.5, 0.4)$ تمثل منصة انطلاق خط السير الأول، والنقطة $(1.8, 1, 0.2)$ تمثل المنصة الثانية لهذا الخط، وإذا مثّلت كلُّ وحدةِ إحداثياتٍ ميلًا واحدًا، فما طول هذا الخط؟

0.62 ميل

5) **دراجات هوائية:** نظَّمت مجموعة من الشباب سباقًا للدراجات الهوائية، على أن يتكون فريق التنافس من شخصين، وأن يُبدِّل أعضاء الفريق بعد قطع نصف مسافة السباق، فإذا مثّلت النقطة $(0, 0, 3)$ بداية السباق والنقطة $(2, -1, 9)$ نهايته، فما النقطة التي سيتبدل عندها أعضاء الفريق؟

$\left(1, -\frac{1}{2}, 6\right)$

الاسم: ________ التاريخ: ________

5-4 التدريبات الإثرائية

متجهات أساسية في الفضاء الثلاثي الأبعاد

العبارة $\mathbf{v} = r\mathbf{u} + s\mathbf{w} + t\mathbf{z}$ تمثِّل جمع ثلاثة متجهات، ضُرب كلٌّ منها في عدد، وتسمى العبارة توافقًا خطيًّا من المتجهات $\mathbf{u}, \mathbf{w}, \mathbf{z}$.

يمكن التعبير عن أي متجهٍ في الفضاء $\mathbf{v}$ على صورة توافق خطِّي من ثلاثة متجهات غير متوازية مثنى مثنى.

مثال مثال: اكتب المتجه $\mathbf{v} = \langle -1, -4, 3 \rangle$ على صورة توافق خطِّي من المتجهات: $\mathbf{u} = \langle 1, 3, 1 \rangle, \mathbf{w} = \langle 1, -2, 1 \rangle, \mathbf{z} = \langle -1, -1, 1 \rangle$.

$$\langle -1, -4, 3 \rangle = r\langle 1, 3, 1 \rangle + s\langle 1, -2, 1 \rangle + t\langle -1, -1, 1 \rangle = \langle r + s - t, 3r - 2s - t, r + s + t \rangle$$

بمساواة الإحداثيات المتناظرة:

$$-1 = r + s - t$$
$$-4 = 3r - 2S - t$$
$$3 = r + s + t$$

بحل نظام المعادلات ينتج أن $r = 0$, $s = 1$, $t = 2$؛

لذا فإن $v = w + 2z$.

اكتب المتجه v على صورة توافق خطِّي من المتجهات u, w, z في كلٍّ مما يأتي:

1) $\mathbf{v} = \langle -6, -2, 2 \rangle, \mathbf{u} = \langle 1, 1, 0 \rangle, \mathbf{w} = \langle 1, 0, 1 \rangle, \mathbf{z} = \langle 0, 1, 1 \rangle$

$\mathbf{v} = -5\mathbf{u} - \mathbf{w} + 3\mathbf{z}$

2) $\mathbf{v} = \langle 5, -2, 0 \rangle, \mathbf{u} = \langle 1, -2, 3 \rangle, \mathbf{w} = \langle -1, 0, 1 \rangle, \mathbf{z} = \langle 4, 2, -1 \rangle$

$\mathbf{v} = +\frac{8}{7}\mathbf{u} - \frac{23}{7}\mathbf{w} + \frac{1}{7}\mathbf{z}$

3) $\mathbf{v} = \langle 1, -1, 2 \rangle, \mathbf{u} = \langle 1, 2, -1 \rangle, \mathbf{w} = \langle 2, 2, 1 \rangle, \mathbf{z} = \langle 1, 0, 1 \rangle$

$\mathbf{v} = -\frac{1}{2}\mathbf{u} + \frac{3}{2}\mathbf{z}$

5-5 تدريبات إعادة التعليم

الضرب الداخلي والضرب الاتجاهي للمتجهات في الفضاء

الضرب الداخلي في الفضاء: الضرب الداخلي لمتجهَين في الفضاء يشبه الضرب الداخلي لمتجهَين في المستوى، وناتج الضرب الداخلي لمتجهَين يعطي عددًا.

ويُعرَّف الضرب الداخلي للمتجهين $\mathbf{a} = \langle a_1, a_2, a_3 \rangle$, $\mathbf{b} = \langle b_1, b_2, b_3 \rangle$ على النحو الآتي:

$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3$.

يكون المتجهان غير الصفريين **a, b** متعامدين، إذا وفقط إذا كان $\mathbf{a.b}=0$.

وكما هو الحال في المتجهات في المستوى، إذا كانت θ هي الزاوية بين متجهَين غير صفريين **a, b** في الفضاء، فإن $\cos\theta = \dfrac{\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}}{|\mathbf{a}||\mathbf{b}|}$

مثال 1 أوجد حاصل الضرب الداخلي للمتجهَين **u , v** في كلٍّ مما يأتي، ثم حدّد ما إذا كانا متعامدين أم لا:

a) $\mathbf{u} = \langle -3, 1, 0 \rangle, \mathbf{v} = \langle 2, 6, 4 \rangle$

$$\begin{aligned}\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} &= u_1 v_1 + u_2 v_2 + u_3 v_3 \\ &= -3(2) + 1(6) + 0(4) \\ &= -6 + 6 + 0 = 0\end{aligned}$$

بما أن $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = 0$، فإن المتجهين **u, v** متعامدان.

b) $\mathbf{u} = \langle 3, -2, 1 \rangle, \mathbf{v} = \langle 4, 5, -1 \rangle$

$$\begin{aligned}\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} &= u_1 v_1 + u_2 v_2 + u_3 v_3 \\ &= 3(4) + (-2)(5) + 1(-1) \\ &= 12 + (-10) - 1 = 1\end{aligned}$$

بما أن $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} \neq 0$، فإن المتجهين **u , v** غير متعامدين.

مثال 2 أوجد قياس الزاوية θ بين المتجهَين **u , v**، إذا كان: $\mathbf{u} = \langle 4, 8, -3 \rangle$, $\mathbf{v} = \langle 9, -3, 0 \rangle$.

$\cos\theta = \dfrac{\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}}{|\mathbf{u}||\mathbf{v}|}$ الزاوية بين متجهين

$\cos\theta = \dfrac{\langle 4, 8, -3 \rangle \cdot \langle 9, -3, 0 \rangle}{|\langle 4, 8, -3 \rangle||\langle 9, -3, 0 \rangle|}$ $\quad \mathbf{u} = \langle 4, 8, -3 \rangle$, $\mathbf{v} = \langle 9, -3, 0 \rangle$

$\cos\theta = \dfrac{12}{\sqrt{89}\sqrt{90}}$ أوجد الضرب الداخلي وطول كلٍّ من المتجهين

$\theta = \cos^{-1}\dfrac{12}{89.5} \simeq 82.3°$

أي أن قياس الزاوية بين المتجهين **u , v** يساوي 82.3° تقريبًا.

تمارين

أوجد حاصل الضرب الداخلي للمتجهين **u , v** في كلٍّ مما يأتي، ثم حدّد ما إذا كانا متعامدين أم لا:

1) $\mathbf{u} = \langle 3, -2, 9 \rangle, \mathbf{v} = \langle 1, 2, 4 \rangle$

35، غير متعامدين

2) $\mathbf{u} = \langle -2, -4, -6 \rangle, \mathbf{v} = \langle -3, 7, -4 \rangle$

2، غير متعامدين

3) $\mathbf{u} = \langle 4, -3, 8 \rangle, \mathbf{v} = \langle 2, -2, -3 \rangle$

−10، غير متعامدين

4) $\mathbf{u} = 3\mathbf{i} + 6\mathbf{j} - 3\mathbf{k}, \mathbf{v} = -5\mathbf{i} - 2\mathbf{j} - 9\mathbf{k}$

0 متعامدان

أوجد قياس الزاوية θ بين المتجهين **u , v** لكلٍّ مما يأتي:

5) $\mathbf{u} = \langle 5, -22, 9 \rangle, \mathbf{v} = \langle 14, 2, 4 \rangle$

80.0°

6) $\mathbf{u} = \langle 4, -5, 7 \rangle, \mathbf{v} = \langle 11, -8, 2 \rangle$

41.3°

7) $\mathbf{u} = -4\mathbf{i} + 5\mathbf{j} - 3\mathbf{k}, \mathbf{v} = -8\mathbf{i} - 12\mathbf{j} - 9\mathbf{k}$

90.5°

8) $\mathbf{u} = \mathbf{i} + 2\mathbf{j} - \mathbf{k}, \mathbf{v} = -\mathbf{i} + 4\mathbf{j} - 3\mathbf{k}$

36.8°

5-5 تدريبات إعادة التعليم (تتمة)

الضرب الداخلي والضرب الاتجاهي للمتجهات في الفضاء

الضرب الاتجاهي: يختلف عن الضرب الداخلي، إذ إن **الضرب الاتجاهي** لمتجهَين هو متجه لا يقع في مستوى هذين المتجهين، ولكنه عمودي عليه.

الضرب الاتجاهي لمتجهين في الفضاء
إذا كان: $\mathbf{a}=a_1\mathbf{i}+a_2\mathbf{j}+a_3\mathbf{k}$, $\mathbf{b}=b_1\mathbf{i}+b_2\mathbf{j}+b_3\mathbf{k}$ ، فإن الضرب الاتجاهي للمتجهَين **a, b** هو المتجه: $(a_2 b_3 - a_3 b_2)\mathbf{i} - (a_1 b_3 - a_3 b_1)\mathbf{j} + (a_1 b_2 - a_2 b_1)\mathbf{k}$.

إذا كان لمتجهين نقطة البداية نفسها، وشكّلا ضلعين متجاورين لمتوازي أضلاع، فإن القيمة المطلقة للضرب الاتجاهي للمتجهين تُعطي مساحة متوازي الأضلاع.

إذا كان لثلاثة متجهات نقطة البداية نفسها، وشكّلت أحرفًا متجاورة لمتوازي سطوح، فإن القيمة المطلقة للضرب القياسي الثلاثي تعطي حجم متوازي السطوح. لإيجاد الضرب القياسي الثلاثي، استعمل المصفوفة نفسها المستعملة للضرب الاتجاهي، على أن توضع إحداثيات المتجه الثالث مكان **i , j , k**.

مثال أوجد الضرب الاتجاهي للمتجهين $\mathbf{u} = \langle 0, 4, 1 \rangle$, $\mathbf{v} = \langle 0, 1, 3 \rangle$، ثم بيّن أن $\mathbf{u} \times \mathbf{v}$ يعامد كلًّا من **u , v**.

$\mathbf{u} \times \mathbf{v} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 0 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \end{vmatrix}$ $\quad \mathbf{u} = 0\mathbf{i} + 4\mathbf{j} + \mathbf{k}, \mathbf{v} = 0\mathbf{i} + \mathbf{j} + 3\mathbf{k}$

$= \begin{vmatrix} 4 & 1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix}\mathbf{i} - \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 3 \end{vmatrix}\mathbf{j} + \begin{vmatrix} 0 & 4 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}\mathbf{k}$ قاعدة من الدرجة الثالثة

$= (12 - 1)\mathbf{i} - (0 - 0)\mathbf{j} + (0 - 0)\mathbf{k}$ محددات مصفوفات من الدرجة الثانية

$= 11\mathbf{i} - 0\mathbf{j} + 0\mathbf{k}$ بسّط

$= 11\mathbf{i} = \langle 11, 0, 0 \rangle$ الصورة الإحداثية

لإثبات أن $\mathbf{u} \times \mathbf{v}$ يعامد كلًّا من **u , v**، أوجد الضرب الداخلي لـ $\mathbf{u} \times \mathbf{v}$ مع كلٍّ من **u, v**.

$$\begin{aligned}&(\mathbf{u} \times \mathbf{v}) \cdot \mathbf{u} \\ &= \langle 11, 0, 0 \rangle \cdot \langle 0, 4, 1 \rangle \\ &= 11(0) + 0(4) + 0(1) \\ &= 0 + 0 + 0 \\ &= 0 \checkmark\end{aligned} \qquad \begin{aligned}&(\mathbf{u} \times \mathbf{v}) \cdot \mathbf{v} \\ &= \langle 11, 0, 0 \rangle \cdot \langle 0, 1, 3 \rangle \\ &= 11(0) + 0(1) + 0(3) \\ &= 0 + 0 + 0 \\ &= 0 \checkmark\end{aligned}$$

بما أن حاصل الضرب الداخلي صفر في الحالتين، فإن $\mathbf{u} \times \mathbf{v}$ عمودي على كلٍّ من **u, v**.

تمارين

أوجد الضرب الاتجاهي للمتجهين **u, v** في السؤالين الآتيين، ثم بيّن أن $\mathbf{u} \times \mathbf{v}$ يعامد كلًّا من **u, v** :

1) $\mathbf{u} = \langle 2, 3, -1 \rangle, \mathbf{v} = \langle 6, -2, -4 \rangle$

$$\mathbf{-14i + 2j - 22k;\ \langle -14, 2, -22 \rangle \cdot \langle 2, 3, -1 \rangle = -14(2) + 2(3) + (-22)(-1) = 0;}$$
$$\mathbf{\langle -14, 2, -22 \rangle \cdot \langle 6, -2, -4 \rangle = -14(6) + 2(-2) + (-22)(-4) = 0}$$

2) $\mathbf{u} = \langle 5, 2, 8 \rangle, \mathbf{v} = \langle -1, 2, 4 \rangle$

$$\mathbf{-8i - 28j + 12k;\ \langle -8, -28, 12 \rangle \cdot \langle 5, 2, 8 \rangle = -8(5) + (-28)(2) + 12(8) = 0;}$$
$$\mathbf{\langle -8, -28, 12 \rangle \cdot \langle -1, 2, 4 \rangle = -8(-1) + (-28)(2) + 12(4) = 0}$$

5-5 تدريبات حل المسألة

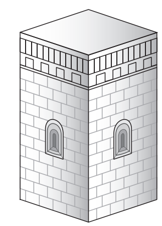
الضرب الداخلي والضرب الاتجاهي للمتجهات في الفضاء

1) **مرآة:** إذا كان المتجهان $\langle 3, 4, 2\rangle$، $\langle -4, 4, 3\rangle$ يمثلان ضلعين متجاورين لمرآة في غرفة قياس ملابس، فأوجد مساحة المرآة.

33 وحدة مربعة

2) **بناء:** شُيِّد بناء مزخرف على شكل متوازي سطوح، فإذا كانت المتجهات: $t = \langle 15, 12, 10\rangle$، $\mathbf{u} = \langle 13, -8, -5\rangle$، $\mathbf{v} = \langle -9, 13, 12\rangle$ تمثل ثلاثة أحرف متجاورة للبناء، فأوجد مساحة سطحه.

1805 وحدات مربعة



3) **إنتاج:** إذا كان المتجه $\mathbf{u} = \langle 150, 100, 500\rangle$، يمثل أعداد 3 أنواع من المنتجات، وكان المتجه $\mathbf{v} = \langle 5, 7, 2\rangle$ يمثل تكلفة وحدة واحدة من كل منتج.

a) أوجد $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}$

2450

b) ماذا يمثل ناتج $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}$؟

تكلفة إنتاج المنتجات الثلاثة.

4) **صواريخ:** أُطلق صاروخان في آنٍ واحدٍ، حيث انطلق الصاروخ الأول من النقطة $(0, 1, 0)$، وبعد ثانية واحدة كان عند النقطة $(3, 7, 12)$، في حين أُطلق الصاروخ الثاني من النقطة $(0, -1, 0)$، ووصل إلى النقطة $\langle 3, -8, 10\rangle$ بعد ثانية واحدة.

a) أوجد المتجه الذي يمثل مسار الصاروخ الأول.

$\langle 3, 6, 12\rangle$

b) أوجد المتجه الذي يمثل مسار الصاروخ الثاني.

$\langle 3, -7, 10\rangle$

c) أوجد قياس الزاوية بين مسارَي الصاروخين.

59.8°

d) إذا بقيت سرعتا الصاروخين ثابتتين، فما المتجهان اللذان يمثّلان الصاروخين بعد 3 ثوانٍ؟

$\langle 9, 18, 36\rangle$، $\langle 9, -21, 30\rangle$

5-5 التدريبات الإثرائية

بعض خصائص ضرب المتجهات

بعض خصائص ضرب المتجهات: إذا كانت $\mathbf{a} = \langle a_1, a_2, a_3\rangle, \mathbf{b} = \langle b_1, b_2, b_3\rangle, \mathbf{c} = \langle c_1, c_2, c_3\rangle$، فأجب عن الأسئلة الآتية لاستنتاج بعض خصائص ضرب المتجهات.

1) أوجد $\mathbf{b} + \mathbf{c}$

$\langle b_1 + c_1, b_2 + c_2, b_3 + c_3\rangle$

2) أوجد $\mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} + \mathbf{c})$

$a_1(b_1 + c_1) + a_2(b_2 + c_2) + a_3(b_3 + c_3)$

$a_1b_1 + a_1c_1 + a_2b_2 + a_2c_2 + a_3b_3 + a_3c_3$

3) أوجد $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} + \mathbf{a} \cdot \mathbf{c}$

$a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3 + a_1c_1 + a_2c_2 + a_3c_3$

4) ماذا تلاحظ؟ وهل هذه النتيجة صحيحة دائمًا.

نلاحظ أن: $\mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} + \mathbf{c}) = \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} + \mathbf{a} \cdot \mathbf{c}$، النتيجة صحيحة دائمًا.

5) أوجد $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$

$$\begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} = (a_2b_3 - a_3b_2)\mathbf{i} - (a_1b_3 - a_3b_1)\mathbf{j} + (a_1b_2 - a_2b_1)\mathbf{k}$$

6) أوجد $\mathbf{b} \times \mathbf{a}$

$$\begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \end{vmatrix} = (b_2a_3 - b_3a_2)\mathbf{i} - (b_1a_3 - b_3a_1)\mathbf{j} + (b_1a_2 - b_2a_1)\mathbf{k}$$

7) ماذا تلاحظ؟ وهل هذه النتيجة صحيحة دائمًا.

نلاحظ أن: $\mathbf{a} \times \mathbf{b} = -(\mathbf{b} \times \mathbf{a})$، النتيجة صحيحة دائمًا.

8) أوجد $\mathbf{0} \cdot \mathbf{a}$

0

9) ماذا تلاحظ؟ وهل هذه النتيجة صحيحة دائمًا.

حاصل الضرب الداخلي لأي متجه مع المتجه الصفري يساوي صفرًا.
نعم صحيحة دائمًا.

10) استعمل النتائج التي توصَّلْت إليها أعلاه لإيجاد:

$$\big((\mathbf{a} \times \mathbf{b}) + (\mathbf{b} \times \mathbf{a})\big) \cdot (\mathbf{a} \times \mathbf{c})$$

0