



وزارة التربية والتعليم
Ministry of Education
المملكة العربية السعودية

الرياضيات

للف الثاني الثانوي

مصادر المعلم للأنشطة الصفية

الفصل الخامس: العلاقات والدوال النسبية

العبيكان
Obekon

Mc
Graw
Hill Education

يوزع مجاناً ولا يباع

١٤٣٤ هـ - ٢٠١٣ م

Glencoe Mathematics © 2010
CHAPTER RESOURCE MASTERS
Algebra 2

الرياضيات - الصف الثاني الثانوي
مصادر المعلم للأنشطة الصفية
أعدّ النسخة العربية: شركة العبيكان للتعليم

www.obeikaneducation.com



English Edition Copyright © the McGraw-Hill Companies, Inc.
All rights reserved.

Arabic Edition is published by Obeikan under agreement with
The McGraw-Hill Companies, Inc. © 2008.



حقوق الطبع الإنجليزية محفوظة لشركة ماجروهل ©.

الطبعة العربية: مجموعة العبيكان للاستثمار
وفقاً لاتفاقيتها مع شركة ماجروهل © ٢٠٠٨م / ١٤٢٩هـ.

لا يسمح بإعادة إصدار هذا الكتاب أو نقله في أي شكل أو واسطة، سواءً أكانت إلكترونية أو ميكانيكية، بما في ذلك التصوير بالنسخ «فوتوكوبي»، أو التسجيل، أو التخزين
والاسترجاع، دون إذن خطي من الناشر.

بِسْمِ اللَّهِ الرَّحْمَنِ الرَّحِيمِ

الحمد لله والصلاة والسلام على نبينا محمد وعلى آله وصحبه أجمعين، وبعد:

عزيزي المعلم / عزيزتي المعلمة

يسرنا أن نقدم هذه المجموعة من التدريبات المساندة، التي تراعي الفروق الفردية بين الطلاب. حيث نطمح أن يساعدك التنوع في هذه التدريبات على الوصول إلى جميع الطلاب في الصف، مهما تباينت مستوياتهم التحصيلية. وقد تم تخصيص صفحتين لتدريبات إعادة التعليم و صفحة واحدة لكل من التدريبات الأخرى لكل درس من دروس كتاب الطالب. حيث يمكنك أن تكلف الطلاب حل صفحة التدريبات المقابلة لكل درس بحسب مستوى كل منهم؛ سواء داخل الصف أم في المنزل. وليست هذه التدريبات بديلاً عن كتاب التمارين، ولكنها مساندة ومكملة له. وهذه التدريبات هي:

تدريبات إعادة التعليم

تركز هذه التدريبات على محتوى الدروس في كتاب الطالب، وتقدمه بأسلوب تدريسي ومعالجة يختلفان عن كتابي الطالب والتمارين. وهي موجهة إلى الطلاب ذوي المستوى دون المتوسط.

تدريبات المهارات

تركز هذه التدريبات على المهارات الحسابية الموجودة في الدرس . فتقدم تدريبات إضافية على مهارات الدرس وبعض المسائل التي تركز على تلك المهارات. وهي موجهة إلى الطلاب ذوي المستوى المتوسط.

تدريبات حل المسألة

تأتي هذه التدريبات انطلاقاً من اهتمام هذه المناهج بحل المسألة، حيث تم تخصيصها لتقديم تدريبات إضافية على حل المسألة ترتبط بكل درس من دروس كتاب الطالب. وهي موجهة إلى جميع الطلاب على اختلاف مستوياتهم التحصيلية.

التدريبات الإثرائية

تساعد هذه التدريبات الإثرائية على التوسع في مفاهيم الدرس، كما تؤدي إلى توسيع مدارك الطلاب حول تعلم الرياضيات بشكل عام. وهذه التدريبات موجهة إلى الطلاب ذوي المستوى ضمن المتوسط وفوق المتوسط.

ملحق الإجابات:

يتضمن هذا المصدر في آخره ملحقاً بالإجابات، حيث تظهر باللون الأسود الغامق على صفحات مصغرة.

المقدمة 4

الدرس 5-1 ضرب العبارات النسبية وقسمتها

تدريبات إعادة التعليم	6
تدريبات المهارات	8
تدريبات حل المسألة	9
التدريبات الإثرائية	10

الدرس 5-4 تمثيل الدوال النسبية بيانياً

تدريبات إعادة التعليم	21
تدريبات المهارات	23
تدريبات حل المسألة	24
التدريبات الإثرائية	25

الدرس 5-2 جمع العبارات النسبية وطرحها

تدريبات إعادة التعليم	11
تدريبات المهارات	13
تدريبات حل المسألة	14
التدريبات الإثرائية	15

الدرس 5-5 دوال التغير

تدريبات إعادة التعليم	26
تدريبات المهارات	28
تدريبات حل المسألة	29
التدريبات الإثرائية	30

الدرس 5-3 تمثيل دوال المقلوب بيانياً

تدريبات إعادة التعليم	16
تدريبات المهارات	18
تدريبات حل المسألة	19
التدريبات الإثرائية	20

الدرس 5-6 حل المعادلات والمتباينات النسبية

تدريبات إعادة التعليم	31
تدريبات المهارات	33
تدريبات حل المسألة	34
التدريبات الإثرائية	35
ملحق الإجابات	36

5-1

تدريبات إعادة التعليم

ضرب العبارات النسبية وقسمتها

تبسيط العبارات النسبية: تُسمّى النسبة بين كثيرتي حدود عبارة نسبية. وعند تبسيط العبارة النسبية يقسم كل من البسط والمقام على العامل المشترك الأكبر (GCF) لهما.

ضرب العبارات النسبية	إذا كانت $\frac{a}{b}, \frac{c}{d}$ عبارتين نسبيتين، حيث $b \neq 0, d \neq 0$ ، فإن $\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}$
قسمة العبارات النسبية	إذا كانت $\frac{a}{b}, \frac{c}{d}$ عبارتين نسبيتين، حيث $b \neq 0, c \neq 0, d \neq 0$ ، فإن $\frac{a}{b} \div \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \cdot \frac{d}{c} = \frac{ad}{bc}$

بسط كل عبارة مما يأتي:

مثال

$$\frac{24a^5b^2}{(2ab)^4} \quad (a)$$

$$\frac{24a^5b^2}{(2ab)^4} = \frac{\overset{1}{\cancel{2}} \cdot \overset{1}{\cancel{2}} \cdot \overset{1}{\cancel{2}} \cdot 3 \cdot \overset{1}{\cancel{a}} \cdot \overset{1}{\cancel{a}} \cdot \overset{1}{\cancel{a}} \cdot \overset{1}{\cancel{a}} \cdot a \cdot \overset{1}{\cancel{b}} \cdot \overset{1}{\cancel{b}}}{\overset{1}{\cancel{2}} \cdot \overset{1}{\cancel{2}} \cdot \overset{1}{\cancel{2}} \cdot 2 \cdot \overset{1}{\cancel{a}} \cdot \overset{1}{\cancel{a}} \cdot \overset{1}{\cancel{a}} \cdot \overset{1}{\cancel{a}} \cdot \overset{1}{\cancel{b}} \cdot \overset{1}{\cancel{b}} \cdot b \cdot b} = \frac{3a}{2b^2}$$

$$\frac{3r^2n^3}{5t^4} \cdot \frac{20t^2}{9r^3n} \quad (b)$$

$$\frac{3r^2n^3}{5t^4} \cdot \frac{20t^2}{9r^3n} = \frac{\overset{1}{\cancel{3}} \cdot \overset{1}{\cancel{r}} \cdot \overset{1}{\cancel{r}} \cdot \overset{1}{\cancel{n}} \cdot n \cdot n \cdot 2 \cdot 2 \cdot \overset{1}{\cancel{2}} \cdot \overset{1}{\cancel{t}} \cdot \overset{1}{\cancel{t}}}{\overset{1}{\cancel{5}} \cdot \overset{1}{\cancel{r}} \cdot \overset{1}{\cancel{r}} \cdot \overset{1}{\cancel{t}} \cdot \overset{1}{\cancel{t}} \cdot \overset{1}{\cancel{3}} \cdot 3 \cdot \overset{1}{\cancel{r}} \cdot \overset{1}{\cancel{r}} \cdot \overset{1}{\cancel{n}} \cdot n} = \frac{2 \cdot 2 \cdot n \cdot n}{3 \cdot r \cdot t \cdot t} = \frac{4n^2}{3rt^2}$$

$$\frac{x^2 + 8x + 16}{2x - 2} \div \frac{x^2 + 2x - 8}{x - 1} \quad (c)$$

$$\frac{x^2 + 8x + 16}{2x - 2} \div \frac{x^2 + 2x - 8}{x - 1} = \frac{x^2 + 8x + 16}{2x - 2} \cdot \frac{x - 1}{x^2 + 2x - 8}$$

$$= \frac{\overset{1}{\cancel{(x+4)}} (x+4) \overset{1}{\cancel{(x-1)}}}{2 \overset{1}{\cancel{(x-1)}} (x-2) \overset{1}{\cancel{(x+4)}}} = \frac{x+4}{2(x-2)}$$

تمارين

بسط كل عبارة مما يأتي:

$$\frac{x^2 + x - 6}{x^2 - 6x - 27} \quad (3)$$

$$\frac{4x^2 - 12x + 9}{9 - 6x} \quad (2)$$

$$\frac{(-2ab^2)^3}{20ab^4} \quad (1)$$

$$\frac{c^2 - 3c}{c^2 - 25} \cdot \frac{c^2 + 4c - 5}{c^2 - 4c + 3} \quad (5)$$

$$\frac{3m^3 - 3m}{6m^4} \cdot \frac{4m^5}{m + 1} \quad (4)$$

$$\frac{6xy^4}{25z^3} \div \frac{18xz^2}{5y} \quad (7)$$

$$\frac{(m-3)^2}{m^2 - 6m + 9} \cdot \frac{m^3 - 9m}{m^2 - 9} \quad (6)$$

5-1

تدريبات إعادة التعليم

(تتمة)

ضرب العبارات النسبية وقسمتها

تبسيط الكسور المركبة: الكسر المركب هو كسر بسطه ومقامه أو أحدهما عبارة نسبية. ولتبسيط كسر مركب، اكتبه أولاً على صورة قسمة عبارتين.

مثال

$$\frac{\frac{3n-1}{n}}{\frac{3n^2+8n-3}{n^4}} \text{ بسط الكسر}$$

كتابة العبارة على صورة قسمة عبارتين

$$\frac{\frac{3n-1}{n}}{\frac{3n^2+8n-3}{n^4}} = \frac{3n-1}{n} \div \frac{3n^2+8n-3}{n^4}$$

بضرب المقسوم في مقلوب المقسوم عليه

$$= \frac{3n-1}{n} \cdot \frac{n^4}{3n^2+8n-3}$$

بالتحليل إلى العوامل والاختصار

$$= \frac{(3n-1)n^4}{n(3n-1)(n+3)}$$

بالتبسيط

$$= \frac{n^3}{n+3}$$

تمارين

بسط كل عبارة مما يأتي:

$$\frac{\frac{b^2-1}{3b+2}}{\frac{b+1}{3b^2-b-2}} \quad (3)$$

$$\frac{\frac{a^2bc^3}{x^2y^2}}{\frac{ab^2}{c^4x^2y}} \quad (2)$$

$$\frac{\frac{x^3y^2z}{a^2b^2}}{\frac{a^3x^2y}{b^2}} \quad (1)$$

$$\frac{\frac{x-4}{x^2+6x+9}}{\frac{x^2-2x-8}{3+x}} \quad (5)$$

$$\frac{\frac{b^2-100}{b^2}}{\frac{3b^2-31b+10}{2b}} \quad (4)$$

$$\frac{\frac{b+2}{b^2-6b+8}}{\frac{b^2+b-2}{b^2-16}} \quad (7)$$

$$\frac{\frac{a^2-16}{a+2}}{\frac{a^2+3a-4}{a^2+a-2}} \quad (6)$$

$$\frac{\frac{x^2-x-2}{x^3+6x^2-x-30}}{\frac{x+1}{x+3}} \quad (8)$$

تدريبات المهارات

5-1

ضرب العبارات النسبية وقسمتها

بسّط كلّ عبارة ممّا يأتي:

$$\frac{21x^3y}{14x^2y^2} \quad (1)$$

$$\frac{5ab^3}{25a^2b^2} \quad (2)$$

$$\frac{(x^6)^3}{(x^3)^4} \quad (3)$$

$$\frac{8y^2(y^6)^3}{4y^{24}} \quad (4)$$

$$\frac{18}{2x-6} \quad (5)$$

$$\frac{x^2-4}{(x-2)(x+1)} \quad (6)$$

$$\frac{3a^2-24a}{3a^2+12a} \quad (7)$$

$$\frac{3m}{2f} \cdot \frac{f^3}{6} \quad (8)$$

$$\frac{24g^3}{5f^2} \cdot \frac{10(gf)^3}{8g^5f} \quad (9)$$

$$\frac{5r^2}{r^2-4} \cdot \frac{r+2}{10r^5} \quad (10)$$

$$\frac{7g}{y^2} \div 21g^3 \quad (11)$$

$$\frac{80y^4}{49z^5v^7} \div \frac{25y^5}{14z^{12}v^5} \quad (12)$$

$$\frac{3x^2}{x+2} \div \frac{3x}{x^2-4} \quad (13)$$

$$\frac{q^2+2q}{6q} \div \frac{q^2-4}{3q^2} \quad (14)$$

$$\frac{w^2-5w-24}{w+1} \cdot \frac{w^2-6w-7}{w+3} \quad (15)$$

$$\frac{x^2-5x+4}{2x-8} \div (3x^2-3x) \quad (16)$$

$$\frac{\frac{a^2-b^2}{4a}}{\frac{a+b}{2a}} \quad (18)$$

$$\frac{\frac{c^2y}{2d^2}}{\frac{-c^6}{5d}} \quad (17)$$

5-1

تدريبات حل المسألة

ضرب العبارات النسبية وقسمتها

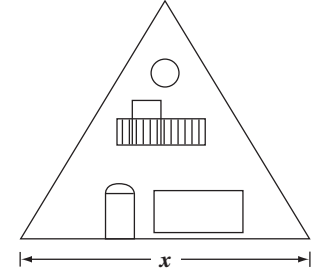
(4) بقعة النفط: بينما كان سعيد ينقل برميل نفط بالقرب من بركة دائرية في ساحة منزله سقط البرميل وانسكب النفط في البركة. وانتشر النفط بصورة منتظمة فوق سطح الماء. إذا كان حجم النفط V ، وكان نصف قطر البركة r ، فاكتب عبارة تمثل سمك بقعة النفط.

(5) جري: ركض سلمان من بيته إلى المركز التجاري لشراء الحليب. وبسبب الوزن الذي كان يحمله كانت سرعته في أثناء عودته أقل من سرعته في ذهابه إلى السوق، وقد كانت سرعته في ذهابه S_1 متر لكل ثانية، وسرعته في العودة S_2 متر لكل ثانية. وكانت المسافة بين بيته والمركز التجاري d مترًا. (تذكر أن المسافة = السرعة \times الزمن). اكتب عبارة تمثل الزمن الذي استغرقه سلمان في هذه المهمة.

(1) سكاكر: يحتوي وعاء على G قطعة سكاكر خضراء و R قطعة سكاكر حمراء. إذا أضيفت إلى الوعاء 100 قطعة سكاكر خضراء و 100 قطعة حمراء، فما النسبة الجديدة لقطع السكاكر الحمراء إلى قطع السكاكر الخضراء في الوعاء؟

(2) مسافات: يقود طلال سيارة هجينة (a hybrid car) تقطع $20km$ لكل لتر من البنزين داخل المدينة، وتقطع $18km$ لكل لتر من البنزين على الطرق الخارجية. إذا استهلكت السيارة C لترًا في داخل المدينة و H لترًا على الطرق الخارجية، فاكتب عبارة تصف متوسط المسافة التي تقطعها السيارة لكل لتر من البنزين بدلالة C و H .

(3) ارتفاع: الواجهة الأمامية للمنزل المبين في المخطط أدناه مثلثة الشكل. إذا كانت مساحة الواجهة $x^2 + 3x + 10$ وكانت x طول قاعدتها، فما ارتفاع الواجهة بدلالة x ؟



5-1

التدريبات الإثرائية

تحليل وحدات القياس

يحرص العلماء دائماً على ذكر وحدات القياس في إجاباتهم. فلا تُعدّ الإجابة 17 كافية عن سؤال يتعلق بالمسافة، بل هي إجابة محيرة.

هل يقصد القائل سبعة عشر متراً أم كيلومتراً أم قدماً أم ميلاً؟ ومن المفيد تحليل وحدات القياس للكميات المتضمنة في الحسابات لتحديد وحدة ناتج هذه الحسابات. فعلى سبيل المثال، نعلم أن العزم يساوي حاصل ضرب القوة في المسافة، ولكن ما وحدات القوة؟

إن الوحدات تعتمد على نظام القياس. فالنظامان الأكثر شيوعاً لوحدة القياس هما النظام الإنجليزي والنظام المتري. ومن وحدات النظام الإنجليزي: البوصة والقدم والميل والرطل. ومن وحدات النظام المتري: المتر والكيلومتر والجرام والنيوتن. ويكون تحويل وحدات القياس من نظام إلى آخر ضرورياً أحياناً، ويتم ذلك بالضرب بمعاملات التحويل. فمثلاً نحول السرعة 60 mi/h إلى سرعة وحدتها km/h باستعمال قاعدة التحويل $(1 \text{ mil} \approx 1.61 \text{ km})$ على النحو الآتي: $\approx 96.6 \frac{\text{km}}{\text{h}}$

(1) وحدة القوة في النظام المتري هي النيوتن (N)، ووحدة المسافة هي المتر أو السنتيمتر.

حدّد وحدة العزم في النظام المتري مستعملاً الصيغة الآتية:

العزم = القوة × المسافة.

(2) تُحسب كثافة سائل باستعمال الصيغة: $\frac{\text{الكتلة}}{\text{الحجم}} = \text{الكثافة}$. إذا كان حجم سائل في وعاء أسطواني $\pi r^2 h$ بالأمتار المكعبة، وكانت h ، r مقاسة بالأمتار، فأوجد عبارة تمثل الكتلة بالكيلوجرام لكمية البنزين التي تملأ الوعاء الأسطواني، علماً أن كثافة البنزين $680 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$

(3) حوّل 100 كيلومتر في الساعة إلى ميل في الساعة.

5-2

تدريبات إعادة التعليم

جمع العبارات النسبية وطرحها

المضاعف المشترك الأصغر (LCM) لكثيرات الحدود: لإيجاد (LCM) لكثيرتي حدود أو أكثر، حلّل كلّاً منها إلى عواملها الأولية، ثم اضرب القوى التي لها الأس الأكبر في كثيرات الحدود جميعها.

أوجد LCM لكثيرتي الحدود

مثال 2

$$3m^2 - 3m - 6, 4m^2 + 12m - 40$$

$$3m^2 - 3m - 6 = 3(m + 1)(m - 2)$$

$$4m^2 + 12m - 40 = 4(m - 2)(m + 5)$$

$$LCM = 12(m + 1)(m - 2)(m + 5)$$

أوجد LCM لكثيرات الحدود:

مثال 1

$$16p^2q^3r, 40pq^4r^2, 15p^3r^4$$

$$16p^2q^3r = 2^4 \cdot p^2 \cdot q^3 \cdot r$$

$$40pq^4r^2 = 2^3 \cdot 5 \cdot p \cdot q^4 \cdot r^2$$

$$15p^3r^4 = 3 \cdot 5 \cdot p^3 \cdot r^4$$

$$LCM = 2^4 \cdot 3 \cdot 5 \cdot p^3 \cdot q^4 \cdot r^4$$

$$= 240p^3q^4r^4$$

تمارين

أوجد LCM لكل مجموعة من كثيرات الحدود ممّا يأتي:

$$8cdf^3, 28c^2f, 35d^4f^2 \quad (2)$$

$$14ab^2, 42bc^3, 18a^2c \quad (1)$$

$$11mn^5, 18m^2n^3, 20mn^4 \quad (4)$$

$$65x^4y, 10x^2y^2, 26y^4 \quad (3)$$

$$24p^7q, 30p^2q^2, 45pq^3 \quad (6)$$

$$15a^4b, 50a^2b^2, 40b^8 \quad (5)$$

$$12xy^4, 42x^2y, 30x^2y^3 \quad (8)$$

$$39b^2c^2, 52b^4c, 12c^3 \quad (7)$$

$$x^2 + 3x, 10x^2 + 25x - 15 \quad (10)$$

$$56stv^2, 24s^2v^2, 70t^3v^3 \quad (9)$$

$$22x^2 + 66x - 220, 4x^2 - 16 \quad (12)$$

$$9x^2 - 12x + 4, 3x^2 + 10x - 8 \quad (11)$$

$$5x^2 - 125, 5x^2 + 24x - 5 \quad (14)$$

$$8x^2 - 36x - 20, 2x^2 + 2x - 60 \quad (13)$$

$$45x^2 - 6x - 3, 45x^2 - 5 \quad (16)$$

$$3x^2 - 18x + 27, 2x^3 - 4x^2 - 6x \quad (15)$$

5-2

تدريبات إعادة التعليم

(تتمة)

جمع العبارات النسبية وطرحها

جمع العبارات النسبية وطرحها: اتبع الخطوات الآتية عند جمع عبارتين نسبيتين أو طرحهما.

- الخطوة 1: أوجد المقام المشترك الأصغر (LCD)، وأعد كتابة العبارتين على أن يكون لهما المقام نفسه.
الخطوة 2: اجمع البسطين أو اطرحهما.
الخطوة 3: اجمع الحدود المتشابهة إن وجدت في البسط.
الخطوة 4: حلل البسط إن أمكن.
الخطوة 5: بسّط إن أمكن.

بسط العبارة: $\frac{6}{2x^2 + 2x - 12} - \frac{2}{x^2 - 4}$

مثال

$$\frac{6}{2x^2 + 2x - 12} - \frac{2}{x^2 - 4}$$

بتحليل المقامين $= \frac{6}{2(x+3)(x-2)} - \frac{2}{(x-2)(x+2)}$

LCD يساوي $2(x+3)(x-2)(x+2)$ $= \frac{6(x+2)}{2(x+3)(x-2)(x+2)} - \frac{2 \cdot 2(x+3)}{2(x+3)(x-2)(x+2)}$

بطرح البسطين $= \frac{6(x+2) - 4(x+3)}{2(x+3)(x-2)(x+2)}$

خاصية التوزيع $= \frac{6x + 12 - 4x - 12}{2(x+3)(x-2)(x+2)}$

بجمع الحدود المتشابهة $= \frac{2x}{2(x+3)(x-2)(x+2)}$

بالتبسيط $= \frac{x}{(x+3)(x-2)(x+2)}$

تمارين

بسط كلا من العبارات الآتية:

$$\frac{2}{x-3} - \frac{1}{x-1} \quad (2)$$

$$\frac{-7xy}{3x} + \frac{4y^2}{2y} \quad (1)$$

$$\frac{3}{x+2} + \frac{4x+5}{3x+6} \quad (4)$$

$$\frac{4a}{3bc} - \frac{15b}{5ac} \quad (3)$$

$$\frac{4}{4x^2 - 4x + 1} - \frac{5x}{20x^2 - 5} \quad (6)$$

$$\frac{3x+3}{x^2 + 2x + 1} + \frac{x-1}{x^2 - 1} \quad (5)$$

تدريبات المهارات

5-2

جمع العبارات النسبية وطرحها

أوجد LCM لكل مجموعة من كثيرات الحدود مما يأتي:

(2) $18a^3bc^2, 24b^2c^2$

(1) $12c, 6c^2d$

(4) $5a, a - 1$

(3) $2x - 6, x - 3$

(6) $x^2 - 3x - 4, x + 1$

(5) $t^2 - 25, t + 5$

بسّط كلّاً من العبارات الآتية:

(8) $\frac{3}{8p^2r} + \frac{5}{4p^2r}$

(7) $\frac{3}{x} + \frac{5}{y}$

(10) $\frac{2}{m^2p} + \frac{5}{p}$

(9) $\frac{2c - 7}{3} + 4$

(12) $\frac{7}{4gh} + \frac{3}{4h^2}$

(11) $\frac{12}{5y^2} - \frac{2}{5yz}$

(14) $\frac{5}{3b + d} - \frac{2}{3bd}$

(13) $\frac{2}{a + 2} - \frac{3}{2a}$

(16) $\frac{3t}{2 - x} + \frac{5}{x - 2}$

(15) $\frac{3}{w - 3} - \frac{2}{w^2 - 9}$

(18) $\frac{4z}{z - 4} + \frac{z + 4}{z + 1}$

(17) $\frac{k}{k - n} - \frac{k}{n - k}$

(20) $\frac{3}{y^2 + y - 12} - \frac{2}{y^2 + 6y + 8}$

(19) $\frac{n}{n - 3} + \frac{2n + 2}{n^2 - 2n - 3}$

5-2

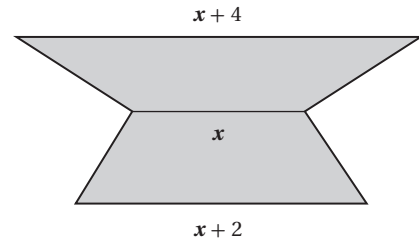
تدريبات حل المسألة

جمع العبارات النسبية وطرحها

(1) مربعات: يفضل خليل المربع الكامل s^2 ، ويفضل ماجد المربع الكامل t^2 ، في حين أن s ، t عددان كليان. ما المربع الكامل الذي يقبل القسمة على كل من مربعي خليل وماجد مهما تكن قيمة كل منهما؟

(2) الجهد الكهربائي: يمكنك حساب الجهد الكهربائي بين إلكترونين مستعملًا العبارة $\frac{1}{r} + \frac{1}{(1-r)}$. بسّط هذه العبارة.

(3) شبه منحرف: يتكوّن المقطع العرضي لمنضدة في الشكل أدناه من شكلي شبه منحرف وُضعا فوق بعضهما.



إذا علمت أن مساحة الشكل كاملاً تساوي x^2 وحدة مربعة، فاكتب عبارة تمثل ارتفاع كل شبه منحرف بدلالة x مفترضاً أن لكل شبه منحرف الارتفاع نفسه. واكتب إجابتك في أبسط صورة. (تذكر أن مساحة شبه المنحرف الذي ارتفاعه h وقاعدتاه b_1 ، b_2 تساوي $(\frac{1}{2}h(b_1+b_2))$)

(4) سباق التتابع: اشترك كل من محمد وعبدالله وخلف وزيد في سباق الجري مسافة 400 متر تتابع على أن يركض كل منهم مسافة 100 متر. وقد كان متوسط سرعة كل منهم $s-1$ ، $s-0.5$ ، $s+0.5$ ، s متر في الثانية على الترتيب.

(a) ما الزمن الذي استغرقه كل منهم في مرحلته من السباق؟

(b) اكتب الزمن الذي استغرقه الفريق على صورة نسبة بين كثيرتي حدود.

(c) الرقم القياسي العالمي لسباق مسافة 400 متر تتابع هو 37.4 ثانية. إذا أنهى الفريق السباق في زمن يساوي الرقم العالمي، فما قيمة s ؟

التدريبات الإثرائية

5-2

مفارقة زينو

لقد وضع الفيلسوف اليوناني زينو من إيليا (عاش بين العامين 495 و 430 قبل الميلاد) أربع مفارقات تتحدى فكرة المكان والزمان. ومفارقة زينو الأولى تشبه الموقف الآتي:

افترض أنك في طريقك إلى المدرسة، وأن عليك أن تقطع في كل دقيقة نصف المسافة المتبقية بينك وبين المدرسة، وأنك خرجت من بيتك عند الساعة 7:45 صباحًا. سوف يكون بُعدك عن المدرسة نصف المسافة بين بيتك والمدرسة عند الساعة 7:46 صباحًا، وسوف تقطع في الدقيقة التالية نصف هذه المسافة. أي أنك تكون قطعت $\frac{3}{4}$ المسافة بين بيتك والمدرسة عند الساعة 7:47 صباحًا. إذا استمر هذا النمط في الحركة، فمتى تصل إلى المدرسة؟ قبل الثامنة صباحًا؟ أم قبل الظهر؟

لما كان تصنيف قطعة مستقيمة ممكنًا بصورة لا نهائية، فإنه يمكننا تكرار هذه العملية إلى ما لا نهاية. ولذا يتعين عليك في طريقك إلى المدرسة أن تصل إلى عدد لا نهائي من المنتصفات في وقت محدود. وهذا مستحيل. وعندها لن تتمكن من الوصول إلى غايتك أبدًا. وعلى العموم وفق رأي زينو، يتعين على أي شخص يرغب في الانتقال من نقطة إلى أخرى أن يحقق هذه المتطلبات، وعليه، فإن الحركة مستحيلة. وهكذا فإن ما نراه من حركة هو مجرد وهم وخيال.

يُعرف جمع الكسور بالصيغة: $\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad+bc}{bd}$ ، ويُعرّف الطرح أيضًا بطريقة مماثلة.

افترض أن بيتك يبعد كيلومترًا واحدًا عن المدرسة. فعند الساعة 7:46 تكون قطعت نصف كيلومتر، ويبقى عليك $1 - \frac{1}{2}$ أي $\frac{1}{2}$ كيلومتر. وعند الساعة 7:47 يبقى عليك $\frac{1}{2} - \frac{1}{4}$ ، أي $\frac{1}{4}$ كيلومتر.

ولتحديد المسافة التي قطعتها والمسافة المتبقية إلى المدرسة عند الساعة 7:48 صباحًا، اجمع المسافات التي قطعتها في الدقائق الثلاث $\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} = \frac{7}{8}$ ، ويبقى عليك أن تسير $1 - \frac{7}{8}$ أو $\frac{1}{8}$ كيلومتر.

1 حدّد المسافة التي قطعتها وبُعدك عن المدرسة عند الساعة 7:50 صباحًا.

2 افترض أنك تقطع ثلاثة أرباع المسافة المتبقية بينك وبين المدرسة في كل دقيقة بدلًا من نصفها، فهل يمكنك أن تصل إلى المدرسة؟ حدّد المسافة المتبقية التي يتعين عليك أن تقطعها عند الساعة 7:47 صباحًا.

3 افترض أنك تقطع $\frac{1}{(x+1)}$ من المسافة المتبقية بينك وبين المدرسة في كل دقيقة بدلًا من نصفها أو ثلاثة أرباعها، على أن يكون x عددًا صحيحًا أكبر من 2، فماذا يكون بُعدك عن المدرسة عند الساعة 7:47 صباحًا؟

5-3

تدريبات إعادة التعليم

تمثيل دوال المقلوب بيانياً

خطوط التقارب الرأسية والأفقية

الدالة الرئيسة (الأم) لدوال المقلوب	
$y = \frac{1}{x}$	الدالة الرئيسة (الأم)
قطع زائد	شكل التمثيل البياني
جميع الأعداد الحقيقية ما عدا الصفر	المجال
جميع الأعداد الحقيقية ما عدا الصفر	المدى
متماثل حول المستقيم $y = x$	التمائل
لا يوجد	المقطعان
المحور x والمحور y	خطا التقارب

مثال

حدّد خطوط التقارب، والمجال، والمدى للدالة: $f(x) = \frac{3}{x+2}$

عيّن قيم x التي تكون عندها الدالة غير معرفة بمساواة المقام بالصفر.

$$x+2=0 \text{ إذن } x=-2$$

فالدالة غير معرفة عندما $x=-2$ ، ولذا فإن لها خط تقارب رأسي عند $x=-2$.

وإن قيم $f(x)$ تقترب من الصفر كلما نقصت قيم x عن -2 بلا حدود،

وكلما زادت قيم x عن -2 بلا حدود أيضاً. وهذا يعني وجود خط تقارب

أفقي عند $f(x)=0$.

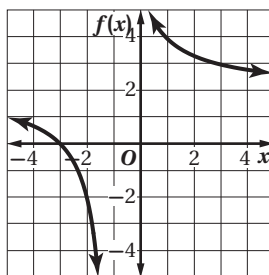
مجال هذه الدالة هو جميع الأعداد الحقيقية ما عدا -2

وأما مداها فهو جميع الأعداد الحقيقية ما عدا الصفر.

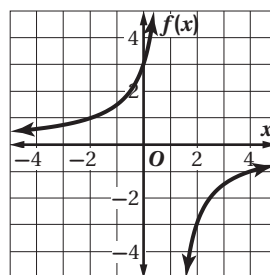
تمارين

حدّد خطوط التقارب، والمجال، والمدى لكلٍّ من الدوال الآتية:

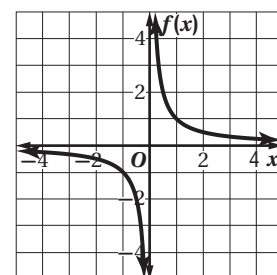
$$f(x) = \frac{4}{x+1} + 2 \quad (3)$$



$$f(x) = \frac{-3}{x-1} \quad (2)$$



$$f(x) = \frac{1}{x} \quad (1)$$



5-3

تدريبات إعادة التعليم

تمثيل دوال المقلوب بيانياً

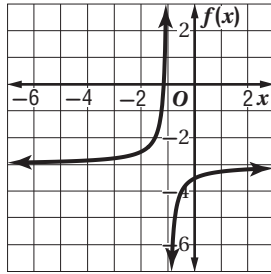
(تتمة)

تحويلات التمثيلات البيانية لدوال المقلوب

صورة المعادلة	$f(x) = \frac{a}{x-h} + k$ ، حيث الدالة الرئيسة (الأم) هي $f(x) = \frac{1}{x}$
إزاحة أفقية	ينتقل خط التقارب الرأسي إلى $x=h$.
إزاحة رأسية	ينتقل خط التقارب الأفقي إلى $y=k$.
انعكاس	ينعكس الشكل حول المحور x إذا كانت $a < 0$.
تضييق واتساع	يضيّق التمثيل البياني رأسياً عندما $ a < 1$ ويتسع رأسياً عندما $ a > 1$.

مثال 1

مثل الدالة $f(x) = \frac{-1}{x+1} - 3$ بيانياً وحدّد مجاها ومداها.



التمثيل البياني لهذه الدالة تحويل لتمثيل الدالة $f(x) = \frac{1}{x}$

$a < 0$: ينعكس التمثيل حول المحور x

$|a| < 1$: يضيّق التمثيل رأسياً

$h = -1$: يوجد خط تقارب رأسي عند $x = -1$

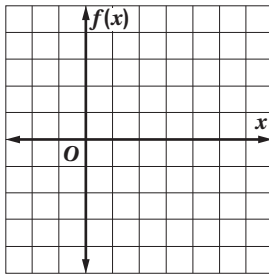
$k = -3$: يوجد خط تقارب أفقي عند $y = f(x) = -3$

المجال $\{x | x \neq -1\}$ المدى $\{f(x) | f(x) \neq -3\}$

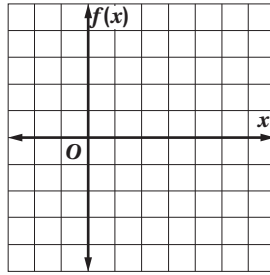
تمارين

مثل كل دالة مما يأتي بيانياً، وحدّد مجاها ومداها:

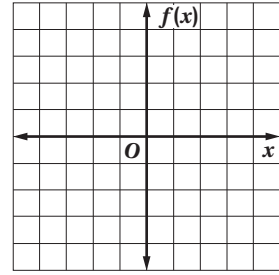
$$f(x) = \frac{-1}{x-3} \quad (3)$$



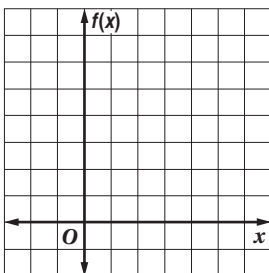
$$f(x) = \frac{-2}{x-2} \quad (2)$$



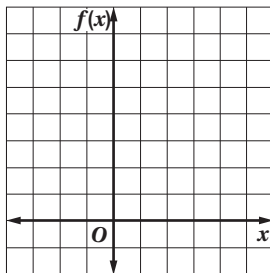
$$f(x) = \frac{1}{x} + 1 \quad (1)$$



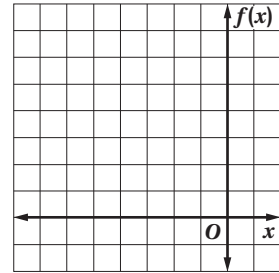
$$f(x) = \frac{1}{x-3} + 4 \quad (6)$$



$$f(x) = \frac{-2}{x-1} + 2 \quad (5)$$



$$f(x) = \frac{1}{x+5} + 3 \quad (4)$$

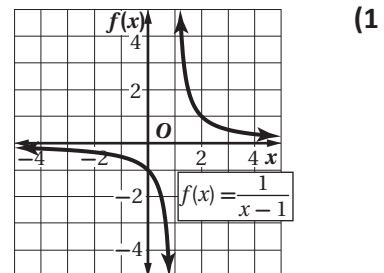
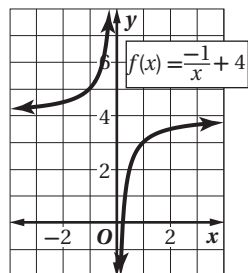


تدريبات المهارات

5-3

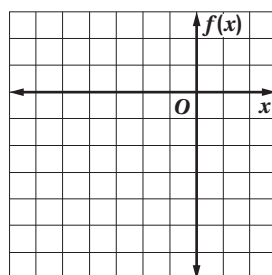
تمثيل دوال المقلوب بيانياً

حدّد خطوط التقارب، والمجال، والمدى لكلٍّ من الدالتين الآتيتين:

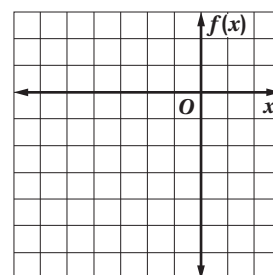


مثّل كلّ دالة ممّا يأتي بيانياً، وحدّد مجالها ومدّاهما:

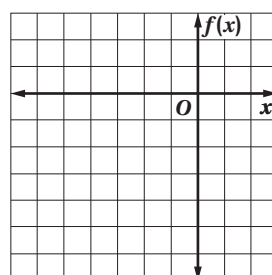
$$f(x) = \frac{-1}{x+5} - 6 \quad (4)$$



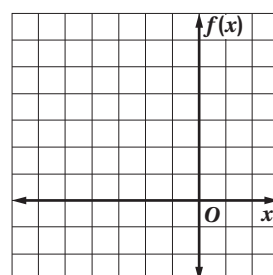
$$f(x) = \frac{1}{x+3} - 3 \quad (3)$$



$$f(x) = \frac{1}{x+4} - 2 \quad (6)$$



$$f(x) = \frac{-1}{x+1} + 3 \quad (5)$$



5-3

تدريبات حل المسألة

تمثيل دوال المقلوب بيانياً

(3) علم الحياة: يتغير عدد الأرنب في تجمع لها تبعاً للدالة:

$$P(t) = \frac{40}{t+2} + 10$$

على أن تمثل $P(t)$ عدد الأرنب بعد t شهراً. ماذا يحدث لعدد الأرنب على المدى البعيد؟

(4) حاسب آلي: تنفق شركة تصنع أجهزة حاسب آلي

مبلغ 20000 ريال على صورة أجور ونفقات تشغيل،

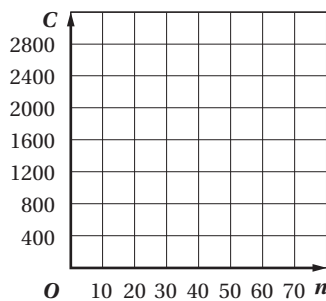
بالإضافة إلى 1740 ريالاً لقطع غيار كل جهاز.

(a) اكتب معادلة تربط متوسط تكلفة صنع جهاز

الحاسب الواحد بعدد الأجهزة التي تصنعها

الشركة.

(b) مثل الدالة التي وجدتها في الفرع a بيانياً.



(c) ما الحد الأدنى لعدد أجهزة الحاسب الآلي التي

يتعين أن تصنعها الشركة حتى يكون متوسط تكلفة

الجهاز الواحد أقل من 2740 ريالاً؟

(1) رحلة: استأجرت أسرة سيارة للذهاب في رحلة.

استأجر السيارة يكلف 375 ريالاً بالإضافة إلى

1.2 ريال لكل كيلو متر.

(a) اكتب معادلة تربط متوسط التكلفة لكل كيلومتر

واحد بعدد الكيلومترات المقطوعة.

(b) وضح أية قيود يمكنك وضعها على كل من المجال

والمدى في هذه الحالة.

(2) طائرات: من المقرر أن تقلع طائرة من جازان في رحلة

مسافتها 800 ميل إلى الدمام عند الوقت $t=0$. وقد

تأخر موعد إقلاع الطائرة ساعتين.

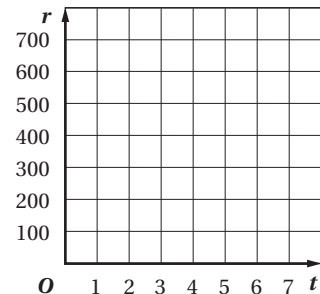
المعادلتان $r = \frac{800}{t}$; $r = \frac{800}{t-2}$ تمثلان سرعة الطائرة

r ، على صورة دالة بالنسبة للزمن. مثل هاتين المعادلتين

على المستوى الإحداثي أدناه على أن يمثل المحور

الأفقي الزمن t ، ويمثل المحور الرأسي السرعة r . ما

العلاقة بين المنحنيين؟



5-3

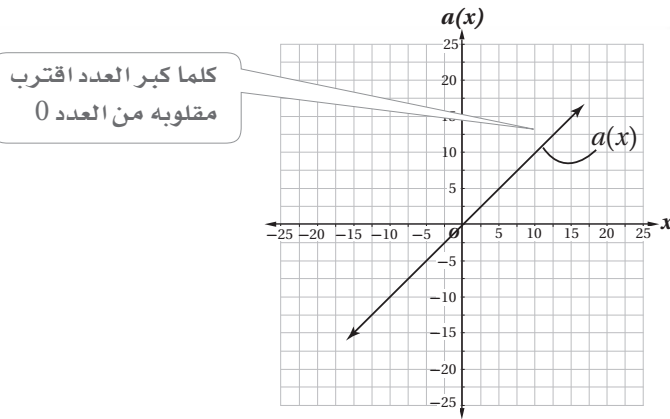
التدريبات الإثرائية

خصائص المقلوب والتمثيل البياني لدوال مقلوب $f(x) = \frac{1}{a(x)}$, $a(x) \neq 0$

يمكنك استعمال الخصائص الأساسية والتمثيل البياني للدالة الخطية $a(x)$ لتمثيل الدالة $f(x) = \frac{1}{a(x)}$, $a(x) \neq 0$ بيانياً بشكل تقريبي.

بعض الخصائص الأساسية لمقلوب عدد:

- مقلوب العدد 0 غير معرف.
- للمقلوب إشارة العدد نفسها.
- مقلوب العدد 1 هو العدد 1.
- كلما كبر العدد الموجب بدرجة كبيرة جداً كلما اقترب مقلوبه من العدد 0.



معتمداً على الشكل المجاور

مثل الدالة $f(x) = \frac{10}{a(x)}$ بيانياً بشكل تقريبي.

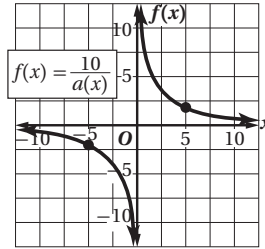
كون جدولاً يتضمن بعض النقاط؛ لتساعدك في التمثيل البياني، ثم صل بينها:

x	10	5	0.1	0	-0.1	-5	-10
$f(x)$	1	2	100	غير معرف	-10	-2	-1

وبالاستفادة من الخصائص الأساسية للمقلوب

والتمثيل البياني للدالة $a(x)$ ، فإن التمثيل البياني

للدالة $f(x) = \frac{10}{a(x)}$ يكون كما هو موضح جانباً.



تمارين:

(1) مثل الدالة

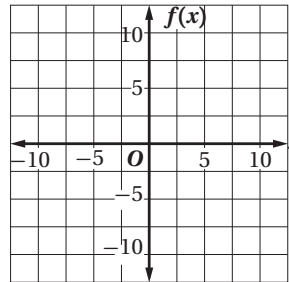
$$f(x) = \frac{20}{a(x)}$$

مستفيداً من

التمثيل البياني

للدالة $a(x)$ في

المثال أعلاه.



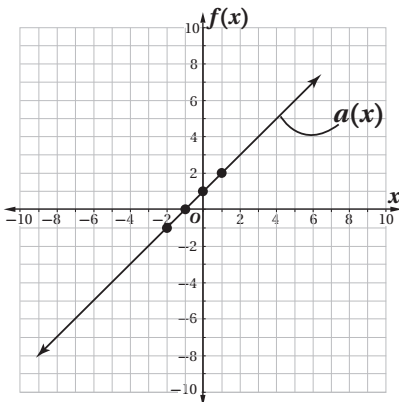
(2) مستفيداً من التمثيل

البياني المجاور. مثل

$$f(x) = \frac{1}{a(x)}$$

بيانياً على المستوى

الإحداثي نفسه.



5-4

تدريبات إعادة التعليم

تمثيل الدوال النسبية بيانياً

خطوط التقارب الرأسية والأفقية

الدالة النسبية	دالة تكتب على الصورة $f(x) = \frac{p(x)}{q(x)}$ على أن تكون $p(x)$ ، $q(x)$ كثيرتي حدود و $q(x) \neq 0$.
المجال	يتكوّن مجال الدالة النسبية من الأعداد التي تكون الدالة معرفّة عندها.
خط التقارب الرأسي	خط التقارب مستقيم يقترب منه التمثيل البياني للدالة. إذا كانت الدالة النسبية في أبسط صورة لها غير معرفة عند $x=a$ ، فإن المستقيم $x=a$ خط تقارب رأسي لهذه الدالة.
خط التقارب الأفقي	يكون للدالة النسبية خط تقارب أفقي أحياناً عندما تُستثنى قيمة من المدى.

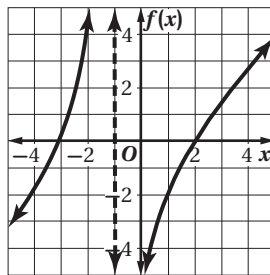
مثال

مثل الدالة $f(x) = \frac{x^2+x-6}{x+1}$ بيانياً.

$$\frac{x^2+x-6}{x+1} = \frac{(x+3)(x-2)}{x+1}$$

لهذه الدالة صفران عند $x=2$ ، $x=-3$ ، ولها خط تقارب رأسي عند $x=-1$. ولما كانت درجة البسط أكبر من درجة المقام، فإنه لا يوجد لهذه الدالة خط تقارب أفقي. كوّن جدول قيم للدالة، وعيّن النقاط في المستوى الإحداثي، وصل بينها.

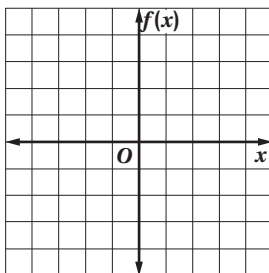
x	-5	-4	-3	-2	0	1	2	3	4
$f(x)$	-3.5	-2	0	4	-6	-2	0	1.5	2.8



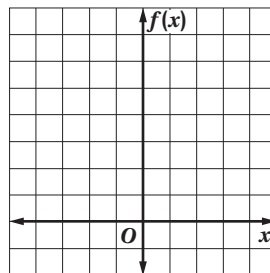
تمارين

مثل كل دالة مما يأتي بيانياً:

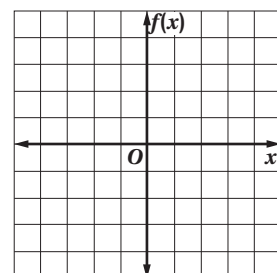
$$f(x) = \frac{x+3}{x^2-x-2} \quad (3)$$



$$f(x) = \frac{x^2-2x+1}{x^2+2x+1} \quad (2)$$



$$f(x) = \frac{4}{x^2+3x-10} \quad (1)$$



تدريبات إعادة التعليم

تمثيل الدوال النسبية

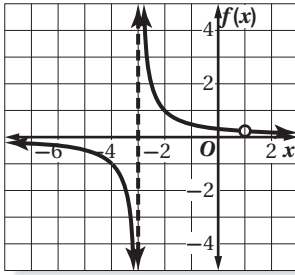
(تتمة)

نقطة الانفصال يوجد في بعض الأحيان نقاط انفصال في التمثيل البياني للدالة النسبية، وتظهر هذه النقاط على صورة فجوات في التمثيل البياني للدالة؛ لأن الدالة تكون غير معرّفة عند تلك النقطة، ولكنها معرّفة حولها.

نقطة الانفصال	إذا كانت $f(x) = \frac{a(x)}{b(x)}$ حيث $b(x) \neq 0$ وكان $(x-c)$ عاملاً مشتركاً بين $a(x)$ ، $b(x)$ ، فإنه توجد نقطة انفصال عندما $x=c$.
---------------	---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------

مثال

مثل الدالة $f(x) = \frac{x-1}{x^2+2x-3}$ بيانيًا.



$$\frac{x-1}{x^2+2x-3} = \frac{x-1}{(x-1)(x+3)} = \frac{1}{x+3}$$

وعندها فإن التمثيل البياني للدالة $f(x)$ خط تقارب رأسي عند $x = -3$ وله نقطة انفصال عندما $x = 1$.

كوّن جدول قيم للدالة وعين النقاط في المستوى الإحداثي وصل بينها.

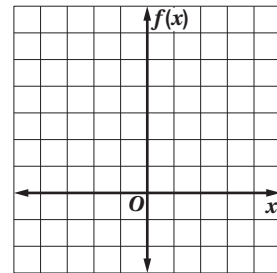
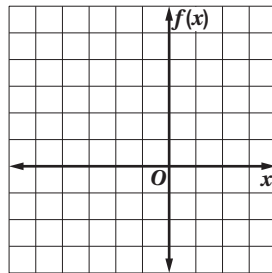
x	-2.5	-2	-1	-3.5	-4	-5
$f(x)$	2	1	0.5	-2	-1	-0.5

تمارين

مثّل كل دالة مما يأتي بيانيًا:

$$f(x) = \frac{x^2 - 6x + 8}{x^2 - x - 2} \quad (2)$$

$$f(x) = \frac{x^2 - x - 6}{x - 3} \quad (1)$$



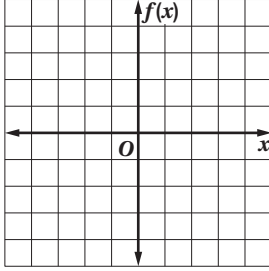
تدريبات المهارات

5-4

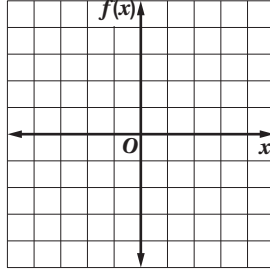
تمثيل الدوال النسبية بيانياً

مثل كل دالة مما يأتي بيانياً:

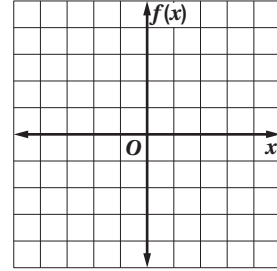
(3) $f(x) = \frac{-4}{x}$



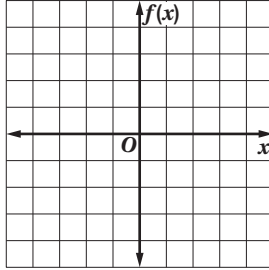
(2) $f(x) = \frac{10}{x}$



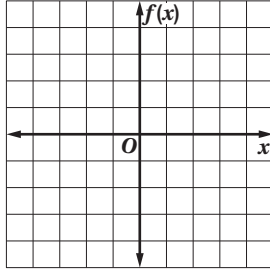
(1) $f(x) = \frac{-3}{x}$



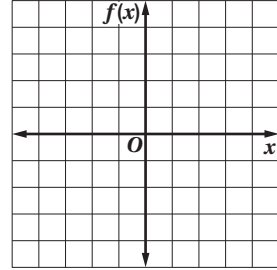
(6) $f(x) = \frac{x^2 - 4}{x - 2}$



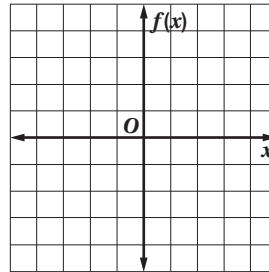
(5) $f(x) = \frac{x}{x + 2}$



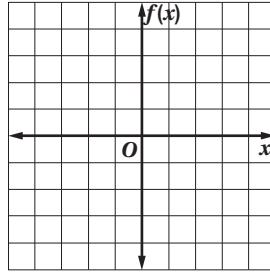
(4) $f(x) = \frac{2}{x - 1}$



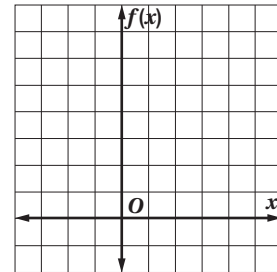
(9) $f(x) = \frac{3}{x^2 - 2x - 8}$



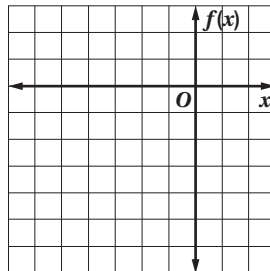
(8) $f(x) = \frac{x - 1}{x^2 - 4x + 3}$



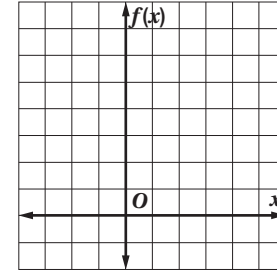
(7) $f(x) = \frac{x^2 + x - 12}{x - 3}$



(11) $f(x) = \frac{2x^3 + 4x^2 - 10x - 12}{2x^2 + 8x + 6}$



(10) $f(x) = \frac{x^3}{2x + 2}$



تدريبات حل المسألة

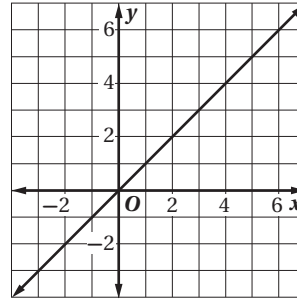
تمثيل الدوال النسبية بيانياً

(b) حدّد موقع خطي التقارب الأفقي والرأسي للتمثيل البياني لهذه المعادلة.

(c) ما معنى خط التقارب الأفقي للتمثيل البياني لهذه المعادلة؟

(1) تمثيلات بيانية: مثّلت علياء الدالة

$f(x) = \frac{x^2 - 4x}{x - 4}$ بيانياً كما هو مبين في الشكل أدناه. يوجد خطأ في هذا التمثيل البياني. يَبين كيف يمكنها تصحيحه.



(2) نيوتن: درس إسحق نيوتن الدالة النسبية:

$$f(x) = \frac{ax^3 + bx^2 + cx + d}{x}$$

مفترضاً أن $d \neq 0$ ، أين يقع خط التقارب الرأسي للتمثيل البياني لهذه الدالة؟

(3) معدل تسجيل الأهداف: معدل تسجيل الأهداف لأحد

لاعبي كرة السلة خلال سنوات مشاركته في هذه اللعبة حتى بداية موسم 1432 هجرية يساوي 0.305، فقد سجّل 984 مرة من 3226 محاولة. وفي موسم 1432 هجرية سجّل 183 مرة.

(a) اكتب معادلة تصف معدل تسجيل الأهداف لهذا اللاعب في نهاية موسم 1432 هجرية مستعملاً x لعدد محاولات التسجيل في هذا الموسم.

5-4

التدريبات الإثرائية

خصائص التمثيلات البيانية للدوال النسبية

يلخص الجدول الآتي بعض المعلومات المستعملة لتمثيل الدوال النسبية بيانياً.

الخاصية	معناها	طريقة إيجادها
خطوط التقارب الرأسية	خط رأسي عند قيم x التي تكون الدالة غير معرفة عندها.	مساواة المقام بالصفر، وحل المعادلة بالنسبة لـ x .
خطوط التقارب الأفقية	خط أفقي عند قيم y التي يقترب منها التمثيل البياني عندما تأخذ x قيمة موجبة أو سالبة كبيرة جداً.	ادرس سلوك طرفي التمثيل البياني.
سلوك الطرف الأيمن	كيف يبدو التمثيل البياني عندما تأخذ x قيمة موجبة كبيرة.	احسب قيمة العبارة النسبية بالتعويض عن x بقيم موجبة كبيرة متزايدة.
سلوك الطرف الأيسر	كيف يبدو التمثيل البياني عندما تأخذ x قيمة سالبة صغيرة جداً (تقترب من $-\infty$).	احسب قيمة العبارة النسبية بالتعويض عن x بقيم سالبة صغيرة جداً ($-\infty \leftarrow x$).
الجذور أو الأصفار أو المقاطع x	النقطة (أو النقاط) التي يقطع عندها التمثيل البياني المحور x .	مساواة البسط بالصفر، وحل المعادلة بالنسبة لـ x .
المقاطع y	النقطة التي يقطع عندها التمثيل البياني المحور y .	عوض $x=0$ في العبارة النسبية لتجد قيمة المقطع y .

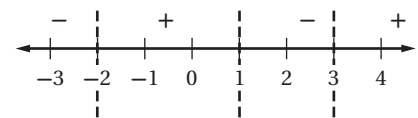
ويُعدّ مخطط الإشارات من الأدوات المفيدة في تمثيل الدوال بيانياً.

تستعمل في مخطط الإشارات قيمة للمتغير x على يمين كل قيمة حرجة (القيم التي تجعل البسط أو المقام صفراً) وقيمة على يسارها، لتحديد ما إذا كان التمثيل البياني موجباً أو سالباً في تلك الفترة.

مثال 1

يبين المخطط أدناه إشارات الدالة

$$y = \frac{x-1}{x^2-x-6}$$

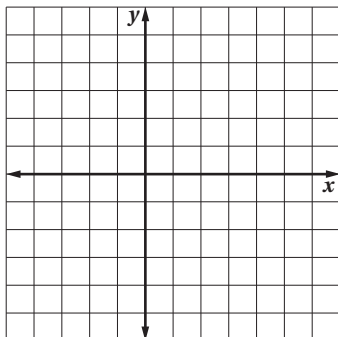


والشكل المجاور هو التمثيل البياني للدالة

$$\frac{x-1}{x^2-x-6}$$

تمرين

أنشئ مخطط إشارات للدالة $y = \frac{x-1}{x^2-4}$ مستعملاً قيمة لـ x على يمين كل قيمة حرجة، وقيمة على يسارها لتحديد ما إذا كان التمثيل البياني موجباً أو سالباً في تلك الفترة، ثم مثل الدالة بيانياً.



تدريبات إعادة التعليم

5-5

دوال التغير

التغير الطردي والتغير المشترك

التغير الطردي	تتغير y طرديًا مع x إذا وجد عدد ثابت k لا يساوي الصفر بحيث أن $y=kx$ ، أو $\frac{y}{x}=k$ ويُسمى k ثابت التغير.
التغير المشترك	تتغير y تغيرًا مشتركًا مع x و z إذا وجد عدد ثابت k لا يساوي الصفر بحيث أن $y=kzx$.

مثال 1

إذا كانت y تتغير طرديًا مع x ،
وكانت $y=16$ عندما $x=4$ ، فأوجد
قيمة x عندما $y=20$

$$\begin{aligned} \frac{y_1}{x_1} &= \frac{y_2}{x_2} \\ \frac{16}{4} &= \frac{20}{x_2} \\ 16x_2 &= (20)(4) \\ x_2 &= 5 \\ x_2 &= 5 \end{aligned}$$

إذن $x=5$ عندما $y=20$.

تمارين

(2) إذا كانت y تتغير طرديًا مع x وكانت $y=16$ عندما $x=36$ ، فأوجد قيمة y عندما $x=54$.

(1) إذا كانت y تتغير طرديًا مع x ، وكانت $y=9$ عندما $x=6$ ، فأوجد قيمة y عندما $x=8$.

(4) إذا كانت y تتغير طرديًا مع x وكانت $x=33$ عندما $y=22$ ، فأوجد قيمة x عندما $y=32$.

(3) إذا كانت y تتغير طرديًا مع x وكانت $x=15$ عندما $y=5$ ، فأوجد قيمة x عندما $y=9$.

(6) افترض أن y تتغير تغيرًا مشتركًا مع x و z ، فأوجد قيمة y عندما $x=6$ و $z=8$ ، علمًا أن $y=6$ عندما $x=4$ و $z=2$.

(5) افترض أن y تتغير تغيرًا مشتركًا مع x و z ، فأوجد قيمة y عندما $x=5$ و $z=3$ ، علمًا أن $y=18$ عندما $x=3$ و $z=2$.

(8) افترض أن y تتغير تغيرًا مشتركًا مع x و z ، فأوجد قيمة y عندما $x=5$ و $z=2$ ، علمًا أن $y=84$ عندما $x=4$ و $z=7$.

(7) افترض أن y تتغير تغيرًا مشتركًا مع x و z ، فأوجد قيمة y عندما $x=4$ و $z=11$ ، علمًا أن $y=60$ عندما $x=3$ و $z=5$.

(10) إذا كانت y تتغير طرديًا مع x وكانت $x=60$ عندما $y=75$ ، فأوجد قيمة x عندما $y=42$.

(9) إذا كانت y تتغير طرديًا مع x وكانت $y=39$ عندما $x=52$ ، فأوجد قيمة y عندما $x=22$.

5-5

تدريبات إعادة التعليم

(تتمة)

دوال التغير

التغير العكسي والتغير المركب

التغير العكسي	تتغير y عكسياً مع x إذا وجد عدد ثابت k لا يساوي الصفر بحيث إن $xy = k$ أو $y = \frac{k}{x}$ ، حيث $x \neq 0$ و $y \neq 0$
التغير المركب	يحدث عندما تتغير كمية ما طردياً أو عكسياً أو كليهما معاً مع كميتين أخريين أو أكثر. فإذا كانت y تتناسب طردياً مع x وعكسياً مع z ، فاستعمل التناسب $\frac{y_1 z_1}{x_1} = \frac{y_2 z_2}{x_2}$ لحل المسائل.

مثال

إذا كانت a تتغير طردياً مع b وعكسياً مع c ، فأوجد قيمة b عندما $a=10$ و $c=-5$ ، علماً أن $b=4$ عندما $a=-2$ و $c=3$.

$$a_1 = \frac{kb_1}{c_1}, a_2 = \frac{kb_2}{c_2}$$

تناسب التغير المركب

$$k = \frac{a_1 c_1}{b_1}, k = \frac{a_2 c_2}{b_2}$$

حل المعادلتين بالنسبة إلى k

مساواة النسبتين

$$\frac{a_1 c_1}{b_1} = \frac{a_2 c_2}{b_2}$$

بالنعويض في القيم المعطاة

$$\frac{(-2)3}{4} = \frac{10(-5)}{b_2}$$

بالضرب التبادلي

$$(-2) 3 \cdot b_2 = 10(-5)4$$

بالتبسيط

$$b_2 = 33 \frac{1}{3}$$

تمارين

- إذا كانت y تتغير عكسياً مع x ، وكانت $y=12$ عندما $x=10$ ، فأوجد قيمة y عندما $x=15$.
- إذا كانت y تتغير عكسياً مع x ، وكانت $y=100$ عندما $x=38$ ، فأوجد قيمة y عندما $x=76$.
- إذا كانت y تتغير عكسياً مع x ، وكانت $y=32$ عندما $x=42$ ، فأوجد قيمة y عندما $x=24$.
- إذا كانت y تتغير عكسياً مع x ، وكانت $y=36$ عندما $x=10$ ، فأوجد قيمة y عندما $x=30$.
- إذا كانت y تتغير عكسياً مع x ، وكانت $y=44$ عندما $x=20$ ، فأوجد قيمة y عندما $x=55$.
- إذا كانت y تتغير عكسياً مع x ، وكانت $y=80$ عندما $x=14$ ، فأوجد قيمة y عندما $x=35$.
- إذا كانت y تتغير عكسياً مع x ، وكانت $y=3$ عندما $x=8$ ، فأوجد قيمة y عندما $x=40$.
- إذا كانت y تتغير طردياً مع z وعكسياً مع x ، وكانت $y=16$ و $z=2$ عندما $x=42$ ، فأوجد قيمة y عندما $x=14$ و $z=8$.

تدريبات المهارات

5-5

دوال التغير

حدّد ما إذا كانت المعادلة في كلّ ممّا يأتي تمثل تغيراً طردياً أو عكسياً، أو مشتركاً، ثم أوجد ثابت التغير في كلّ منها.

$$A = \frac{1}{2}bh \quad (3)$$

$$p = \frac{4}{q} \quad (2)$$

$$c = 12m \quad (1)$$

$$y = 0.2d \quad (6)$$

$$f = 5280m \quad (5)$$

$$rw = 15 \quad (4)$$

$$C = 2\pi r \quad (9)$$

$$R = \frac{8}{w} \quad (8)$$

$$t = 16rh \quad (7)$$

(10) إذا كانت y تتغير طردياً مع x ، وكانت $y=35$ عندما $x=7$ ، فأوجد قيمة y عندما $x=11$.

(11) إذا كانت y تتغير طردياً مع x ، وكانت $y=360$ عندما $x=180$ ، فأوجد قيمة y عندما $x=270$.

(12) إذا كانت y تتغير طردياً مع x ، وكانت $y=540$ عندما $x=10$ ، فأوجد قيمة x عندما $y=1080$.

(13) إذا كانت y تتغير تغيراً مشتركاً مع x و z ، وكانت $y=18$ عندما $x=2$ و $z=3$ ، فأوجد قيمة y عندما $x=5$ و $z=6$.

(14) إذا كانت y تتغير تغيراً مشتركاً مع x و z ، وكانت $y=-16$ عندما $x=4$ و $z=2$ ، فأوجد قيمة y عندما $x=-1$ و $z=7$.

(15) إذا كانت y تتغير عكسياً مع x ، وكانت $y=2$ عندما $x=2$ فأوجد قيمة y عندما $x=1$.

(16) إذا كانت y تتغير عكسياً مع x ، وكانت $y=6$ عندما $x=5$ ، فأوجد قيمة y عندما $x=10$.

(17) إذا كانت y تتغير عكسياً مع x ، وكانت $y=3$ عندما $x=14$ ، فأوجد قيمة x عندما $y=6$.

(18) إذا كانت y تتغير طردياً مع z وعكسياً مع x وكانت $y=27$ و $z=-3$ عندما $x=2$ ، فأوجد قيمة x عندما $y=9$ و $z=5$.

تدريبات حل المسألة

5-5

دوال التغير

(1) غوص: يتغير الارتفاع الذي يقفز إليه الغواص فوق منصة الغوص طردياً مع المسافة التي ينخفضها طرف المنصة تحت مستواها الطبيعي. إذا قفز غواص إلى ارتفاع 44 بوصة فوق منصة الغوص عندما انخفض طرف منصة الغوص 12 بوصة، فما الارتفاع الذي يقفز إليه الغواص إذا انخفض طرف منصة الغوص 18 بوصة؟

(2) تصميم مواقف السيارات: يتغير عدد الأماكن المخصصة لوقوف السيارات في مجمع تجاري طردياً مع عدد المحلات التجارية في المجمع. وبصورة عامة يخصص لكل محل 5 مواقف. يخطط مستثمر لإنشاء مجمع تجاري على قطعة أرض تضم مساحة كافية لوقوف 120 سيارة، فما عدد المحلات التجارية التي يتعين على المستثمر أن يقيمها في هذا المجمع؟

(3) إيجار: تبلغ أجرة شقة m ريالاً في الشهر. إذا شارك n طالباً في استئجار الشقة، وتقاسموا أجرتها بينهم بالتساوي، فكم يتعين على كل طالب أن يدفع؟ كيف تتغير حصة الطالب الواحد من الأجرة مع تغير عدد الطلاب؟ عندما استأجر الشقة طالبان اثنان دفع كل منهما 2000 ريال، فكم يدفع الطالب الواحد إذا كان عدد المشاركين في استئجار الشقة 5 طلاب؟

(4) طلاء: تتغير تكلفة طلاء جدار طردياً مع مساحته. اكتب صيغة لحساب تكلفة طلاء جدار مستطيل الشكل طوله l وعرضه w . هل تتغير التكلفة مع كل من l, w تغيراً طردياً أم مشتركاً أم عكسياً؟

(5) هيدروجين: يتغير ثمن خزان هيدروجين طردياً مع حجم الخزان. يريد أحد المعامل أن يشتري خزان هيدروجين على هيئة متوازي مستطيلات أبعاده L, W, H

(a) املاً الخلايا الفارغة في الجدول أدناه.

أبعاد خزان الهيدروجين (بالبوصات)			الثمن (بالريالات)
L	W	H	
36	36	36	
18		24	450
24	24	24	800

(b) يتعين أن يكون حجم الخزان مناسباً لوضعه على رف ذي ارتفاع وعمق ثابتين. كيف يتغير ثمن الخزان مع عرض الخزان ذي الارتفاع والعمق الثابتين؟

(c) ما ثمن خزان كروي الشكل نصف قطره 24 بوصة؟
تذكر أن حجم الكرة التي نصف قطرها r يساوي $\left(\frac{4}{3}\right) \pi r^3$

التدريبات الإثرائية

الأقمار الصناعية المتزامنة الحركة مع الأرض

انتشرت الأقمار الصناعية التي تدور حول الأرض انتشار أجهزة الهاتف المحمول التي تعتمد على هذه الأقمار. والقمر الصناعي المتزامن الحركة مع الأرض هو القمر الذي يبقى في الموقع نفسه فوق الأرض في الأوقات كلها. ويستعمل هذا النوع من الأقمار الصناعية في اتصالات الهواتف المحمولة، يستقبل الإشارات من أبراج الاتصالات على الأرض ويرسلها إلى أخرى.

والسرعة التي تتحرك بها هذه الأقمار بالغة الأهمية. فإذا كانت السرعة قليلة جدًا يسقط القمر الصناعي على الأرض بفعل قوة الجاذبية الأرضية، وإذا كانت السرعة كبيرة جدًا فسيغلب القمر على قوة الجاذبية وينطلق إلى الفضاء ولا يعود أبدًا. وينص قانون نيوتن الثاني في الحركة على أن القوة المؤثرة في جسم تساوي حاصل ضرب كتلته في تسارعه. أي أن $F=ma$. ومن المعلوم أيضًا أن محصلة قوة الجذب بين جسمين تتناسب عكسيًا مع مربع المسافة بينهما.

وعليه فإن هناك متغيرين تعتمد عليهما القوة وهما: السرعة والارتفاع عن سطح الأرض. ويوضح قانون نيوتن الثاني، $F=ma$ ، أن القوة تتناسب طرديًا مع التسارع في حين تحل الكتلة الثابتة m محل ثابت التناسب k .

تمارين

1 قوة الجاذبية التي تؤدي إلى تسارع القمر الصناعي تتناسب عكسيًا مع مربع المسافة بينه وبين الأرض، اكتب هذه القوى على صورة معادلة.

2 قارن بين المعادلة التي كتبتها في التمرين 1 وقانون نيوتن الثاني أعلاه لتوضح كيف يتغير تسارع القمر الصناعي مع ارتفاع القمر عن الأرض.

3 بيّن كيف تتغير سرعة القمر الصناعي مع ارتفاعه عن سطح الأرض مستعملًا حقيقة أن السرعة تساوي ناتج قسمة المسافة على الزمن ومعتبرًا أن مسار القمر دائري الشكل.

5-6

تدريبات إعادة التعليم

حل المعادلات والمتباينات النسبية

حل المعادلات النسبية: تتضمن المعادلة النسبية عبارة نسبية واحدة أو أكثر. ولحل المعادلة النسبية، اضرب طرفيها في LCM لمقاماتها جميعها. واحرص على استثناء الحلول التي تجعل المقام صفرًا.

مثال: حل المعادلة $\frac{9}{10} + \frac{2}{x+1} = \frac{2}{5}$ ، وتحقق من صحة حلك.

المعادلة الأصلية	$\frac{9}{10} + \frac{2}{x+1} = \frac{2}{5}$
بضرب الطرفين في $10(x+1)$	$10(x+1)\left(\frac{9}{10} + \frac{2}{x+1}\right) = 10(x+1)\frac{2}{5}$
بالتبسيط	$9(x+1) + 2(10) = 4(x+1)$
خاصية التوزيع	$9x + 9 + 20 = 4x + 4$
بطرح $4x$ و 29 من الطرفين	$5x = -25$
اقسم على 5	$x = -5$

المعادلة الأصلية

$$x = -5$$

بالتبسيط

تحقق

$$\frac{9}{10} + \frac{2}{x+1} = \frac{2}{5}$$

$$\frac{9}{10} + \frac{2}{-5+1} \stackrel{?}{=} \frac{2}{5}$$

$$\frac{18}{20} - \frac{10}{20} \stackrel{?}{=} \frac{2}{5}$$

$$\frac{2}{5} = \frac{2}{5}$$

تمارين

حل كل معادلة مما يأتي، وتحقق من صحة حلك:

$$\frac{2x+1}{3} - \frac{x-5}{4} = \frac{1}{2} \quad (3)$$

$$\frac{4t-3}{5} - \frac{4-2t}{3} = 1 \quad (2)$$

$$\frac{2y}{3} - \frac{y+3}{6} = 2 \quad (1)$$

$$\frac{x}{x-2} + \frac{4}{x-2} = 10 \quad (6)$$

$$\frac{4}{x-1} = \frac{x+1}{12} \quad (5)$$

$$\frac{3m+2}{5m} + \frac{2m-1}{2m} = 4 \quad (4)$$

(7) أعمال: يعمل خالد ومشعل ونايف بطلاء المنازل. ويقدر خالد أن بإمكانه طلاء منزل معين وحده في 4 أيام، ويقدر مشعل أنه يقوم بهذا العمل وحده في $5\frac{1}{2}$ أيام، ويقدر نايف القيام بالعمل وحده في 6 أيام. إذا كانت هذه التقديرات صحيحة، فكم يستغرق طلاء المنزل إذا عمل الثلاثة معًا؟ هل هذه الإجابة معقولة؟

5-6

تدريبات إعادة التعليم

(تتمة)

حل المعادلات والمتباينات النسبية

حل المتباينات النسبية: اتبع الخطوات الآتية عند حل متباينة نسبية:

الخطوة 1: حدّد القيم المستثناة وهي القيم التي يكون عندها المقام صفراً.

الخطوة 2: حلّ المعادلة المرتبطة.

الخطوة 3: استعمل القيم التي حصلت عليها في الخطوتين السابقتين لتقسيم خط الأعداد إلى فترات، واختبر قيمة من كل فترة لتحديد الفترة التي تحقق أعدادها المتباينة.

مثال

$$\text{حل المتباينة } \frac{2}{3n} + \frac{4}{5n} \leq \frac{2}{3}$$

الخطوة 1: القيمة المستثناة هي 0؛ لأنها تجعل المقام صفراً.

الخطوة 2: حلّ المعادلة المرتبطة

$$\text{المعادلة المرتبطة} \quad \frac{2}{3n} + \frac{4}{5n} = \frac{2}{3}$$

$$\text{بضرب الطرفين في } 15n \quad 15n\left(\frac{2}{3n} + \frac{4}{5n}\right) = 15n\left(\frac{2}{3}\right)$$

$$\text{بالتبسيط} \quad 10 + 12 = 10n$$

$$\text{بالجمع} \quad 22 = 10n$$

$$\text{بالقسمة} \quad 2.2 = n$$

الخطوة 3: ارسم خط الأعداد، وارسم خطاً رأسياً عند القيمة المستثناة، وخطاً رأسياً آخر عند حل المعادلة.



$$\begin{aligned} \text{اختبر } n=3 \\ \frac{2}{9} + \frac{4}{15} \leq \frac{2}{3} \\ \text{المتباينة صحيحة.} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{اختبر } n=1 \\ \frac{2}{3} + \frac{4}{5} \leq \frac{2}{3} \\ \text{المتباينة غير صحيحة.} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{اختبر } n=-1 \\ -\frac{2}{3} + \left(-\frac{4}{5}\right) \leq \frac{2}{3} \\ \text{المتباينة صحيحة.} \end{aligned}$$

حل هذه المتباينة هو $n < 0$ أو $n \geq 2.2$.

تمارين

حلّ كل معادلة مما يأتي، وتحقق من صحة حلك:

$$\frac{1}{2p} + \frac{4}{5p} > \frac{2}{3} \quad (3)$$

$$\frac{1}{x} \geq 4x \quad (2)$$

$$\frac{3}{a+1} \geq 3 \quad (1)$$

$$\frac{3}{x^2-1} + 1 > \frac{2}{x-1} \quad (6)$$

$$\frac{4}{x-1} + \frac{5}{x} < 2 \quad (5)$$

$$\frac{3}{2x} - \frac{2}{x} > \frac{1}{4} \quad (4)$$

تدريبات المهارات

5-6

حل المعادلات والمتباينات النسبية

حُل كل معادلة مما يأتي، وتحقق من صحة حلك:

$$2 = \frac{4}{n} + \frac{1}{3} \quad (2)$$

$$\frac{x}{x-1} = \frac{1}{2} \quad (1)$$

$$3 - z = \frac{2}{z} \quad (4)$$

$$\frac{9}{3x} = -\frac{6}{2} \quad (3)$$

$$\frac{r-3}{5} = \frac{8}{r} \quad (6)$$

$$\frac{2}{d+1} = \frac{1}{d-2} \quad (5)$$

$$-\frac{12}{y} = y - 7 \quad (8)$$

$$\frac{2x+3}{x+1} = \frac{3}{2} \quad (7)$$

$$\frac{3b-2}{b+1} = 4 - \frac{b+2}{b-1} \quad (10)$$

$$\frac{15}{x} + \frac{9x-7}{x+2} = 9 \quad (9)$$

$$8 - \frac{4}{z} = \frac{8z-8}{z+2} \quad (12)$$

$$2 = \frac{5}{2q} + \frac{2q}{q+1} \quad (11)$$

$$\frac{1}{w+2} + \frac{1}{w-2} = \frac{4}{w^2-4} \quad (14)$$

$$\frac{1}{n+3} + \frac{5}{n^2-9} = \frac{2}{n-3} \quad (13)$$

$$\frac{12p+19}{p^2+7p+12} - \frac{3}{p+3} = \frac{5}{p+4} \quad (16)$$

$$\frac{x-8}{2x+2} + \frac{x}{2x+2} = \frac{2x-3}{x+1} \quad (15)$$

حُل كل متباينة مما يأتي، وتحقق من صحة حلك:

$$\frac{3}{k} - \frac{4}{3k} > 0 \quad (18)$$

$$\frac{x-2}{x+4} > \frac{x+1}{x+10} \quad (17)$$

$$n + \frac{3}{n} < \frac{12}{n} \quad (20)$$

$$2 - \frac{3}{v} < \frac{5}{v} \quad (19)$$

$$\frac{1}{2x} < \frac{2}{x} - 1 \quad (22)$$

$$\frac{1}{2m} - \frac{3}{m} < -\frac{5}{2} \quad (21)$$

5-6

تدريبات حل المسألة

حل المعادلات والمتباينات النسبية

(4) **مقذوفات:** قُذِفَ هدف في الهواء ثم أُطلق صاروخ لاعتراضه. إذا كانت نسبة ارتفاع الصاروخ إلى ارتفاع الهدف المقذوف بعد t ثانية من إطلاق الصاروخ هي $\frac{333t}{-32t^2 + 420t + 27}$ فمتى يكون للهدف والصاروخ الارتفاع نفسه؟

(5) **زمن الرحلة الجوية:** المسافة بين الرياض وميونخ 2500 ميل تقريباً. وعندما تطير طائرة معاكسة لاتجاه الرياح، فإنها تستغرق وقتاً أطول مما تستغرقه عند طيرانها مع اتجاه الرياح. افترض أن سرعة الطائرة في الجو s ميل في الساعة، وأن سرعة الرياح 100 ميل في الساعة.

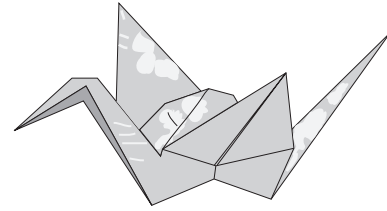
(a) اكتب معادلة بدلالة s ، إذا علمت أن زمن رحلة الطائرة بين الرياض وميونخ بعكس اتجاه الرياح يزيد ساعتين وخمس دقائق على الزمن المستغرق بالطيران مع اتجاه الرياح.

(b) حُلْ المعادلة التي كتبتها في الفرع a.

(c) اكتب معادلة، وأوجد منها الزمن الإضافي الذي تستغرقه الرحلة بين الرياض وميونخ بالطيران عكس اتجاه الرياح عنه مع اتجاه الرياح إذا كانت سرعة الطائرة 525 ميلاً في الساعة، وسرعة الرياح 150 ميلاً في الساعة.

(1) **أطوال:** سعاد أقصر من أختها مروة بمقدار 20cm ، ويمكن أن نقول: إنها أقصر من أختها بنسبة 12.5% . وهذا يعني أن $\frac{20}{(H+20)} = \frac{1}{8}$ ، في حين يمثل H طول سعاد. فما طول سعاد؟

(2) **زينة:** تريد ليلي وصديقاتها أن تعلق في قاعة احتفال 1000 قطعة من الورق طويت كل منها على هيئة طائر.



ولا تطوي الفتاة الواحدة أكثر من 15 ورقة. فإذا كان عدد الفتيات اللواتي يقمن بهذا العمل N ، فإن $\frac{1000}{N} \leq 15$ ، فما أقل قيمة ممكنة للعدد N ؟

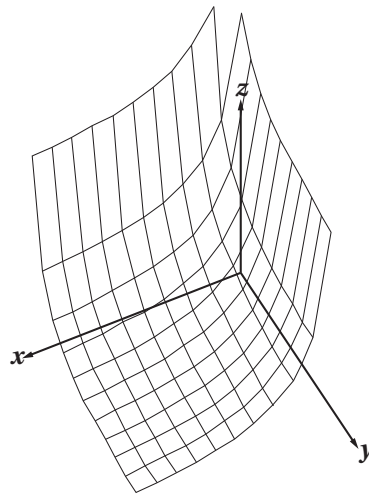
(3) **استئجار:** استأجر هاشم وأصدقاؤه سيارة وتقاسموا أجرها البالغة 200 ريال بالتساوي. واستأجر هاشم واثنان من أصدقائه آلة تصوير وتقاسموا أجرها البالغة 30 ريالاً بالتساوي. وقد كان مجموع ما دفعه هاشم لاستئجار السيارة وآلة التصوير 50 ريالاً. اكتب معادلة تتضمن المتغير N الذي يمثل عدد أصدقاء هاشم مستعملًا هذه المعطيات، ثم حُلّها لتجد قيمة N .

5-6

التدريبات الإثرائية

خطوط التقارب للأشكال الثلاثية الأبعاد

تكون المستقيمات خطوط تقارب للمنحنيات الثنائية الأبعاد، وبالمثل تكون المستويات مستويات تقارب للمنحنيات الثلاثية الأبعاد. ليس للتمثيل البياني للمعادلة $z=x+y$ مستوى تقارب؛ لأن z تقترب من سالب ما لانهاية عندما تقترب x و y من سالب ما لانهاية؛ وتقترب z من ما لانهاية الموجبة عندما تقترب كل من y, x من ما لانهاية الموجبة أيضًا، وفي المقابل فإن للتمثيل البياني للمعادلة $z=\frac{1}{x}+\frac{1}{y}$ مستوى تقارب ويوجد فيه فجوة. فهذا المنحنى غير معرف للمستويين $x=0$ و $y=0$. ويُعدُّ المستوى $z=0$ مستوى تقارب للمنحنى؛ لأن المنحنى يقترب من هذا المستوى عندما تكبر قيم x, y إلى ما لانهاية الموجبة أو تصغر إلى ما لانهاية السالبة.



مثال

عيِّن نقاط الانفصال ومستويات التقارب للمنحنى $z = \frac{1}{x+2} + \frac{1}{y+3}$

تمارين

عيِّن نقاط الانفصال ومستويات التقارب للمنحنيات الآتية:

$$z = \frac{1}{x+8} + \frac{1}{y+5} + 14 \quad (1)$$

$$z = 3x + \frac{1}{y+2} \quad (2)$$

$$z = \frac{y}{x+1} \quad (3)$$

ملحق الإجابات

التاريخ:

الاسم:

(تتمه)

5-1 تدريبات إعادة التعليم

ضرب العبارات النسبية وقسمتها

تبسيط الكسور المركبة، الكسر المركب هو كسر بسطه ومقامه أو أحدهما عبارة نسبية، ولتبسيط كسر مركب، اكتبه أو لأعلى صورة قسمة عبارتين.

$$\frac{3n-1}{n} \div \frac{3n^2+8n-3}{n^4}$$

مثال

$$\frac{3n-1}{n} \div \frac{3n^2+8n-3}{n^4} = \frac{3n-1}{n} \cdot \frac{n^4}{3n^2+8n-3}$$

كتابة العبارة على صورة قسمة عبارتين

بضرب القسوم في عكسها

بالتبسيط

نتائرين
بسط كل عبارة على مايلي:

$$= \frac{n^3}{n+3}$$

$$= \frac{n^4}{n(3n-1)(n+3)}$$

$$= \frac{n^4}{3n^2+8n-3}$$

$$(3) \frac{b^2-1}{3b+2} \cdot \frac{ac^7}{by}$$

$$(2) \frac{a^2bc^3}{x^2y^2} \cdot \frac{xy^2}{a^3} \cdot \frac{a^2b^2}{a^3xy} \cdot \frac{a^2b^2}{b^2}$$

$$(5) \frac{1}{(x+3)(x+2)} \cdot \frac{x-4}{x^2+6x+9} \cdot \frac{2(b+10)}{b(3b-1)} \cdot \frac{b^2-100}{b^2}$$

$$(7) \frac{b+4}{(b-1)(b-2)} \cdot \frac{b^2-6b+8}{b^2+b-2} \cdot \frac{a-4}{a^2+2} \cdot \frac{a^2+3a-4}{a^2+a-2}$$

$$(8) \frac{1}{x+5} \cdot \frac{x^2-x-2}{x^3+6x^2-x-30} \cdot \frac{x+1}{x+3}$$

الفصل ٥ : العلاقات والدوال النسبية

7

المصف : الثاني الثانوي

التاريخ:

الاسم:

5-1 تدريبات إعادة التعليم

ضرب العبارات النسبية وقسمتها

تبسيط العبارات النسبية: تُسمى النسبة بين كثيرتي حدود عبارة نسبية. وعند تبسيط العبارة النسبية يقسم كل من البسط والمقام على العامل المشترك الأكبر (GCF) لها.

$\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}$ ، فإن $a \neq 0, d \neq 0$	إذا كانت $\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d}$ عبارة نسبتين، حيث $a \neq 0, d \neq 0$
$\frac{a}{b} \div \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \cdot \frac{d}{c} = \frac{ad}{bc}$ ، فإن $a \neq 0, c \neq 0, d \neq 0$	إذا كانت $\frac{a}{b} \div \frac{c}{d}$ عبارة نسبتين، حيث $a \neq 0, c \neq 0, d \neq 0$
قسمة العبارات النسبية	

بسط كل عبارة على مايلي:

$$(a) \frac{24a^3b^2}{(2ab)^4} = \frac{2^3 \cdot 3 \cdot a^3 \cdot b^2}{2^4 \cdot a^4 \cdot b^4} = \frac{3a^3b^2}{2a^4b^4}$$

$$(b) \frac{3f^3g^3 \cdot 20f^2}{9f^3h} = \frac{3 \cdot 2 \cdot f^3 \cdot g^3 \cdot 2 \cdot f^2}{3 \cdot f^3 \cdot h} = \frac{4f^2g^3}{h}$$

$$(c) \frac{x^2+8x+16}{2x-2} \div \frac{x^2+2x-8}{x-1}$$

$$\frac{x^2+8x+16}{2x-2} \div \frac{x^2+2x-8}{x-1} = \frac{x^2+8x+16}{2x-2} \cdot \frac{x-1}{x^2+2x-8}$$

$$= \frac{(x+4)(x+4)(x-1)}{2(x-1)(x-2)(x+4)} = \frac{x+4}{2(x-2)}$$

نتائرين
بسط كل عبارة على مايلي:

$$(1) \frac{x-2}{x-9} \cdot \frac{x^2+x-6}{x^2-6x-27} \cdot \frac{3-2x}{3} \cdot \frac{4x^2-12x+9}{9-6x} \cdot \frac{2a^2b^2}{20ab^4}$$

$$(5) \frac{c}{c-5} \cdot \frac{c^2-3c}{c^2-25} \cdot \frac{c^2+4c-5}{c^2-4c+3} \cdot \frac{2m^2(m-1)}{6m^4} \cdot \frac{3m^3-3m}{4m^5}$$

$$(7) \frac{y^5}{15x^3} \cdot \frac{6xy^4}{25x^2} \cdot \frac{18x^2}{5y} \cdot \frac{m}{m^2-6m+9} \cdot \frac{m^3-9m}{m^2-9}$$

الفصل ٥ : العلاقات والدوال النسبية

6

المصف : الثاني الثانوي

الاسم: التاريخ:

5-1 تدريبات حل المسألة

ضرب العبارات النسبية وقسمتها

(4) بقعة النفط، بينما كان سيد يتل برميل نفط بالقرب من بركة دائرية في ساحة منزله سقط البرميل وانسكب النفط في البركة، وانتشر النفط بصورة منتظمة فوق سطح الماء. إذا كان حجم النفط V ، وكان نصف قطر البركة r ، فكتب عبارة تمثل سمك بقعة النفط.

$$h = \frac{V}{\pi r^2}$$

(5) جري، ركض سلمان من بيته إلى المركز التجاري لشراء

الحليب، ونسب الوزن الذي كان يحمله كانت سرعته في أثناء عودته أقل من سرعته في ذهابه إلى السوق، وقد كانت سرعته في ذهابه 8 متر لكل ثانية، وسرعته في العودة 5 متر لكل ثانية. وكانت المسافة بين بيته والمركز التجاري d مترًا.

(تذكر أن المسافة = السرعة \times الزمن).

اكتب عبارة تمثل الزمن الذي استغرقه سلمان في هذه

المهمة.

$$t = \frac{d}{s_1} + \frac{d}{s_2}$$

الاسم: التاريخ:

5-1 تدريبات المهارات

ضرب العبارات النسبية وقسمتها

بسط كل عبارة على يمين:

$$\frac{b}{5a} \cdot \frac{5ab^3}{25a^2b^2} = \frac{3x}{2y} \cdot \frac{21x^3y}{14x^2y^2} \quad (1)$$

$$\frac{2}{y^4} \cdot \frac{8y^2(y^6)^3}{4y^24} = x^6 \cdot \frac{(x^6)^3}{(x^3)^4} \quad (2)$$

$$\frac{x+2}{x+1} \cdot \frac{x^2-4}{(x-2)(x+1)} = \frac{9}{x-3} \cdot \frac{18}{2x-6} \quad (3)$$

$$\frac{mf^2}{4} \cdot \frac{3m}{2f} \cdot \frac{f^3}{6} = \frac{a-8}{a+4} \cdot \frac{3a^2-24a}{3a^2+12a} \quad (4)$$

$$\frac{1}{2r^3(r-2)} \cdot \frac{5r^2}{r^2-4} \cdot \frac{r+2}{10r^5} = \frac{6g}{5f^2} \cdot \frac{24g^2}{8g^5f} \cdot \frac{10(gf)^3}{8g^5f} \quad (5)$$

$$\frac{32z^7}{35v^2y} \cdot \frac{80v^4}{49z^5v^7} \cdot \frac{25v^5}{14z^{12}v^5} = \frac{1}{3g^2y^2} \cdot \frac{7g}{y^2} \cdot \frac{21g^3}{y^2} \quad (6)$$

$$\frac{q^2}{2(q-2)} \cdot \frac{q^2+2q}{6q} \cdot \frac{q^2-4}{3q^2} = x(x-2) \cdot \frac{3x^2}{x+2} \cdot \frac{3x}{x^2-4} \quad (7)$$

$$\frac{1}{6x} \cdot \frac{x^2-5x+4}{2x-8} \div (3x^2-3x) = \frac{w^2-5w-24}{w+1} \cdot \frac{w^2-6w-7}{w+3} \quad (8)$$

$$\frac{(a-b)}{2} \cdot \frac{a^2-b^2}{4a} \cdot \frac{a+b}{2a} = \frac{c^2y}{5y} - \frac{2d^2}{2d^4} - \frac{c^6}{5d} \quad (9)$$

الاسم: التاريخ:

5-1 تدريبات المهارات

ضرب العبارات النسبية وقسمتها

بسط كل عبارة على يمين:

$$\frac{b}{5a} \cdot \frac{5ab^3}{25a^2b^2} = \frac{3x}{2y} \cdot \frac{21x^3y}{14x^2y^2} \quad (1)$$

$$\frac{2}{y^4} \cdot \frac{8y^2(y^6)^3}{4y^24} = x^6 \cdot \frac{(x^6)^3}{(x^3)^4} \quad (2)$$

$$\frac{x+2}{x+1} \cdot \frac{x^2-4}{(x-2)(x+1)} = \frac{9}{x-3} \cdot \frac{18}{2x-6} \quad (3)$$

$$\frac{mf^2}{4} \cdot \frac{3m}{2f} \cdot \frac{f^3}{6} = \frac{a-8}{a+4} \cdot \frac{3a^2-24a}{3a^2+12a} \quad (4)$$

$$\frac{1}{2r^3(r-2)} \cdot \frac{5r^2}{r^2-4} \cdot \frac{r+2}{10r^5} = \frac{6g}{5f^2} \cdot \frac{24g^2}{8g^5f} \cdot \frac{10(gf)^3}{8g^5f} \quad (5)$$

$$\frac{32z^7}{35v^2y} \cdot \frac{80v^4}{49z^5v^7} \cdot \frac{25v^5}{14z^{12}v^5} = \frac{1}{3g^2y^2} \cdot \frac{7g}{y^2} \cdot \frac{21g^3}{y^2} \quad (6)$$

$$\frac{q^2}{2(q-2)} \cdot \frac{q^2+2q}{6q} \cdot \frac{q^2-4}{3q^2} = x(x-2) \cdot \frac{3x^2}{x+2} \cdot \frac{3x}{x^2-4} \quad (7)$$

$$\frac{1}{6x} \cdot \frac{x^2-5x+4}{2x-8} \div (3x^2-3x) = \frac{w^2-5w-24}{w+1} \cdot \frac{w^2-6w-7}{w+3} \quad (8)$$

$$\frac{(a-b)}{2} \cdot \frac{a^2-b^2}{4a} \cdot \frac{a+b}{2a} = \frac{c^2y}{5y} - \frac{2d^2}{2d^4} - \frac{c^6}{5d} \quad (9)$$

الاسم: التاريخ:

5-1 تدريبات حل المسألة

ضرب العبارات النسبية وقسمتها

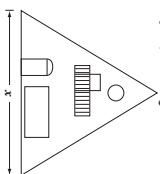
(1) سكارو، يجري وعاء على C قطعة سكارو يخضراء و R قطعة سكارو خضراء. إذا أضيفت إلى الوعاء 100 قطعة سكارو خضراء و 100 قطعة خضراء، فما النسبة الجديدة لقطع السكارو الخضراء إلى قطع السكارو الخضراء في الوعاء؟

$$\frac{(R+100)}{(C+100)}$$

(2) مسافات، يقود طلال سيارة هجينة (a hybrid car) تقطع $20km$ لكل لتر من البنزين داخل المدينة، وتقطع $18km$ لكل لتر من البنزين على الطرق الخارجية. إذا استعملت السيارة C لترًا في داخل المدينة و H لترًا على الطرق الخارجية، فكتب عبارة تصف متوسط المسافة التي تقطعها السيارة لكل لتر من البنزين بدلالة C و H .

$$\frac{(20C+18H)}{(C+H)}$$

(3) ارتفاع، الواجهة الأمامية للمبني في المخطط أدناه مثلثة الشكل. إذا كانت مساحة الواجهة $10+3x+x^2$ وكانت x طول قاعدتها، فما ارتفاع الواجهة بدلالة x ؟



$$h = \frac{(2x^2 + 6x + 20)}{x}$$

الفصل ٥ : العلاقات والدوال النسبية

9

المصف ، الثاني ، الثانوي

الاسم: التاريخ:

5-1 تدريبات المهارات

ضرب العبارات النسبية وقسمتها

بسط كل عبارة على يمين:

$$\frac{b}{5a} \cdot \frac{5ab^3}{25a^2b^2} = \frac{3x}{2y} \cdot \frac{21x^3y}{14x^2y^2} \quad (1)$$

$$\frac{2}{y^4} \cdot \frac{8y^2(y^6)^3}{4y^24} = x^6 \cdot \frac{(x^6)^3}{(x^3)^4} \quad (2)$$

$$\frac{x+2}{x+1} \cdot \frac{x^2-4}{(x-2)(x+1)} = \frac{9}{x-3} \cdot \frac{18}{2x-6} \quad (3)$$

$$\frac{mf^2}{4} \cdot \frac{3m}{2f} \cdot \frac{f^3}{6} = \frac{a-8}{a+4} \cdot \frac{3a^2-24a}{3a^2+12a} \quad (4)$$

$$\frac{1}{2r^3(r-2)} \cdot \frac{5r^2}{r^2-4} \cdot \frac{r+2}{10r^5} = \frac{6g}{5f^2} \cdot \frac{24g^2}{8g^5f} \cdot \frac{10(gf)^3}{8g^5f} \quad (5)$$

$$\frac{32z^7}{35v^2y} \cdot \frac{80v^4}{49z^5v^7} \cdot \frac{25v^5}{14z^{12}v^5} = \frac{1}{3g^2y^2} \cdot \frac{7g}{y^2} \cdot \frac{21g^3}{y^2} \quad (6)$$

$$\frac{q^2}{2(q-2)} \cdot \frac{q^2+2q}{6q} \cdot \frac{q^2-4}{3q^2} = x(x-2) \cdot \frac{3x^2}{x+2} \cdot \frac{3x}{x^2-4} \quad (7)$$

$$\frac{1}{6x} \cdot \frac{x^2-5x+4}{2x-8} \div (3x^2-3x) = \frac{w^2-5w-24}{w+1} \cdot \frac{w^2-6w-7}{w+3} \quad (8)$$

$$\frac{(a-b)}{2} \cdot \frac{a^2-b^2}{4a} \cdot \frac{a+b}{2a} = \frac{c^2y}{5y} - \frac{2d^2}{2d^4} - \frac{c^6}{5d} \quad (9)$$

الفصل ٥ : العلاقات ودوال النسبية

8

المصف ، الثاني ، الثانوي

التاريخ:

الاسم:

5-2 تدريبات إعادة التعليم

جميع العبارات النسبية وطرحها

الضامف المشترك الأصغر (LCM) لتغييرات الحدود: لإيجاد (LCM) كثيرتي حدود أو أكثر، جمل كلًا منها إلى صوابها الأولية، ثم اضرب القوى التي لها الأس الأكبر في كثيرات الحدود جميعها.

أوجد LCM لكبرتي الحدود

مثال 2

$$3m^2 - 3m - 6, 4m^2 + 12m - 40$$

أوجد LCM لكبرتي الحدود:

مثال 1

$$16p^2q^3r, 40pq^2r^2, 15p^3r^4$$

$$\begin{aligned} 3m^2 - 3m - 6 &= 3(m+1)(m-2) \\ 4m^2 + 12m - 40 &= 4(m-2)(m+5) \\ LCM &= 12(m+1)(m-2)(m+5) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 16p^2q^3r &= 2^4 \cdot p^2 \cdot q^3 \cdot r \\ 40pq^2r^2 &= 2^3 \cdot 5 \cdot p \cdot q^2 \cdot r^2 \\ 15p^3r^4 &= 3 \cdot 5 \cdot p^3 \cdot r^4 \\ LCM &= 2^4 \cdot 3 \cdot 5 \cdot p^3 \cdot q^3 \cdot r^4 \\ &= 240p^3q^3r^4 \end{aligned}$$

تمارين

أوجد LCM لكل مجموعة من كثيرات الحدود مما يأتي:

$$8cd^3, 28c^2f, 35d^4f^2 \quad (2) \quad 14ab^2, 42bc^3, 18a^2c \quad (1)$$

$$280c^2d^4f^3 \quad (3) \quad 126a^2b^2c^3$$

$$11mr^5, 18m^2r^3, 20mr^4 \quad (4) \quad 65x^4y, 10x^2y^2, 26y^4 \quad (3)$$

$$1980m^2n^5 \quad (5) \quad 130xy^4$$

$$24\bar{p}q, 30p^2q^2, 45pq^3 \quad (6) \quad 15d^4b, 50d^2b^2, 40b^8 \quad (5)$$

$$360p^7q^3 \quad (8) \quad 600d^4b^8$$

$$12xy^4, 42x^2y, 30x^3y^3 \quad (8) \quad 39b^2c^2, 52b^4c, 12c^3 \quad (7)$$

$$420x^2y^4 \quad (10) \quad 156b^4c^3$$

$$x^2 + 3x, 10x^2 + 25x - 15 \quad (10) \quad 56st^2, 24s^2t^2, 70t^3v^3 \quad (9)$$

$$5x(x+3)(2x-1) \quad (12) \quad 840s^2t^3v^3$$

$$22x^2 + 66x - 220, 4x^2 - 16 \quad (12) \quad 9x^2 - 12x + 4, 3x^2 + 10x - 8 \quad (11)$$

$$44(x-2)(x+2)(x+5) \quad (14) \quad (3x-2)^2(x+4)$$

$$5x^2 - 125, 5x^2 + 24x - 5 \quad (14) \quad 8x^2 - 36x - 20, 2x^2 + 2x - 60 \quad (13)$$

$$5(x-5)(x+5)(5x-1) \quad (16) \quad 4(x-5)(x+6)(2x+1)$$

$$45x^2 - 6x - 3, 45x^2 - 5 \quad (16) \quad 3x^2 - 18x + 27, 2x^3 - 4x^2 - 6x \quad (15)$$

$$15(5x+1)(3x-1)(3x+1) \quad (11) \quad 6x(x-3)^2(x+1)$$

الفصل 5 : العلاقات والحوال النسبية

الصف: الثاني المتأولي

التاريخ:

الاسم:

5-1 التدرينات الإثرائية

تحليل وحدات القياس

يحرص العلماء دائمًا على ذكر وحدات القياس في إجاباتهم، فلا تغد الإجابة 17 كاذبة عن سؤال يتعلق بالساعة، بل هي إجابة مخيرة.

هل يقصد القائل سبعة عشر مترًا أم كيلو مترًا أم قدمًا أم ميلاً؟ ومن القيد تحليل وحدات القياس للكميات المقصدة في الحسابات لتحديد وحدة ناتج هذه الحسابات، فعل سبيل المثال، نعلم أن العزم يساوي حاصل ضرب القوة في المسافة، ولكن ما وحدات القوة؟

إن الوحدات تعتمد على نظام القياس. فالنظامان الأكثر شيوعًا لحوادث القياس هي النظام الإنجليزي والنظام المترى. ومن وحدات النظام الإنجليزي: البوصة والقدم والليل والطل. ومن وحدات النظام المترى: المتر والكيلومتر والجرام والنيوتن. ويكون تحليل وحدات القياس من نظام إلى آخر ضروريًا أحيانًا، ويتم ذلك بالقرب بمعاملات التحويل. فمثلاً نحول السرعة $60mi/h$ إلى سرعة وحدتها km/h باستخدام قاعدة التحويل $1mi \approx 1.61km$ على النحو الآتي: $\frac{km}{h} \approx 96.6 \frac{km}{h}$

1) وحدة القوة في النظام المترى هي النيوتن (N)، ووحدة المسافة هي المتر أو المتر.

وحدة وحدة العزم في النظام المترى مستعملًا الصيغة الآتية:

العزم = القوة \times المسافة.

إجابة ممكنة: $N \cdot cm$ و $N \cdot m$

2) تُحسب كثافة سائل باستعمال الصيغة: الكثافة = $\frac{\text{الكتلة}}{\text{الحجم}}$. إذا كان حجم سائل في وعاء أسطوانيًا $\pi r^2 h$ بالمتر

المتري، وكانت r مقبسة بالمتر، فأوجد عبارة تمثل الكثافة بالكيلو جرام لكلية المترين التي تعلا الوعاء الأسطوانى، علماً أن كثافة النيون $\frac{kg}{m^3} = 880$

$$\begin{aligned} 880 \frac{kg}{m^3} &= 880 \pi r^2 h \frac{kg}{m^3} \\ &= 62.1 \pi r^2 h \frac{kg}{m^3} \end{aligned}$$

3) حوّل 100 كيلو متر في الساعة إلى ميل في الساعة.

62.1 ميلًا في الساعة.

الفصل 5 : العلاقات والحوال النسبية

الصف: الثاني المتأولي

10

التاريخ: _____

الاسم: _____

5-2 تدريبات المهارات

جمع العبارات النسبية وطرحها

أوجد LCM لكل مجموعة من كثرات الحدود كما يأتي:

$$18a^3bc^2, 24b^2c^2 \quad (2)$$

$$72a^3b^2c^2$$

$$12c, 6c^2d \quad (1)$$

$$12c^2d$$

$$5d, a-1 \quad (4)$$

$$5d(a-1)$$

$$2x-6, x-3 \quad (3)$$

$$2(x-3)$$

$$x^2-3x-4, x+1 \quad (6)$$

$$(x-4)(x+1)$$

$$t^2-25, t+5 \quad (5)$$

$$(t+5)(t-5)$$

بسّط كلا من العبارات الآتية:

$$\frac{13}{8p^2r} + \frac{5}{4p^2r} \quad (8)$$

$$\frac{2+5m^2}{m^2p} + \frac{2}{m^2p} + \frac{5}{p} \quad (10)$$

$$\frac{7h+3g}{4gt^2} + \frac{7}{4gt} + \frac{3}{4ht^2} \quad (12)$$

$$\frac{12z-2y}{5y^2z} + \frac{12}{5y^2} - \frac{2}{5yz} \quad (11)$$

$$\frac{15bd-6b-2d}{3bd(3b+d)} + \frac{5}{3b+d} - \frac{2}{3bd} \quad (14)$$

$$\frac{5-3t}{x-2} + \frac{3t}{2-x} + \frac{5}{x-2} \quad (16)$$

$$\frac{5z^2+4z-16}{(z-4)(z+1)} + \frac{4z}{z-4} + \frac{z+4}{z+1} \quad (18)$$

$$\frac{3}{y^2+y-12} - \frac{2}{y^2+6y+8} \quad (20)$$

$$\frac{(y+4)(y-3)(y+2)}{(y+4)(y-3)(y+2)}$$

الفصل 5 : العلاقات والدوال النسبية

13

المصف : الثاني الثانوي

التاريخ: _____

الاسم: _____

5-2 تدريبات إعادة التعليم

جمع العبارات النسبية وطرحها

جمع العبارات النسبية وطرحها، اتبع الخطوات الآتية عند جمع عبارتين نسبيتين أو طرحها.

الخطوة 1: أوجد القام المشترك الأصغر (LCD)، وأعد كتابة العبارتين على أن يكونان لهما القام نفسه.

الخطوة 2: اجمع البسطين أو اطرحهما.

الخطوة 3: اجمع الحدود المتشابهة إن وجدت في البسط.

الخطوة 4: حلل البسط إن أمكن.

الخطوة 5: بسّط إن أمكن.

$$\frac{6}{2x^2+2x-12} - \frac{2}{x^2-4} \quad \text{بسّط البعارة:} \quad \frac{2}{x^2-4} - \frac{6}{2x^2+2x-12}$$

مثال

$$\frac{6}{2x^2+2x-12} - \frac{2}{x^2-4}$$

$$\text{بحلّل المقام} = \frac{6}{2(x+3)(x-2)} - \frac{2}{(x-2)(x+2)}$$

$$= \frac{6(x+2)}{6(x+2)} - \frac{2 \cdot 2(x+3)}{2 \cdot 2(x+3)}$$

$$= \frac{2(x+3)(x-2)(x+2)}{2(x+3)(x-2)(x+2)} - \frac{4(x+3)}{2(x+3)(x-2)(x+2)}$$

$$\text{طرح البسطين}$$

$$= \frac{2(x+3)(x-2)(x+2)}{2(x+3)(x-2)(x+2)}$$

$$\text{خاصية التوزيع} = \frac{2x}{2(x+3)(x-2)(x+2)}$$

$$\text{بجمع الحدود المتشابهة} = \frac{2x}{2(x+3)(x-2)(x+2)}$$

$$\text{بالتبسيط} = \frac{x}{(x+3)(x-2)(x+2)}$$

تعاريف
بسّط كلا من العبارات الآتية:

$$\frac{x+1}{(x-1)(x-3)} - \frac{2}{x-3} - \frac{1}{x-1} \quad (2)$$

$$\frac{4x+14}{3x+6} + \frac{3}{x+2} + \frac{4x+5}{3x+6} \quad (4)$$

$$\frac{-2x^2+9x+4}{(2x+1)(2x-1)^2} + \frac{4}{4x^2-4x+1} - \frac{5x}{20x^2-5} \quad (6)$$

$$\frac{4}{x+1} + \frac{3x+3}{x^2+2x+1} + \frac{x-1}{x^2-1} \quad (5)$$

الفصل 5 : العلاقات والدوال النسبية

12

المصف : الثاني الثانوي

التاريخ:

الاسم:

5-2 التدرّيات الإثرائية

معارقة زينو

لقد وضع الفيلسوف اليوناني زينو من إيليا (عاش بين العامين 495 و430 قبل الميلاد) أربع معارقات تتحدى فكرة المكان والزمان. ومعارقة زينو الأولى تشبه الموقف الآتي:

افترض أنك في طريقك إلى المدرسة، وأن عليك أن تقطع في كل دقيقة نصف المسافة المتبقية بينك وبين المدرسة، وأنك خرجت من بينك عند الساعة 7:45 صباحاً. سوف يكون بعدك عن المدرسة نصف المسافة بين بينك والمدرسة عند الساعة 7:46 صباحاً، وسوف تقطع في الدقيقة التالية نصف هذه المسافة. أي أنك تكون قطعت $\frac{2}{3}$ المسافة بين بينك والمدرسة عند الساعة 7:47 صباحاً. إذا استمر هذا النمط في الحركة، فمتى تصل إلى المدرسة؟ قل الثامنة صباحاً؟ أم قبل الظهر؟

إذا كان تصنيف قطعة مستقيمة ممكناً بصورة لا نهائية، فإنه يمكننا تكرار هذه العملية إلى ما لا نهاية. ولماذا يتعين عليك في طريقك إلى المدرسة أن تصل إلى عدد لا نهائي من التصفيفات في وقت محدود. وهذا مستحيل، وعندها لن تتمكن من الوصول إلى غايك أبداً. وعلى العموم وفق رأي زينو، يتعين على أي شخص يرغب في الانتقال إلى نقطة إلى أخرى أن يحقق هذه التطلعات، وعليه، فإن الحركة مستحيلة. وهكذا فإن ما نراه من حركة هو مجرد وهم وخيال.

يُعرف جمع الكسور بالصيغة: $\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad+bc}{bd}$ ، ويُعرف الطرح أيضاً بطريقة مماثلة.

افترض أن بينك يبعد كيلومترًا واحدًا عن المدرسة. فعند الساعة 7:46 تكون قطعت نصف كيلومتر، ويبقى عليك $1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$ كيلومتر. وعند الساعة 7:47 يبقى عليك $\frac{1}{2} - \frac{1}{4} = \frac{1}{4}$ كيلومتر.

ولتحديد المسافة التي قطعها والمسافة المتبقية إلى المدرسة عند الساعة 7:48 صباحاً، اجمع المسافات التي قطعها في الدقائق الثلاث $\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} = \frac{7}{8}$ ، ويبقى عليك أن تسير $1 - \frac{7}{8} = \frac{1}{8}$ كيلومتر.

1) حدد المسافة التي قطعها وبُعدك عن المدرسة عند الساعة 7:50 صباحاً.

لقد قطعت $\frac{31}{32}$ من الكيلومتر ويكون بعدك عن المدرسة $\frac{1}{32}$ كيلومتر.

2) افترض أنك تقطع ثلاثة أرباع المسافة المتبقية بينك وبين المدرسة في كل دقيقة بدلاً من نصفها، فهل يمكنك أن تصل إلى المدرسة؟ حدد المسافة المتبقية التي يتعين عليك أن تقطعها عند الساعة 7:47 صباحاً.

لا يبقى $\frac{1}{16}$ من الكيلومتر عليك أن تقطعها عند الساعة 7:47 صباحاً.

3) افترض أنك تقطع $\frac{1}{x+1}$ من المسافة المتبقية بينك وبين المدرسة في كل دقيقة بدلاً من نصفها أو ثلاثة أرباعها، على أن يكون x عدداً صحيحاً أكبر من 2، فماذا يكون بعدك عن المدرسة عند الساعة 7:47 صباحاً؟

من $\frac{x^2}{(x+1)^2}$ من الكيلومتر.

الفصل ٥ : العلاقات والدوال النسبية

15

المصف : الثاني المتأدوي

التاريخ:

الاسم:

5-2 تدرّيات حل المسألة

جمع العبارات التسيبية وطرحها

14) سباق التتابع، اشترك كل من محمد وعبد الله وخلف وزيد في سباق تجري مسافة 400 متر تتابع على أن يركض كل منهم مسافة 100 متر. وقد كان متوسط سرعة كل منهم $s-1$ ، $s-0.5$ ، $s+0.5$ متر في الثانية على الترتيب.

a) ما الزمن الذي استغرقه كل منهم في مرحلته من السباق؟

$$\frac{100}{s-1}, \frac{100}{s-2}, \frac{100}{s+2}$$

b) اكعب الزمن الذي استغرقه الفريق على صورة نسبة بين كثيرتي حدود.

$$16s^3-12s^2-2s+1$$
$$4s^4-s^3-s^2+s$$

c) الرقم القياسي العالمي لسباق مسافة 400 متر تتابع هو 37.4 ثانية. إذا أُنغى الفريق السابق في زمن

يساوي الرقم العالمي، فما قيمة s ؟

10.695

1) مربعات، يفضل خليل المربع الكامل s^2 ، ويفضل ماجد

المربع الكامل r^2 ، في حين أن $s \neq r$ عددان كليان. ما المربع الكامل الذي يقبل القسمة على كل من مربعي خليل وماجد معها تكن قيمة كل منهما؟

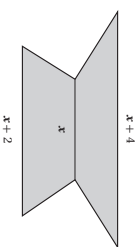
$$s^2 r^2$$

2) اوجد التكعيراني، يمكنك حساب الجهد الكهربي بالي

بين إلكتر وذن مستعملاً العبارة $\frac{1}{r(1-r)}$. يسط هذه العبارة.

$$\frac{1}{r(1-r)}$$

3) شبه منحرف، يتكون القطع العرضي المتشعبة في الشكل أدناه من شكلين شبه منحرف وضعافوق بعضهما.



إذا علمت أن مساحة الشكل كاملاً تساوي $2x^2$ وحدة مربعة، فاكعب عبارة تثل ارتفاع كل شبه منحرف بدلالة x مفترضاً أن لكل شبه منحرف الارتفاع نفسه. واكعب إجابتيك في أسطر صرفة. (تذكر أن مساحة شبه المنحرف الذي ارتفاعه h وقاعداه b_1 ، b_2 تساوي

$$\left(\frac{1}{2}\right)h(b_1+b_2)$$
$$\frac{x^2}{(2x+3)}$$

الفصل ٥ : العلاقات والدوال النسبية

14

المصف : الثاني المتأدوي

التاريخ: _____

الاسم: _____

(تتمه)

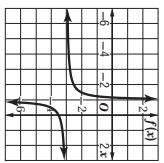
5-3 تدريبات إعادة التعليم

تمثيل دوال المقلوب بيانياً

تحويلات التمثيلات البيانية لدوال المقلوب

صورة المعادلة	$f(x) = \frac{a}{x-h} + k$ حيث المعادلة الرئيسية (الأم) هي $f(x) = \frac{1}{x}$
إزاحة أفقية	ينتقل خط التقارب الرأسي إلى $x=h$.
إزاحة رأسية	ينتقل خط التقارب الأفقي إلى $y=k$.
انعكاس	ينعكس الشكل حول المحور x إذا كانت $a < 0$.
تفتيح واتساع	يفتح التمثيل البياني رأسيًا عندما $ a < 1$ ويتسع رأسيًا عندما $ a > 1$.

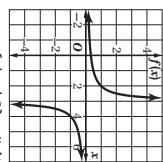
مثال 1
مقل الدالة $f(x) = \frac{-1}{x+1} - 3$ بيانيًا وحدد مجالها ومداها.



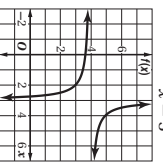
التمثيل البياني لهذه الدالة تحويل لتمثيل الدالة $f(x) = \frac{1}{x}$
 $a < 0$: ينعكس التمثيل حول المحور x
 $|a| < 1$: يضيّق التمثيل رأسيًا
 $x = -1$: يوجد خط تقارب رأسي عند $x = -1$
 $y = f(x) = -3$: يوجد خط تقارب أفقي عند $y = -3$
 المجال: $\{x | x \neq -1\}$ ، المدى: $\{y | y \neq -3\}$

تمارين
مثل كل دالة مما يأتي بيانيًا، وحدد مجالها ومداها:

(3) $f(x) = \frac{-1}{x-3}$

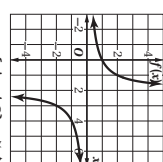


المجال: $\{x | x \neq 3\}$
 المدى: $\{f(x) | f(x) \neq 0\}$
 $f(x) = \frac{1}{x-3} + 4$ (6)

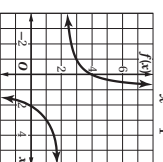


المجال: $\{x | x \neq 3\}$
 المدى: $\{f(x) | f(x) \neq 4\}$
 الفصل 5: العلاقات والدوال التسمية

(2) $f(x) = \frac{-2}{x-2}$

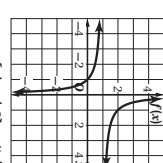


المجال: $\{x | x \neq 2\}$
 المدى: $\{f(x) | f(x) \neq 0\}$
 $f(x) = \frac{-2}{x-1} + 2$ (5)

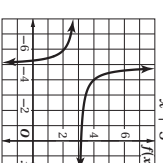


المجال: $\{x | x \neq 1\}$
 المدى: $\{f(x) | f(x) \neq 2\}$
 الفصل 17

(1) $f(x) = \frac{1}{x} + 1$



المجال: $\{x | x \neq 0\}$
 المدى: $\{f(x) | f(x) \neq 1\}$
 $f(x) = \frac{1}{x+5} + 3$ (4)



المجال: $\{x | x \neq -5\}$
 المدى: $\{f(x) | f(x) \neq 3\}$
 الفصل: التفاضل التاموي

التاريخ: _____

الاسم: _____

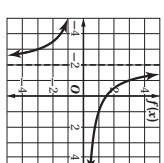
5-3 تدريبات إعادة التعليم

تمثيل دوال المقلوب بيانياً

خطوط التقارب الرأسية والأفقية

الدالة الرئيسية (الأم) لدوال المقلوب	$y = \frac{1}{x}$
شكل التمثيل البياني	قطع زائد
المجال	جميع الأعداد الحقيقية ما عدا الصفر
المدى	جميع الأعداد الحقيقية ما عدا الصفر
التأثيل	متأثيل حول المستقيم $y = x$
المقطعان	لا يوجد
خطا التقارب	المحور x والمحور y

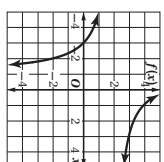
مثال
حدد خطوط التقارب، والمجال، والمدى للدالة: $f(x) = \frac{3}{x+2} - 2$



حيث قيم x التي تكون عندها الدالة غير معرّفة بمساواة المقام بالصفر.
 $x = -2$ إذن $x+2=0$
 والدالة غير معرّفة عندما $x = -2$ ، ولذا فإن لها خط تقارب رأسي عند $x = -2$.
 وإن قيم $f(x)$ تقترب من الصفر كلما تقتصت قيم x من -2 ، بلا حدود،
 وكلما زادت قيم x من -2 ، بلا حدود أيضاً. وهذا يعني وجود خط تقارب أفقي عند $f(x) = 0$.
 مجال هذه الدالة هو جميع الأعداد الحقيقية ما عدا -2 .
 وأما مداها فهو جميع الأعداد الحقيقية ما عدا الصفر.

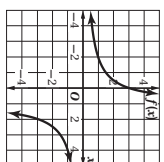
تمارين
حدد خطوط التقارب، والمجال، والمدى لكلٍّ من الدوال الآتية:

(3) $f(x) = \frac{4}{x+1} + 2$



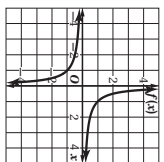
خطوط التقارب: $x = -1$ ، $f(x) = 2$
 المجال: $\{x | x \neq -1\}$
 المدى: $\{f(x) | f(x) \neq 2\}$

(2) $f(x) = \frac{-3}{x-1}$



خطوط التقارب: $x = 1$ ، $f(x) = 0$
 المجال: $\{x | x \neq 1\}$
 المدى: $\{f(x) | f(x) \neq 0\}$

(1) $f(x) = \frac{1}{x}$



خطوط التقارب: $x = 0$ ، $f(x) = 0$
 المجال: $\{x | x \neq 0\}$
 المدى: $\{f(x) | f(x) \neq 0\}$

الفصل 5: العلاقات والدوال التسمية

16

الفصل: التفاضل التاموي

التاريخ:

الاسم:

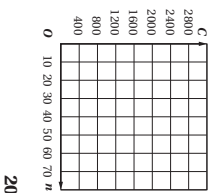
5-3 تدريبات حل المسألة

تمثيل دوال المتكوب بيانيًا

- (3) سلم العمارة، يتغير عدد الأرناب في جميع لها تبعًا للمدانة:
- $$P(t) = \frac{40}{t+2} + 10$$
- عل أن قيل $P(t)$ عدد الأرناب بعد t شهرًا، ماذا يحدث لعدد الأرناب على المدى البعيد؟
- يثبت عدد الأرناب عند 10 أرناب.

- (4) حاسب آلي، تتفق شركة تصنيع أجهزة حاسب آلي مبلغ 20000 ريال على صورة أجرور وثقتات تشغيل، بالإضافة إلى 1740 ريالًا تقطع غيار كل جهاز.
- (a) اكتب معادلة تربط متوسط تكلفة صنع جهاز الحاسب الواحد بعدد الأجهزة التي تصنعها الشركة.
- $$C = \frac{20000}{n} + 1740$$

(b) مثل الدالة التي وجدتها في الفرع a بيانيًا.



(c) ما الحد الأدنى لعدد أجهزة الحاسب الآلي التي

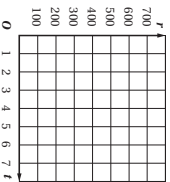
يتعين أن تصنعها الشركة حتى يكون متوسط تكلفة الجهاز الواحد أقل من 2740 ريالًا؟

- (1) رحلة، استأجرت أسرة سيارة للذهاب في رحلة. استأجر السيارة يكلف 375 ريالًا بالإضافة إلى 1.2 ريال لكل كيلومتر.
- (a) اكتب معادلة تربط متوسط التكلفة لكل كيلومتر واحد بعدد الكيلومترات المقطوعة.
- $$C = 375 + 1.2m$$

(b) وضح أنه قيود يمكن وضعها على كل من المجال والذي في هذه الحالة.

المجال والذي هذا الأعداد الحقيقية الموجبة، فلا يمكن أن تكون المسافة صفرًا أو عددًا سالبًا.

- (2) طائرات، من المقرر أن تطلع طائرة من جازان في رحلة مسافتها 800 ميل إلى الدمام عند الوقت $t=0$ ، وقد تأخر موعد إقلاع الطائرة ساعتين.
- المعادتان $t = \frac{800}{r}$ ، $r = \frac{800}{t}$ تمثلان سرعة الطائرة r ، على صورة دالة بالنسبة للزمن t . مثل هاتين المعادلتين على المستوى الإحداثي أفناه على أن يمثل المحور الأفقي الزمن t ، ويمثل المحور الرأسي السرعة r ، ما العلاقة بين المنحنيين؟



التشغيل البياني الثاني هو إزاحة للتشغيل الأول بمقدار وحدتين إلى اليمين.

المصف، الثاني المتناوي

19

الفصل 5 : العلاقات والدوال النسبية

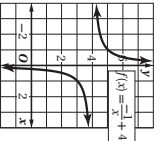
التاريخ:

الاسم:

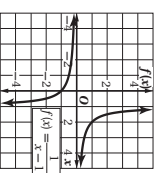
5-3 تدريبات المهارات

تمثيل دوال المتكوب بيانيًا

حدد خطوط التقارب، والمجال، والذي لكل من الدالتين الآتيتين:



(2)



(1)

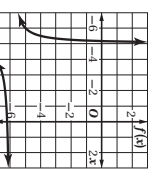
خطوط التقارب: $x=0$, $y=4$

المجال: $\{x|x \neq 0\}$

الذي: $\{f(x)|f(x) \neq 4\}$

$$f(x) = \frac{-1}{x+5} - 6$$

(4)

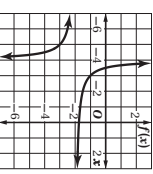


المجال: $\{x|x \neq -5\}$

الذي: $\{f(x)|f(x) \neq -6\}$

$$f(x) = \frac{1}{x+4} - 2$$

(6)



المجال: $\{x|x \neq -4\}$

الذي: $\{f(x)|f(x) \neq -2\}$

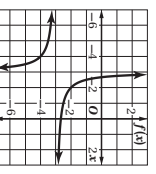
خطوط التقارب: $x=1$, $y=0$

المجال: $\{x|x \neq 1\}$

الذي: $\{f(x)|f(x) \neq 0\}$

$$f(x) = \frac{1}{x+3} - 3$$

(3)

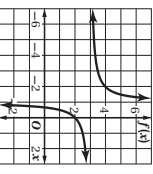


المجال: $\{x|x \neq -3\}$

الذي: $\{f(x)|f(x) \neq -3\}$

$$f(x) = \frac{-1}{x+1} + 3$$

(5)



المجال: $\{x|x \neq -1\}$

الذي: $\{f(x)|f(x) \neq 3\}$

المصف، الثاني المتناوي

18

الفصل 5 : العلاقات والدوال النسبية

الاسم: _____ التاريخ: _____

5-4 تدريبات إعادة التعليم

تمثيل الدوال النسبية بيانيًا

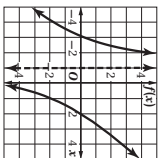
خطوط التقارب الرأسية والأفقية

الدالة النسبية	دالة تكتب على الصورة $\frac{p(x)}{q(x)}$ على أن تكون $f(x) = \frac{p(x)}{q(x)}$ دالة كبريتي حدود و $q(x) \neq 0$.
المجال	يكون مجال الدالة النسبية من الأعداد التي تكون الدالة معرفة عندها.
خط التقارب الرأسي	خط التقارب مستقيم يقرب منه التمثيل البياني للدالة. إذا كانت الدالة النسبية في أبسط صورة لها غير معرفة عند $x=h$ فإن المستقيم $x=h$ خط تقارب رأسي لهذه الدالة.
خط التقارب الأفقي	يكون للدالة النسبية خط تقارب أفقي أحياناً عندما تُستثنى قيمة من المدى.

مثال $f(x) = \frac{x^2+x-6}{x+1}$ بيانيًا.

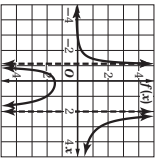
$$\frac{x^2+x-6}{x+1} = \frac{(x+3)(x-2)}{x+1}$$

x	-5	-4	-3	-2	0	1	2	3	4
$f(x)$	-3.5	-2	0	4	-6	-2	0	1.5	2.8

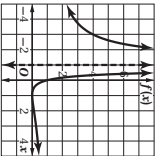


تعاريف:
مثل كل دالة عا ياتي بيانيًا:

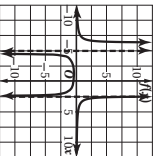
(3) $f(x) = \frac{x+3}{x^2-x-2}$



(2) $f(x) = \frac{x^2-2x+1}{x^2+2x+1}$



(1) $f(x) = \frac{4}{x^2+3x-10}$



الفصل ٥ : العلاقات والدوال النسبية

21

الصف : الثاني الثانوي

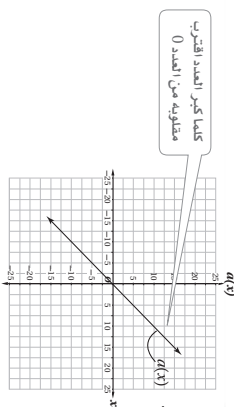
الاسم: _____ التاريخ: _____

5-3 التدرجات الإثرائية

خصائص المقلوب والتعميل البياني لدوال مقلوب

يمكنك استعمال الخصائص الأساسية والتمثيل البياني للدالة الخطية $h(x)$ لتمثيل الدالة $f(x) = \frac{1}{a(x)}$ ، $a(x) \neq 0$ بيانيًا بشكل تقريبي.

- بعض الخصائص الأساسية للمقرب عدد:
- مقرب العدد 0 غير معرف.
- للمقرب إشارة العدد نفسه.
- مقرب العدد 1 هو العدد 1.
- كلما كبر العدد الموجب بدرجة كبيرة جدًا كلما اقترب مقربه من العدد 0.

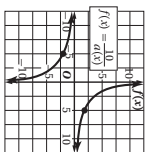


مثال $f(x) = \frac{10}{a(x)}$ بيانيًا بشكل تقريبي.

x	10	5	0.1	0	-0.1	-5	-10
$f(x)$	1	2	100	غير معرف	-10	-2	-1

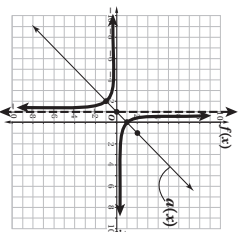
كون جدولاً يتضمن بعض النقاط لتساعدك في التمثيل البياني ثم حل بينها:

ويلاستفادة من الخصائص الأساسية للمقرب والتعميل البياني للدالة $h(x)$ ، فإن التمثيل البياني للدالة $f(x) = \frac{10}{a(x)}$ يكون كما هو موضح جانيًا.



(2) مستقيماً من التعميل

(1) مثل الدالة $f(x) = \frac{20}{a(x)}$ مستقيماً من التعميل البياني للدالة $h(x)$ في المثال أعلاه.



الفصل ٥ : العلاقات والدوال النسبية

20

الصف : الثاني الثانوي

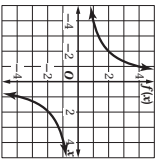
الاسم: التاريخ:

5-4 تدريبات المهارات

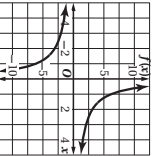
تمثيل الدوال النسبية بيانياً

مثل كل دالة على ياني بيانياً:

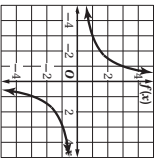
(3) $f(x) = \frac{-4}{x}$



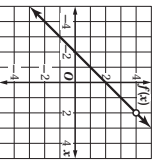
(2) $f(x) = \frac{10}{x}$



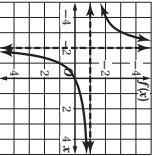
(1) $f(x) = \frac{-3}{x}$



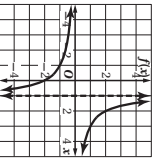
(6) $f(x) = \frac{x^2 - 4}{x - 2}$



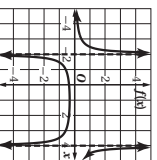
(5) $f(x) = \frac{x}{x + 2}$



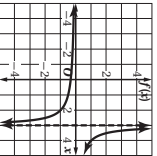
(4) $f(x) = \frac{x - 2}{x - 1}$



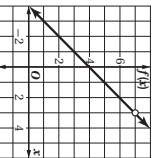
(9) $f(x) = \frac{3}{x^2 - 2x - 8}$



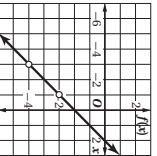
(8) $f(x) = \frac{x - 1}{x^2 - 4x + 3}$



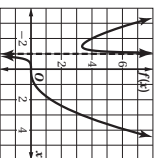
(7) $f(x) = \frac{x^2 + x - 12}{x - 3}$



(11) $f(x) = \frac{2x^3 + 4x^2 - 10x - 12}{2x^2 + 8x + 6}$



(10) $f(x) = \frac{x^3}{2x + 2}$



الفصل 5 : العلاقات والدوال النسبية

23

المصف : الثاني الثانوي

الاسم: التاريخ:

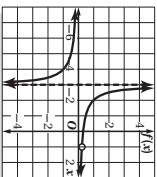
5-4 تدريبات إعادة التعليم

تمثيل الدوال النسبية

(تتمه)

نقطة الانفصال يوجد في بعض الأحيان نقاط انفصال في التمثيل البياني للدالة النسبية، وتظهر هذه النقاط على صورة فجوات في التمثيل البياني للدالة؛ لأن الدالة تكون غير معرفة عند تلك النقطة، ولكنها معرفة حولها.

نقطة الانفصال	مثال
إذا كانت $f(x) = \frac{a(x)}{b(x)}$ وكان $b(x) \neq 0$ حيث $f(x) = \frac{a(x)}{b(x)}$ ، فإنه توجد نقطة انفصال عندما $x = 0$.	



مثل الدالة $f(x) = \frac{x - 1}{x^2 + 2x - 3}$.

$\frac{x - 1}{x^2 + 2x - 3} = \frac{x - 1}{(x - 1)(x + 3)} = \frac{1}{x + 3}$

وعندها فإن التمثيل البياني للدالة $f(x)$ خط تقارب رأسي عند $x = -3$ وله نقطة انفصال عندما $x = 1$.

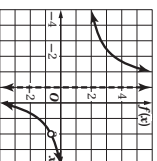
كون جدول قيم للدالة وعين النقاط في المستوى الإحداثي وصل بينها.

x	-2.5	-2	-1	-3.5	-4	-5
$f(x)$	2	1	0.5	-2	-1	-0.5

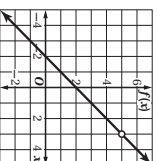
تقاربن

مثل كل دالة على ياني بيانياً:

(2) $f(x) = \frac{x^2 - 6x + 8}{x^2 - x - 2}$



(1) $f(x) = \frac{x^2 - x - 6}{x - 3}$



الفصل 5 : العلاقات والدوال النسبية

22

المصف : الثاني الثانوي

التدريبات الإثرائية

خصائص التمثيلات البيانية للدوال النسبية

بإخص الجدول الآتي بعض المعلومات المستعملة لتمثيل الدوال النسبية بيانيًا.

طريقة إيجادها	معناها	الخاصية
مساواة المقام بالصفر، وحل المعادلة بالنسبة لـ x .	خط رأسي عند قيم x التي تكون الدالة غير معرفة عندها.	خطوط التقارب الرأسية
ادرس سلوك طرق التمثيل البياني.	خط أفقي عند قيم y التي يقترب منها التمثيل البياني عندما تأخذ x قيمًا موجبة أو سالبة كبيرة جدًا.	خطوط التقارب الأفقية
احسب قيمة المعارة النسبية بالتعويض عن x بقيم موجبة كبيرة من أجلية.	كيف يبدو التمثيل البياني عندما تأخذ x قيمًا موجبة كبيرة.	سلوك الطرف الأيمن
احسب قيمة المعارة النسبية بالتعويض عن x بقيم سالبة صغيرة جدًا ($x \rightarrow -\infty$).	كيف يبدو التمثيل البياني عندما تأخذ x قيمًا سالبة صغيرة جدًا (تقترب من $-\infty$).	سلوك الطرف الأيسر
مساواة البسط بالصفر، وحل المعادلة بالنسبة لـ x .	النقطة (أو النقاط) التي يقطع عندها التمثيل البياني المحور x .	الجزور أو الأصغار أو المقاطع x
عوض $x=0$ في المعارة النسبية لتجد قيمة المقطع y .	النقطة التي يقطع عندها التمثيل البياني المحور y .	المقاطع y

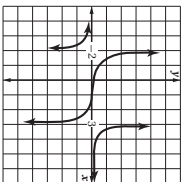
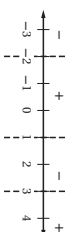
ويعتد بخطط الإشارات من الأدوات المفيدة في تحليل الدوال بيانيًا.

مثال 1

تستعمل في بخطط الإشارات قيمة للمتغير x على مبدن كل قيمة حرجة (القيم التي تجعل البسط أو المقام صفرًا) وقيمة على يسارها، لتحديد ما إذا كان التمثيل البياني موجبًا أو سالبًا في تلك الفترة.

يبين المخطط أدناه إشارات الدالة

$$y = \frac{x-1}{x^2-x-6}$$



والشكل المجاور هو التمثيل البياني للدالة

$$y = \frac{x-1}{x^2-x-6}$$

تعرين

أشنى بخطط إشارات للدالة $y = \frac{x-1}{x^2-4}$

قيمة حرجة، وقيمة على يسارها لتحديد ما إذا كان التمثيل البياني موجبًا أو سالبًا في تلك الفترة، ثم ممل الدالة بيانيًا.

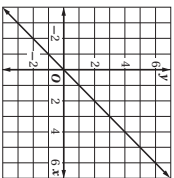
تدريبات حل المسألة

تمثيل الدوال النسبية بيانيًا

(1) تمثيلات بيانية، ممتد عليها الدالة

$$f(x) = \frac{x^2-4x}{x-4}$$

يوجد خطأ في هذا التمثيل البياني، بين كيف يمكنك تصحيحه.



يكتب مسج النقطة (4,4) من التمثيل البياني ووضع دائرة صغيرة حوله

(2) ثيوتن، درس إسحق نيوتن الدالة النسبية:

$$f(x) = \frac{x}{ax^3 + bx^2 + cx + d}$$

مفترضًا أن $d \neq 0$ ، أين يقع خط التقارب الرأسي للتمثيل البياني لهذه الدالة؟ عند $x = 0$

(3) معدل تسجيل الأهداف، معدل تسجيل الأهداف لأحد لاعبي كرة السلة خلال سنوات مشاركته في هذه اللعبة حتى بداية موسم 1432 هجرية يساوي 0.305، فقد سجل 984 مرة من 3226 محاولة. وفي موسم 1432 هجرية سجل 183 مرة.

(a) اكتب معادلة تصف معدل تسجيل الأهداف لهذا اللاعب في نهاية موسم 1432 هجرية مستعملًا x لعدد حاولات التسجيل في هذا الموسم.

$$y = \frac{(984+183)(x+3226)}{x}$$

الاسم: التاريخ:

5-5 تدريبات إعادة التعليم

(تتمه)
دوال التغير

التغير العكسي والتغير المركب

التغير العكسي	التغير المركب
تغير y عكسيًا مع x إذا وجد عدد ثابت k لا يساوي الصفر بحيث إن $xy = k$ أو $y = \frac{k}{x}$ ، حيث $x \neq 0$ و $y \neq 0$	يحدث عندما تغير كمية ما طرقيًا أو عكسيًا أو كليهما معًا مع كميّتين أخريّين أو أكثر. إذا كانت y تتناسب طرقيًا مع x وعكسيًا مع z ، فاستعمل التناسب $\frac{y_1}{x_1} = \frac{y_2}{x_2} = \frac{y_3}{x_3}$ لحل المسائل.

مثال إذا كانت a تتغير طرقيًا مع b وعكسيًا مع c ، فأوجد قيمة b عندما $a=10$ و $c=-5$ ، علمًا أن $a=3$ و $b=4$ عندما $c=2$.

تناسب التغير المركب

$$a_1 = \frac{a_1 c_1}{c_1}, a_2 = \frac{a_2 c_2}{c_2}$$

حل المعادلتين بالنسبة إلى k

$$k = \frac{a_1 c_1}{b_1}, k = \frac{a_2 c_2}{b_2}$$

مسواة النتيجة

$$\frac{a_1 c_1}{b_1} = \frac{a_2 c_2}{b_2}$$

بالعرض في القيم المعطاة

$$\frac{(-2)3}{4} = \frac{b_2}{10(-5)}$$

بالضرب التبادلي

$$(-2)3 \cdot b_2 = 10(-5)4$$

بالتبسيط

$$b_2 = 33\frac{1}{3}$$

تمارين

- 1 إذا كانت y تتغير عكسيًا مع x ، وكانت $y=12$ عندما $x=10$ ، فأوجد قيمة y عندما $x=15$.
- 2 إذا كانت y تتغير عكسيًا مع x ، وكانت $x=100$ عندما $z=38$ ، فأوجد قيمة y عندما $x=76$.
- 3 إذا كانت y تتغير عكسيًا مع x ، وكانت $z=32$ عندما $x=42$ ، فأوجد قيمة y عندما $x=24$.
- 4 إذا كانت y تتغير عكسيًا مع x ، وكانت $z=36$ عندما $x=10$ ، فأوجد قيمة y عندما $x=30$.
- 5 إذا كانت y تتغير عكسيًا مع x ، وكانت $z=44$ عندما $x=20$ ، فأوجد قيمة y عندما $x=55$.
- 6 إذا كانت y تتغير عكسيًا مع x ، وكانت $z=80$ عندما $x=14$ ، فأوجد قيمة y عندما $x=35$.
- 7 إذا كانت y تتغير عكسيًا مع x ، وكانت $z=3$ عندما $x=8$ ، فأوجد قيمة y عندما $x=40$.
- 8 إذا كانت y تتغير طرقيًا مع z وعكسيًا مع x ، وكانت $z=2$ و $x=16$ ، وكانت $z=42$ عندما $x=14$ و $z=8$ ، فأوجد قيمة x عندما $z=192$.

المصف: الثاني الثانوي الفصل 5: العلاقات والدوال النسبية 27

الاسم: التاريخ:

5-5 تدريبات إعادة التعليم

دوال التغير

التغير الطردي والتغير المشترك

التغير الطردي	التغير المشترك
تغير y طرقيًا مع x إذا وجد عدد ثابت k لا يساوي الصفر بحيث أن $y=kx$ ، أو $y = kx$ ويسمى k ثابت التغير.	تغير y تغيرًا مشتركًا مع x و z إذا وجد عدد ثابت k لا يساوي الصفر بحيث أن $y=kxz$.

مثال 1 إذا كانت y تتغير طرقيًا مع x ، وكانت $y=16$ عندما $x=4$ ، فأوجد قيمة x عندما $y=20$.

مثال 2 إذا كانت y تتغير تغيرًا مشتركًا مع x و z ، وكانت $z=10$ عندما $x=2$ و $z=4$ ، فأوجد قيمة y عندما $x=4$ و $z=3$.

تناسب مشترك

$$\frac{y_1}{x_1 z_1} = \frac{y_2}{x_2 z_2}$$
$$\frac{16}{2 \cdot 10} = \frac{y_2}{4 \cdot 3}$$
$$y_2 = 12$$

تناسب الطردي

$$\frac{y_1}{x_1} = \frac{y_2}{x_2}$$
$$\frac{16}{4} = \frac{y_2}{x_2}$$
$$4x_2 = y_2$$
$$4x_2 = 12$$
$$x_2 = 3$$

بالضرب التبادلي

$$16x_2 = 12 \cdot 4$$
$$16x_2 = 48$$
$$x_2 = 3$$

بقسمة كلا الطرفين على 16 والتبسيط

$$x_2 = 3$$

إذن $x=3$ عندما $z=4$ و $y=20$.

تمارين

- 1 إذا كانت y تتغير طرقيًا مع x ، وكانت $y=9$ عندما $x=6$ ، فأوجد قيمة y عندما $x=8$.
- 2 إذا كانت y تتغير طرقيًا مع z ، وكانت $z=9$ عندما $x=15$ ، فأوجد قيمة y عندما $x=33$.
- 3 إذا كانت y تتغير طرقيًا مع x ، وكانت $z=18$ عندما $x=5$ ، فأوجد قيمة y عندما $z=9$.
- 4 افترض أن y تتغير تغيرًا مشتركًا مع x و z ، فأوجد قيمة y عندما $x=6$ و $z=8$ ، علمًا أن $z=32$ عندما $x=4$ و $z=2$ عندما $x=2$.
- 5 افترض أن y تتغير تغيرًا مشتركًا مع x و z ، فأوجد قيمة y عندما $x=5$ و $z=3$ ، علمًا أن $z=18$ عندما $x=3$ و $z=2$ عندما $x=4$.
- 6 افترض أن y تتغير تغيرًا مشتركًا مع x و z ، فأوجد قيمة y عندما $x=5$ و $z=11$ ، علمًا أن $z=60$ عندما $x=4$ و $z=7$ عندما $x=3$.
- 7 افترض أن y تتغير تغيرًا مشتركًا مع x و z ، فأوجد قيمة y عندما $x=4$ و $z=11$ ، علمًا أن $z=60$ عندما $x=4$ و $z=7$ عندما $x=3$.
- 8 افترض أن y تتغير تغيرًا مشتركًا مع x و z ، فأوجد قيمة y عندما $x=60$ و $z=2$ ، علمًا أن $z=84$ عندما $x=4$ و $z=7$ عندما $x=3$.
- 9 إذا كانت y تتغير طرقيًا مع x ، وكانت $z=39$ عندما $x=60$ ، فأوجد قيمة x عندما $z=42$ و $x=52$ ، فأوجد قيمة x عندما $z=16.5$.
- 10 إذا كانت y تتغير طرقيًا مع x ، وكانت $z=39$ عندما $x=60$ ، فأوجد قيمة x عندما $z=42$ و $x=52$ ، فأوجد قيمة x عندما $z=16.5$.

المصف: الثاني الثانوي الفصل 5: العلاقات والدوال النسبية 26

الاسم: التاريخ:

5-5 تدريبات حل المسألة

دوال التغير

- (4) طلاء، تتغير تكلفة طلاء جدار طرديًا مع مساحته. اكتب صيغة لحساب تكلفة طلاء جدار مستطيل الشكل طوله l وعرضه w . هل تتغير التكلفة مع كل من l و w ؟
تغيرًا طرديًا أم مشتركًا أم عكسيًا؟
 $kw = C$ **في حين C التكلفة و k ثابت . تتغير C تتغير w مشتركًا مع l أم w .**

- (5) هيدروجين، يتغير وزن هيدروجين طرديًا مع حجم الهلوان. يريد أحد العمال أن يبتدئ خزان هيدروجين على هيئة متوازي مستطيلات

$$L, W, H$$

(a) املاء الخلايا الفارغة في الجدول أدناه.

أبعاد خزان		التمس	
الهيدروجين (البرصات)		(بالريالات)	
L	W	H	
36	36	36	2700
18	18	24	450
24	24	24	800

- (b) يتبين أن يكون حجم الخزان مناسبًا لو وضعه على رف ذي ارتفاع وصفي ثابتين. كيف يتغير وزن الخزان مع عرض الخزان ذي الارتفاع والعرض الثابتين؟

يتغير الوزن طرديًا مع عرض الخزان.

- (c) ما وزن خزان كروي الشكل نصف قطره 24 بوصة؟

تذكر أن حجم الكرة التي نصف قطرها r يساوي $(\frac{4}{3}\pi r^3)$

$$3351.03 \text{ ريال}$$

الفصل ٥ ، العلاقات والدوال التسمية

الاسم:

5-5

تدريبات حل المسألة

- (1) غوص، يتغير الارتفاع الذي يقفز إليه الغواص فوق منصة الغوص طرديًا مع المسافة التي يتحققها طرف النعشة تحت مسيرها الطبيعي. إذا قفز غواص إلى ارتفاع 44 بوصة فوق منصة الغوص عندما انخفض طرف منصة الغوص 12 بوصة، فما الارتفاع الذي يقفز إليه الغواص إذا انخفض طرف منصة الغوص 18 بوصة؟

$$66 \text{ بوصة}$$

- (2) تصميم مواقف السيارات، يتغير عدد الأماكن المخصصة لوقوف السيارات في مجمع تجاري طرديًا مع عدد المحلات التجارية في المجمع. وتصوره علامة تخصص لكل محل 5 مواقف. يخطط مستثمر لإنشاء مجمع تجاري على قطعة أرض تضم مساحة كافية لوقوف 120 سيارة، فما عدد المحلات التجارية التي يتعين على المستثمر أن يقيمها في هذا المجمع؟

$$24$$

- (3) إيجار، تبلغ أجرة شقة m ريالًا في الشهر. إذا شارك n طالبًا في استئجار الشقة، وتناقصوا أجزأها بينهم بالتساوي، فكم يتعين على كل طالب أن يدفع؟ وكيف تتغير حصة الطالب الواحد من الأجرة مع تغير عدد الطلاب؟ عندما استأجر الشقة طالبان اثنان دفع كل منهما 2000 ريال، فكم يدفع الطالب الواحد إذا كان عدد التشاركين في استئجار الشقة 5 طلاب؟

يدفع كل طالب $\frac{m}{n}$ ريال . تتغير حصة الطالب الواحد عكسيًا مع عدد الطلاب، ولذا سيبقى الطالب الواحد 800 ريال .

الفصل ٥ ، التفاضل والتكامل

الاسم: التاريخ:

5-5 تدريبات المهارات

دوال التغير

حدد ما إذا كانت المعادلة في كل ما يأتي تغيرًا طرديًا أو عكسيًا، أو مشتركًا، أو مشتركًا ثم أوجد ثابت التغير في كل منها.

$A = \frac{1}{2}bh$ (3)	$p = \frac{4}{q}$ (2)	$c = 12m$ (1)
مشترك؛ $\frac{1}{2}$	عكسي؛ 4	طردي؛ 12
$y = 0.2d$ (6)	$f = 5280m$ (5)	$rw = 15$ (4)
طردي؛ 0.2	طردي؛ 5280	عكسي؛ 15
$C = 2\pi r$ (9)	$R = \frac{8}{t}$ (8)	$t = 16rh$ (7)
طردي؛ 2π	عكسي؛ 8	مشترك؛ 16

- (10) إذا كانت y تتغير طرديًا مع x ، وكانت $x=7$ عندما $x=11$.

- (11) إذا كانت y تتغير طرديًا مع x ، وكانت $y=360$ عندما $x=180$ ، فأوجد قيمة y عندما $x=270$.

- (12) إذا كانت y تتغير طرديًا مع x ، وكانت $y=540$ عندما $x=10$ ، فأوجد قيمة x عندما $y=1080$.

- (13) إذا كانت y تتغير عكسيًا مع x ، وكانت $x=18$ عندما $x=2$ ، وكانت $x=3$ ، فأوجد قيمة y عندما $x=5$ و $x=6$.

- (14) إذا كانت y تتغير عكسيًا مع x ، وكانت $x=4$ و $x=2$ ، فأوجد قيمة y عندما $x=7$ و $x=-1$.

- (15) إذا كانت y تتغير عكسيًا مع x ، وكانت $x=2$ عندما $x=1$.

- (16) إذا كانت y تتغير عكسيًا مع x ، وكانت $x=6$ عندما $x=5$ ، فأوجد قيمة y عندما $x=10$.

- (17) إذا كانت y تتغير عكسيًا مع x ، وكانت $x=3$ عندما $x=14$ ، فأوجد قيمة x عندما $x=6$.

- (18) إذا كانت y تتغير طرديًا مع z وعكسيًا مع x ، وكانت $y=27$ و $z=-3$ عندما $x=2$ ، فأوجد قيمة x عندما $z=5$ و $z=-10$.

الفصل ٥ ، العلاقات والدوال التسمية

28

الفصل ٥ ، العلاقات والدوال التسمية

التاريخ:

الاسم:

5-6 تدريبات إعادة التعليم حل المعادلات واختبارات النسبية

حل المعادلات النسبية ، تتضمن المعادلة النسبية عبارة نسبية واحدة أو أكثر. وحل المعادلة النسبية، ضرب طرفيها في LCM لقادماها جميعها، واحرص على استثناء الجذور التي تجعل المقام صفراً.

مثال حل المعادلة $\frac{9}{10} + \frac{2}{x+1} = \frac{2}{5}$ ، وتحقق من صحة حلك.

المعادلة الأصلية $\frac{9}{10} + \frac{2}{x+1} = \frac{2}{5}$

ضرب الطرفين في $10(x+1)$ $10(x+1)\left(\frac{9}{10} + \frac{2}{x+1}\right) = 10(x+1)\frac{2}{5}$

بالتبسيط $9(x+1) + 2(10) = 4(x+1)$

خاصية التوزيع $9x + 9 + 20 = 4x + 4$

طرح $4x$ و -20 من الطرفين $5x = -25$

القسمة على 5 $x = -5$

المعادلة الأصلية $\frac{9}{10} + \frac{2}{x+1} = \frac{2}{5}$

تحقق $\frac{9}{10} + \frac{2}{x+1} = \frac{2}{5}$

$x = -5$ $\frac{9}{10} + \frac{2}{-5+1} = \frac{2}{5}$

بالتبسيط $\frac{18}{20} - \frac{10}{20} = \frac{2}{5}$

تعاريف

حل كل معادلة مما يأتي، وتحقق من صحة حلك:

(1) $\frac{2x+1}{3} - \frac{x-5}{4} = \frac{1}{2}$ (3) $\frac{4t-3}{5} - \frac{4-2t}{3} = 1$ (2) $\frac{2y}{3} - \frac{y+3}{6} = 2$ (1)

$-\frac{13}{5}$ (6) $\frac{x}{x-2} + \frac{4}{x-2} = 10$ (5) $\frac{4}{x-1} = \frac{x+1}{12}$ (4) $\frac{3m+2}{5m} + \frac{2m-1}{2m} = 4$ (7) $\frac{1}{24}$

(7) أعمال، يعمل خالد ومشعل ونايف بطلاء المنازل. ويقدر خالد أن بإمكانه طلاء منزل معين وحده في 4 أيام، ويقدر مشعل أنه يقوم بهذا العمل وحده في $\frac{1}{3}$ 5 أيام، ويقدر نايف القيام بالعمل وحده في 6 أيام. إذا كانت هذه التقديرات صحيحة، فكم يستغرق طلاء المنزل إذا عمل الثلاثة معاً؟ هل هذه الإجابة معقولة؟

$\frac{2}{3}$ 1 يوم تقريباً. الإجابة معقولة؛ لأن ما يستغرقه الواحد منهم في التوسط لطلاء المنزل 5 أيام، ولذلك إذا اشترك الثلاثة في العمل فسيكمله في $\frac{1}{3}$ 1 اليوم.

الفصل ٥ : العلاقات والدوال النسبية

31

المصف ، الثاني الثانوي

التاريخ:

الاسم:

5-5 التدرجات الإثرائية الأقمار الصناعية وانتزاعية الحركة مع الأرض

انتشرت الأقمار الصناعية التي تدور حول الأرض انتشار أجيالاً مختلفة المحمول التي تعتمد على هذه الأقمار. والقمر الصناعي الثامن لبرنامج الحركة مع الأرض هو القمر الذي يبقى في الموقع نفسه فوق الأرض في الأوقات كلها. وتستعمل هذا النوع من الأقمار الصناعية في اتصالات الهاتف المحمول، يستقبل الإشارات من أبراج الاتصالات على الأرض ويرسلها إلى أخرى.

والسرعة التي تتحرك بها هذه الأقمار بالغة الأهمية، فإذا كانت السرعة قليلة جداً يسقط القمر الصناعي على الأرض بفعل قوة الجاذبية الأرضية، وإذا كانت السرعة كبيرة جداً فسيغلب القمر على قوة الجاذبية وينطلق إلى الفضاء ولا يعود أبداً. ويضع قانون نيوتن الثاني في الحركة على أن القوة المؤثرة في جسم تساوي حاصل ضرب كتلته في تسارعه، أي أن $F=ma$ ومن المعلوم أيضاً أن محصلة قوة الجذب بين جسمين تتناسب عكسياً مع مربع المسافة بينهما.

وعليه فإن هناك متغيرين تعتمد عليهما القوة وحما: السرعة والارتفاع عن سطح الأرض. ووضح قانون نيوتن الثاني، $F=ma$ ، أن القوة تتناسب طرئاً مع التسارع في حين تحل الكتلة الثانية m على ثابت التناسب k .

تعاريف

(1) قوة الجاذبية التي تؤدي إلى تسارع القمر الصناعي تتناسب عكسياً مع مربع المسافة بينه وبين الأرض، اكعب هذه القوى على صورة معادلة.

$F = \frac{k}{r^2}$ حيث يمثل k ارتفاع القمر الصناعي عن سطح الأرض.

(2) قانون الجاذبية التي كتبتها في التمرين 1 وقانون نيوتن الثاني أمثلة لتوضح كيف يتغير تسارع القمر الصناعي مع ارتفاع القمر عن الأرض.

$\frac{k}{r^2} = a \rightarrow \frac{k}{r^2} = m \cdot a \rightarrow \frac{k}{r^2} = m \cdot \frac{1}{T^2} \rightarrow \frac{k}{r^2} = m \cdot \frac{4\pi^2}{T^2}$ ولذا فإن التسارع يتغير عكسياً مع مربع ارتفاع القمر عن سطح الأرض.

(3) بين كيف تتغير سرعة القمر الصناعي مع ارتفاعه عن سطح الأرض مستخدماً حقيقة أن السرعة تساوي ناتج قسمة المسافة على الزمن ومعتبراً أن مسار القمر دائري الشكل.

تغير طردي، السرعة = $\frac{\text{المسافة}}{\text{الزمن}} \rightarrow \text{السرعة} = \frac{(2\pi r)}{\text{يوم واحد}}$ حيث يساوي $R, R+h, R$ ارتفاع القمر عن سطح الأرض و R نصف قطر الأرض.

الفصل ٥ : العلاقات والدوال النسبية

30

المصف ، الثاني الثانوي

التاريخ: _____

الاسم: _____

5-6 تدريبات المهارات

حل المعادلات والتبانيات النسبية

حل كل معادلة مما يأتي، وتحقق من صحة حلك:

$$\frac{12}{5} \quad 2 = \frac{4}{n} + \frac{1}{3} \quad (2)$$

$$-1 \quad \frac{x}{x-1} = \frac{1}{2} \quad (1)$$

$$1,2 \quad 3 - z = \frac{2}{z} \quad (4)$$

$$-1 \quad \frac{9}{3x} = -\frac{6}{2} \quad (3)$$

$$-5,8 \quad \frac{r-3}{5} = \frac{8}{r} \quad (6)$$

$$5 \quad \frac{2}{d+1} = \frac{1}{d-2} \quad (5)$$

$$3,4 \quad -\frac{12}{y} = y - 7 \quad (8)$$

$$-3 \quad \frac{2x+3}{x+1} = \frac{3}{2} \quad (7)$$

$$4 \quad \frac{3b-2}{b+1} = 4 - \frac{b+2}{b-1} \quad (10)$$

$$3 \quad \frac{15}{x} + \frac{9x-7}{x+2} = 9 \quad (9)$$

$$\frac{2}{5} \quad 8 - \frac{4}{z} = \frac{8z-8}{z+2} \quad (12)$$

$$-5 \quad 2 = \frac{5}{2q} + \frac{2q}{q+1} \quad (11)$$

$$\emptyset \quad \frac{1}{w+2} + \frac{1}{w-2} = \frac{4}{w^2-4} \quad (14)$$

$$-4 \quad \frac{1}{n+3} + \frac{5}{n^2-9} = \frac{2}{n-3} \quad (13)$$

$$2 \quad \frac{12p+19}{p^2+7p+12} - \frac{3}{p+3} = \frac{5}{p+4} \quad (16)$$

$$\emptyset \quad \frac{x-8}{2x+2} + \frac{x}{2x+2} = \frac{2x-3}{x+1} \quad (15)$$

$$k > 0 \quad \frac{3}{k} - \frac{4}{3k} > 0 \quad (18)$$

$$x > 8 \quad \frac{x-2}{x+4} > \frac{x+1}{x+10} \quad (17)$$

$$n < -3 \text{ و } 0 < n < 3 \quad n + \frac{3}{n} < \frac{12}{n} \quad (20)$$

$$0 < v < 4 \quad 2 - \frac{3}{v} < \frac{5}{v} \quad (19)$$

$$0 < x < \frac{3}{2} \quad \frac{1}{2x} < \frac{2}{x} - 1 \quad (22)$$

$$0 < m < 1 \quad \frac{1}{2m} - \frac{3}{m} < -\frac{5}{2} \quad (21)$$

الفصل ٥ : العلاقات والدوال النسبية

33

الصف : الثاني الثانوي

التاريخ: _____

الاسم: _____

5-6 تدريبات إعادة التعليم

حل المعادلات والتبانيات النسبية

حل المتباينات النسبية، اتبع الخطوات الآتية عند حل متباينة نسبية:

الخطوة 1: حدد القيم المستتة وهي القيم التي يكون عندها المقام صفراً.

الخطوة 2: حل المعادلة المرتبطة.

الخطوة 3: استعمل القيم التي حصلت عليها في الخطوتين السابقتين لتقسيم خط الأعداد إلى فترات، واختبر قيمة من كل فترة لتحديد الفترة التي تحقق أعدادها المتباينة.

$$\text{مثال} \quad \text{حل المتباينة } \frac{2}{3n} + \frac{4}{5n} \leq \frac{2}{3}$$

الخطوة 1: القيمة المستتة هي 0؛ لأنها تجعل المقام صفراً.

الخطوة 2: حل المعادلة المرتبطة

$$\frac{2}{3n} + \frac{4}{5n} = \frac{2}{3}$$

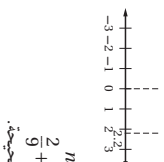
$$15n \left(\frac{2}{3n} + \frac{4}{5n} \right) = 15n \left(\frac{2}{3} \right)$$

$$10 + 12 = 10n$$

$$22 = 10n$$

$$2.2 = n$$

الخطوة 3: ارسم خط الأعداد، وارسم خطاً رأسياً عند القيمة المستتة، وخطاً رأسياً آخر عند حل المعادلة.



اختبر $n=3$
 $\frac{2}{9} + \frac{4}{15} \leq \frac{2}{3}$
 المتباينة صحيحة.

اختبر $n=1$
 $\frac{2}{3} + \frac{4}{5} \leq \frac{2}{3}$
 المتباينة غير صحيحة.

حل هذه المتباينة هو $0 < n \leq 2.2$ أو $n \geq 2.2$.

تباينين

حل كل معادلة مما يأتي، وتحقق من صحة حلك:

$$\frac{1}{x} \geq 4x \quad (2)$$

$$\frac{3}{a+1} \geq 3 \quad (1)$$

$$x \leq -\frac{1}{2}, 0 < x \leq \frac{1}{2}$$

$$-1 < x \leq 0$$

$$\frac{4}{x-1} + \frac{5}{x} < 2 \quad (5)$$

$$\frac{3}{2x} - \frac{2}{x} > \frac{1}{4} \quad (4)$$

$$\frac{3}{x^2-1} + 1 > \frac{2}{x-1} \quad (6)$$

$$x < 0, \frac{1}{2} < x < 1, x > 5$$

$$-2 < x < 0$$

الفصل ٥ : العلاقات ودوال النسبية

32

الصف : الثاني الثانوي

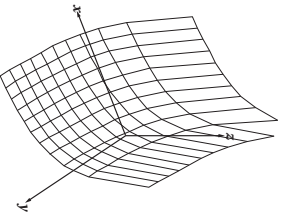
التاريخ:

الاسم:

5-6 التدرّيات الإثرائية

خطوط التقارب ثلاثية الأبعاد

تكون المستويات خطوط تقارب للمنحنيات الثنائية الأبعاد، وبالمثل تكون المستويات تقارب للمنحنيات الثلاثية الأبعاد. ليس للتشكيل البياني للمعادلة $z = x + y$ مستوى تقارب؛ لأن z تقترب من سالب ما لا نهاية عندما تقترب x و y من سالب ما لا نهاية؛ وتقترب z من ما لا نهاية الموجبة عندما تقترب كل من x و y من ما لا نهاية الموجبة أيضًا، وفي المقابل فإن التشكيل البياني للمعادلة $z = \frac{1}{x} + \frac{1}{y}$ مستوى تقارب يوجد فيه فجوة. فهنا المنحني غير معرف للمستويين $x=0$ و $y=0$. ويُعدّ المستوى $z=0$ مستوى تقارب للمنحني؛ لأن المنحني يقترب من هذا المستوى عندما تكبر قيم x و y إلى ما لا نهاية الموجبة أو تصغر إلى ما لا نهاية السالبة.



مثال

$$z = \frac{1}{x+2} + \frac{1}{y+3}$$

عزّ نقطات الانفصال ومستويات التقارب للمنحني

نقطة الانفصال عند $x=-2$ ، $y=-3$ ؛ مستوى التقارب $z=0$

تمارين

عزّ نقطات الانفصال ومستويات التقارب للمنحنيات الآتية:

$$z = \frac{1}{x+8} + \frac{1}{y+5} + 14$$

$$\text{نقطة الانفصال عند } x=-8, y=-5; \text{ مستوى التقارب } z=14$$

$$z = 3x + \frac{1}{y+2}$$

$$\text{نقطة الانفصال عند } x=-2; \text{ لا يوجد مستوى تقارب}$$

$$z = \frac{y}{x+1}$$

$$\text{نقطة الانفصال عند } x=-1; \text{ لا يوجد مستوى تقارب}$$

الفصل ٥ : العلاقات والدوال النسبية

35

المصف: التلميذ التاني

التاريخ:

الاسم:

5-6 تدريبات حل المسألة

حل المسائل والتحديات النسبية

- (4) معلومات: قُذف هدف في الهواء ثم أُطلق صاروخ لاعتراضه. إذا كانت نسبة ارتفاع الصاروخ إلى ارتفاع الهدف الملقى بعد t ثانية من إطلاق الصاروخ
- $$-32t^2 + 420t - 27$$
- هي $\frac{333t}{2500}$
- نفسى يكون الهدف والصاروخ الارتفاع نفسه؟
- عندما t تساوي 3 ثوان

- (5) زمن الرحلة الجوية، المسافة بين الرياض ومونتريخ

2500 ميل تقريبًا. وعندما تغير طائرة معاكسة لاتجاه الرياح، فإنها تستغرق وقتًا أطول عما تستغرقه عند طيرانها مع اتجاه الرياح. افترض أن سرعة الطائرة في الجو s ميل في الساعة، وأن سرعة الرياح 100 ميل في الساعة.

- (a) اكتب معادلة بدلالة s ، إذا علمت أن زمن رحلة الطائرة بين الرياض ومونتريخ يعكس اتجاه الرياح يزيد ساعتين وخمس دقائق على الزمن المستغرق بالطيران مع اتجاه الرياح.
- $$\frac{2500}{s-100} - \frac{2500}{s+100} = 2\frac{1}{12}$$

- (b) حلّ المعادلة التي كتبناها في الفرج ٥.
- 500 ميل / الساعة

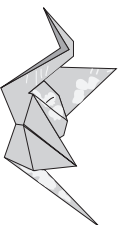
- (c) اكتب معادلة، وأوجد منها الزمن الإضافي الذي تستغرقه الرحلة بين الرياض ومونتريخ بالطيران عكس اتجاه الرياح عنه مع اتجاه الرياح إذا كانت سرعة الطائرة 525 ميلًا في الساعة، وسرعة الرياح 150 ميلًا في الساعة.

$$\frac{2500}{525-150} - \frac{2500}{525+150} = x;$$
$$x = \frac{400}{135} \approx 2.96 \text{ h}$$

- (1) أنفول، سعاد أنصر من أنخيا مرة بمقدار 20cm، ويمكن أن تقول: إنها أنصر من أنخيا نسبة 12.5%. وهذا يعني أن $\frac{1}{8} = \frac{20}{H+20}$ في حين يمثل H طول سعاد. في طول سعاد؟

$$140 \text{ cm}$$

- (2) زينة، تريد بيل وصديقها أن تعلق في قاعة احتفال. 1000 قطعة من الورق طويت كل منها على هيئة طائرة.



- ولا تطوي الفتاة الواحدة أكثر من 15 ورقة. فإذا كان عدد القطع التي يقيس بها العمل N ، فإن $15 \leq \frac{1000}{N}$ ، في أقل قيمة ممكنة للعدد N ؟

$$67$$

- (3) استبحر، استاجر هاشم وأصدقاؤه سيارة وتناشروا

أجرها البالغة 200 ريال بالتساوي. واستأجر هاشم وإثنان من أصدقائه آلة تصوير وتناشروا أجرها البالغة 30 ريالًا بالتساوي. وقد كان مجموع ما دفعه هاشم لاستئجار السيارة وآلة التصوير 50 ريالًا.

اكتب معادلة تتضمن التغير N الذي يمثل عدد أصدقاء هاشم مستعملًا هذه المعطيات، ثم حلّها لتجد قيمة N .

$$\frac{200}{N+1} + \frac{30}{3} = 50; N = 4$$

الفصل ٥ : العلاقات والدوال النسبية

34

المصف: التلميذ التاني