نماذج من

امتحانات

أولمبياد

رياضيات سابقة

النموذج

(1)

نموذج ١

السؤال الأول: BM01(03-04)

حل المعادلات الآنية:

$$ab+c+d=3\ ,\quad bc+d+a=5\ ,$$
$$cd+a+b=2\ ,\quad da+b+c=6$$

حيث a, b, c, d أعداد حقيقة

12 محمود

<u>إجابة السؤال الأول:</u>

$$a\,b + c + d = 3 \ldots\ldots(1) \quad , \quad b\,c + d + a = 5 \ldots\ldots(2) \quad ,$$

$$c\,d + a + b = 2 \ldots\ldots(3) \quad , \quad d\,a + b + c = 6 \ldots\ldots(4)$$

بطرح المعادلة (2) من (1) ينتج أن

ab-bc+c-a= -2

b(a-c)-(a-c)= -2

(a-c)(b-1)= -2 ....(5)

بطرح المعادلة (4) من (3) ينتج أن

cd-da+a-c= -4

-d(a-c)+(a-c)= -4

(a-c)(1-d)= -4 ....(6)

نستنتج من المعادلتين (6) و (5) أن

$a-c \neq 0$

بقسمة المعادلة (6) على (5) ينتج أن

1-d=2(b-1)

d=3-2b ......(7)

بطرح المعادلة (1) من (4) ينتج أن

da-ab+b-d= 3

a(d-b)+(b-d)= 3

(b-d)-a(b-d)= 3

(b-d)(1-a)= 3 ......(8)

بطرح المعادلة (3) من (2) ينتج أن

bc-cd+d-b=3

C(b-d)-(b-d)= 3

نموذج 1

$(b-d)(c-1) = 3$ ....(9)

نستنتج من المعادلتين (9) و (8) أن

$b-d \neq 0$

بقسمة المعادلة (9) على (8) ينتج أن

$1-a = c-1$

$c = 2-a$ ....(10)

بالتعويض من المعادلة (7) و (10) في المعادلة (1) ينتج أن

$ab+2-a+3-2b = 3$ ....(11)

بالتعويض من المعادلة (7) و (10) في المعادلة (2) ينتج أن

$2b-ba+3-2b+a = 5$ ....(12)

بجمع المعادلتين (11) و (12) ينتج أن

$8-2b = 8 \Rightarrow b = 0$

بالتعويض في المعادلة (7)

$d = 3-2(0) \Rightarrow d = 3$

بالتعويض في المعادلة (1)

$ab + c + d = 3$

$0 + c + 3 = 3 \Rightarrow c = 0$

بالتعويض في المعادلة (10)

$c = 2 - a \qquad a = 2$

$(a, b, c, d) = (2, 0, 0, 3)$

ويمكن التأكد من صحة الحل بالتعويض في أي من المعادلات الأربعة المعطاة.

نموذج

السؤال الثاني: (11-12) GMO

أثبت أنه إذا كانت a, b, c أعداد حقيقة موجبة ، فإن أقل قيمة ممكنة للمقدار

$$6\,a^3 + 9\,b^3 + 32\,c^3 + \frac{1}{4\,a\,b\,c}$$

هي 6

وأوجد قيم a, b, c التي تجعل المقدار يساوي 6

نموذج ١٢

إجابة السؤال الثاني: نفرض أن $X=\sqrt[3]{6}a$, $y=\sqrt[3]{9}b$, $z=\sqrt[3]{32}c$

بالتعويض في المقدار

$$x^3+y^3+z^3+\frac{1}{4.\frac{x}{\sqrt[3]{6}}.\frac{y}{\sqrt[3]{9}}.\frac{z}{\sqrt[3]{32}}}$$

$$x^3+y^3+z^3+\frac{\sqrt[3]{6\times9\times32}}{4xyz}$$

$$x^3+y^3+z^3+\frac{\sqrt[3]{27\times8\times8}}{4xyz}$$

$$x^3+y^3+z^3+\frac{3\times2\times2}{4xyz}$$

$$x^3+y^3+z^3+\frac{3}{xyz}$$

$$x^3+y^3+z^3+\frac{1}{xyz}+\frac{1}{xyz}+\frac{1}{xyz}$$

الوسط الحسابي لمجموعة من القيم الحقيقية ≤ الوسط الهندسي لنفس هذه القيم

$$\frac{x^3+y^3+z^3+\frac{1}{xyz}+\frac{1}{xyz}+\frac{1}{xyz}}{6} \geq \sqrt[6]{x^3.y^3.z^3.\frac{1}{xyz}.\frac{1}{xyz}.\frac{1}{xyz}}$$

بضرب طرفي المتباينة في 6

$$x^3+y^3+z^3+\frac{1}{xyz}+\frac{1}{xyz}+\frac{1}{xyz} \geq 6\sqrt[6]{x^3.y^3.z^3.\frac{1}{xyz}.\frac{1}{xyz}.\frac{1}{xyz}}$$

$$x^3+y^3+z^3+\frac{1}{xyz}+\frac{1}{xyz}+\frac{1}{xyz} \geq 6$$

ويحدث التساوي بين الوسط الحسابي والهندسي في الحالة التي تكون الاعداد متساوية

$$x^3=y^3=z^3=\frac{1}{xyz}=\frac{1}{xyz}=\frac{1}{xyz}$$

ومنها $x=y=z=\frac{1}{x^3}=\frac{1}{y^3}=\frac{1}{z^3}$ وبالتعويض في المعادلة السابقة.

$x^3=\frac{1}{x^3} \rightarrow X^6=1 \rightarrow |x|=1$

وحيث أن الأعداد حقيقية موجبة ← x=1

وبالمثل $y=1$, $z=1$

نموذج 2

وبالرجوع للفرض

$X=\sqrt[3]{6}a \rightarrow a=1/\sqrt[3]{6} \rightarrow a=\sqrt[3]{36}/6$

$y=\sqrt[3]{9}b \rightarrow b=1/\sqrt[3]{9} \rightarrow b=\frac{\sqrt[3]{3}}{3}$

$z=\sqrt[3]{32}c \rightarrow C=1/\sqrt[3]{32} \rightarrow c=\sqrt[3]{2}/4$

نموذج 1

السؤال الثالث: BM01(07-08)

أوجد جميع الحلول الصحيحة الموجبة لـ x , y , z للمعادلتين الآتيتين:

$$x + y - z = 12$$

$$x^2 + y^2 - z^2 = 12$$

نموذج ١٢

<u>إجابة السؤال الثالث:</u>

$$x + y - z = 12 \text{.....(1)}$$
$$x^2 + y^2 - z^2 = 12 \text{......(2)}$$

من المعادلة (1) $z = x + y - 12$

بتربيع طرفي المعادلة $Z^2 = (x + y - 12)^2$

$$Z^2 = x^2 + y^2 + 2xy - 24x - 24y + 144$$

بالتعويض من المعادلة (3) في المعادلة (2)

$$x^2 + y^2 - x^2 - y^2 - 2xy + 24x + 24y - 144 = 12$$

بتبسيط المعادلة وقسمتها على 2- ينتج أن

$$Xy - 12x - 12y + 72 = -6$$

لتحليل المقدار بالتقسيم نجد أننا في احتياج لإضافة 72 لطرفي المعادلة

$$Xy - 12x - 12y + 72 + 72 = -6 + 72$$

$$Xy - 12x - 12y + 144 = 66$$

$$X(y - 12) - 12(y - 12) = 66$$

$$(y - 12)(x - 12) = 66$$

حاصل ضرب القوسين عدد موجب

اذن : إما القوسين قيمتهما موجبة وهذا يؤدي إلي $x,y > 12$

وإما القوسين قيمتهما سالبة وهذا يتنافي مع المعطى

لذلك نأخذ العوامل الموجبة فقط للعدد 66

66 تحلل إلى 1×66 أو 2×33 أو 3×22 أو 6×11

,   ,

X – 12	Y - 12	x	y	z	
66	1	78	13	79	
33	2	45	14	47	
22	3	34	15	37	
11	6	23	18	29	
1	66	13	78	78	
2	33	14	45	45	
3	22	15	34	34	
6	11	18	23	29	

.

(x ,y , z) =

(78, 13, 79),

(13 ,78 , 79)

(45 , 14 , 47)

(14 ,45 , 47)

(34 , 15 , 37)

(15 , 34 , 37)

(23 , 18 , 29)

(18 , 23 , 29)

السؤال الرابع: BMO-01

لتكن x, y, z أعداد حقيقية موجبة، بحيث أن:

$$x^2 + y^2 + z^2 = 1$$

أثبت أن:

$$x^2yz + xy^2z + xyz^2 \leq \frac{1}{3}$$

١٢:٥٣

إجابة السؤال الرابع:

الوسط الحسابي (arithmetic mean)

$$AM = \frac{x1+x2+\cdots xn}{n}$$

الوسط الهندسي (geometric mean)

$$GM= \sqrt[n]{x1\,.\,x2\,.\,x3\ldots xn}$$

الوسط التربيعي (quadratic mean) أو وسط الجذر التربيعي (root mean square)

$$Qm\ or\ RMS = \sqrt{\frac{x1^2+\ x2^2+\ \ldots+xn^2}{n}}$$

والعلاقة بين الأوساط الثلاثة هي

$$GM\ \le\ AM\ \le\ QM$$

$$\sqrt[3]{xyz}\ \le\ \frac{x+y+z}{3}\ \le\ \sqrt{\frac{x^2+\ \ y^2+z^2}{3}}$$

$$\sqrt[3]{xyz}\ \le\ \frac{x+y+z}{3}\ \le\ \frac{1}{\sqrt{3}}$$

١٢:٠٠

$$\sqrt[3]{xyz} \ \le \ \frac{1}{\sqrt{3}} \ldots.$$ (بتكعيب طرفي المتباينة)

$$xyz \ \le \ \frac{1}{3\sqrt{3}} \ldots. (1),$$

$$\frac{x+y+z}{3} \le \frac{1}{\sqrt{3}}$$ بضرب طرفي المتباينة X 3

$$, x+y+z \ \le \ \frac{3}{\sqrt{3}} \ldots (2)$$

بضرب طرفي المتباينتين (1) و(2)

$$xyz\,(x+y+z\,) \le \frac{1}{3\sqrt{3}}\,\frac{3}{\sqrt{3}}$$

$$x^2yz + x\,xy^2z + xyz^2 \le \ \frac{1}{3}$$

وهو المطلوب.

12:أ...

السؤال الخامس: BMO1 (11-12)

أوجد جميع قيم n الصحيحة (الموجبة أو السالبة) التي تجعل المقدار $n^2 + 20n + 11$ مربعاً كاملاً.

" تذكر أنك يجب أن تتحقق من إيجادهم جميعاً"

نموذج 12

<u>إجابة السؤال الخامس:</u>

$$n^2 + 20n + 11 = k^2$$

$$n^2 + 20n + 10^2 = k^2 + 10^2 - 11$$

$$(n+10)^2 - k^2 = 89$$

$$(n+10-k)(n+10+k) = 89$$

89 تحلل إلى 1×89 أو -1×-89

n + 10 – k	n + 10 + k	2n +20	n
89	1	90	35
-89	-1	-90	-55

ويمكن التحقق بالتعويض في المقدار والتأكد من أن قيمته مربع كامل.

النموذج

(2)

السؤال الأول : جد كل الأعداد الحقيقية التي تحقق المتباينة:

$$\sqrt{x-\frac{1}{2}}+\frac{x+1}{4}<\sqrt{2x-1+\frac{(x+1)^2}{8}}$$

الحل:

<u>السؤال الأول :(الإجابة)</u> جد كل الأعداد الحقيقية التي تحقق المتباينة:

$$\sqrt{x-\frac{1}{2}}+\frac{x+1}{4}<\sqrt{2x-1+\frac{(x+1)^2}{8}}$$

<u>الحل:</u>

بما أن $\sqrt{x-\frac{1}{2}}$ معرّف فقط لكل $x\geq\frac{1}{2}$ وهذا يؤدي إلى أن $\frac{x+1}{4}>0$ ، $2x-1+\frac{(x+1)^2}{8}>0$

و بوضع $0 \;<\; b=\frac{x+1}{4} \;,\; 0 \;\geq\; a=\sqrt{x-\frac{1}{2}}$ ، نستطيع التوصل إلى التالي :

$$b^2=\left(\frac{x+1}{4}\right)^2=\frac{(x+1)^2}{16}$$

$$\therefore 2b^2=\frac{(x+1)^2}{8}$$

$$a^2=x-\frac{1}{2}=\frac{2x-1}{2}$$

$$\therefore 2a^2=2x-1$$

و بالتالي يمكن كتابة المتباينة السابقة على الصورة : $a+b<\sqrt{2a^2+2b^2}$ وبتربيع الطرفين

$$a^2+2ab+b^2<2a^2+2b^2$$

$$\because a^2-2ab+b^2>0$$

$$\because (a-b)^2>0 \iff a\neq b \Rightarrow \sqrt{x-\frac{1}{2}}\neq\frac{x+1}{4}$$

و بتربيع الطرفين وتبسيط المقدار الناتج نحصل على المعادلة التربيعية $x^2-14x+9\neq 0$

وبحلها باستخدام القانون العام تكون قيمة x : $x\neq 7\pm 2\sqrt{10}$ ، وبما أن $x\geq\frac{1}{2}$ ، إذاً مجموعة حل المتباينة هي :

$$x\in\left[\frac{1}{2}\,,\,7-2\sqrt{10}\right)\cup\left(7-2\sqrt{10}\,,\,7+2\sqrt{10}\right)\cup\left(7+2\sqrt{10}\,,\,\infty\right)$$

السؤال الثاني: افترض أن x , y , z أعداد حقيقية موجبة بحيث أن : $x+y+z=1$ ، أثبت أن :

$$\frac{x+1}{x+yz}+\frac{y+1}{y+zx}+\frac{z+1}{z+xy}\geq 9$$

الحل:

السؤال الثاني (الإجابة): افترض أن x , y , z أعداد حقيقية موجبة بحيث أن : $x+y+z=1$ ، أثبت أن :

$$\frac{x+1}{x+yz}+\frac{y+1}{y+zx}+\frac{z+1}{z+xy}\geq 9$$

الحل:

$\because$ الأعداد x ، y ، z موجبة و مجموعها 1.

$\therefore x<1\ ,\ y<1\ ,\ z<1$

$$\because LHS=\frac{x+1}{x+yz}+\frac{y+1}{y+zx}+\frac{z+1}{z+xy}=\frac{2-y-z}{1-y-z+yz}+\frac{2-x-z}{1-x-z+zx}+\frac{2-x-y}{1-y-z+xy}$$

$$=\frac{(1-y)+(1-z)}{(1-y)\,(1-z)}+\frac{(1-x)+(1-z)}{(1-x)\,(1-z)}+\frac{(1-x)+(1-y)}{(1-x)\,(1-y)}$$

$$=2\left[\frac{1}{1-x}+\frac{1}{1-y}+\frac{1}{1-z}\right]$$

$$=2\left[\frac{1^2}{1-x}+\frac{1^2}{1-y}+\frac{1^2}{1-z}\right]$$

$$\geq 2\frac{(1+1+1)^2}{1-x+1-y+1-z}\qquad (*)$$

$$\geq 2\times\frac{9}{3-(x+y+z)}\geq 2\times\frac{9}{2}\geq 9$$

(*) الخاصية المستخدمة في التباين هي : $\frac{a_1{}^2}{b_1}+\frac{a_2{}^2}{b_2}+\ldots+\frac{a_n{}^2}{b_n}\geq\frac{(a_1{}^2+a_2{}^2+\ldots+a_n{}^2)}{b_1+b_2+\ldots+b_n}$ ، كما يمكن استخدم متباينة الوسط الحسابي مع الوسط التوافقي ، كالتالي :

$$2\left[\frac{1}{1-x}+\frac{1}{1-y}+\frac{1}{1-z}\right]=2\times 3\times\frac{\frac{1}{1-x}+\frac{1}{1-y}+\frac{1}{1-z}}{3}\geq 6\times\frac{3}{\frac{1}{\frac{1}{1-x}}+\frac{1}{\frac{1}{1-y}}+\frac{1}{\frac{1}{1-z}}}\geq 6\times\frac{3}{1-x+1-y+1-z}$$

$$\geq 6\times\frac{3}{2}\geq 9$$

السؤال الثالث: (BMO1 2009 – 10)

جد كل الدوال $f(x)$ المعرفة على مجموعة الأعداد الحقيقية IR ، والتي تحقق المعادلة :

$$f(x)\,f(y) = f(\,x + y\,) + x\,y$$

لكل الأعداد الحقيقية x و y .

الحل:

السؤال الثالث:(الاجابة) : (BMO1 2009 – 10)

جد كل الدوال $f(x)$ المعرفة على مجموعة الأعداد الحقيقية IR ، والتي تحقق المعادلة :

$$f(x)\,f(y) = f(\,x + y\,) + x\,y$$

لكل الأعداد الحقيقية x و y .

الحل:

بوضع $y = 0 \Leftarrow f(x)\,f(0) = f(\,x + 0\,) + x\,.\,0 \Leftarrow f(x)\,f(0) = f(x\,) \Leftarrow \boxed{f(0) = 1}$

بوضع $y = -x \Leftarrow f(x)\,f(-x) = f(\,x + (-x)\,) + x\,.(-x) \Leftarrow f(x)\,f(-x) = f(0) - x^2$

$\therefore\ f(x)\,f(-x) = 1 - x^2$

و بوضع $x = 1$ في الصورة السابقة : $f(1)\,f(-1) = 1 - 1^2 = 0$ ، وبالتالي نحصل على الأحتمالين :

$f(-1) = 0$ or $f(1) = 0$

بوضع $y = -1$ في المعادلة الأصلية :

$$f(x)\,f(-1) = f(\,x - 1\,) + x\,.\,(-1)$$

$$0 = f(\,x - 1\,) - x$$

$$\therefore\ f(\,x - 1\,) = x$$

و بوضع رمز آخر وليكن t مكان $x - 1$:

$$t = x - 1 \Rightarrow x = t + 1$$

$$\therefore\ f(\,x\,) = 1 + x$$

و لتحقق :

$$f(x)\,f(y) = (1 + x)\,(1 + y\,)$$

$$= 1 + (\,x + y\,) + x\,y$$

$$= f(\,x + y) + x\,y \quad \forall\ \mathrm{x}\,,\,\mathrm{y} \in \mathrm{IR}$$

بوضع $y = 1$ في المعادلة الأصلية :

$$f(x)\,f(1) = f(\,x + 1\,) + x\,.\,1$$

$$0 = f(\,x + 1\,) + x$$

$$\therefore\ f(\,x + 1\,) = -x$$

و بوضع رمز آخر وليكن t مكان $x + 1$:

$$t = x + 1 \Rightarrow x = t - 1$$

$$\therefore\ f(\,x\,) = 1 - x$$

و لتحقق :

$$f(x)\,f(y) = (1 - x)\,(1 - y\,)$$

$$= 1 - (\,x + y\,) + x\,y$$

$$= f(\,x + y) + x\,y \quad \forall\ \mathrm{x}\,,\,\mathrm{y} \in \mathrm{IR}$$

السؤال الرابع : (BMO 1997-98)

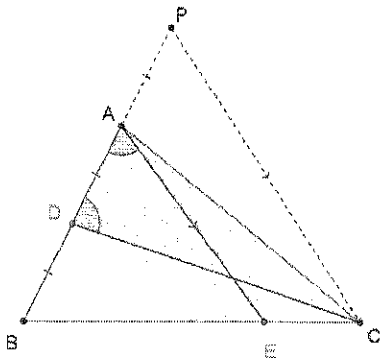
في $\triangle ABC$ ، أخذت النقطة D على منتصف الضلع AB ، والنقطة E على الضلع CB بحيث $EC = \frac{1}{3}BC$. إذا علمت أن $\angle ADC = \angle BAE$ ، فأوجد $\angle BAC$.

الحل:

السؤال الرابع (الاجابة) : (BMO 1997-98)

في $\triangle ABC$ ، أخذت النقطة D على منتصف الضلع AB ، والنقطة E على الضلع CB بحيث $EC = \frac{1}{3}BC$. إذا علمت أن $\angle BAE = \angle ADC$ ، فأوجد $\angle BAC$.

الحل:



عمل : نمد الضلع BA من جهة A في النقطة P بحيث : AP = DA

في $\triangle BPC$:

(معطى) $\frac{EC}{EB} = \frac{1}{3}$, $\frac{AP}{AB} = \frac{1}{3}$

$\therefore$ $EA \parallel PC$ ، لأن النقطة القطعة المستقيمة الواصلة بين ضلعين في مثلث وتقسمهما إلى قطع أطوالها متناسبة توزي الضلع الثالث (من خواص التكبير)

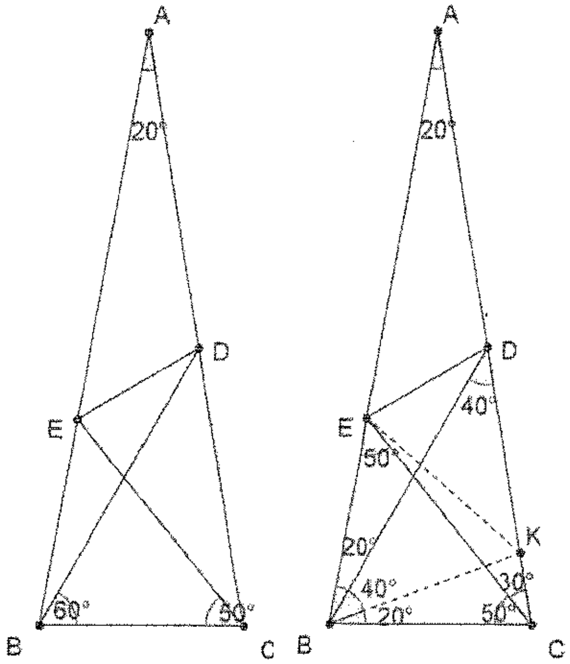
$\therefore$ $\angle BAC \cong \angle BPA$ بالتناظر

$\therefore$ $\triangle BPC$ متطابق الضلعين ، وبما أن CA ينصف القاعدة DP

$\therefore$ $DP \perp CA$ (من خواص المثلث التطابق الضلعين) ، وبالتالي $\angle BAC = 90^{o}$

السؤال الخامس :

في $\triangle ABC$ ، $AB = AC$ ، $\angle A = 20°$ ، النقطة D تقع على الضلع AC بحيث أن $\angle DBC = 60°$ ، والنقطة E تقع على الضلع AB بحيث أن $\angle ECB = 50°$. أوجد قياس $\angle BDE$.

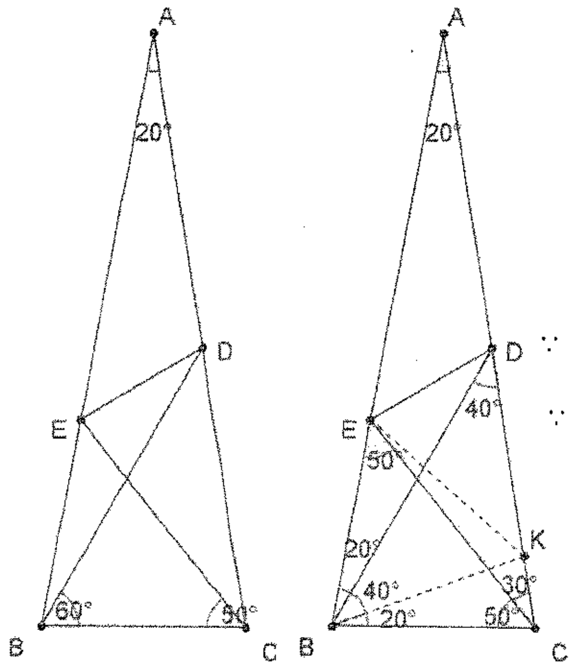


الحل:

الحل:

السؤال الخامس (الإجابة) :

في $\triangle ABC$ ، $AB = AC$ ، $\angle A = 20°$ ، النقطة D تقع على الضلع AC بحيث أن $\angle DBC = 60°$ ، والنقطة E تقع على الضلع AB بحيث أن $\angle ECB = 50°$. أوجد قياس $\angle BDE$.



الحل:

$\because\ AB = AC$

$\therefore\ m\angle ABC = m\angle ACB = 80°$

عمل: نضع K على AC بحيث ، $m\angle CBK = 20°$

$\because\ m\angle BCK = m\angle CKB = 80° \Rightarrow BC = BK$

$\because\ m\angle BCE = m\angle CEB = 50° \Rightarrow BC = BE$

وهذا يؤدي إلى أن $BK = BE$

$\therefore$ $\triangle BKE$ ، متطابق الأضلاع لأن قياس جميع زواياه 60° وهذا يؤدي إلى أن :

$m\angle BKE = 60°$, $m\angle CEK = 10°$

في $\triangle BKD$:

$\because\ m\angle KBD = 40° \ = \ m\angle KDB = 40°$

$\therefore\ BK = KD$

ولكن $BK = KE$ ، وهذا يؤدي إلى أن $KE = KD$ ، أي أن $\triangle EKD$ متطابق الضلعين و قياس زاوية رأسه 40° ، وهذا يؤدي إلى أن يكون زوايتا القاعدة متطابقتان

$\therefore\ m\angle KED = m\angle KDE = 70°$

$\therefore\ m\angle BDE = 70° - 40° = 30°$

السؤال السادس:

إذا كان a , b , c ثلاثة أضلاع مثلث ، فأثبت أن :

$$\frac{a}{b+c-a}+\frac{b}{c+a-b}+\frac{c}{a+b-c} \geq 3$$

الحل:

السؤال السادس (الاجابة):

إذا كان a , b , c ثلاثة أضلاع مثلث ، فأثبت أن :

$$\frac{a}{b+c-a}+\frac{b}{c+a-b}+\frac{c}{a+b-c}\geq 3$$

الحل:

نفرض أن $z=a+b-c \quad , \quad y=c+a-b \quad , \quad x=b+c-a$

وبجمع المعادلة الأولى و الثانية : $c=\frac{x+y}{2}$

وبجمع المعادلة الأولى و الثالثة : $b=\frac{x+z}{2}$

وبجمع المعادلة الثانية و الثالثة : $a=\frac{y+z}{2}$

وبالتعويض بهذه القيم في في الطرف الأيمن من المتباينة :

$$LHS=\frac{y+z}{2x}+\frac{x+z}{2y}+\frac{x+y}{2z}=\frac{1}{2}\left[\frac{y}{x}+\frac{z}{x}+\frac{x}{y}+\frac{z}{y}+\frac{x}{z}+\frac{y}{z}\right]$$

$$=\frac{1}{2}\left[\frac{y}{x}+\frac{z}{x}+\frac{y}{z}+\frac{z}{y}+\frac{x}{z}+\frac{x}{y}\right]$$

$$\geq\frac{1}{2}\,(2+2+2)$$

$$\geq\frac{1}{2}\times 6$$

$$\geq 3$$

السؤال السابع: أثبت أنه لأي ثلاثة أعداد حقيقية موجبة a , b , c فإن :

$$\frac{9}{a+b+c} \leq 2\left(\frac{1}{a+b}+\frac{1}{b+c}+\frac{1}{c+a}\right)$$

الحل:

السؤال السابع (الإجابة) :

نعلم أن متباينة الوسط الحسابي التوافقي :

$$\frac{x_1 + x_2 + x_3 + \ldots + x_n}{n} \geq \frac{n}{\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \frac{1}{x_3} + \ldots + \frac{1}{x_n}}$$

$$\therefore \frac{(a+b)+(b+c)+(c+a)}{3} \geq \frac{3}{\frac{1}{(a+b)} + \frac{1}{(b+c)} + \frac{1}{(c+a)}}$$

$$2(a+b+c) \geq \frac{9}{\frac{1}{(a+b)} + \frac{1}{(b+c)} + \frac{1}{(c+a)}}$$

$$2\left(\frac{1}{(a+b)} + \frac{1}{(b+c)} + \frac{1}{(c+a)}\right) \geq \frac{9}{(a+b+c)}$$

السؤال الثامن: (BMO 1996)

إذا كانت f دالة معرفة على مجموعة الأعداد الصحيحة الموجبة كما يلي :

$$f(1) = 1000 \quad , \quad f(1) + f(2) + f(3) + \ldots + f(n) = n^2 f(n) \quad \forall\, n \in N,\ n > 1$$

فاحسب قيمة $f(999)$.

السؤال الثامن (الإجابة) :(BMO 1996)

$$\because f(1)+f(2)+f(3)+\ldots+f(n)=n^2 f(n) \qquad \forall\, n\in N \qquad\qquad (1)$$

$\therefore$ بوضع $n-1$ مكان n في المعادلة نحصل على :

$$f(1)+f(2)+f(3)+\ldots+f(n\text{-}1)=(n\text{-}1)^2 f(n\text{-}1) \qquad \forall\, n\in N \qquad (2)$$

و بطرح معادلة (2) من معادلة (1) :

$$f(n)=n^2 f(n) - (n\text{-}1)^2 f(n\text{-}1)$$

$$\therefore f(n)=\frac{(n-1)^2}{n^2-1}\ f(n-1)=\frac{n-1}{n+1}\ f(n-1)$$

$$\therefore f(999)=\frac{998}{1000}f(998)=\frac{998}{1000}\times\frac{997}{999}f(997)=\frac{998}{1000}\times\frac{997}{999}\times\frac{996}{998}f(996)$$

وبملاحظة النمط السابق ، يمكن التوصل إلى التالي :

$$\therefore f(999)=\frac{998}{1000}\times\frac{997}{999}\times\frac{996}{998}\times\ldots\times\frac{3}{5}\times\frac{2}{4}\times\frac{1}{3}\times f(1)$$

$$f(999)=\frac{998}{1000}\times\frac{997}{999}\times\frac{996}{998}\times\ldots\times\frac{3}{5}\times\frac{2}{4}\times\frac{1}{3}\times 1000$$

$$=\frac{2}{999}$$

السؤال التاسع:

ABC مثلث ، منصف الزاوية $\angle BCA$ يقطع الدائرة المحيطة بالمثلث ABC مرة أخرى في النقطة R ، ويقطع العمود المنصف للقطعة المستقيمة BC في P ، ويقطع العمود المنصف للقطعة المستقيمة AC في Q . إذا كانت S منتصف القطعة المستقيمة BS ، و T منتصف القطعة المستقيمة AC ، فبرهن أن :

$\triangle RQT$ و $\triangle RPS$ لهما نفس المساحة السطحية.

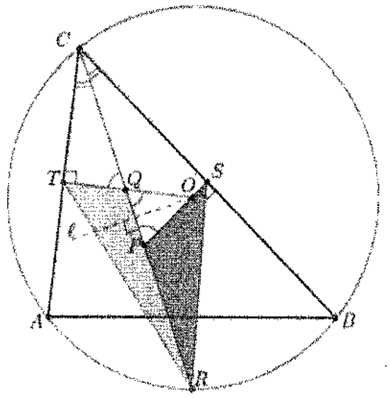
الحل :

السؤال التاسع (الإجابة) : (IMO 2007)

ABC مثلث ، منصف الزاوية $\angle BCA$ يقطع الدائرة المحيطة بالمثلث ABC مرة أخرى في النقطة R ، ويقطع العمود المنصف للقطعة المستقيمة BC في P ، ويقطع العمود المنصف للقطعة المستقيمة AC في Q . إذا كانت S منتصف القطعة المستقيمة BS ، و T منتصف القطعة المستقيمة AC ، فبرهن أن :

$\triangle RQT$ و $\triangle RPS$ لهما نفس المساحة السطحية.

الحل :



$\triangle CTQ$ ، $\triangle CSP$ فيهما :

$m\angle CTQ = m\angle CSP = 90^\circ \quad , \quad m\angle TCQ = m\angle SCP$

$\therefore \ \triangle CTQ \sim \triangle CSP$

$\therefore \ m\angle CQT = m\angle CPS \quad , \quad \dfrac{QT}{PS} = \dfrac{CQ}{CP} \quad$ ---- (*)

وهذا يؤدي إلى أن $m\angle OQP = m\angle CQT$ بالتقابل بالرأس.

$\therefore \triangle OQP$ متطابق الضلعين

عمل : نرسم Ol بحيث ينصف الضلع QP .

$\therefore \ Ol$ عمودي على QP (من خواص المثلث المتطابق الضلعين)

وهذا يؤدي أن : $Cl = lP$ (قطر الدائرة العمودي على وتر ينصف الوتر)

$\therefore \ RQ = CP \quad , \quad CQ = RP$ ---- (**) ، وأيضاً $m\angle RPS = m\angle TQR$ (مكملة المكملة متساوية) ---(***)

$$\therefore \ \frac{Area(RQT)}{Area(RPS)} = \frac{\frac{1}{2}\times TQ \times QR \times \sin Q}{\frac{1}{2}\times PS \times PR \times \sin P} = \frac{CQ}{CP}\times\frac{CP}{CQ} = 1$$

<u>السؤال العاشر</u> :

كتاب صفحاته مرقمة من 1 إلى 100 ، وبعضا من صفحاته ممزقة ، فإذا علمت أن مجموع أرقام الصفحات الغير ممزقة يساوي 4949 ، فما عدد الصفحات الممزقة ؟

<u>الحل :</u>

السؤال العاشر (الإجابة): Regional Mathematical Olympiad 2009

كتاب صفحاته مرقمة من 1 إلى 100 ، وبعضا من صفحاته ممزقة ، فإذا علمت أن مجموع أرقام الصفحات الغير ممزقة يساوي 4949 ، فما عدد الصفحات الممزقة ؟

الحل :

نفرض أن عدد الصفحات الممزقة = r

$\because$ الرقمين على الورقة الواحدة يجب أن يكون أحدهما زوجي والآخر فردي ، فهما على الصورة : $2k\ ,\ 2k-1$ ، حيث k عدد صحيح موجب ، وبالتالي مجموعها على الصورة $4k-1$.

$\therefore$ مجموع الأرقام على الصفحات الممزقة يكون على الشكل :

$$4k_1 - 1 + 4k_2 - 1 + \dots + 4k_r - 1 = 4(k_1 + k_2 + \dots + k_r) - r$$

$\because$ مجموع الأرقام على الصفحات الكتاب الغير ممزق :

$$1 + 2 + 3 + \dots + 100 = \frac{100 \times 101}{2} = 5050$$

$\therefore$ مجموع أرقام الصفحات الممزقة : $5050 - 4949 = 101$

وهذا يؤدي إلى أن :

$$\therefore\ 4(k_1 + k_2 + \dots + k_r) - r = 101 \Rightarrow 4(k_1 + k_2 + \dots + k_r) = 101 + r$$

$$\therefore\ r \equiv 3 \pmod 4 \Rightarrow r = 4l + 3\ ,\ l = 0, 1, 2, 3$$

وبالتالي r تأخذ القيم $3, 7, 11, 15$ ، و بالتعويض عن $r = 3$.

$$4(k_1 + k_2 + \dots + k_r) - 3 = 101 \Rightarrow k_1 + k_2 + \dots + k_r = 26$$

$\therefore$ عدد الصفحات 3 حل ممكن ، ومجموع الصفحات 26.

وبالتعويض عن $r = 7$ ، وبالصفحات الأولى نحصل :

$$4(k_1 + k_2 + \dots + k_r) - 7 = 101 \Rightarrow k_1 + k_2 + \dots + k_r = 28$$

$$4(1 + 2 + 3+4+5+6+7)-7=105$$

وبالتحقق : $4(28) - 7 = 105 \neq 101$. وبالمثل إذا كانت $r = 11\ ,\ 15$.

$\therefore$ عدد الصفحات الممزقة هو ثلاث صفحات.

النموذج

(3)

الاتحاد الرياضيات في الدول الأعضاء
بمكتب التربية العربي لدول الخليج

Gulf Mathematical Olympiad 2015

March 22, 2015, Kuwait

Time allowed: 4 hours 30 minutes
Each problem is worth 10 marks

Problem 1.

(a) Suppose that n is an odd integer. Prove that $k(n-k)$ is divisible by 2 for every integer k.

(b) Find an integer k such that $k(100-k)$ is not divisible by 11.

(c) Suppose that p is an odd prime number, and that n is any integer. Prove that there exists an integer k such that $k(n-k)$ is not divisible by p.

(d) Suppose that p, q are different odd prime numbers, and that n is any integer. Prove that there exists an integer k such that $k(n-k)$ is not divisible by any of the numbers p, q.

Problem 2.

(a) Let UVW, $U'V'W'$ be two triangles in which

$$\angle WUV = \angle W'U'V', \quad UV = U'V', \quad VW = V'W',$$

prove that the angles $\angle VWU$, $\angle V'W'U'$ are equal or supplementary. *You can use the law of sines or any other method.*

(b) ABC is a triangle in which $\angle A$ is obtuse. A point P is taken inside the triangle, and AP, BP, CP are produced to meet the sides BC, CA, AB at the points K, L, M, respectively. Suppose that $PL = PM$.

(i) If AP bisects $\angle A$, prove that $AB = AC$.

(ii) Find the angles of triangle ABC, given that AK, BL, CM are the angle bisectors of triangle ABC and that $2\,AK = BL$.

أولمبياد الرياضيات في الدول الأعضاء
بمكتب التربية العربي لدول الخليج

أولمبياد الرياضيات الرابع للدول الأعضاء في مكتب التربية العربي لدول الخليج
الكويت – دولة الكويت – ٢٢ مارس ٢٠١٥

زمن الاختبار ٤ ساعات و ٣٠ دقيقة
١٠ درجات لكل سؤال

السؤال الأول:

أ) افرض أنّ ن عَدَد صحيح فرديّ. أَثْبِت أنّ ك(ن – ك) يَقْبَل القِسْمَة عَلى ٢ لِكُلّ عَدَد صحيح ك .
ب) أَوْجِد عدداً صحيحاً ك بحيث أنّ ك(١٠٠ – ك) لا يَقْبَل القِسْمَة على ١١ .
ج) افرض أنّ ل عدد أوّلِيّ فَرْدِيّ، وَأنّ ن أيّ عدد صحيح. أَثْبِت أنّه يوجد عدد صحيح ك بحيث أنّ ك(ن – ك) لا يَقْبَل القِسْمَة على ل .
د) افرض أنّ ل ، م عددان أوّلِيّان فَرْدِيّان مُخْتلِفان، وَأنّ ن أيّ عدد صحيح. أَثْبِت أنّه يوجد عدد صحيح ك بحيث أنّ ك(ن – ك) لا يَقْبَل القِسْمَة على أيّ مِن العددَيْن ل ، م .

السؤال الثاني:

أ) لِيَكن س ص ع ، سَ صَ عَ مُثَلّثين فيهما
∠ ع س ص = ∠ عَ سَ صَ ، س ص = سَ صَ ، ص ع = صَ عَ
أثْبِت أنّ الزّاوِيَتَيْن ∠ ص ع س ، ∠ صَ عَ سَ مُتساوِيَتان أو مُتكامِلَتان. يُمْكِنُك استخدام قانون الجيوب أوْ أيّ طَرِيقة أخرى.
ب) أ ب جـ مُثلّث فيه ∠ أ مُنفَرِجة. أُخِذَت النّقطة ر بداخل المثلّث، وَمُدّت أ ر ، ب ر ، جـ ر لِتَلْتَقي مع الأضلاع ب جـ ، جـ أ ، أ ب في النقاط ك ، ل ، م على الترتيب. افرض أنّ ر ل = ر م .
١) إذا كان أ ر يُنَصّف ∠ أ ، فَأثبت أنّ أ ب = أ جـ .
٢) أوجِدْ زَوايا المُثلّث أ ب جـ عِلماً بِأنّ أ ك ، ب ل ، جـ م مُنَصّفات لِزَوايا المُثلّث أ ب جـ وَأنّ ٢ أ ك = ب ل .

أولمبياد الرياضيات في الدول الأعضاء بمكتب التربية العربي لدول الخليج

أولمبياد الرياضيات الرابع للدول الأعضاء في مكتب التربية العربي لدول الخليج

الكويت – دولة الكويت – 22 مارس 2015

زمن الاختبار 4 ساعات و 30 دقيقة

10 درجات لكل سؤال

السؤال الأول:

أ) افرض أنّ n عَدَد صحيح فرديّ. أثبِت أنّ $k(n-k)$ يَقْبَل القِسْمَة عَلى 2 لِكُلّ عَدَد صحيح k.

ب) أَوْجِد عدداً صحيحاً k بحيث أنّ $k(100-k)$ لا يَقْبَل القِسْمَة على 11 .

ج) افرض أنّ p عدد أوّليّ فَرْدِيّ، وَأنّ n أيّ عدد صحيح. أثْبِت أنّه يوجد عدد صحيح k بحيث أنّ $k(n-k)$ لا يَقْبَل القِسْمَة على p .

د) افرض أنّ p,q عددان أوّليّان فَرْدِيّان مُخْتلِفان، وَأنّ n أيّ عدد صحيح. أثْبِت أنّه يوجد عدد صحيح k بحيث أنّ $k(n-k)$ لا يَقْبَل القِسْمَة على أيّ مِن العددَيْن p,q .

السؤال الثاني:

أ) لِيَكن $UVW,\ U'V'W'$ مُثَلّثين فيهما

$$\angle WUV = \angle W'U'V',\ UV = U'V',\ VW = V'W'$$.

أثْبِت أنّ الزّاوِيَتَيْن $\angle VWU,\ \angle V'W'U'$ مُتساوِيَتان أو مُتكامِلَتان. يُمكِنك استخدام قانون الجيوب أوْ أيّ طَريقة أخرى.

ب) ABC مُثلّث فيه $\angle A$ مُنفَرِجة. أُخِذَت النّقطة P بداخل المثلّث، وَمُدّت AP, BP, CP لِتَلْتَقي مع الأضلاع BC, CA, AB في النقاط K, L, M على الترتيب. افرض أنّ $PL = PM$.

١) إذا كان AP يُنَصِّف $\angle A$ ، فَأثبِت أنّ $AB = AC$.

٢) أوجِدْ زَوايا المُثلّث ABC عِلماً بِأنّ AK, BL, CM مُنَصِّفات لِزَوايا المُثلّث ABC وَأنّ $2AK = BL$.

GMO 15 Solutions

22 March 2015

Solutions

1. (a) $(n-k)+k$ is odd, so one of $(n-k)$ and k must be even, and so their product must be even.

   (b) By experiment, $k=2$ is such an integer.

   (c) Consider the cases $k=1$ and $k=2$. In these cases $k(n-k)=n-1$ and $2(n-2)$. If an odd prime number p divides $2(n-2)$, then it must divide $n-2$, and so cannot divide $n-1$. Therefore one of $k=1$ and $k=2$ will do the job. k_1

   (d) First we choose k_1 in such a way that p does not divide $k_1(n-k_2)$. It follows that p will not divide $(k_1+sp)(n-k_1-sp)$ for any integer s. Similarly there is an integer k_2 such that q will not divide $(k_2+tq)(n-k_2-tq)$ for any integer t. It now suffices to find a choices of s and t so that $k_1+sp=k_2+tq$ i.e. $k_1-k_2=(-s)p+tq$. However, p and q are coprime, so there are integers u and v such that $up+vq=1$. Now $s=-(k_1-k_2)u$ and $t=(k_1-k_2)v$ does the job.

   Comment 1 Part (d) is a dance to sidestep the Chinese Remainder Theorem. Using CRT one can prove this. *Let S be a finite collection of odd prime numbers, and suppose that for each $p \in S$ there is a polynomial $f_p \in \mathbb{Z}[x]$ such that* $\deg f_p < p$ *and it is not the case that every coefficient of f_p is divisible by p. Then there is an integer t such that $f_p(t) \ncong 0$ mod p for each $p \in S$.* (In Problem 1, each f_p is $x(n-x)$.)

   Proof Since $\deg f_p < p$, and f_p is not the zero polynomial when viewed as an element of $\mathbb{Z}_p[X]$, then f_p has at most p roots in $\mathbb{Z}_p$ and so there is an integer k_p such that $f_p(k_p) \ncong 0 \bmod p$. Now use the Chinese Remainder Theorem to produce an integer $t \cong k_p \bmod p$ for each $p \in S$. Then

   $$f_p(t) \cong f_p(k_p) \ncong 0 \bmod p$$

   for each $p \in S$.

   Comment 2 This Chinese Remainder Theorem trick also will also solve the "Goldbach" problem. Thus if m and n are integers and m is odd, then there is an integer k such that $k(n-k)$ is coprime to m. We just work with the finite set of primes which divide m, and use the same trick. Note that if we just set this problem, with no preliminary parts, we have a hard number theory problem.

$G = \{$ green hats are neighbours$\}$. For inclusion-exclusion we need the following things (note that by logical symmet ry any two subsets, or the intersection of any two pair, etc have the same size) :

size of these subsets, $|B| = 8 \cdot \frac{6!}{2^3} = 720$, there are 4 subsets l ike this.

size of the intersection of two subsets, $|B \cap W| = 8 \cdot \frac{5!}{2^2} = 240$, there are 6 pairs.

size of the intersection of three subsets, $|B \cap W \cap R| = 8 \cdot \frac{4!}{2} = 96$, there are 4 such triple intersection.

size of the intersection of all four subsets, which is part b) so 48.

The answer is

$$2520 - 4 \cdot 720 + 6 \cdot 240 - 4 \cdot 96 + 48 = 744.$$

Alternative direct method Label the children 1 through 8 in clockwise cyclic order. Choose a hat colour for seat in 4 ways. Let us assume that it is red, so children 2 and 8 cannot wear red hats. Consider what happens when the second red hat is on child 3 (child 7 is similar). The hat between the two reds can be any one of three colours so a factor of 3 is introduced. Say it is black. The remaining 5 hats can be placed (clockwise) on the remaining children in the following ways: *bwgwg*, *bgwgw*, *wbgwg*, *gbwgw*, *wgbwg*, *wgbgw*, *gwbwg*, *gwbgw*, and two more strings with b in position 4 in this string, and two more strings with b in position 5 in this string (similar to b being in positions 2 and 1 respectively). The count so far is $4 \times 3 \times 12 = 4 \times 36$. A similar count is obtained by putting the second red hat in position 7.

Now suppose that the second red hat is in position 4. We need to choose two different other colours for positions 2 and 3. This can be done in $3 \times 2 = 6$ ways. Let us assume that positions 1 through 4 have hats coloured *rbgr* so there ar two white hats, a blue and a green left to fill the remaining run of four consecutive children. The options are (moving b through the list) *bwgw*, *wbwg*, *wbgw*, *wgbw*, *gwbw*, *wgwb*. This yields $4 \times 6 \times 12 = 4 \times 72$ possibilities, and an identical number when the hats on children 1 and 6 are the same colour.

Finally, it is possible that the hats on children 1 and 5 are the same colour (say red). Then the hats on children 2,3,4 might be all different (so the same for children 6, 7 and 8), giving rise to $(3!)^2 = 36$ possibilities. Alternatively children 2,3,4 might have two hats of one colour and one hat of another. This can happen in 3×2 ways, and the locations of all hats are then forced. This gives a count of $4 \times (36 + 6)$. The solution is therefore 288+288+168 = 744 ways.

(e) **Recurrence method** Let $h(n)$ denote the number of arrangements if there are n persons around the table. Clearly $h(1) = 4$, $h(2) = 4 \cdot 3 = 12$, $h(3) = 4 \cdot 3 \cdot 2 = 24$. Number the people by 1,2,.. In order to determine $h(n+1)$ consider those cases where 1 and n are different, there are $h(n)$ such possibilities, and $n+1$ ca n be 2 colours. If 1 and n are the same, it is $h(n-1)$ possibilities, and $n+1$ can be 3 colours. So we got the following recursion formula:

$$h(n+1) = 2h(n) + 3h(n-1) \quad (n \geq 3)$$

According to this formula the next values of $h(n)$ can be counted, $h(8) = 6564$

(ii) **sum of squares method** Let the two positive geometric progressions be a, ar, ar^2 and b, bs, bs^2 The sum of these progressions $a+b, ar+bs, ar^2+bs^2$ is an arithmetic progression so $a+b+ar^2+bs^2 = 2(ar+bs)$. Therefore $a(1-r)^2+b(1-s)^2=0$ Hence $r=s=1$ since $a,b>0$.

AM-GM method Now a, b, c and u, v, w are geometric progressions if, and only if, $b^2 = ac$ and $v^2 = uw$. The condition for the sum of the progressions to be an arithmetic progression is

$$2(b+v) = a+c+u+w \quad (= a + b^2/a + u + v^2/u \geq 2(b+v))$$

by two applications of the AM-GM inequality. Therefore by the characterization of the equality case of AM-GM we have $a^2 = b^2$ (and so $= c^2$) and similarly $u^2 = v^2 = w^2$.

(iii) Suppose that f is reducible. Therefore it has a factor g of degree 1. Suppose that g is symmetric. We may assume that $g = x+y+z+k$ for some constant k. Now put $x=0$, so $y+z+k$ must divide $byz+e$ for some constant e. However, any product of $my+nz+t$ with $y+z+k$ will involve either y^2 or z^2 terms unless $m=n=0$, so this is impossible.

On the other hand, if g is not symmetric, say $g = ux+vy+wz+k$ where u, v, w are not all equal. Then by symmetry, f is divisible by

$$(ux+vy+wz+k)(vx+wy+uz+k)(wx+uy+vy+k).$$

Now by equating coefficients of x^3 and of x^2y we find that either: $u=v=0$, $v=w=0$ or $w=u=0$ and these give rise to the terms a, b, c and d being in geometric progression because $f = a(x+r)(y+r)(z+r)$.

This argument relies upon the polynomials in question forming part of a *Unique Factorization Domain*, and in fact this is true since $\mathbb{R}[x,y,z]$ is a UFD since we wish to conclude that f is divisible by the displayed polynomial on the basis that it is divisible by each of its three given factors.

This factorization result (or assumption) is often overlooked in elementary algebra texts, and we do not propose to punish students who make this implicit assumption. However, there is a way to do this problem by a direct calculation which avoids the issue.

Observe that $f = Q(ux+vy+wz+k)+R$ where $Q = ayz+by+bz+c$ and $R = byz+cy+cz+d-(\alpha x+\beta y+\gamma)(ayz+by+bz+c)$ which is identically 0. The coefficients of R must all be 0.

Equate coefficients:

y^2z and yz^2 : $-a\alpha = -a\beta = 0$ (1)

y^2 and z^2 : $-b\alpha = -b\beta = 0$ (2)

yz : $-a\gamma - b\alpha - b\beta + b = 0$ (3)

y and z : $c - c\alpha - b\gamma = 0, c - c\beta - b\gamma = 0$ (4)

1 : $d - c\gamma = 0$ (5)