S.M.W.

قواعد الاشتقاق وإثباتها

رياضيات

الأستاذ: سمير محمد وهدان

١٤٣٨ هـ

بسم الله الرحمن الرحيم

قبل البدء في إثبات قواعد الاشتقاق هناك عدة ملاحظات يجب أن نضَعها نُصب أعيننا وهي:

[١] تعريف المشتقة الأولى للدالة f(x):

$$\frac{df(x)}{dx} = \grave{f}(x) = \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

[٢] من قوانين النهايات: $\lim_{x\to a} \frac{x^m - a^m}{x^n - a^n} = \frac{m}{n}.\, a^{m-n}$

[٣] من خصائص النهايات:

$$1)\ \lim_{x\to a}[g(x) \pm k(x)] = \lim_{x\to a} g(x) \pm \lim_{x\to a} k(x)$$

$$2)\ \lim_{x\to a}[g(x) \times k(x)] = \lim_{x\to a} g(x) \times \lim_{x\to a} k(x)$$

$$3)\ \lim_{x\to a}[g(x) \div k(x)] = \lim_{x\to a} g(x) \div \lim_{x\to a} k(x)$$

$$4)\ \lim_{x\to 0}\frac{e^x - 1}{x} = 1$$

[٤] من قواعد اللوغاريتمات:

$$Ln\left(\frac{g(x)}{k(x)}\right) = Ln\big(g(x)\big) - Ln\,\big(k(x)\big)$$

$$Ln\,\big(g(x) \times k(x)\big) = Ln\big(g(x)\big) + Ln\,\big(k(x)\big)$$

[٥] من خصائص الدالة الأسية: $e^{Ln(g(x))} = g(x)$

والآن نبدأ بحول الله وتوفيقه

[١] إذا كانت: $f(x) = a$ فأثبت أن: $\frac{d}{dx}f(x) = 0$

الإثبات

$$f(x) = a \rightarrow f(x+h) = a$$

$$\frac{d}{dx}f(x) = \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

$$\frac{d}{dx}f(x) = \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \lim_{n\to 0}\frac{a-a}{h}$$

$$\therefore \frac{d}{dx}f(x) = \lim_{h\to 0}\frac{0}{h} = 0$$

*****

[٢] إذا كانت: $f(x) = ax+b$ فأثبت أن: $\frac{d}{dx}f(x) = a$

الإثبات

$$f(x) = ax+b \rightarrow f(x+h) = a(x+h)+b$$

$$\frac{d}{dx}f(x) = \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h} =$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{a(x+h)+b-(ax+b)}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{ax+ah+b-ax-b}{h}$$

$$\therefore \lim_{h\to 0}\frac{ah}{h} = a$$

[٣] إذا كانت: $f(x) = x^n$ فأثبت أن: $\frac{d}{dx}f(x) = n\,x^{n-1}$

الإثبات

$$f(x) = x^n \rightarrow f(x+h) = (x+h)^n$$

$$\frac{d}{dx}f(x) = \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

$$\frac{d}{dx}f(x) = \lim_{h\to 0}\frac{(x+h)^n - x^n}{h} = \lim_{n\to 0}\frac{(x+h)^n - x^n}{x+h \quad - x}$$

$$\therefore \frac{d}{dx}f(x) = \lim_{h\to 0}\frac{(x+h)^n - x^n}{(x+h) - (x)} = n\,x^{n-1}$$

*****

[٤] إذا كانت: $f(x) = [g(x)]^n$

فأثبت أن: $\frac{d}{dx}f(x) = n\,[g(x)]^{n-1} \,.\, \acute{g}(x)$

الإثبات

$$f(x) = [g(x)]^n \rightarrow f(x+h) = [g(x+h)]^n$$

$$\frac{d}{dx}f(x) = \lim_{h\to 0}\frac{[g(x+h)]^n - [g(x)]^n}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0}\left\{\frac{[g(x+h)]^n - [g(x)]^n}{g(x+h)-g(x)} \times \frac{g(x+h)-g(x)}{h}\right\}$$

$$= \lim_{g(x+h)\to g(x)}\frac{[g(x+h)]^n - [g(x)]^n}{g(x+h)-g(x)} \times \lim_{h\to 0}\frac{g(x+h)-g(x)}{h}$$

$$\therefore \frac{d}{dx}f(x) = n\,[g(x)]^{n-1} \times \acute{g}(x)$$

[٥] إذا كانت: $f(x) = \sqrt{g(x)}$

فأثبت أن: $\frac{d}{dx}f(x) = \frac{\grave{g}(x)}{2 \times \sqrt{g(x)}}$

الإثبات

ينتج مباشرة بوضع $n = \frac{1}{2}$ في القاعدة السابقة رقم [٤]

$$\frac{d}{dx}f(x) = n\,[g(x)]^{n-1}\,.\,\acute{g}(x)$$

$$\rightarrow \frac{d}{dx}f(x) = \frac{1}{2}[g(x)]^{-\frac{1}{2}} \times \acute{g}(x) = \frac{\grave{g}(x)}{2 \times \sqrt{g(x)}}$$

*****

[٦] إذا كانت: $f(x) = e^x$ فأثبت أن: $\frac{d}{dx}f(x) = e^x$

الإثبات

$$f(x) = e^x \rightarrow f(x+h) = e^{x+h}$$

$$\frac{d}{dx}f(x) = \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{e^{x+h} - e^x}{h}$$

$$\therefore \frac{d}{dx}f(x) = \lim_{h\to 0}\frac{e^x\,[e^h - 1]}{h} = e^x \times \lim_{h\to 0}\frac{[e^h - 1]}{h} = e^x \times 1$$

$$\therefore \frac{d}{dx}f(x) = e^x$$

*****

[٧] مشتقة دالة الدالة (قاعدة التسلسل)أو مشتقة الدالة الضمنية

إذا كانت: $f = g(k)$ دالة قابلة للاشتقاق بالنسبة إلى k و كانت: $g = k(x)$ دالة قابلة للاشتقاق بالنسبة للمتغير x فإن: $f = g[\, k(x)\,]$ دالة قابلة للاشتقاق بالنسبة للمتغير x و يكون:

$$\frac{d}{dx} f(x) = \dot{g}[k(x)] \times \grave{k}(x)$$

الإثبات

$$f(x) = g[k(x)] \;\rightarrow\; f(x+h) = g[k(x+h]$$

$$\therefore \frac{d}{dx} f(x) = \lim_{h\to 0} \frac{g[k(x+h] - g[k(x)]}{h} \times \frac{k(x+h) - k(x)}{k(x+h) - k(x)}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{g[k(x+h] - g[k(x)]}{k(x+h) - k(x)} \times \lim_{h\to 0} \frac{k(x+h) - k(x)}{h}$$

$$\therefore \frac{d}{dx} f(x) = \dot{g}[k(x)] \times \grave{k}(x)$$

صورة أخرى: $\frac{d}{dx} f(x) = \frac{df}{dg} \times \frac{dg}{dx}$

*****

[٨] إذا كانت: $f(x) = e^{g(x)}$ فأثبت أن: $\frac{d}{dx} f(x) = e^{g(x)} \times \dot{g}(x)$

الإثبات

من قاعدة السلسة مباشرة ينتج:

$$\frac{d}{dx} e^{g(x)} = e^{g(x)} \times \dot{g}(x)$$

[٩] إذا كانت: $f(x) = Ln(g(x))$

فأثبت أن: $\frac{d}{dx}f(x) = \frac{\grave{g}(x)}{g(x)}$

الإثبات

$$f(x) = Ln(g(x)) \rightarrow e^{f(x)} = e^{Ln(g(x))} = g(x)$$

وبإجراء الاشتقاق بالنسبة لـ x : $e^{f(x)} \times \grave{f}(x) = \grave{g}(x)$

ومنها: $g(x) \times \grave{f}(x) = \grave{g}(x)$

لذلك : $\therefore \frac{d}{dx}f(x) = \frac{\grave{g}(x)}{g(x)}$

*****

[١٠] إذا كانت: $f(x) = g(x) \pm k(x)$

فأثبت أن: $\frac{d}{dx}f(x) = \grave{g}(x) \pm \grave{k}(x)$

الإثبات

$$f(x) = g(x) \pm k(x) \rightarrow f(x+h) = g(x+h) \pm k(x+h)$$

$$\frac{d}{dx}f(x) = \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h) - f(x)}{h} =$$

$$\lim_{h\to 0}\frac{[g(x+h) \pm k(x+h)] - [g(x) \pm k(x)]}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{g(x+h)-g(x)}{h} \pm \lim_{h\to 0}\frac{k(x+h)-k(x)}{h}$$

$$\therefore \frac{d}{dx}f(x) = \grave{g}(x) \pm \grave{k}(x)$$

[١١] إذا كانت: $f(x) = g(x) \times k(x)$

فأثبت أن: $\frac{d}{dx}f(x) = g(x) \times \grave{k}(x) + k(x) \times \grave{g}(x)$

الإثبات

$$f(x) = g(x) \times k(x) \rightarrow Ln(f(x)) = Ln(g(x)) + Ln\,(k(x))$$

و بإجراء الاشتقاق

$$\frac{\grave{f}(x)}{f(x)} = \frac{\grave{g}(x)}{g(x)} + \frac{\grave{k}(x)}{k(x)}$$

وبالضرب في: $f(x) = g(x) \times k(x)$

$$\therefore \frac{d}{dx}f(x) = \grave{f}(x) = g(x) \times \grave{k}(x) + k(x) \times \grave{g}(x)$$

*****

[١٢] إذا كانت: $f(x) = \frac{g(x)}{k(x)}$

فأثبت أن: $\frac{d}{dx}f(x) = \frac{k(x) \times \grave{g}(x) - g(x) \times \grave{k}(x)}{(k(x))^2}$

الإثبات

$$f(x) = \frac{g(x)}{k(x)} \rightarrow Ln(f(x)) = Ln(g(x)) - Ln\,(k(x))$$

و بإجراء الاشتقاق

$$\frac{\grave{f}(x)}{f(x)} = \frac{\grave{g}(x)}{g(x)} - \frac{\grave{k}(x)}{k(x)}$$

$$\therefore \frac{\grave{f}(x)}{f(x)} = \frac{k(x) \times \grave{g}(x) - g(x) \times \grave{k}(x)}{g(x) \times k(x)}$$

وبالضرب في: $f(x) = \frac{g(x)}{k(x)}$

$$\frac{d}{dx}f(x) = \frac{k(x) \times \grave{g}(x) - g(x) \times \grave{k}(x)}{[k(x)]^2}$$

[١٣] إذا كانت: $f(x) = \frac{a}{g(x)}$ فأثبت أن: $\frac{d}{dx}f(x) = \frac{-a \times [\dot{g}(x)]}{(g(x))^2}$

الإثبات

ينتج مباشرة من القاعدة السابقة رقم [١١]

و ذلك بوضع البسط = a والمقام = g(x)

مع ملاحظة أن: مشتقة الثابت a = صفر

*****

[١٤] إذا كانت $f(x) = a^{g(x)}$ فأثبت أن:

$$\frac{d}{dx}f(x) = a^{g(x)} \times \dot{g}(x) \times Ln(a)$$

الإثبات

$$f(x) = a^{g(x)}$$

ويأخذ ال Ln للطرفين: $Ln(f(x)) = Ln\left(a^{g(x)}\right)$

أي أن: $Ln(f(x)) = g(x) \times Ln(a)$

و بإجراء الاشتقاق $\frac{\grave{f}(x)}{f(x)} = Ln(a) \times \dot{g}(x)$

ومنها: $\grave{f} = f(x) \times Ln(a) \times \dot{g}(x)$

$$\therefore \frac{d}{dx}f(x) = a^{g(x)} \times \dot{g}(x) \times Ln(a)$$

مشتقات الدوال المثلثية

قبل البدء في إثبات مشتقات الدوال المثلثية لابد لنا أن نذكر بعض العلاقات المهمة:

$$[1]\ \sin\alpha - \sin\beta = 2\times \cos\left[\frac{\alpha+\beta}{2}\right]\times \sin\left[\frac{\alpha-\beta}{2}\right]$$

$$[2]\ \cos\alpha - \cos\beta = -2\times \sin\left[\frac{\alpha+\beta}{2}\right]\times \sin\left[\frac{\alpha-\beta}{2}\right]$$

$$[3]\ \tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$$

$$[4]\ \cot x = \frac{\cos x}{\sin x}$$

$$[5]\ \sec x = \frac{1}{\cos x}$$

$$[6]\cos^2 x + \sin^2 x = 1$$

$$[7]\ \csc x = \frac{1}{\sin x}$$

والآن نبدأ بحول الله وتوفيقه

[١] إذا كانت: $f(x) = sin\ x$ فأثبت أن: $\frac{d}{dx}f(x) = cos\ x$

الإثبات

$$f(x) = sin\ (x) \rightarrow f(x+h) = sin\ (x+h)$$

$$\frac{d}{dx}f(x) = \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{sin\ (x+h) - sin\ (x)}{h}$$

$$\therefore \frac{d}{dx}f(x) = \lim_{h\to 0}\frac{2\ cos\left(\frac{x+h+x}{2}\right)\times sin\left(\frac{x+h-x}{2}\right)}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{2\ sin\left(\frac{h}{2}\right)}{h}\times\lim_{h\to 0}\frac{cos\left(x+\frac{h}{2}\right)}{h} = 1\times\cos x = \cos x$$

$$\therefore \frac{d}{dx}sin\ x = cos\ x$$

*****

[٢] إذا كانت: $f(x) = cos\ x$ فأثبت أن: $\frac{d}{dx}f(x) = -sin\ x$

الإثبات

$$f(x) = cos\ (x) \rightarrow f(x+h) = cos\ (x+h)$$

$$\frac{d}{dx}f(x) = \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{cos\ (x+h) - cos\ (x)}{h}$$

$$\therefore \frac{d}{dx}f(x) = \lim_{h\to 0}\frac{-2\ sin\left(\frac{x+h+x}{2}\right)\times sin\left(\frac{x+h-x}{2}\right)}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{-\ 2\ sin\left(\frac{h}{2}\right)}{h}\times\lim_{h\to 0}\frac{sin\left(x+\frac{h}{2}\right)}{h} = -1\times\cos x = -\sin x$$

$$\therefore \frac{d}{dx}cos\ x = -\ sin\ x$$

[٣] إذا كانت $f(x) = \tan x$

فأثبت أن: $\frac{d}{dx}f(x) = \sec^2 x$

الإثبات

$$f(x) = \tan(x) = \frac{\sin x}{\cos x}$$

$$\frac{d}{dx}f(x) = \frac{\cos x \times \cos x - \sin x \times -\sin x}{(\cos x)^2} = \frac{1}{\cos^2 x}$$

$$\therefore \frac{d}{dx}\tan x = \sec^2 x$$

*****

[٤] إذا كانت $f(x) = \cot x$

فأثبت أن: $\frac{d}{dx}f(x) = -\csc^2 x$

الإثبات

$$f(x) = \cot(x) = \frac{\cos x}{\sin x}$$

$$\frac{d}{dx}f(x) = \frac{\sin x \times -\sin x - \cos x \times \cos x}{(\sin x)^2} = \frac{-1}{\sin^2 x}$$

$$\therefore \frac{d}{dx}\tan x = -\csc^2 x$$

[٥] إذا كانت $f(x) = sec\ \ x$

فأثبت أن: $\frac{d}{dx}f(x) = sec\,x\,.\,tan\,x$

الإثبات

$$f(x) = sec\ \ (x) = \frac{1}{cos\,x}$$

$$\frac{d}{dx}f(x) = \frac{d}{dx}\left(\frac{1}{cos\,x}\right) = \frac{-1 \times\ -sin\,x}{(cos\ \ x)^2} = \frac{-\,sin\,x}{cos^2\,x} = sec\,x\,.\,tan\,x$$

$$\therefore \frac{d}{dx}sec\,x\ \ = sec\,x\,.\,tan\,x$$

*****

[٦] إذا كانت $f(x) = csc\ \ x$

فأثبت أن: $\frac{d}{dx}f(x) = -csc\,x\,.\,cot\,x$

الإثبات

$$f(x) = csc\ \ (x) = \frac{1}{sin\,x}$$

$$\frac{d}{dx}f(x) = \frac{d}{dx}\left(\frac{1}{sin\,x}\right) = \frac{-1 \times\ cos\,x}{(sin\ \ x)^2} = \frac{-\,cos\,x}{sin^2\,x} = -csc\,x\,..\,cot\,x$$

$$\therefore \frac{d}{dx}csc\,x\ \ = -csc\,x\,.\ \ cot\ \ x$$

مشتقات الدوال المثلثية العكسية

قبل البدء في إثبات مشتقات الدوال المثلثية العكسية لابد لنا أن نذكر بعض العلاقات المهمة:

١) إذا كانت: $y = \sin^{-1}(x)$ فإن: $x = \sin(y)$

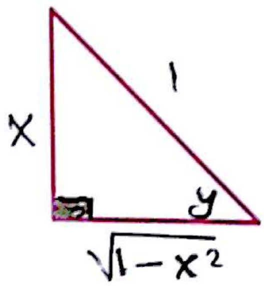
٢) إذا كانت: $y = \cos^{-1}(x)$ فإن: $x = \cos(y)$ و هكذا......

٣) إذا كانت θ زاوية حادة في مثلث قائم الزاوية فإن:

$$\sin\theta = \frac{\text{المقابل}}{\text{الوتر}} \quad ، \quad \cos\theta = \frac{\text{المجاور}}{\text{الوتر}} \quad ، \quad \tan\theta = \frac{\text{المقابل}}{\text{المجاور}}$$

والآن نبدأ بحول الله وتوفيقه

[١] إذا كانت $f(x) = \sin^{-1} x$ فأثبت أن: $\frac{d}{dx}f(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$



$\cos y = \frac{\sqrt{1-x^2}}{1}$

حيث: $-1 \le x \le 1$

أو $|x| \leq 1$

الإثبات

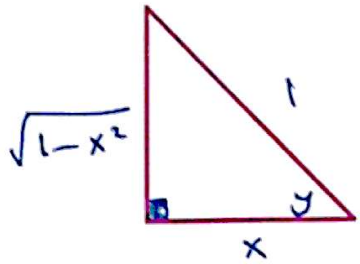
$$f(x) = \sin^{-1}(x) = y \quad \leftrightarrow \quad x = \sin(y)$$

باجراء الاشتقاق بالنسبة لـ x

$$1 = \cos y \times \frac{dy}{dx} \leftrightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{1}{\cos y} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

[٢] إذا كانت x $f(x) = cos^{-1}$ فأثبت أن: $\frac{d}{dx}f(x) = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$

$\sin y = \frac{\sqrt{1-x^2}}{1}$



$-1 \le x \le 1$

الإثبات

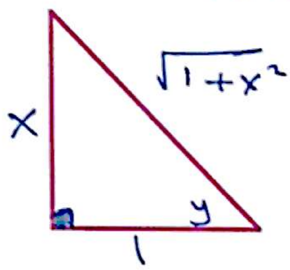
$$f(x) = cos^{-1}(x) = y \quad \leftrightarrow \quad x = cos(y)$$

بإجراء الاشتقاق بالنسبة لـ x

$$1 = -\sin y \times \frac{dy}{dx} \leftrightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{-1}{\sin y} = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$$

[٣] إذا كانت x $f(x) = tan^{-1}$ فأثبت أن: $\frac{d}{dx}f(x) = \frac{1}{1+x^2}$

$\sec y = \frac{1}{\cos y} = \frac{1}{\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}}$



$-\infty \le x \le \infty$

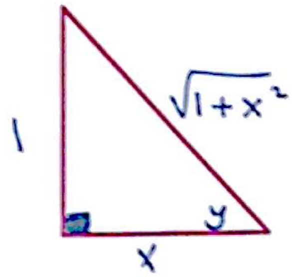
الإثبات

$$f(x) = tan^{-1}(x) = y \quad \leftrightarrow \quad x = tan(y)$$

بإجراء الاشتقاق بالنسبة لـ x

$$1 = sec^2 y \times \frac{dy}{dx} \leftrightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{1}{sec^2 y} = \frac{1}{1+x^2}$$

[٤] إذا كانت $f(x) = cot^{-1}\ x$ فأثبت أن: $\frac{d}{dx}f(x) = \frac{-1}{1+x^2}$



$\cot y = x$

$-\infty \le x \le \infty$

$\therefore \csc y = \frac{1}{\sin y} = \frac{1}{\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}}$

الإثبات

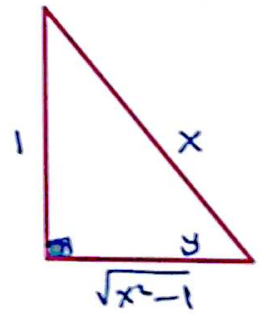
$$f(x) = cot^{-1}(x) = y \quad \leftrightarrow \quad x = cot(y)$$

بإجراء الاشتقاق بالنسبة لـ x

$$1 = -csc^2\, y \times \frac{dy}{dx} \leftrightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{-1}{csc^2\, y} = \frac{-1}{1+x^2}$$

*****

[٥] إذا كانت $f(x) = sec^{-1}\ x$ فأثبت أن: $\frac{d}{dx}f(x) = \frac{1}{x\sqrt{x^2-1}}$



$\sec y = x$

$|x| > 1$

$\therefore \tan y = \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$

الإثبات

$$f(x) = sec^{-1}(x) = y \quad \leftrightarrow \quad x = sec(y)$$

بإجراء الاشتقاق بالنسبة لـ x

$$1 = sec\, y \times tan\, y \times \frac{dy}{dx}$$

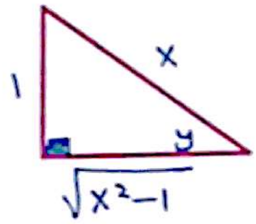
$$\leftrightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{1}{sec\, y \times tan\, y} = \frac{1}{|x|\sqrt{x^2-1}}$$

[٦] إذا كانت $f(x) = csc^{-1}\ x$ فأثبت أن: $\frac{d}{dx}f(x) = \frac{-1}{|x|\sqrt{x^2-1}}$

$|x| > 1$ حيث

$csc y = sin y = \frac{1}{x}$

؛ $cot y = \sqrt{x^2-1}$.



الإثبات

$$f(x) = csc^{-1}(x) = y \quad \leftrightarrow \quad x = csc(y)$$

بإجراء الاشتقاق بالنسبة لـ x

$$1 = -csc\ y \times cot\ y \times \frac{dy}{dx}$$

$$\leftrightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{-1}{csc\ y \times cot\ y} = \frac{-1}{|x|\sqrt{x^2-1}}$$

مشتقات الدوال المثلثية الزائدية

بعض الحقائق عن الدوال المثلثية الزائدية:

$$\sinh\theta = \frac{e^{\theta} - e^{-\theta}}{2} \quad ,, \quad \cosh\theta = \frac{e^{\theta} + e^{-\theta}}{2}$$

$$tansh\,\theta = \frac{\sinh\theta}{\cosh\theta} = \frac{e^{\theta} - e^{-\theta}}{e^{\theta} + e^{-\theta}} \;,, \coth\theta = \frac{\cosh\theta}{\sinh\theta} = \frac{e^{\theta} + e^{-\theta}}{e^{\theta} - e^{-\theta}}$$

$$\operatorname{sech}\theta = \frac{1}{\cosh\theta} = \frac{2}{e^{\theta} + e^{-\theta}} \;,, \operatorname{csch}\theta = \frac{1}{\sinh} = \frac{2}{e^{\theta} - e^{-\theta}}$$

$$\cosh\theta + \sinh\theta = e^{\theta} \quad ,, \quad \cosh\theta + \sinh\theta = e^{-\theta}$$

$$\cosh^2\theta - \sinh^2\theta = 1 \;,$$

$$1 - \tanh^2\theta = \operatorname{sech}^2\theta \;,$$

$$\coth^2\theta - 1 = \operatorname{csch}^2\theta$$

والآن نبدأ بحول الله وتوفيقه

[١] إذا كانت $f(x) = \sinh x$ فأثبت أن: $\frac{d}{dx}\sinh x = \cosh x$

الإثبات

$$\frac{d}{dx}\sinh x = \frac{d}{dx}\left(\frac{e^x - e^{-x}}{2}\right) = \frac{e^x + e^{-x}}{2} = \cosh x$$

*****

[٢] إذا كانت $f(x) = \cosh x$ فأثبت أن: $\frac{d}{dx}\cosh x = \sinh x$

الإثبات

$$\frac{d}{dx}\cosh x = \frac{d}{dx}\left(\frac{e^x + e^{-x}}{2}\right) = \frac{e^x - e^{-x}}{2} = \sinh x$$

[٣] إذا كانت $f(x) = tanh\ x$ فأثبت أن:

$$\frac{d}{dx} tanh\ x = sech^2\ x$$

الإثبات

$$\frac{d}{dx} \tanh\ x = \frac{d}{dx}\left(\frac{sinh\ x}{cosh\ x}\right)$$

$$= \left[\frac{cosh\ x \times cosh\ x - sinh\ x \times sinh\ x}{cosh^2\ x}\right]$$

$$= \frac{1}{cosh^2\ x} = sech^2\ x$$

*****

[٤] إذا كانت $f(x) = coth\ x$ فأثبت أن:

$$\frac{d}{dx} coth\ x = -\,csch^2\ x$$

الإثبات

$$\frac{d}{dx} \coth x = \frac{d}{dx}\left(\frac{cosh\ x}{sinh\ x}\right)$$

$$= \left[\frac{sinh\ x \times sinh\ x - cosh\ x \times cosh\ x}{sinh^2\ x}\right]$$

$$= \frac{-1}{sinh^2\ x} = -\,csch^2\ x$$

[٥] إذا كانت $f(x) = sech\ x$ فاثبت أن:

$$\frac{d}{dx} sech\ x = -\, sech\, x\ tanh\, x$$

الإثبات

$$\frac{d}{dx}\mathrm{sech}\, x = \frac{d}{dx}\left(\frac{1}{cosh\, x}\right) = \left[\frac{-sinh\ x}{cosh^2\ x}\right]$$

$$= -\, sech\, x\ tanh\, x$$

*****

[٦] إذا كانت $f(x) = csch\ x$ فاثبت أن:

$$\frac{d}{dx} sech\ x = -\, csch\, x\ coth\, x$$

الإثبات

$$\frac{d}{dx}\mathrm{csch}\, x = \frac{d}{dx}\left(\frac{1}{sinh\ x}\right) = \left[\frac{-cosh\ x}{sinh^2\ x}\right]$$

$$= -\, csch\, x\ coth\, x$$

مشتقات الدوال المثلثية الزائدية العكسية

بعض الحقائق عن الدوال المثلثية الزائدية العكسية:

$$\sinh^{-1} x = Ln\left(x + \sqrt{x^2+1}\right)$$

$$\cosh^{-1} x = Ln\left(x + \sqrt{x^2-1}\right)$$

$$\tanh^{-1} x = \frac{1}{2}\, Ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$$

$$\coth^{-1} x = \frac{1}{2}\, Ln\left(\frac{x+1}{x-1}\right)$$

$$\text{sech}^{-1} x = Ln\left(\frac{1+\sqrt{1-x^2}}{x}\right)$$

$$\text{csch}^{-1} x = Ln\left(\frac{1}{x} + \frac{\sqrt{1+x^2}}{|x|}\right)$$

*****

برهان أن: $\sinh^{-1} x = Ln\left(x + \sqrt{x^2+1}\right)$

$$Let{:}\ y = \sinh^{-1} x \ \leftrightarrow x = \sinh y = \frac{e^y - e^{-y}}{2}$$

ومنها: $e^y - 2x - e^{-y} = 0 \ \leftrightarrow\ e^{2y} - 2xe^y - 1 = 0$

وهي معادلة تربيعية حلها المقبول: $e^y = x + \sqrt{x^2+1}$

أي أن: $y = Ln\left(x + \sqrt{x^2+1}\right) \ \leftrightarrow \sinh^{-1} x = Ln\left(x + \sqrt{x^2+1}\right)$

والآن نبدأ بحول الله وتوفيقه

[١] أثبت أن: $\frac{d}{dx}\left(\sinh^{-1}\ x\right) = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$

الإثبات

$$\frac{d}{dx}\left(\sinh^{-1} x\right) = \frac{d}{dx}\left[Ln\left(x + \sqrt{x^2+1}\right)\right] = \frac{1+\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}}{x+\sqrt{x^2+1}}$$

$$= \frac{\sqrt{x^2+1}+x}{\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)\left(\sqrt{x^2+1}\right)} = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$$

*****

[٢] أثبت أن: $\frac{d}{dx}\left(\cosh^{-1}\ x\right) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

الإثبات

$$\frac{d}{dx}\left(\cosh^{-1} x\right) = \frac{d}{dx}\left[Ln\left(x + \sqrt{x^2-1}\right)\right] = \frac{1+\frac{x}{\sqrt{x^2-1}}}{x+\sqrt{x^2-1}}$$

$$= \frac{\sqrt{x^2-1}+x}{\left(x+\sqrt{x^2-1}\right)\left(\sqrt{x^2-1}\right)} = \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$$

[٣] أثبت أن: $\frac{d}{dx}\left(\tanh^{-1} x\right) = \frac{1}{1-x^2}$

الإثبات

$$\frac{d}{dx}\left(tanh^{-1} x\right) = \frac{d}{dx}\left[\frac{1}{2} Ln \left(\frac{1+x}{1-x}\right)\right] = \frac{1}{2}\frac{\frac{(1-x)(1)-(1+x)(-1)}{(1-x)^2}}{\frac{1+x}{1-x}}$$

$$= \frac{1}{2}\times \frac{2\,(1-x)}{(1+x)\,(1-x)^2} = \frac{1}{1-x^2}$$

*****

[٤] أثبت أن: $\frac{d}{dx}\left(\coth^{-1} x\right) = \frac{1}{1-x^2}$

الإثبات

$$\frac{d}{dx}\left(coth^{-1} x\right) = \frac{d}{dx}\left[\frac{1}{2} Ln \left(\frac{1-x}{1+x}\right)\right] = \frac{1}{2}\frac{\frac{(1+x)(-1)-(1-x)(1)}{(1+x)^2}}{\frac{1-x}{1+x}}$$

$$= \frac{1}{2}\times \frac{2\,(1+x)}{(1-x)\,(1+x)^2} = \frac{1}{1-x^2}$$

[٥] أثبت أن: $\frac{d}{dx}\left(\operatorname{sech}^{-1} x\right) = \frac{1}{x\sqrt{1-x^2}}$

الإثبات

$$\frac{d}{dx}\left(\operatorname{sech}^{-1} x\right) = \frac{d}{dx}\left[Ln\left(\frac{1+\sqrt{1-x^2}}{x}\right)\right]$$

$$= \frac{\dfrac{(x)\left(\frac{-2x}{2\sqrt{1-x^2}}\right)-\left(1+\sqrt{1-x^2}\right)(1)}{(x)^2}}{\dfrac{1+\sqrt{1-x^2}}{x}} = \frac{1}{x\sqrt{1-x^2}}$$

*****

[٦] أثبت أن: $\frac{d}{dx}\left(\operatorname{csch}^{-1} x\right) = \frac{1}{|x|\sqrt{1+x^2}}$

الإثبات

$$\frac{d}{dx}\left(\operatorname{csch}^{-1} x\right) = \frac{d}{dx}\left[Ln\left(\frac{1}{x}+\frac{\sqrt{1+x^2}}{|x|}\right)\right]$$

$$= \frac{\left(\dfrac{-1}{x^2}+\dfrac{x\times\frac{2x}{2\sqrt{1+x^2}}-\sqrt{1+x^2}\times 1}{x^2}\right)}{\dfrac{1}{x}+\dfrac{\sqrt{1+x^2}}{|x|}} = \frac{1}{|x|\sqrt{1+x^2}}$$

*****

ملخص لقواعد الاشتقاق التي تم إثباتها

الدالة $y = f(x)$	المشتقة الأولى $\frac{dy}{dx}$
a	0
$ax + b$	a
x^n	$n\, x^{n-1}$
$[g(x)]^n$	$n\, [g(x)]^{n-1} \,.\, \acute{g}(x)$
$\sqrt{g(x)}$	$\frac{\grave{g}(x)}{2 \times \sqrt{g(x)}}$
e^x	e^x
f = g[k(x)]	$\grave{g}[k(x)] \times \grave{k}(x)$
$e^{g(x)}$	$e^{g(x)} \times \grave{g}(x)$
$Ln(g(x))$	$e^{g(x)} \times \grave{g}(x)$
$g(x) \pm k(x)$	$\grave{g}(x) \pm \grave{k}(x)$
$g(x) \times k(x)$	$g(x) \times \grave{k}(x) + k(x) \times \grave{g}(x)$
$\frac{g(x)}{k(x)}$	$\frac{k(x) \times \grave{g}(x) - g(x) \times \grave{k}(x)}{(k(x))^2}$
$\frac{a}{g(x)}$	$\frac{-a \times [\grave{g}(x)]}{(g(x))^2}$
$a^{g(x)}$	$a^{g(x)} \times \grave{g}(x) \times Ln(a)$
$\sin x$	$\cos x$
$\cos x$	$-\sin x$
$\tan x$	$\sec^2 x$
$\cot x$	$-\csc^2 x$
$\sec x$	$\sec x \,.\, \tan x$
$\csc x$	$-\csc x \,.\, \cot x$

تابع

الدالة $y = f(x)$	المشتقة الأولى $\frac{dy}{dx}$
$\sin^{-1} x$	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ ، $-1 \le x \le 1$
$\cos^{-1} x$	$\frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$ ، $-1 \le x \le 1$
$\tan^{-1} x$	$\frac{1}{1+x^2}$ ،$-\infty \le x \le \infty$
$\cot^{-1} x$	$\frac{-1}{1+x^2}$ ، $-\infty \le x \le \infty$
$\sec^{-1} x$	$\frac{1}{x\sqrt{x^2-1}}$ ، $\lvert x\rvert > 1$
$\csc^{-1} x$	$\frac{-1}{\lvert x\rvert\sqrt{x^2-1}}$ ، $\lvert x\rvert > 1$
$\sinh x$	$\cosh x$
$\cosh x$	$\sinh x$
$\tanh x$	$\operatorname{sech}^2 x$
$\coth x$	$-\operatorname{csch}^2 x$
$\operatorname{sech} x$	$-\operatorname{sech} x \tanh x$
$\operatorname{csch} x$	$= -\operatorname{csch} x \coth x$
$\sinh^{-1} x$	$\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$
$\cosh^{-1} x$	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$\tanh^{-1} x$	$\frac{1}{1-x^2}$
$\coth^{-1} x$	$\frac{1}{1-x^2}$
$\operatorname{sech}^{-1} x$	$\frac{1}{x\sqrt{1-x^2}}$
$\operatorname{csch}^{-1} x$	$\frac{1}{\lvert x\rvert\sqrt{1+x^2}}$

أسأل الله العلي العظيم أن يوفقنا وإياكم إلى ما يُحب و يرضى