الفصل 5 دليل الدراسة والمراجعة

التقويم التكويني

المفردات

رقم الصفحة بعد كل مفردة يُشير إلى الصفحة التي وردت فيها المفردة أول مرة، فإذا واجه بعض الطلاب صعوبات في حل الأسئلة 9-1، فذكِّرهم بأنه يمكنهم استعمال هذه الصفحات مرجعًا ليتذكَّروا المعلومات حول هذه المفردات.

التقويم الختامي

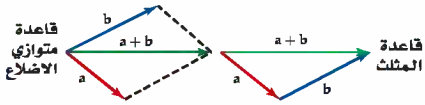
اختبار المفردات للفصل 5، ص (14)

ملخص الفصل

مفاهيم أساسية

مقدمة في المتجهات (الدرس 1-5)

- يُعبِّر عن اتجاه المتجه بالزاوية بين المتجه، والأفقي. ومقدار المتجه هو طوله.
- ناتج جمع متجهين هو متجه يُسمى المحصِّلة، ويمكن إيجاده باستعمال قاعدة المثلث، أو قاعدة متوازي الأضلاع.



المتجهات في المستوى الإحداثي (الدرس 2-5)

- الصورة الإحداثية للمتجه في الوضع القياسي هي $\langle x, y \rangle$.
- الصورة الإحداثية للمتجه في الوضع غير القياسي الذي نقطة بدايته $A(x_1, y_1)$، ونقطة نهايته $B(x_2, y_2)$ هي: $\langle x_2 - x_1, y_2 - y_1 \rangle$.
- يُعطى طول المتجه $\mathbf{v} = \langle v_1, v_2 \rangle$ بالصيغة $|\mathbf{v}| = \sqrt{(v_1)^2 + (v_2)^2}$
- إذا كان: $\mathbf{a} = \langle a_1, a_2 \rangle$, $\mathbf{b} = \langle b_1, b_2 \rangle$ متجهين، وكان k عددًا حقيقيًا، فإن: $\mathbf{a} + \mathbf{b} = \langle a_1 + b_1, a_2 + b_2 \rangle$ ، $\mathbf{a} - \mathbf{b} = \langle a_1 - b_1, a_2 - b_2 \rangle$ ، $k\mathbf{a} = \langle ka_1, ka_2 \rangle$
- يمكن استعمال متجهَي الوحدة $\mathbf{i}$ ، $\mathbf{j}$ للتعبير عن المتجه $\mathbf{v} = \langle a, b \rangle$ على الصورة $a\mathbf{i} + b\mathbf{j}$.

الضرب الداخلي (الدرس 3-5)

- يُعرَّف الضرب الداخلي للمتجهين: $\mathbf{a} = \langle a_1, a_2 \rangle$ ، $\mathbf{b} = \langle b_1, b_2 \rangle$ بالصيغة: $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = a_1 b_1 + a_2 b_2$
- إذا كانت θ زاوية بين متجهين غير صفريين $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ ، فإن: $\cos\theta = \frac{\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}}{|\mathbf{a}|\,|\mathbf{b}|}$

المتجهات في الفضاء الثلاثي الأبعاد (الدرس 4-5)

- تعطى المسافة بين النقطتين $A(x_1, y_1, z_1)$ ، $B(x_2, y_2, z_2)$ بالصيغة: $AB = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$
- تعطى نقطة منتصف $\overline{AB}$ بالصيغة: $M\left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2}, \frac{z_1 + z_2}{2}\right)$

الضرب الداخلي والضرب الاتجاهي لمتجهين في الفضاء (الدرس 5-5)

- يُعرَّف الضرب الداخلي للمتجهين: $\mathbf{a} = \langle a_1, a_2, a_3 \rangle$ ، $\mathbf{b} = \langle b_1, b_2, b_3 \rangle$ بالصيغة $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3$
- إذا كان: $\mathbf{a} = a_1\mathbf{i} + a_2\mathbf{j} + a_3\mathbf{k}$, $\mathbf{b} = b_1\mathbf{i} + b_2\mathbf{j} + b_3\mathbf{k}$ ، فإن الضرب الاتجاهي للمتجهين $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ هو $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$. ويساوي $(a_2 b_3 - a_3 b_2)\mathbf{i} - (a_1 b_3 - a_3 b_1)\mathbf{j} + (a_1 b_2 - a_2 b_1)\mathbf{k}$

المفردات

كمية قياسية عددية ص 10
المتجه ص 10
كمية متجهة ص 10
نقطة البداية ص 10
نقطة النهاية ص 10
قطعة مستقيمة متجهة ص 10
طول المتجه ص 10
الوضع القياسي ص 10
اتجاه المتجه ص 10
الاتجاه الربعي ص 11
الاتجاه الحقيقي ص 11
المتجهات المتوازية ص 11
المتجهات المتساوية ص 11
المتجهان المتعاكسان ص 11
المحصلة ص 12
قاعدة المثلث ص 12
قاعدة متوازي الأضلاع ص 12
المتجه الصفري ص 13
المركبات ص 14
المركبات المتعامدة ص 14
الصورة الإحداثية ص 18
متجه الوحدة ص 20
متجها الوحدة القياسيان ص 20
توافق خطيٌّ ص 21
الضرب الداخلي ص 26
المتجهان المتعامدان ص 26
الشغل ص 29
نظام الإحداثيات الثلاثي
الأبعاد ص 33
المحور z ص 33
الثُّمن ص 33
الثلاثي المرتب ص 33
الضرب الاتجاهي ص 40
متوازي السطوح ص 41
الضرب القياسي الثلاثي ص 41

اختبر مفرداتك

حدِّد ما إذا كانت العبارات الآتية صحيحة أم خاطئة، وإذا كانت خاطئة فاستبدل ما تحته خط لتصبح العبارة صحيحة:

1) نقطة نهاية المتجه هي الموقع الذي يبدأ منه. خطأ؛ يتهي عنده

2) إذا كان: $\mathbf{a} = \langle -4, 1 \rangle$, $\mathbf{b} = \langle 3, 2 \rangle$ ، فإن الضرب الداخلي للمتجهين هو $-4(1) + 3(2)$. خطأ؛ $-4(3) + 1(2)$

3) نقطة منتصف $\overline{AB}$ عندما تكون $A(x_1, y_1, z_1)$, $B(x_2, y_2, z_2)$ هي $\left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2}, \frac{z_1 + z_2}{2}\right)$. صحيحة

4) طول المتجه r الذي نقطة بدايته $A(-1, 2)$ ، ونقطة نهايته $B(2, -4)$ هو $\langle 3, -6 \rangle$. خطأ؛ الصورة الإحداثية للمتجه

5) يتساوَى متجهان إذا وفقط إذا كان لهما الطول نفسه، والاتجاه نفسه. صحيحة

6) إذا تعامد متجهان غير صفريين، فإن قياس الزاوية بينهما $180°$. خطأ؛ $90°$

7) لتجد متجهًا يعامد أي متجهين على الأقل في الفضاء، أوجد الضرب الاتجاهي للمتجهين الأصليين. صحيحة

8) طرح متجه يكافئ إضافة معكوس المتجه. صحيحة

9) إذا كان $\mathbf{v}$ متجه وحدة باتجاه $\mathbf{u}$، فإن $\mathbf{v} = \frac{|\mathbf{u}|}{\mathbf{u}}$. خطأ؛ $\mathbf{v} = \frac{\mathbf{u}}{|\mathbf{u}|}$

مراجعة الدروس

5-1 مقدمة في المتجهات (الصفحات 17 - 10)

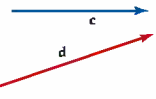
حدِّد **الكميات المتجهة**، والكميات القياسية في كلٍّ مما يأتي:

10) تسير سيارة بسرعة 50 mi/h باتجاه الشرق. **كمية متجهة**

11) شجرة طولها 20 ft. **كمية قياسية**

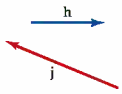
أوجد محصلة كل زوج من المتجهات الآتية باستعمال قاعدة المثلث، أو قاعدة متوازي الأضلاع. قرِّب المحصلة إلى أقرب جزء من عشرة من السنتمتر، ثم حدِّد اتجاهها بالنسبة للأفقي، مستعملًا المسطرة، والمنقلة.

12)



6.3 cm, 11°

13)

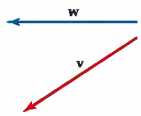


1.2 cm, 130°

14)

2.8, 297° تقريبًا

15)



4.8, 195° تقريبًا

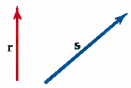
أوجد طول المحصّلة لناتج جمع المتجهين واتجاهها في كلٍّ مما يأتي:

16) 70 m جهة الغرب، ثم 150 m جهة الشرق. **80 m للشرق**

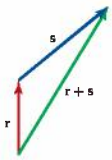
17) 8 N للخلف، ثم 12 N للخلف. **20 N للخلف**

مثال 1

أوجد محصلة المتجهين r, s مستعملًا قاعدة المثلث، أو قاعدة متوازي الأضلاع. قرِّب المحصّلة إلى أقرب جزء من عشرة من السنتمتر، ثم حدِّد اتجاهها بالنسبة للأفقي مستعملًا المسطرة، والمنقلة.

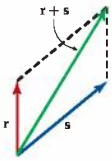


قاعدة المثلث



اسحب r ، بحيث تلتقي نقطة نهاية r مع نقطة بداية s ، فتكون المحصلة هي المتجه الذي يبدأ من نقطة بداية r ، وينتهي عند نقطة نهاية s.

قاعدة متوازي الأضلاع



اسحب s ، بحيث تلتقي نقطة بدايته مع نقطة بداية r ، ثم أكمل متوازي الأضلاع الذي فيه r, s ضلعان متجاوران، فتكون المحصلة هي المتجه الذي يكوّن قطر متوازي الأضلاع.

فيكون طول المحصلة 3.4 cm ، وقياس زاويتها 59° مع الأفقي.

45 الفصل 5 دليل الدراسة والمراجعة

مراجعة الدروس

مراجعة إذا كانت الأمثلة المعطاة غير كافية لمراجعة الموضوعات التي تناولتها الأسئلة، فذكّر الطلاب بمرجع الصفحات الذي يدلُّهم على أين يراجعون تلك الموضوعات في كتابهم المقرر.

نموذج التوقع

اطلب إلى الطلاب تعبئة نموذج التوقع للفصل 5 ص (8)، وناقشهم حول تغيّر إجاباتهم بعد إتمام دراسة الفصل عمّا كانت عليه عند بدايته.

إجابات:

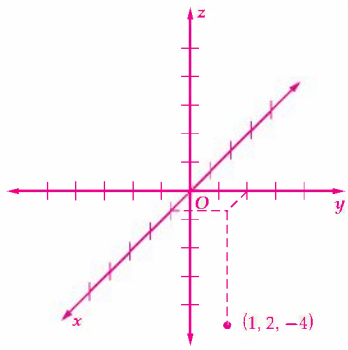
(26) $\left\langle -\frac{7\sqrt{53}}{53}, \frac{2\sqrt{53}}{53} \right\rangle$

(27) $\left\langle \frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2} \right\rangle$

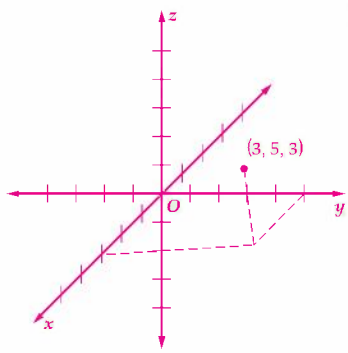
(28) $\left\langle -\frac{5\sqrt{89}}{89}, -\frac{8\sqrt{89}}{89} \right\rangle$

(29) $\left\langle \frac{3\sqrt{10}}{10}, \frac{\sqrt{10}}{10} \right\rangle$

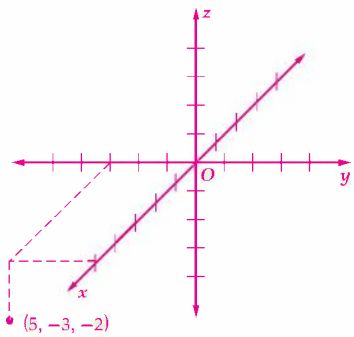
(36)



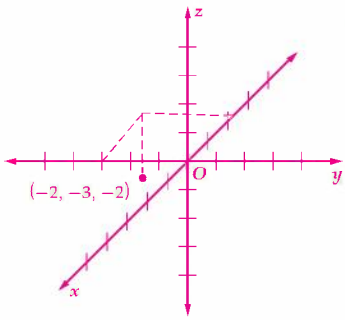
(37)



(38)



(39)



5-2 المتجهات في المستوى الإحداثي (الصفحات 25 - 18)

أوجد الصورة الإحداثية، وطول $\overrightarrow{AB}$ المعطاة نقطتا بدايته ونهايته في كلٍّ مما يأتي:

(18) $A(-1, 3), B(5, 4)$ $\langle 6, 1\rangle; \sqrt{37} \approx 6.1$

(19) $A(7, -2), B(-9, 6)$ $\langle -16, 8\rangle; \sqrt{320} = 8\sqrt{5} \approx 17.9$

(20) $A(-8, -4), B(6, 1)$ $\langle 14, 5\rangle; \sqrt{221} \approx 14.9$

(21) $A(2, -10), B(3, -5)$ $\langle 1, 5\rangle; \sqrt{26} \approx 5.1$

إذا كان: $\mathbf{t} = \langle -4, 2\rangle, \mathbf{q} = \langle -2, -3\rangle, \mathbf{p} = \langle 4, 0\rangle$، فأوجد كلًّا ممّا يأتي:

(22) $2\mathbf{q} - \mathbf{p}$ $\langle -8, -6\rangle$

(23) $\mathbf{p} + 2\mathbf{t}$ $\langle -4, 4\rangle$

(24) $\mathbf{t} - 3\mathbf{p} + \mathbf{q}$ $\langle -18, -1\rangle$

(25) $2\mathbf{p} + \mathbf{t} - 3\mathbf{q}$ $\langle 10, 11\rangle$

أوجد متجه وحدة $\mathbf{u}$ باتجاه $\mathbf{v}$ في كلٍّ مما يأتي: **(26-29)** انظر الهامش

(26) $\mathbf{v} = \langle -7, 2\rangle$

(27) $\mathbf{v} = \langle 3, -3\rangle$

(28) $\mathbf{v} = \langle -5, -8\rangle$

(29) $\mathbf{v} = \langle 9, 3\rangle$

مثال 2

أوجد الصورة الإحداثية، وطول $\overrightarrow{AB}$ الذي نقطة بدايته $A(3, -2)$، ونقطة نهايته $B(4, -1)$.

الصورة الإحداثية: $\overrightarrow{AB} = \langle x_2 - x_1, y_2 - y_1\rangle$

عوّض: $= \langle 4 - 3, -1 - (-2)\rangle$

اطرح: $= \langle 1, 1\rangle$

أوجد طول المتجه $\overrightarrow{AB}$.

قانون المسافة: $|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{a^2 + b^2}$

عوّض: $= \sqrt{1^2 + 1^2}$

بسّط: $= \sqrt{2} \approx 1.4$

5-3 الضرب الداخلي (الصفحات 31 - 26)

أوجد الضرب الداخلي للمتجهين $\mathbf{u}, \mathbf{v}$ في كلٍّ ممّا يأتي، ثم تحقّق ممّا إذا كانا متعامدين أم لا:

(30) $\mathbf{u} = \langle -3, 5\rangle, \mathbf{v} = \langle 2, 1\rangle$ -1؛ غير متعامدين

(31) $\mathbf{u} = \langle 4, 4\rangle, \mathbf{v} = \langle 5, 7\rangle$ 48؛ غير متعامدين

(32) $\mathbf{u} = \langle -1, 4\rangle, \mathbf{v} = \langle 8, 2\rangle$ 0؛ متعامدان

(33) $\mathbf{u} = \langle -2, 3\rangle, \mathbf{v} = \langle 1, 3\rangle$ 7؛ غير متعامدين

أوجد الزاوية θ بين المتجهين $\mathbf{u}, \mathbf{v}$ في كلٍّ ممّا يأتي:

(34) $\mathbf{u} = \langle 5, -1\rangle, \mathbf{v} = \langle -2, 3\rangle$ $135°$

(35) $\mathbf{u} = \langle -1, 8\rangle, \mathbf{v} = \langle 4, 2\rangle$ $70.6°$

مثال 3

أوجد الضرب الداخلي للمتجهين: $\mathbf{x} = \langle 2, -5\rangle, \mathbf{y} = \langle -4, 7\rangle$، ثم تحقق مما إذا كانا متعامدين أم لا.

الضرب الداخلي: $\mathbf{x} \cdot \mathbf{y} = x_1 y_1 + x_2 y_2$

عوّض: $= 2(-4) + (-5)(7)$

بسّط: $= -8 + (-35) = -43$

بما أن $\mathbf{x} \cdot \mathbf{y} \neq 0$، فإن المتجهين $\mathbf{x}$، $\mathbf{y}$ غير متعامدين.

5-4 المتجهات في الفضاء الثلاثي الأبعاد (الصفحات 38 - 33)

عيّن كل نقطة من النقاط الآتية في الفضاء الثلاثي الأبعاد:

(36) $(1, 2, -4)$

(37) $(3, 5, 3)$

(38) $(5, -3, -2)$

(39) $(-2, -3, -2)$

39-36) انظر الهامش

أوجد طول القطعة المستقيمة المُعطاة نقطتا طرفَيها في كلٍّ مما يأتي، ثم أوجد إحداثيات نقطة منتصفها.

(40) $(-4, 10, 4), (2, 0, 8)$

(41) $(-5, 6, 4), (-9, -2, -2)$

(42) $(3, 2, 0), (-9, -10, 4)$

(43) $(8, 3, 2), (-4, -6, 6)$

43-40) انظر الهامش

مثّل بيانيًّا كلًّا من المتجهات الآتية في الفضاء:

(44) $\mathbf{a} = \langle 0, -3, 4 \rangle$

(45) $\mathbf{b} = -3\mathbf{i} + 3\mathbf{j} + 2\mathbf{k}$

(46) $\mathbf{c} = -2\mathbf{i} - 3\mathbf{j} + 5\mathbf{k}$

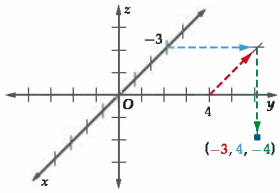
(47) $\mathbf{d} = \langle -4, -5, -3 \rangle$

47-44) انظر الهامش

مثال 4

عيّن النقطة $(-3, 4, -4)$ في الفضاء الثلاثي الأبعاد.

حدّد موقع النقطة $(-3, 4)$ في المستوى xy بوضع إشارة، ثم عيّن نقطةً تبعد 4 وحداتٍ أسفل هذه النقطة، وباتجاه موازٍ للمحور z.



5-5 الضرب الداخلي والضرب الاتجاهي للمتجهات في الفضاء (الصفحات 43 - 39)

أوجد الضرب الداخلي للمتجهين $\mathbf{u}, \mathbf{v}$ في كلٍّ مما يأتي، ثم حدّد ما إذا كانا متعامدين أم لا.

(48) $\mathbf{u} = \langle 2, 5, 2 \rangle, \mathbf{v} = \langle 8, 2, -13 \rangle$ 0؛ متعامدان

(49) $\mathbf{u} = \langle 5, 0, -6 \rangle, \mathbf{v} = \langle -6, 1, 3 \rangle$ −48؛ غير متعامدين

أوجد الضرب الاتجاهي للمتجهين $\mathbf{u}, \mathbf{v}$ في كلٍّ مما يأتي، ثم بيّن أن $\mathbf{u} \times \mathbf{v}$ يعامد كلًّا من $\mathbf{u}, \mathbf{v}$:

(50) $\mathbf{u} = \langle 1, -3, -2 \rangle, \mathbf{v} = \langle 2, 4, -3 \rangle$

(51) $\mathbf{u} = \langle 4, 1, -2 \rangle, \mathbf{v} = \langle 5, -4, -1 \rangle$

50, 51) انظر الهامش

مثال 5

أوجد الضرب الاتجاهي للمتجهين: $\mathbf{u} = \langle -4, 2, -3 \rangle$، $\mathbf{v} = \langle 7, 11, 2 \rangle$، ثم بيّن أن $\mathbf{u} \times \mathbf{v}$ يعامد كلًّا من $\mathbf{u}, \mathbf{v}$.

$$\mathbf{u} \times \mathbf{v} = \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 11 & 2 \end{vmatrix} \mathbf{i} - \begin{vmatrix} -4 & -3 \\ 7 & 2 \end{vmatrix} \mathbf{j} + \begin{vmatrix} -4 & 2 \\ 7 & 11 \end{vmatrix} \mathbf{k}$$

$$= \langle 37, -13, -58 \rangle$$

$$(\mathbf{u} \times \mathbf{v}) \cdot \mathbf{u} = \langle 37, -13, -58 \rangle \cdot \langle -4, 2, -3 \rangle$$

$$= -148 - 26 + 174 = 0 \checkmark$$

$$(\mathbf{u} \times \mathbf{v}) \cdot \mathbf{v} = \langle 37, -13, -58 \rangle \cdot \langle 7, 11, 2 \rangle$$

$$= 259 - 143 - 116 = 0 \checkmark$$

بما أن حاصل الضرب الداخلي في الحالتين يساوي صفرًا، فإن $\mathbf{u} \times \mathbf{v}$ عمودي على كلٍّ من $\mathbf{u}, \mathbf{v}$

إجابات:

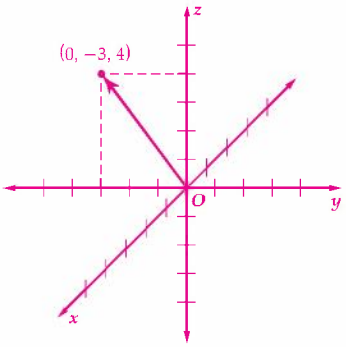
(40) 12.33; $(-1, 5, 6)$

(41) 10.77; $(-7, 2, 1)$

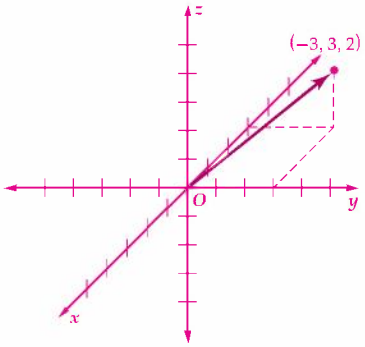
(42) 17.44; $(-3, -4, 2)$

(43) 15.52; $(2, -1.5, 4)$

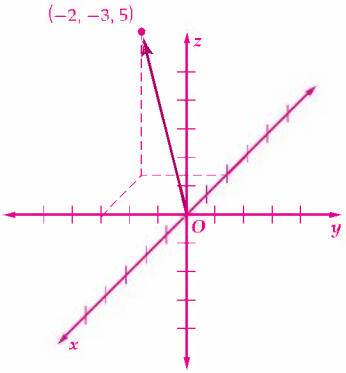
(44)



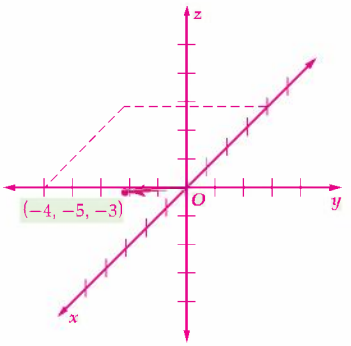
(45)



(46)



(47)



(50) $\langle 17, -1, 10 \rangle, \langle 17, -1, 10 \rangle \cdot \langle 1, -3, -2 \rangle = 0, \langle 17, -1, 10 \rangle \cdot \langle 2, 4, -3 \rangle = 0$

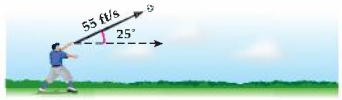
(51) $\langle -9, -6, -21 \rangle, \langle -9, -6, -21 \rangle \cdot \langle 4, 1, -2 \rangle = 0, \langle -9, -6, -21 \rangle \cdot \langle 5, -4, -1 \rangle = 0$

إجابة :

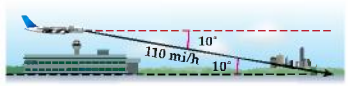
55c) إجابة ممكنة : لا يمكن وجود قمر ثالث؛ لأن إحداثياته ستكون داخل الأرض؛ وذلك لأن القيمة المطلقة لجميع إحداثيات موقع القمر الثالث أقل من نصف قطر الأرض.

تطبيقات ومسائل

52) كرة قدم: تلقَّى لاعب كرة قدم الكرة برأسه، فارتدَّت بسرعةٍ ابتدائيةٍ مقدارها 55 ft/s، وبزاويةٍ قياسها 25° فوق الأفقي كما في الشكل أدناه. أوجد مقدار كلٍّ من المركبتين الأفقية، والرأسية للسرعة. (الدرس 5-1) **49.8 ft/s تقريبًا، 23.2ft/s تقريبًا**

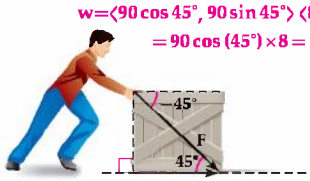


53) طيران: تهبط طائرة بسرعة مقدارها 110 mi/h، وبزاوية قياسها 10° تحت الأفقي، أوجد الصورة الإحداثية للمتجه الذي يُمثِّل سرعة الطائرة. (الدرس 5-2) **⟨108.3, −19.1⟩**



54) صناديق: يدفع عامل صندوقًا بقوةٍ ثابتةٍ مقدارها 90 N بزاوية 45° في الشكل أدناه. أوجد الشغل المبذول بالجول لتحريك الصندوق 8 m (مع إهمال قوة الاحتكاك). (الدرس 5-3)

$$w = \langle 90\cos 45°, 90\sin 45° \rangle \cdot \langle 8, 0 \rangle$$
$$= 90\cos(45°) \times 8 = 509\,\text{J}$$



55) أقمار اصطناعية: إذا مَثَّلت النقطتان: (28625, 32461, −38426)، (−31613, −29218, 43015) موقعَي قمرين اصطناعيين، ومَثَّلَتِ النقطة (0, 0, 0) مركز الأرض، وعلمت أن الإحداثيات معطاة بالميل، وأن طول نصف قطر الأرض يساوي 3963 mi تقريبًا، فأجب عمَّا يأتي: (الدرس 5-4)

a) أوجد المسافة بين القمرين. **118598 mi تقريبًا**

b) إذا وضع قمر ثالث في منتصف المسافة بين القمرين، فما إحداثيات موقعه؟ **(−1494, 1621.5, 2294.5)**

c) اشرح إمكانية وضع قمر ثالث في الإحداثيات التي أوجدتها في الفرع **b**. **انظر الهامش**

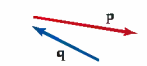
56) استعمل الضرب القياسي الثلاثي لحساب حجم غرفةٍ أبعادها 3 m, 4 m, 5 m

"إرشاد: اعتبر متوازي المستطيلات حالةً خاصةً من متوازي السطوح". (الدرس 5-5)

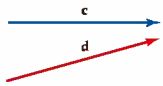
$\langle 3, 0, 0 \rangle \cdot (\langle 0, 4, 0 \rangle \times \langle 0, 0, 5 \rangle) = 60\,\text{m}^3$

48 الفصل 5 المتجهات

أوجد محصِّلة كل زوج من المتجهات الآتية باستعمال قاعدة المثلث، أو قاعدة متوازي الأضلاع، قرِّب المحصلة إلى أقرب جزءٍ من عشرةٍ من الستمتر، ثم حدِّد اتجاهها بالنسبة للأفقي مستعملًا المسطرة، والمنقلة.

(1) 

0.8 cm, 25°

(2) 

4.6 cm, 8° تقريبًا

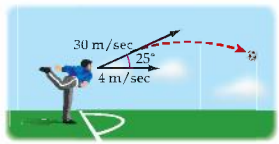
أوجد الصورة الإحداثية، وطول $\overline{AB}$ المعطاة نقطتا بدايته ونهايته في كلٍّ مما يأتي:

(3) $A(1, -3), B(-5, 1)$ $\langle -6, 4 \rangle, \sqrt{52} \approx 7.2$

(4) $A\left(\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right), B(-1, 7)$ $\left\langle -\frac{3}{2}, \frac{11}{2} \right\rangle, \sqrt{32.5} \approx 5.7$

(5) **كرة قدم:** ركض لاعب بسرعة 4 m/s؛ للتصدي لكرة قادمة من الاتجاه المعاكس لحركته، فضربها برأسه بسرعة 30 m/s، وبزاوية قياسها 25° مع الأفقي، فما محصِّلة سرعة الكرة، واتجاه حركتها؟

33.7 m/s; 22° تقريبًا



أوجد متجه وحدة باتجاه $\mathbf{u}$ في كلٍّ مما يأتي:

(6) $\mathbf{u} = \langle -1, 4 \rangle$ $\left\langle -\frac{\sqrt{17}}{17}, \frac{4\sqrt{17}}{17} \right\rangle$

(7) $\mathbf{u} = \langle 6, -3 \rangle$ $\left\langle \frac{2\sqrt{5}}{5}, -\frac{\sqrt{5}}{5} \right\rangle$

أوجد الضرب الداخلي للمتجهين $\mathbf{u}, \mathbf{v}$ في كلٍّ مما يأتي، ثم بيّن ما إذا كانا متعامدين أم لا:

(8) $\mathbf{u} = \langle 2, -5 \rangle, \mathbf{v} = \langle -3, 2 \rangle$ -16؛ غير متعامدين

(9) $\mathbf{u} = \langle 4, -3 \rangle, \mathbf{v} = \langle 6, 8 \rangle$ 0؛ متعامدان

(10) $\mathbf{u} = 10\mathbf{i} - 3\mathbf{j}, \mathbf{v} = \mathbf{i} + 8\mathbf{j}$ -14؛ غير متعامدين

(11) **اختيار من متعدد:** إذا علمت أن: $\mathbf{u} = \langle 1, 3 \rangle, \mathbf{v} = \langle -4, 2 \rangle$، فأيٌّ مما يأتي يُمثِّل ناتج جمع متجهين متعامدين أحدهما مسقط $\mathbf{u}$ على $\mathbf{v}$؟ D

A $\mathbf{u} = \left\langle \frac{2}{5}, -\frac{3}{5} \right\rangle + \left\langle \frac{3}{5}, \frac{18}{5} \right\rangle$

B $\mathbf{u} = \left\langle \frac{2}{5}, \frac{3}{5} \right\rangle + \left\langle \frac{3}{5}, \frac{12}{5} \right\rangle$

C $\mathbf{u} = \left\langle -\frac{4}{5}, \frac{2}{5} \right\rangle + \left\langle \frac{9}{5}, \frac{13}{5} \right\rangle$

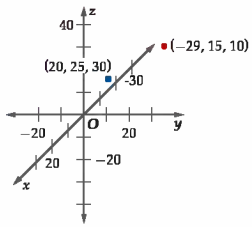
D $\mathbf{u} = \left\langle -\frac{2}{5}, \frac{1}{5} \right\rangle + \left\langle \frac{7}{5}, \frac{14}{5} \right\rangle$

إذا كان: $\mathbf{a} = \langle 2, 4, -3 \rangle, \mathbf{b} = \langle -5, -7, 1 \rangle, \mathbf{c} = \langle 8, 5, -9 \rangle$، فأوجد كلًّا مما يأتي:

(12) $2\mathbf{a} + 5\mathbf{b} - 3\mathbf{c}$ $\langle -45, -42, 26 \rangle$

(13) $\mathbf{b} - 6\mathbf{a} + 2\mathbf{c}$ $\langle -1, -21, 1 \rangle$

(14) **بالونات الهواء الساخن:** أُطلق 12 بالونًا تحوي هواءً ساخنًا في أحد المهرجانات، وبعد عدة دقائق من الإطلاق، كانت إحداثيات البالونين الأول والثاني هي: $(-29, 15, 10), (20, 25, 30)$ كما في الشكل أدناه، علمًا بأن الإحداثيات معطاة بالأقدام.



(a) أوجد المسافة بين البالونين الأول والثاني في تلك اللحظة. 53.9 ft تقريبًا

(b) إذا كان البالون الثالث عند نقطة منتصف المسافة بين البالونين الأول والثاني، فأوجد إحداثياته. $\left(-\frac{9}{2}, 20, 20\right)$

أوجد الزاوية θ بين المتجهين $\mathbf{u}, \mathbf{v}$ في كلٍّ ممَّا يأتي:

(15) $\mathbf{u} = \langle -2, 4, 6 \rangle, \mathbf{v} = \langle 3, 7, 12 \rangle$ 27.9° تقريبًا

(16) $\mathbf{u} = -9\mathbf{i} + 5\mathbf{j} + 11\mathbf{k}, \mathbf{v} = -5\mathbf{i} - 7\mathbf{j} - 6\mathbf{k}$ 110.8° تقريبًا

أوجد الضرب الاتجاهي للمتجهين $\mathbf{u}, \mathbf{v}$ في كلٍّ مما يأتي، ثم بيّن أن $\mathbf{u} \times \mathbf{v}$ يعامد كلًّا من $\mathbf{u}, \mathbf{v}$: (17-18) انظر الهامش

(17) $\mathbf{u} = \langle 1, 7, 3 \rangle, \mathbf{v} = \langle 9, 4, 11 \rangle$

(18) $\mathbf{u} = -6\mathbf{i} + 2\mathbf{j} - \mathbf{k}, \mathbf{v} = 5\mathbf{i} - 3\mathbf{j} - 2\mathbf{k}$

المعالجة:

بناءً على نتائج اختبار الفصل، استعمل مخطط المعالجة في مراجعة المفاهيم التي لا تزال تشكل تحدِّيًا للطلاب.

اختبار الفصل: نماذج متعددة ص (15–22).

إجابات:

(17) $\langle 65, 16, -59 \rangle$,
$\langle 65, 16, -59 \rangle \cdot \langle 1, 7, 3 \rangle$
$= 65(1) + 16(7) + (-59)(3)$
$= 0$
$\langle 65, 16, -59 \rangle \cdot \langle 9, 4, 11 \rangle$
$= 65(9) + 16(4) + (-59)(11)$
$= 0$
المتجه $\mathbf{u} \times \mathbf{v}$ يعامد كلًّا من $\mathbf{v}, \mathbf{u}$

(18) $-7\mathbf{i} - 17\mathbf{j} + 8\mathbf{k}$,
$\langle -7, -17, 8 \rangle \cdot \langle -6, 2, -1 \rangle$
$= (-7)(-6) + (-17)(2) + 8(-1)$
$= 0$
$\langle -7, -17, 8 \rangle \cdot \langle 5, -3, -2 \rangle$
$= (-7)(5) + (-17)(-3) + 8(-2)$
$= 0$
المتجه $\mathbf{u} \times \mathbf{v}$ يعامد كلًّا من $\mathbf{v}, \mathbf{u}$

مخطط المعالجة

المستوى 1	ضمن المتوسط	المستوى 2	دون المتوسط
إذا	أخطأ بعض الطلاب في 25% أو أقل تقريبًا من الأسئلة،	إذا	أخطأ بعض الطلاب في 50% تقريبًا من الأسئلة،
فاختر	أحد المصادر الآتية:	فاختر	المصدر الآتي:
كتاب الطالب	الدروس: 5-1, 5-2, 5-3, 5-4, 5-5		زيارة الموقع www.obeikaneducation.com
دليل المعلم	مشروع الفصل، ص (8)		
زيارة الموقع	www.obeikaneducation.com		

الفصل 5 اختبار الفصل 49

الفصل 6 دليل الدراسة والمراجعة

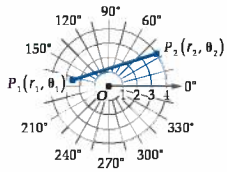
ملخص الفصل

مفاهيم أساسية

الإحداثيات القطبية (الدرس 1-6)

- يُعيِّنُ موقع النقطة (r, θ) في نظام الإحداثيات القطبية باستعمال المسافة المتجهة r والزاوية المتجهة θ.
- المسافة بين النقطتين $P_1(r_1, \theta_1)$, $P_2(r_2, \theta_2)$ في المستوى القطبي هي:

$$P_1P_2 = \sqrt{r_1^2 + r_2^2 - 2r_1r_2 \cos(\theta_2 - \theta_1)}$$



الصورة القطبية والصورة الديكارتية للمعادلات (الدرس 2-6)

- الإحداثيات الديكارتية للنقطة $P(r, \theta)$ هي $(r \cos \theta, r \sin \theta)$.
- لتحويل إحداثيات نقطة $P(x, y)$ من الإحداثيات الديكارتية إلى الإحداثيات القطبية استعمل المعادلات $r = \sqrt{x^2 + y^2}$، $\theta = \text{Tan}^{-1}\frac{y}{x}$ عندما $x > 0$، أو $\theta = \text{Tan}^{-1}\frac{y}{x} + \pi$ عندما $x < 0$.

الأعداد المركبة ونظرية ديموافر (الدرس 3-6)

- الصورة القطبية أو المثلثية للعدد المركب $a + bi$ هي $r(\cos \theta + i \sin \theta)$.
- صيغة الضرب لعددين مركبين z_1 ، z_2 هي:
$z_1z_2 = r_1r_2[\cos(\theta_1 + \theta_2) + i \sin(\theta_1 + \theta_2)]$.
- صيغة القسمة لعددين مركبين z_1 ، z_2 هي:
$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2}[\cos(\theta_1 - \theta_2) + i \sin(\theta_1 - \theta_2)], r_2 \neq 0$
- تنص نظرية ديموافر على أنه إذا كانت $z = r(\cos \theta + i \sin \theta)$ هي الصورة القطبية لعدد مركب، فإن:
$z^n = r^n(\cos n\theta + i \sin n\theta)$ ،
حيث n عدد صحيح موجب.

الجذور المختلفة:
لأي عدد صحيح $n \geq 2$، فإن للعدد المركب $r(\cos \theta + i \sin \theta)$، n من الجذور النونية المختلفة ويمكن إيجادها باستعمال الصيغة:

$$r^{\frac{1}{n}}\left(\cos \frac{\theta + 2k\pi}{n} + i \sin \frac{\theta + 2k\pi}{n}\right)$$

حيث $k = 0, 1, 2, \ldots, n - 1$.

المفردات

نظام الإحداثيات القطبية ص 52	المحور التخيلي ص 68
القطب ص 52	القيمة المطلقة لعدد مركب ص 68
المحور القطبي ص 52	الصورة القطبية ص 69
الإحداثيات القطبية ص 52	الصورة المثلثية ص 69
المعادلة القطبية ص 54	المقياس ص 69
التمثيل القطبي ص 54	السعة ص 69
المستوى المركب ص 68	الجذور النونية للعدد واحد ص 75
المحور الحقيقي ص 68	

اختبر مفرداتك

اختر المفردة المناسبة من القائمة أعلاه لإكمال كل جملة مما يأتي:

1) _____ هو مجموعة كل النقاط (r, θ) التي تحقق معادلة قطبية معطاة. التمثيل القطبي

2) المستوى الذي يحوي محورًا يمثِّل الجزء الحقيقي، وآخر يمثل الجزء التخيلي هو _____. المستوى المركب أو مستوى آرجاند

3) يُحدِّدُ موقع نقطة في _____ باستعمال المسافة المتجه من نقطة ثابتة إلى النقطة نفسها، وزاوية متجهة من محور ثابت. نظام الإحداثيات القطبية

4) _____ هي الزاوية θ لعدد مركب مكتوب على الصورة: $r(\cos \theta + i \sin \theta)$. السعة

5) تُسمَّى نقطة الأصل في نظام الإحداثيات القطبية بـ _____. القطب

6) تُسمَّى القيمة المطلقة لعدد مركب بـ _____. المقياس

7) _____ هو اسم آخر للمستوى المركب. مستوى آرجاند

8) _____ هو نصف مستقيم ممتد من القطب، ويكون أفقيًّا باتجاه اليمين. المحور القطبي

التقويم التكويني

المفردات

يُشير رقم الصفحة بعد كل مفردة إلى الصفحة التي وردت فيها المفردة أول مرة، فإذا واجه بعض الطلاب صعوبات في حل الأسئلة 8-1، فذكرهم بأنه يمكنهم استعمال هذه الصفحات مرجعًا؛ ليتذكروا المعلومات حول هذه المفردات.

التقويم الختامي

اختبار المفردات، ص (33)

مراجعة الدروس

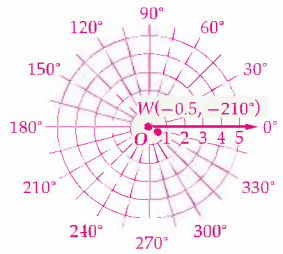
مراجعة إذا كانت الأمثلة المعطاة غير كافية لمراجعة الموضوعات التي تناولتها الأسئلة، فذكّر الطلاب بمرجع الصفحات الذي يدلّهم على مكان مراجعة تلك الموضوعات في كتابهم المقرر.

نموذج التوقع

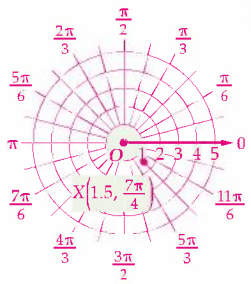
اطلب إلى الطلاب تعبئة نموذج التوقع للفصل 6 ص (27)، وناقشهم حول تغيّر إجاباتهم بعد إتمام دراسة الفصل عمّا كانت عليه عند بدايته.

إجابات:

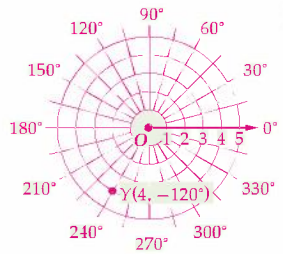
(9



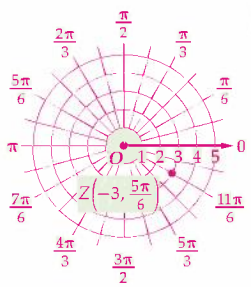
(10



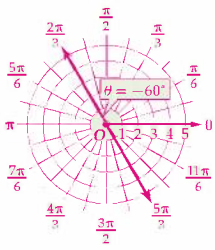
(11



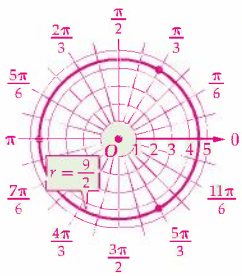
(12



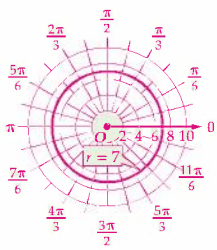
(13



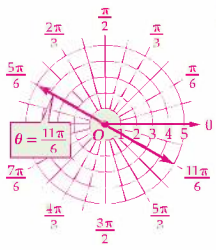
(14



(15



(16



مراجعة الدروس

6-1 الإحداثيات القطبية (الصفحات 58 - 52)

مثّل كلّ نقطة مما يأتي في المستوى القطبي: **9-12) انظر الهامش.**

(9 $W(-0.5, -210°)$ **(10** $X\left(1.5, \frac{7\pi}{4}\right)$

(11 $Y(4, -120°)$ **(12** $Z\left(-3, \frac{5\pi}{6}\right)$

مثّل كلّ معادلة من المعادلات القطبية الآتية بيانيًّا: **13-16) انظر الهامش.**

(13 $\theta = -60°$ **(14** $r = \frac{9}{2}$

(15 $r = 7$ **(16** $\theta = \frac{11\pi}{6}$

أوجد المسافة بين كل زوج من النقاط مما يأتي:

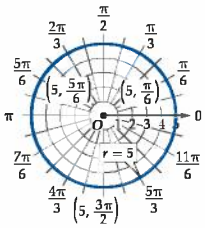
(17 $\left(5, \frac{\pi}{2}\right), \left(2, -\frac{7\pi}{6}\right)$ 4.36 **(18** $(-3, 60°), (4, 240°)$ 1

(19 $(-1, -45°), (6, 270°)$ 6.74 **(20** $\left(7, \frac{5\pi}{6}\right), \left(2, \frac{4\pi}{3}\right)$ 7.28

مثال 1

مثّل المعادلة $r = 5$ بيانيًّا في المستوى القطبي.

حلول المعادلة $r = 5$ هي الأزواج المرتبة $(5, \theta)$، حيث θ أي عدد حقيقي. ويتكون التمثيل من جميع النقاط التي تبعد 5 وحدات عن القطب، لذا فإن التمثيل هو دائرة مركزها القطب، وطول نصف قطرها 5.



6-2 الصورة القطبية والصورة الديكارتية للمعادلات (الصفحات 67 - 59)

أوجد زوجين مختلفين كل منهما يمثّل إحداثيين قطبيين لكل نقطة معطاة بالإحداثيّات الديكارتيّة في كلٍّ مما يأتي، حيث $-2\pi \le \theta \le 2\pi$

(21 $(-1, 5)$ **(5.1, 1.77), (−5.10, 4.91)**

(22 $(3, 7)$ **(7.62, 1.17) , (−7.62, 4.31)**

(23 $(1, 2)$ **(2.24, 1.11) , (−2.24, 4.25)**

اكتب كلّ معادلة على الصورة الديكارتية، وحدّد نوع تمثيلها البياني: **24-27) انظر ملحق الإجابات.**

(24 $r = 5$

(25 $r = -4 \sin \theta$

(26 $r = 6 \sec \theta$

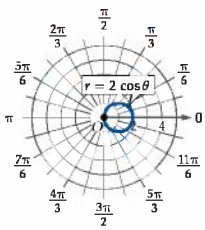
(27 $r = \frac{1}{3} \csc \theta$

مثال 2

اكتب المعادلة $r = 2 \cos \theta$ على الصورة الديكارتية، ثم حدّد نوع تمثيلها البياني.

$r = 2 \cos \theta$	المعادلة الأصلية
$r^2 = 2r \cos \theta$	اضرب الطرفين في r
$x^2 + y^2 = 2x$	$x = r \cos \theta$ ، $r^2 = x^2 + y^2$
$x^2 + y^2 - 2x = 0$	اطرح $2x$ من الطرفين

أي أن الصورة القياسية للمعادلة هي: $(x-1)^2 + y^2 = 1$، وهي معادلة دائرة مركزها $(1, 0)$ وطول نصف قطرها 1.



28-31) انظر ملحق الإجابات.

مثّل كل عدد مما يأتي في المستوى المركب، وأوجد قيمتهُ المطلقة:

28) $z = 3 - i$ **29)** $z = 4i$

30) $z = -4 + 2i$ **31)** $z = 6 - 3i$

32-35) انظر الهامش.

عبِّر عن كل عدد مركب مما يأتي بالصورة القطبية:

32) $3 + \sqrt{2}i$ **33)** $-5 + 8i$

34) $-4 - \sqrt{3}i$ **35)** $\sqrt{2} + \sqrt{2}i$

مثّل كل عدد مركب مما يأتي في المستوى القطبي، ثم عبِّر عنه بالصورة الديكارتية: **36-39) انظر ملحق الإجابات.**

36) $z = 3\left(\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}\right)$

37) $z = 5\left(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right)$

38) $z = 2\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right)$

39) $z = 4\left(\cos\frac{5\pi}{6} + i\sin\frac{5\pi}{6}\right)$

أوجد الناتج في كل مما يأتي على الصورة القطبية، ثم عبِّر عنه بالصورة الديكارتية: **40-43) انظر الهامش.**

40) $2\left(\cos\frac{5\pi}{6} + i\sin\frac{5\pi}{6}\right) \cdot 4\left(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right)$

41) $8(\cos 225° + i\sin 225°) \cdot \frac{1}{2}(\cos 120° + i\sin 120°)$

42) $5\left(\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}\right) \div \frac{1}{3}\left(\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6}\right)$

43) $6(\cos 210° + i\sin 210°) \div 3(\cos 150° + i\sin 150°)$

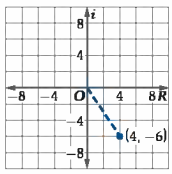
44) أوجد قيمة $(\sqrt{2} + 3i)^4$ بالصور القطبية، ثم اكتبه على الصورة الديكارتية.

$-119 - 23i$ تقريبًا

45) أوجد الجذور الرباعية للعدد المركب $1 + i$. **انظر الهامش.**

مثال 3

مثّل $4 - 6i$ في المستوى المركب، ثم عبِّر عنه بالصورة القطبية.



أوجد المقياس.

صيغة التحويل $r = \sqrt{a^2 + b^2}$

$a = 4, b = -6$ $= \sqrt{4^2 + (-6)^2} = 2\sqrt{13}$

أوجد السعة.

صيغة التحويل $\theta = \text{Tan}^{-1}\frac{b}{a}$

$a = 4, b = -6$ $= \text{Tan}^{-1}\left(-\frac{6}{4}\right)$

بسّط ≈ -0.98

فتكون الصورة القطبية للعدد $4 - 6i$ هي:
$2\sqrt{13}\,[(\cos(-0.98) + i\sin(-0.98)]$ تقريبًا.

مثال 4

أوجد ناتج $3\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right) \cdot 5\left(\cos\frac{7\pi}{6} + i\sin\frac{7\pi}{6}\right)$ على الصورة القطبية، ثم حوِّله إلى الصورة الديكارتية.

العبارة المعطاة $3\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right) \cdot 5\left(\cos\frac{7\pi}{6} + i\sin\frac{7\pi}{6}\right)$

صيغة الضرب $= (3 \cdot 5)\left[\cos\left(\frac{\pi}{4} + \frac{7\pi}{6}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{4} + \frac{7\pi}{6}\right)\right]$

بسّط $= 15\left[\cos\left(\frac{17\pi}{12}\right) + i\sin\left(\frac{17\pi}{12}\right)\right]$

والآن أوجد الصورة الديكارتية لناتج الضرب.

الصورة القطبية $15\left[\cos\left(\frac{17\pi}{12}\right) + i\sin\left(\frac{17\pi}{12}\right)\right]$

أوجد قيمتي الجيب وجيب التمام $= 15[-0.26 + i(-0.966)]$

خاصية التوزيع $= -3.9 - 14.5i$

فتكون الصورة الديكارتية لناتج الضرب $-3.9 - 14.5i$ تقريبًا.

إجابات:

(32 $\approx 3.317(\cos 0.441 + i\sin 0.441)$

(33 $\approx 9.434[\cos(2.1294) + i\sin(2.1294)]$

(34 $\approx 4.359(\cos 3.55 + i\sin 3.55)$

(35 $2\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right)$

(40 $8\left[\cos\left(\frac{7\pi}{6}\right) + i\sin\left(\frac{7\pi}{6}\right)\right]$ $-4\sqrt{3} - 4i$

(41 $4\left[\cos(345°) + i\sin(345°)\right]$ $\approx 3.86 - 1.04i$

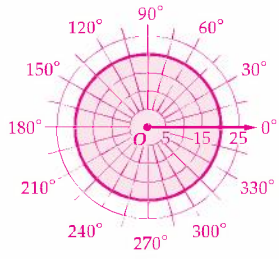
(42 $15\left[\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)\right]$ $\frac{15}{2} + \frac{15\sqrt{3}}{2}i$

(43 $2\left[\cos(60°) + i\sin(60°)\right]$ $1 + i\sqrt{3}$

(45 $\approx 1.07 + 0.21i$, $\approx -0.21 + 1.07i$, $\approx -1.07 - 0.21i$, $\approx 0.21 - 1.07i$

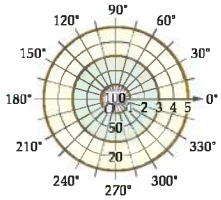
إجابات :

(47a)



تطبيقات ومسائل

46) ألعاب: قُسِّمت لوحة السهام إلى 3 مناطق كما هو موضّح في الشكل أدناه، بحيث يحصل اللاعب على 100 نقطة عند إصابته المنطقة القريبة من القطب، وعلى 50 نقطة عند إصابته المنطقة المتوسطة، و 20 نقطة عند إصابته المنطقة البعيدة. (الدرس 1-6)



a) إذا أصاب اللاعب النقطة $(3.5, 165°)$، فما عدد النقاط التي يحصل عليها؟ **20**

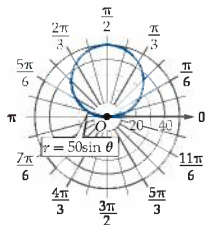
b) حدِّد موقعين، بحيث يحصل اللاعب على 50 نقطة عند إصابة أي منهما؟ **إجابة ممكنة: $(2, 180°)$ أو $(2, 0°)$**

47) حدائق: تستعمل شركة عناية بالحدائق رشاشًا قابلًا للتعديل، ويستطيع الدوران $360°$، ويروي منطقة دائرية طول نصف قطرها 20 ft. (الدرس 1-6) **انظر الهامش.**

a) مثِّل المنطقة التي يستطيع الرشاش رَيَّها في المستوى القطبي.

b) أوجد مساحة المنطقة التي يستطيع الرشاش ريَّها، إذا ضُبط ليدور في الفترة $-30° \le \theta \le 210°$. **838 ft² تقريبًا**

48) عجلة دوّارة: يمكن تمثيل مسار العجلة الدوّارة في الشكل أدناه بالمعادلة $r = 50 \sin \theta$، حيث r بالقدم. (الدرس 2-6)



a) عيّن الإحداثيين القطبيين لموقع راكب إذا علمت أنه يقع عند $\theta = \frac{\pi}{12}$. (قرب إلى أقرب جزء من عشرة إذا لزم الأمر). **$\left(12.9, \frac{\pi}{12}\right)$**

b) عيِّن الإحداثيين الديكارتيين لموقع الراكب مقربًا إلى أقرب جزء من عشرة إذا لزم الأمر. **(12.5, 3.3)**

c) إذا وقع القطب على سطح الأرض، فما ارتفاع ذلك الراكب مقرّبًا إلى أقرب قدم؟ **3 ft**

49) كهرباء: تُصمَّم معظم الدوائر الكهربائية لتتحمل فرق جهد قدره 220V.

للفرعين **a, b** استعمل المعادلة $V = I \cdot Z$، حيث فرق الجهد V بالفولت، والمعاوقة Z بالأوم، وشدة التيار I بالأمبير (قرب إلى أقرب جزء من عشرة). (الدرس 3-6)

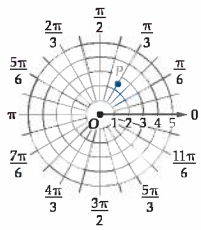
a) إذا كانت شدة التيار المار بالدائرة $(2 + 5j)$ أمبير، فأوجد المعاوقة. **$(15.2 - 37.9j)\ \Omega$**

b) إذا كانت معاوقة الدائرة $(1 - 3j)\Omega$، فأوجد شدة التيار. **أمبير $(21.9 + 66.0j)$**

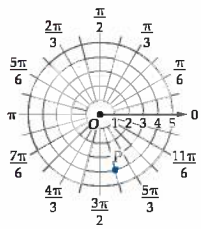
50) تحويل جوكوسكي (Jowkoski): يُعيِّن تحويل جوكوسكي لكل عدد مركب $z = r(\cos \theta + i \sin \theta)$ عددًا مركبًا w يُعطى بالصيغة $w = z + \frac{1}{z}$. أوجد صورة العدد المركب $z = (\cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3})$ وفق هذا التحويل. (الدرس 3-6) **1**

أوجد ثلاثة أزواج مختلفة يمثِّل كل منها إحداثيات قطبية للنقطة P في كل من التمثيلين 1, 2، حيث $-2\pi \le \theta \le 2\pi$. **(1, 2)** انظر الهامش.

1)



2)



مَثِّل بيانيًّا في المستوى القطبي كلًّا من المعادلات الآتية: **3-6)** انظر ملحق الإجابات.

3) $\theta = 30°$ **4)** $r = 1$

5) $r = 2.5$ **6)** $\theta = \frac{5\pi}{3}$

7) رادار: يقوم مراقب الحركة الجوية بتتبع مسار طائرة موقعها الحالي عند النقطة (66, 115°)، حيث r بالأميال.

7b) إجابة ممكنة: (90, 303.7°)

(−28, 60)

a) عيِّن الإحداثيين الديكارتيين للطائرة. مقرِّبًا الناتج إلى أقرب ميل.

b) إذا وُجدت طائرة عند نقطة إحداثياتها الديكارتية (−75, 50)، فعيِّن الإحداثيين القطبيين لها مقرِّبًا المسافة إلى أقرب ميل، والزاوية إلى أقرب جزء من عشرة إذا لزم الأمر.

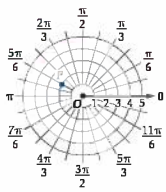
c) ما المسافة بين الطائرتين؟ قرِّب الناتج إلى أقرب ميل. **156 mi**

8) عبِّر عن المعادلة $(x-7)^2 + y^2 = 49$، بالصورة القطبية. انظر الهامش.

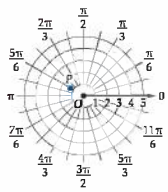
9) كهرباء: إذا كان فرق الجهد V في دائرة كهربائية 135V، وكانت شدة التيار المار بها I هو $(3 - 4j)$ أمبير، فأوجد معاوقة الدائرة z بالإحداثيات الديكارتية مستعملًا المعادلة $V = I \cdot Z$. $(16.2 + 21.6j)\Omega$

10) اختيار من متعدد: أي مما يأتي يبين تمثيل العدد المركب الذي إحداثياته الديكارتية $(-1, -\sqrt{3})$ في المستوى القطبي؟ **D**

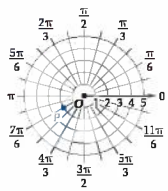
C



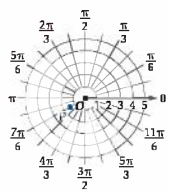
A



D



B



أوجد كل قوة مما يأتي على الصورة الديكارتية، وقرِّب إلى أقرب عدد صحيح إذا لزم الأمر:

11) $(-1 + 4i)^3$ $47 - 52i$

12) $(6 + i)^4$ $1081 + 840i$

المعالجة

بناءً على نتائج اختبار الفصل، استعمل مخطط المعالجة في مراجعة المفاهيم التي لا تزال تشكِّل تحديًّا للطلاب.

اختبار الفصل: نماذج متعددة ص (34–42).

إجابات:

1) $\left(2.5, \frac{\pi}{3}\right), \left(2.5, -\frac{5\pi}{3}\right), \left(-2.5, \frac{4\pi}{3}\right)$

2) $\left(4, \frac{19\pi}{12}\right), \left(4, -\frac{5\pi}{12}\right), \left(-4, \frac{7\pi}{12}\right)$

8) $r = 14 \cos \theta$

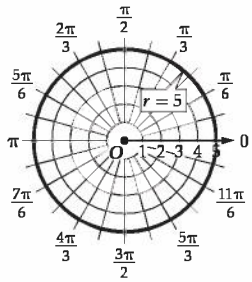
مخطط المعالجة

المستوى 1	ضمن المتوسط	المستوى 2	دون المتوسط
إذا	أخطأ بعض الطلاب في 25% أو أقل تقريبًا من الأسئلة	إذا	أخطأ بعض الطلاب في 50% تقريبًا من الأسئلة
فاختر	أحد المصادر الآتية:	فاختر	المصدر الآتي:
كتاب الطالب	الدروس 6-3، 6-2، 6-1	زيارة الموقع	www.obeikaneducation.com
دليل المعلم	مشروع الفصل، ص (52)		
زيارة الموقع	www.obeikaneducation.com		

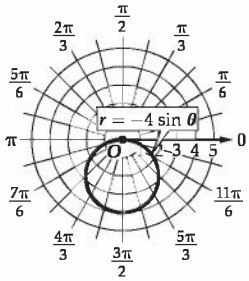
83 الفصل 6 اختبار الفصل

دليل الدراسة والمراجعة، ص (80–81)

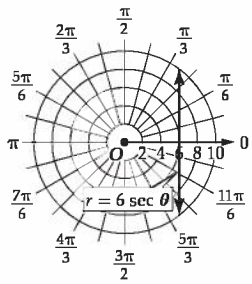
24) $x^2 + y^2 = 25$، دائرة



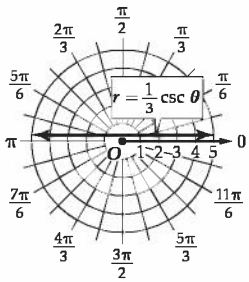
25) $x^2 + (y+2)^2 = 4$، دائرة



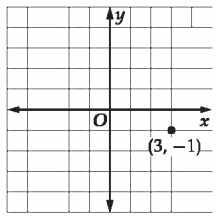
26) $x = 6$، مستقيم



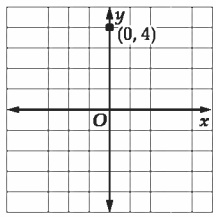
27) $y = \frac{1}{3}$، مستقيم



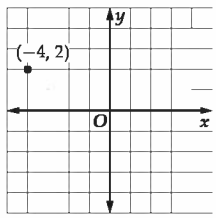
28) $\sqrt{10}$



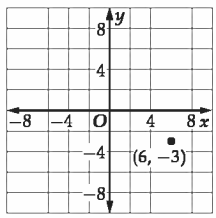
29) 4



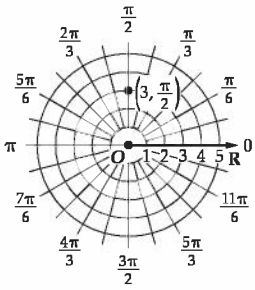
30) $2\sqrt{5}$



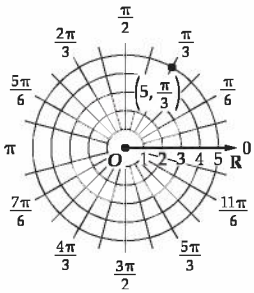
31) $3\sqrt{5}$



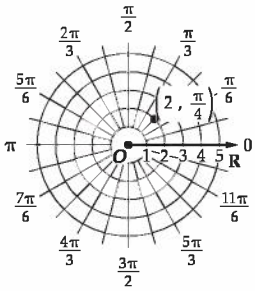
36) $3i$



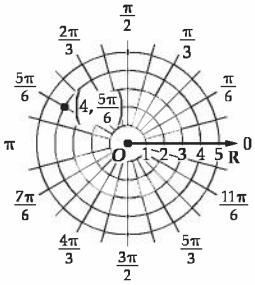
37) $2.5 + 2.5\sqrt{3}i$



38) $\sqrt{2} + \sqrt{2}i$

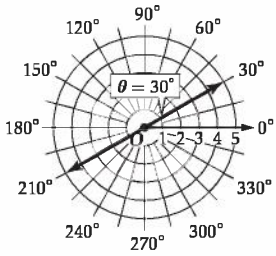


39) $-2\sqrt{3} + 2i$

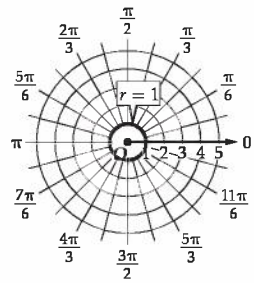


اختبار الفصل، ص (83)

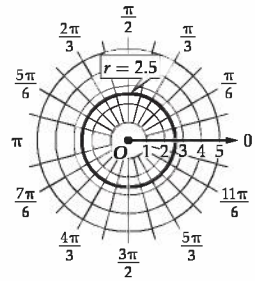
3)



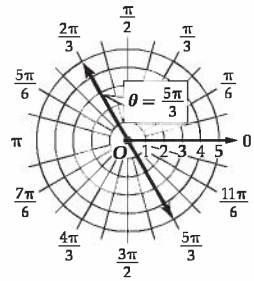
4)



5)



6)



الفصل 7 دليل الدراسة والمراجعة

التقويم التكويني

المفردات

يشير رقم الصفحة بعد كل مفردة إلى الصفحة التي وردت فيها المفردة لأول مرة. إذا واجه الطلاب صعوبات في حل الأسئلة 5-1، فذكّرهم باستعمال هذه الصفحات مرجعًا؛ ليتذكروا المعلومات حول هذه المفردات.

التقويم الختامي

اختبار المفردات للفصل 7 ، ص (52)

ملخص الفصل

مفاهيم أساسية

العينة والمجتمع (الدرسان 7-2, 7-1)

- تكون العينة متحيزة إذا صُمّمت لصالح نواتج معينة .
- تكون العينة غير متحيزة إذا كانت عشوائية.

الارتباط والسببية

- عندما يوجد ارتباط بين ظاهرتين فإن كلًا منهما تؤثر في الأخرى، وعندما يوجد سببية، فإن وقوع ظاهرة معينة يكون سببًا مباشرًا في وقوع الظاهرة الأخرى.

هامش خطأ المعاينة

- عند سحب عينة حجمها n من مجتمع، فإنه يمكن تقريب هامش خطأ المعاينة بالقيمة $\pm \frac{1}{\sqrt{n}}$.

الانحراف المعياري	
المجتمع	العينة
$\sqrt{\frac{\sum_{k=1}^{n}(x_k-\mu)^2}{n}}$	$\sqrt{\frac{\sum_{k=1}^{n}(x_k-\bar{x})^2}{n-1}}$

الاحتمال المشروط (الدرس 7-3)

- الاحتمال المشروط: هو احتمال وقوع حادثة معينة إذا عُلم وقوع حادثة أخرى.
- الجداول التوافقية : هي جداول تكرارية ذات بعدين، يتم فيها تسجيل بيانات ضمن خلايا، حيث إن كل خلية من خلايا الجدول تُمثّل تكرارًا يسمى تكرارًا نسبيًا، إذ يكون منسوبًا إلى مجموع التكرارات في الجدول، أو منسوبًا إلى مجموع التكرارات في الصف الذي تقع فيه الخلية، أو منسوبًا إلى مجموع التكرارات في العمود الذي تقع فيه الخلية، ويمكن استعمال الجداول التوافقية في إيجاد الاحتمال المشروط .

التوزيعات الاحتمالية (الدروس 7-6, 7-5, 7-4)

المفهوم	الوصف
منفصل	عدد محدّد من النواتج الممكنة
متصل	عدد غير محدّد من النواتج الممكنة
طبيعي	منحنيات متماثلة
ملتوي	منحنيات غير متماثلة
تجربة ذات الحدين	تجربة احتمالية يكون لها نتيجتان فقط

المفردات

الدراسة المسحية ص 86
المجتمع ص 86
تعداد عام ص 86
العينة ص 86
المتحيزة ص 86
غير المتحيزة ص 86
الدراسة القائمة على الملاحظة ص 87
الدراسة التجريبية ص 87
المجموعة التجريبية ص 87
المجموعة الضابطة ص 87
الارتباط ص 88
السببية ص 88
التحليل الإحصائي ص 92
المتغير ص 92
بيانات في متغير واحد ص 92
مقياس النزعة المركزية ص 92
المَعْلَمة ص 92
الإحصائي ص 92
هامش خطأ المعاينة ص 93
مقاييس التشتت ص 93
التباين ص 93
الانحراف المعياري ص 93
الاحتمال المشروط ص 97
الجدول التوافقي ص 98
التكرار النسبي ص 98
النجاح ص 102
الفشل ص 102
المتغير العشوائي ص 103
المتغير العشوائي المنفصل ص 103
التوزيع الاحتمالي ص 103
التوزيع الاحتمالي المنفصل ص 103
الاحتمال النظري ص 104
الاحتمال التجريبي ص 104
القيمة المتوقعة ص 104
التوزيع الاحتمالي المتصل ص 108
التوزيع الطبيعي ص 108
التوزيع الملتوي ص 108
تجربة ذات حدين ص 114
التوزيع ذو الحدين ص 115

اختبر مفرداتك

اختر المفردة المناسبة لكل عبارة مما يأتي من القائمة أعلاه:

1) التوزيع الاحتمالي لمتغير عشوائي معين هو دالة تربط فضاء العينة باحتمالات نواتج فضاء العينة .

2) عندما توجد علاقة بين حادثتين، فإنه يوجد ارتباط بينهما.

3) الدراسة المسحية تكون متحيزة إذا صُمّمت لصالح نواتج معينة.

4) إذا أُعطيت مجموعة معالجة شكلية لا أثر لها في النتيجة، فإن هذه المجموعة تُسمّى المجموعة الضابطة .

5) يُحدّد هامش خطأ المعاينة الفترة التي تبين الفرق في الاستجابة بين العينة والمجتمع .

120 الفصل 7 الاحتمال والإحصاء

7-1 الدراسات التجريبية والمسحية والقائمة على الملاحظة (الصفحات 90 - 86)

حدِّد ما إذا كانت كل دراسة مسحية فيما يأتي تتبنى عينة متحيزة أو غير متحيزة، ثم فسّر إجابتك:

6) يتم اختيار كل عاشر متسوِّق يخرج من مجمع تجاري؛ لمعرفة إن كان مرتاحًا أو مطمئنًا لشرائه من المجمع. انظر الهامش.

7) يتم اختيار كل عاشر طالب يخرج من المدرسة؛ لمعرفة أحب المواد الدراسية إليه في المدرسة. انظر الهامش.

8) يطلب أحد مطاعم الوجبات السريعة إلى زبائنه أن يكملوا استبانة حول أفضل مطعم للوجبات السريعة. انظر الهامش.

حدِّد ما إذا كانت كل حالة تحتاج إلى دراسة مسحية أو دراسة قائمة على الملاحظة أو دراسة تجريبية.

9) اختر 100 طالب نصفهم يعمل جزئيًّا بعد الدراسة، وقارن بين الأوساط لدرجاتهم. دراسة قائمة على الملاحظة

10) اختر 100 شخص، وقسّمهم إلى نصفين عشوائيًّا، ودع إحدى المجموعتين تتناول وجبات قليلة الدسم، بينما تتناول الأخرى وجبات اعتيادية. وقارن النتائج؛ لمعرفة أثر الوجبات القليلة الدسم على صحة الجسم. دراسة تجريبية

مثال 1

اختار صاحب وكالة للسيارات 100 زبون عشوائيًّا قاموا بإجراء الصيانة الدورية لسياراتهم في الوكالة حديثًا، وطرح سؤالًا عليهم حول نوعية الخدمة التي تُقدّمها الوكالة. هل يُمثّل الزبائن الذين تم اختيارهم عينة متحيزة أم غير متحيزة؟ فسّر إجابتك.

غير متحيزة ؛ لأنّ لكل شخص من زبائن الوكالة الفرصة نفسها لأن يكون من بين العينة.

مثال 2

وزّع معلم الرياضيات طلابه مجموعتين عشوائيًّا، وطبّق عليهم اختبارًا، حيث طلب من المجموعة الأولى أداء تمارين رياضية قبل الاختبار، بينما أعطى المجموعة الثانية الاختبار دون أن يطلب منهم تأدية أي تمارين رياضية، وقارن نتائجهم في الاختبار. هل هذه الدراسة دراسة مسحية أم دراسة قائمة على الملاحظة أم دراسة تجريبية؟ وإذا كانت تجريبية، فاذكر كلًّا من المجموعتين الضابطة والتجريبية، ثم بيِّن ما إذا كانت الدراسة متحيزة أم لا.

دراسة تجريبية: المجموعة التجريبية هي الأولى، والضابطة هي الثانية، والدراسة التجريبية متحيزة؛ لأن كل طالب يعرف المجموعة التي ينتمي اليها.

7-2 التحليل الإحصائي (الصفحات 96 - 92)

11) فصول السنة: في دراسة مسحية عشوائية شملت 3446 شخصًا، ذكر 34% منهم أن الربيع هو أفضل فصول السنة لديهم. ما هامش الخطأ في المعاينة؟ 1.7% تقريبًا

12) سباحة: في أثناء تمرين السباحة، قاس خالد الأزمنة التي استغرقها في كل مرة لقطع مسافة 400 m، وسجل النتائج الممثلة في الجدول أدناه. أوجد الانحراف المعياري للأزمنة التي حققها. 6.37 ثوانٍ

الزمن بالثواني					
307	312	308	320	311	301
302	304	308	309	315	313
306	314	316	313	313	311
309	306	310	319	326	329
309	314	318	315	318	320

مثال 3

قال 12% من عينة حجمها 2645 شخصًا: إن كرة القدم هي الأكثر تفضيلًا لديهم. ما هامش خطأ المعاينة ؟

$$\text{هامش خطأ المعاينة} = \pm \frac{1}{\sqrt{n}}$$
$$= \pm \frac{1}{\sqrt{2645}}$$
$$\approx \pm 0.019$$

هامش خطأ المعاينة $\pm 1.9\%$ تقريبًا.

مراجعة الدروس

مراجعة إذا كانت الأمثلة المعطاة غير كافية لمراجعة المواضيع التي تناولتها الأسئلة، فذكِّر الطلاب بمرجع الصفحات الذي يدلهم أين يراجعون تلك المواضيع في كتابهم المقرر.

نموذج التوقع

اطلب إلى الطلاب تعبئة نموذج التوقع للفصل 7 ص (46)، وناقشهم حول تغيّر إجاباتهم بعد إتمام دراسة الفصل عمّا كانت عليه عند بدايته.

إجابات :

6) غير متحيزة؛ لكل متسوِّق في المجتمع الفرصة نفسها لأن يكون في العينة.

7) غير متحيزة؛ لكل طالب في المدرسة الفرصة نفسها ليكون في العينة.

8) متحيزة؛ لأن زبائن المطعم الذين تُقدَّم لهم الاستبانة غالبًا يفضلون هذا المطعم.

121 الفصل 7 دليل الدراسة والمراجعة

13) كرة طائرة: يحصل طارق على نقطة في 65% من مرات قيامه بضربة الإرسال، ما احتمال ألا يحصل على نقطة في ضربة الإرسال الثانية علمًا بأنه حصل على نقطة في ضربة الإرسال الأولى؟ **35%**

14) في الجدول أدناه إذا اختير طالب عشوائيًّا فأجب عما يأتي:

	يلبس نظارات	لا يلبس نظارات
الأول الثانوي	6	15
الثاني الثانوي	5	22

a) ما احتمال أن يكون الطالب من الأول الثانوي علمًا بأنه يلبس نظارات؟ $\frac{6}{11}$

b) ما احتمال أن يكون من الذين لا يلبسون النظارات علمًا بأنه من الثاني الثانوي؟ $\frac{22}{27}$

مثال 4

دراسة: أوجد احتمال أن يأخذ طالب اختير عشوائيًّا حصة إضافية علمًا بأنه طالب جديد.

	يأخذ حصصًا إضافية (E)	لا يأخذ حصصًا إضافية (X)
طالب جديد (N)	126	84
طالب قديم (O)	98	72

$P(E \mid N) = \frac{P(E \cap N)}{P(N)}$ قانون الاحتمال المشروط

$= \frac{126}{380} \div \frac{210}{380}$ $P(E \cap N) = \frac{126}{380}$, $P(N) = \frac{210}{380}$

$= \frac{126}{210} = \frac{3}{5}$ بسّط

قرعة الألعاب: خلط يوسف بطاقات الألعاب جميعها في صندوق، حيث تشكّلت البطاقات من 12 بطاقة لكرة القدم، 8 بطاقات لكرة الطائرة، 5 بطاقات لكرة السلة وجميعها متماثلة. إذا تم اختيار 3 بطاقات بصورة عشوائية، فأوجد احتمال كل من:

15) (3 بطاقات للكرة الطائرة) P $\frac{14}{575}$

16) (3 بطاقات لكرة القدم) P $\frac{11}{115}$

17) (بطاقة لكرة السلة وبطاقتان للكرة الطائرة) P $\frac{7}{115}$

18) (بطاقتان لكرة السلة وبطاقة لكرة القدم) P $\frac{6}{115}$

19) بطاقات: مجموعة بطاقات مرقّمة مكوّنة من 3 بطاقات عليها الرقم 9، 4 عليها العدد 10، 5 عليها الرقم 6، 4 عليها الرقم 5، وبطاقتين على كلٍّ منهما الرقم 2، وبطاقة عليها الرقم 3. إذا سحبت بطاقة عشوائيًّا من مجموعة البطاقات، فما القيمة المتوقّعة لهذه البطاقة؟ **6.5 تقريبًا**

مثال 5

لدى حمزة 5 كتب في حقيبته، هي الرياضيات والكيمياء واللغة الإنجليزية واللغة العربية والتاريخ. إذا قام بترتيبها على رفّ في صف واحد عشوائيًّا، فما احتمال أن تأتي كتب اللغة الإنجليزية واللغة العربية والرياضيات في أقصى اليسار؟

الخطوة 1 حدّد عدد النجاحات.

${}_3P_3$ مكان الكتب الثلاثة إلى اليسار

${}_2P_2$ أمكنة الكتابين الآخرين

استعمل التباديل ومبدأ العد الأساسي لإيجاد s.

$s = {}_3P_3 \cdot {}_2P_2 = 3! \cdot 2! = 12$

الخطوة 2 أوجد عدد عناصر فضاء العينة $s + f$.

${}_5P_5 = 5! = 120$ $s + f = 120$

وتمثل عدد الترتيبات الممكنة للكتب الخمسة على الرف.

الخطوة 3 أوجد الاحتمال.

$P(S) = \frac{s}{s+f} = \frac{12}{120} = 0.1$ احتمال النجاح

احتمال وضع كتب اللغة الإنجليزية واللغة العربية والرياضيات في أقصى اليسار يساوي 0.1 أو 10%.

122 الفصل 7 الاحتمال والإحصاء

7-5 التوزيع الطبيعي (الصفحات 112 - 108)

في كلٍّ من السؤالين الآتيين توزيع طبيعي بمتوسط وانحراف معياري. أوجد الاحتمال المطلوب في كل منهما.

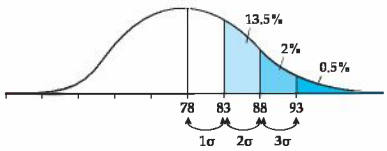
20) $\mu = 121, \sigma = 9, P(X > 103)$ **97.5%**

21) $\mu = 181, \sigma = 12, P(X > 169)$ **84%**

22) **زمن الركض:** أزمنة الركض لمسافة 40 m لفريق كرة القدم المدرسي تتوزّع توزيعًا طبيعيًّا بمتوسط 4.7 s، وانحراف معياري 0.15 s. ما نسبة اللاعبين الذين يقل زمن قطعهم المسافة عن 4.4 s؟ **2.5%**

مثال 6

تتوزّع مجموعة من البيانات توزيعًا طبيعيًّا بمتوسط 78، وانحراف معياري 5. أوجد احتمال أن تزيد قيمة لـ X اختيرت عشوائيًّا عن 83.



بما أن $\mu + \sigma = 78 + 5 = 83$؛ لذا فإن الاحتمال المطلوب يكون مساويًا $13.5\% + 2\% + 0.5\% = 16\%$

7-6 التوزيعات ذات الحدين (الصفحات 119 - 114)

23) **أشخاص مشهورون:** في إحدى الدراسات تَبيّن أن 63% من الشباب يفضلون أداء أحد الرياضيين المشهورين. إذا اختير 5 من الشباب عشوائيًّا، وتم سؤالهم عما إذا كانوا يفضلون أداء هذا الرياضي أو لا.

a) إذا مثّل المتغير العشوائي X عدد الشباب الذين يفضّلون أداء هذا الرياضي، فكوّن جدول التوزيع الاحتمالي لذات الحدين للمتغير X، ومثّله بالأعمدة. **انظر الهامش.**

b) أوجد احتمال أن يكون أكثر من 2 من الشباب يفضّلون أداء هذا الرياضي. **73.3%**

24) **ساعات:** أشارت دراسة مسحية للبالغين أن ما نسبته 74% من البالغين يلبسون ساعة يد. وقد قام بكر باستطلاع رأي 200 شخص من البالغين عشوائيًّا. ما احتمال أن يكون 160 شخصًا على الأقل ممن شملهم الاستطلاع يلبسون ساعة يد؟ **2.5%**

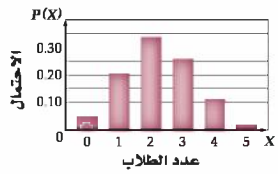
مثال 7

رسم هندسي: أُجريت دراسة في إحدى المدارس، فَتبيّن أن 45% من الطلاب يستطيعون رسم مخروط. إذا تم اختيار 5 منهم بشكل عشوائي، ومثّل المتغير العشوائي X عدد الطلاب الذين لديهم مقدرة على رسم مخروط، فأجب عمّا يأتي:

a) كوّن جدول التوزيع الاحتمالي لذات الحدين للمتغير X، ومثّله بالأعمدة.

في هذه المسألة $n = 5, p = 0.45, q = 1 - 0.45 = 0.55$.

X	0	1	2	3	4	5
$P(X)$	0.050	0.206	0.337	0.276	0.113	0.018



b) أوجد المتوسط والانحراف المعياري والتباين للتوزيع.

$\mu = np = 5(0.45) = 2.25$

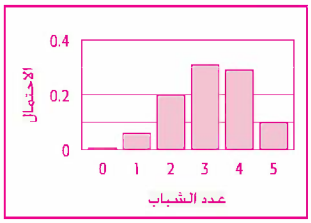
$\sigma^2 = npq = 5(0.45)(0.55) = 1.2375$

$\sigma = \sqrt{\sigma^2} = \sqrt{1.2375} \simeq 1.1124$

إجابة:

(23a

X	$P(X)$
0	0.007
1	0.059
2	0.201
3	0.342
4	0.291
5	0.099

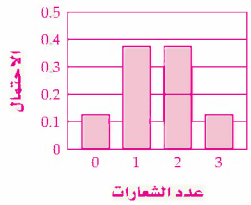


إجابات:

25b) هذه دراسة تجريبية؛ لأنه تم اختيار المجموعتين عشوائيًّا، وإحدى المجموعتين (التجريبية) خضعت لدورة تدريبية في اللغة الإنجليزية، والأخرى (الضابطة) لم تخضع لأي دورة تدريبية، وهي دراسة تجريبية متحيزة؛ لأن كل موظف يعرف المجموعة التي ينتمي إليها.

28)

X	0	1	2	3
$P(X)$	0.125	0.375	0.375	0.125



تطبيقات ومسائل

25) حدِّد ما إذا كان كل موقف مما يأتي يمثِّل دراسة تجريبيّة، أو دراسة قائمة على الملاحظة، وفي حالة الدراسة التجريبية، اذكر كلًّا من المجموعة الضابطة والمجموعة التجريبيّة، ثم بيّن إن وجد تحيز أو لا: (الدرس 7-1)

a) اختر 100 طالب نصفهم يأتي إلى المدرسة مبكرًا، وقارن بين تحصيلهم في مادة معينة. **هذه دراسة قائمة على الملاحظة**

b) اختر 100 موظف، واقسمهم نصفين، وأخضع إحدى المجموعتين إلى دورة في اللغة الإنجليزية، أما الأخرى فلا تخضعها لأي دورة تدريبية. **انظر الهامش.**

26) اختير 10 طلاب بصورة عشوائية من الصف الثالث الثانوي، وقيست أطوالهم بالسنتمترات فكانت كما يلي:

170, 165, 155, 168, 177, 180, 168, 167, 160, 161

بيّن ما إذا كانت هذه البيانات تمثِّل عينة أم مجتمعًا، ثم اوجد الانحراف المعياري لهذه الأطوال. (الدرس 7-2)
7.55 تقريبًا

27) سجِّلت أعداد الطلاب ذوي العيون الزرقاء أو غير الزرقاء في أحد المعاهد.

	سنة أولى	سنة ثانية
عيون زرقاء	5	10
عيون ليست زرقاء	95	80

إذا اختير أحد الطلاب عشوائيًّا، فأوجد احتمال أن تكون عيونه زرقاء علمًا بأنه في السنة الثانية. (الدرس 7-3) $\frac{1}{9}$

28) رُميت 3 قطع نقد مرة واحدة. إذا كان المتغير العشوائي X يدل على عدد مرات ظهور الشعار، فاكتب جدول التوزيع الاحتمالي للمتغير العشوائي X، ثم مثّله بالأعمدة. (الدرس 7-4) **انظر الهامش.**

29) **سكة حديد:** إذا كانت الفترات الزمنية للانتظار التي يقضيها 16000 مسافر في إحدى محطات سكك الحديد موزَّعة توزيعًا طبيعيًّا بمتوسط 72 min، وانحراف معياري 15 min، فأوجد نسبة المسافرين الّذين ينتظرون أكثر من 42 min. (الدرس 7-5)
97.5% تقريبًا

30) **إجازات:** في دراسة مسحية سابقة وجد أن ما نسبته 70% من العاملين يأخذون إجازاتهم السنوية في الصيف، لكن محسنًا يعتقد أن هذا الرقم مبالغ فيه، فقام باستطلاع رأي 650 عاملًا عشوائيًّا. ما احتمال ألا يأخذ أكثر من 420 عاملًا إجازاتهم في الصيف؟ (الدرس 7-6) **0.5 % تقريبًا**

124 الفصل 7 الاحتمال والإحصاء

1, 2) انظر الهامش.

حدّد ما إذا كانت العبارات الآتية تصف ارتباطًا أو سببية، ثم فسّر إجابتك:

1) عندما يرى محمود البرق، فإنه يسمع الرعد بعد ذلك.

2) عندما يركض نايف عند مدخل المدرسة، فإنه يكون متأخرًا عن المدرسة.

حدّد ما إذا كانت كل دراسة مسحية فيما يأتي تتبنى عينة متحيزة أو غير متحيزة، ثم فسّر إجابتك: 3, 4) انظر الهامش.

3) استطلع صاحب مخزن يبيع من خلال الشبكة العنكبوتية زبائنه عن أهمية وجود الإنترنت في المنزل.

4) يختار معلم 5 أسماء لطلاب يدرسهم؛ لإلقاء كلمة الصباح بعد أن يقوم بوضع الأسماء جميعها في سلة ويخلطها .

أي مقاييس النزعة المركزية يصف كلًّا من البيانات الآتية بصورة أفضل؟ ولماذا؟

5)

درجات اختبار				
3	3	3	4	4
4	4	5	5	4
4	3	3	3	3
4	4	3	3	3
3	4	3	5	4

المتوسط؛ لأن البيانات لا تتضمّن قيمًا متطرفة.

6)

الطول بالبوصة				
64	61	62	64	61
83	66	61	65	63
61	65	62	63	84
61	63	66	62	61

الوسيط؛ لأن البيانات تتضمن قيمًا متطرفة، ولا توجد فجوات كثيرة في المنتصف

فيما يأتي المتوسط والانحراف المعياري لمجموعة من البيانات تتوزّع توزيعًا طبيعيًا، أوجد الاحتمال المطلوب في كل منها:

7) $\mu = 54, \sigma = 5, P(X > 44)$ 97.5%

8) $\mu = 35, \sigma = 2.4, P(X < 37.4)$ 84%

يحتوي كيس على 10 كرات زجاجية زرقاء، و8 كرات حمراء، و 12 خضراء، وجميعها متماثلة، سحبت كرتان واحدة تلو الأخرى، أوجد الاحتمال لكل من:

9) الكرة الثانية حمراء، علمًا بأن الكرة الأولى زرقاء دون إرجاع. $\frac{8}{29}$

10) الكرة الثانية زرقاء، علمًا بأن الكرة الأولى خضراء مع الإرجاع. $\frac{1}{3}$

11) **اختبارات:** أعطى المعلم أيمن طلابه الفرصة لإعادة أحد الاختبارات، كما عقد درس مراجعة اختياري يوم الخميس قبل إعادة الاختبار لمن يرغب. بعض الطلاب تحسَّن أداؤهم، والبعض الآخر لم يتحسن، والجدول أدناه يبين ذلك. إذا اختير طالب عشوائيًّا، فأوجد:

	تحسن	لم يتحسن
حضر المراجعة	12	3
لم يحضر المراجعة	4	6

a) احتمال أن يكون قد تحسّن علمًا بأنه حضر المراجعة. $\frac{12}{15}$ أو 80%

b) احتمال أنه لم يحضر المراجعة علمًا بأنه لم يتحسّن. $\frac{6}{9} \approx 67\%$

12) **اختيار من متعدد:** شارك 10 طلاب من الصف الأول الثانوي، و 12 طالبًا من الصف الثاني الثانوي في السحب على 5 جوائز. إذا كان السحب عشوائيًّا، فما احتمال أن يكون الرابحون 3 من الصف الأول الثانوي، وطالبين من الصف الثاني الثانوي؟ D

A 0.46% تقريبًا

B 0.25% تقريبًا

C 70% تقريبًا

D 30% تقريبًا

13)

X	0	1	2
$P(X)$	0.1	0.6	0.3

13) سُحبت كرتان معًا من صندوق يحتوي على 3 كرات زرقاء، وكرتين حمراوين. إذا كان المتغير العشوائي X يدل على عدد الكرات الزرقاء المسحوبة، فكوّن جدول التوزيع الاحتمالي للمتغير العشوائي X .

14) **طقس:** أخبر الراصد الجوي أن احتمال سقوط المطر في كل يوم من الأيام السبعة القادمة 40% . أوجد احتمال أن يسقط المطر في يومين من هذه الأيام على الأقل. 84.1% تقريبًا

15) **حديقة:** يخطط يعقوب لزرع 24 شجرة أزهار، إذا علمت أن البذور التي أحضرها لأزهار من اللونين الأبيض والأزرق، وأنها لم تزهر بعد، ولكنه يعلم أن احتمال الحصول على زهرة زرقاء 75% ، فما احتمال حصوله على 20 زهرة زرقاء على الأقل؟ 0.24665تقريبًا أو 24.7%

المعالجة:

بناءً على نتائج اختبار الفصل، استعمل مخطط المعالجة في مراجعة المفاهيم التي لا تزال تشكل تحدِّيًا للطلاب.

اختبار الفصل: نماذج متعددة، ص (61–53)

إجابات:

1) ارتباط: على الرغم من أن البرق يسبق الرعد دائمًا، ولكن هذا لا يعني أن البرق هو الذي يسبب الرعد.

2) ارتباط: مع وجود علاقة بين الحدثين، إلا أن نايفًا قد يركض لسبب آخر.

3) متحيزة؛ لأن الناس الذين تم استطلاع آرائهم يرون أهمية كبرى لوجود الإنترنت، فهم يشترون من خلاله.

4) غير متحيزة؛ كل فرد في المجتمع له الفرصة نفسها ليكون في العينة.

مخطط المعالجة

المستوى 1	ضمن المتوسط	المستوى 2	دون المتوسط
إذا	أخطأ بعض الطلاب في 25% أو أقل تقريبًا من الأسئلة،	إذا	أخطأ بعض الطلاب في 50% تقريبًا من الأسئلة،
فاختر	أحد المصادر الآتية:	فاختر	المصدر الآتي:
كتاب الطالب	الدروس 7-1, 7-2, 7-3, 7-4, 7-5 , 7-6		
دليل المعلم	مشروع الفصل، ص (86)		
زيارة الموقع	www.obeikaneducation.com	زيارة الموقع	www.obeikaneducation.com

الفصل 8 دليل الدراسة والمراجعة

التقويم التكويني

المفردات

يشير رقم الصفحة بعد كل مفردة إلى الصفحة التي وردت فيها المفردة لأول مرة. إذا واجه الطلاب صعوبات في حل الأسئلة 8-1، فذكِّرهم بأنه يمكنهم استعمال هذه الصفحات مرجعًا ليتذكروا المعلومات حول هذه المفردات.

التقويم الختامي

اختبار المفردات للفصل 8، ص (71)

ملخص الفصل

مفاهيم أساسية

تقدير النهايات بيانيًّا (الدرس 8-1)

- تكون نهاية $f(x)$ عندما تقترب x من c موجودة، إذا وفقط إذا كانت النهايتان من اليمين واليسار موجودتين ومتساويتين.
- تكون نهاية $f(x)$ عندما تقترب x من c غير موجودة إذا اقتربت $f(x)$ من قيمتين مختلفتين عند اقتراب قيم x من العدد c من اليسار ومن اليمين، أو عندما تزداد قيم $f(x)$ أو تتناقص بشكل غير محدود عند اقتراب قيم x من العدد c من اليسار أو اليمين أو كليهما، أو عندما تتذبذب قيم $f(x)$ بين قيمتين مختلفتين عند اقتراب قيم x من c.

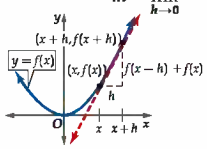
حساب النهايات جبريًّا (الدرس 8-2)

- يمكن إيجاد نهايات كثيرات الحدود والدوال النسبية عادةً من خلال التعويض المباشر.
- إذا توصلت إلى الصيغة غير المحددة $\frac{0}{0}$ عند حساب نهاية دالة نسبية، فبَسِّط العبارة جبريًّا من خلال تحليل كل من البسط والمقام أو إنطاق البسط أو المقام، ثم اختصار العوامل المشتركة.

المماس والسرعة المتجهة (الدرس 8-3)

- مُعدّل التغيّر اللحظي للدالة f عند النقطة $(x, f(x))$ هو ميل المماس m عند النقطة $(x, f(x))$، ويُعطى بالصيغة

$$m = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$



المشتقة (الدرس 8-4)

- يُرمز لمشتقة $f(x) = x^n$ بالرمز $f'(x)$، وتُعطى بالصيغة $f'(x) = nx^{n-1}$، حيث n عدد حقيقي.

المساحة تحت المنحنى والتكامل (الدرس 8-5)

- تُعطى مساحة المنطقة المحصورة بين منحنى الدالة $f(x)$ والمحور x بالصيغة

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{n \to \infty} \sum_{i=1}^{n} f(x_i)\,\Delta x$$

، حيث a، b هما الحدان الأعلى والأدنى للتكامل،

$$\Delta x = \frac{b-a}{n}, x_i = a + i\Delta x$$

النظرية الأساسية في التفاضل والتكامل (الدرس 8-6)

- الدالة الأصلية لـ $f(x) = x^n$ هي $F(x)$ وتُعطى بالصيغة $F(x) = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C$، حيث C عدد ثابت
- إذا كانت $F(x)$ دالةً أصلية للدالة المتصلة $f(x)$، فإن

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)$$

المفردات

النهاية من جهة واحدة ص 130
النهاية من جهتين ص 130
التعويض المباشر ص 139
الصيغة غير المحددة ص 140
المماس ص 149
مُعدل التغيّر اللحظي ص 149
قسمة الفرق ص 149
السرعة المتجهة اللحظية ص 151
المشتقة ص 156
الاشتقاق ص 156
المعادلة التفاضلية ص 156
المؤثر التفاضلي ص 156
التجزيء المنتظم ص 166
التكامل المحدد ص 167
الحد الأدنى ص 167
الحد الأعلى ص 167
مجموع ريمان الأيمن ص 167
التكامل ص 167
الدالة الأصلية ص 173
التكامل غير المحدد ص 174
النظرية الأساسية في التفاضل والتكامل ص 175

اختبر مفرداتك

اختر المفردة المناسبة لكل عبارة مما يأتي:

1) ميل المنحنى غير الخطي عند نقطة عليه هو معدل التغير اللحظي ، والذي يمكن تمثيله بميل مماس منحنى الدالة عند تلك النقطة.

2) يمكن إيجاد مساحة المنطقة المحصورة بين منحنى دالة والمحور x باستعمال التكامل المحدد.

3) يمكن إيجاد نهايات دوال كثيرات الحدود والدوال النسبية باستعمال التعويض المباشر ، وذلك إذا كان مقام الدالة النسبية لا يساوي صفرًا عند النقطة التي تُحسب عندها النهاية .

4) إذا كان $F'(x) = f(x)$ ، فإن $F(x)$ تُسمى دالة أصلية لـ $f(x)$.

5) يُسمى ناتج التعويض في النهايات على الصورة $\frac{0}{0}$ بـ الصيغة غير المحددة.

6) تُسمى عملية إيجاد المشتقة بـ الاشتقاق .

7) إذا سُبقت دالة بـ المؤثر التفاضلي $\frac{d}{dx}$ ، فإن ذلك يعني إيجاد مشتقة الدالة.

8) يطلق على السرعة المتجهة عند لحظة زمنية محددة السرعة المتجهة اللحظية .

180 الفصل 8 النهايات والاشتقاق

مراجعة الدروس

8-1 تقدير النهايات بيانيًا (الصفحات 136 - 128)

قدّر كل نهاية مما يأتي باستعمال التمثيل البياني، ثم عزّز إجابتك باستعمال جدول قيم:

9) $\lim_{x\to 3}(2x-7)$ **انظر الهامش.**

10) $\lim_{x\to 1}(0.5x^4+3x^2-5)$

قدّر كل نهاية مما يأتي:

11) $\lim_{x\to 2^+}\frac{x^2+x-6}{x-2}$ **5**

12) $\lim_{x\to 4}\frac{x^2+x+20}{x-4}$ **غير موجودة**

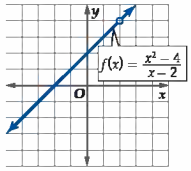
13) $\lim_{x\to 4}\frac{9}{x^2-8x+16}$ **∞**

14) $\lim_{x\to 2}\frac{x^2-7x-10}{x-2}$ **غير موجودة**

مثال 1

قدّر $\lim_{x\to 2}\frac{x^2-4}{x-2}$ باستعمال التمثيل البياني، ثم عزّز إجابتك باستعمال جدول قيم.

التحليل بيانيًا: يُبيّن التمثيل البياني للدالة $f(x)=\frac{x^2-4}{x-2}$ أدناه أنه كلما اقتربت قيم x من العدد 2، فإن قيم $f(x)$ المقابلة تقترب من 4؛ لذا فإن بإمكاننا تقدير $\lim_{x\to 2}\frac{x^2-4}{x-2}$ بالعدد 4.



التعزيز عدديًا: كوّن جدول قيم باختيار قيم x القريبة من العدد 2 من كلا الجهتين.

	← x تقترب من 2				x تقترب من 2 →		
x	1.9	1.99	1.999	2	2.001	2.01	2.1
$f(x)$	3.9	3.99	3.999		4.001	4.01	4.1

يبيّن نمط قيم $f(x)$، أنه كلما اقتربت قيم x من العدد 2 من اليسار ومن اليمين، فإن قيم $f(x)$ تقترب من العدد 4.

8-2 حساب النهايات جبريًا (الصفحات 146 - 137)

استعمل خصائص النهايات لحساب كل نهاية مما يأتي:

15) $\lim_{x\to 3}\frac{x^2+2x+10}{x}$ **9**

16) $\lim_{x\to -1}(5x^2-2x+12)$ **19**

احسب كل نهاية مما يأتي باستعمال التعويض المباشر إذا كان ممكنًا، وإلا فاذكر السبب. **ليس ممكنًا؛ فالمقام يساوي صفرًا عند $x=25$.**

17) $\lim_{x\to 25}\frac{x^2+1}{\sqrt{x}-5}$

18) $\lim_{x\to 2}(-3x^3-2x^2+15)$ **−17**

احسب كل نهاية مما يأتي:

19) $\lim_{x\to -2}\frac{x+2}{x^2-2x-8}$ $-\frac{1}{6}$

20) $\lim_{x\to\infty}(2-4x^3+x^2)$ **−∞**

مثال 2

احسب كل نهاية مما يأتي باستعمال التعويض المباشر إذا كان ذلك ممكنًا، وإلا فاذكر السبب.

a) $\lim_{x\to 2}(2x^3-x^2+4x+1)$

بما أن هذه نهاية كثيرة حدود؛ لذا يمكننا حسابها باستعمال التعويض المباشر.

$$\lim_{x\to 2}(2x^3-x^2+4x+1)=2(2)^3-2^2+4(2)+1$$
$$=16-4+8+1=21$$

b) $\lim_{x\to -4}\frac{2x-7}{2-x^2}$

بما أن هذه نهاية دالة نسبية مقامها ليس صفرًا عندما $x=-4$؛ لذا يمكننا حسابها باستعمال التعويض المباشر.

$$\lim_{x\to -4}\frac{2x-7}{2-x^2}=\frac{2(-4)-7}{2-(-4)^2}=\frac{-8-7}{2-16}=\frac{15}{14}$$

مراجعة الدروس

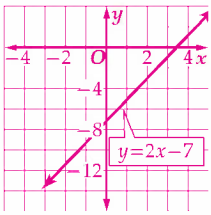
مراجعة: إذا كانت الأمثلة المعطاة غير كافية لمراجعة المواضيع التي تناولتها الأسئلة، فذكّر الطلاب بمرجع الصفحات الذي يدلهم أين يراجعون تلك المواضيع في كتابهم المقرر.

نموذج التوقع

اطلب إلى الطلاب تعبئة نموذج التوقع للفصل 8 ص (65)، وناقشهم حول تغيّر إجاباتهم بعد إتمام دراسة الفصل عمّا كانت عليه عند بدايته.

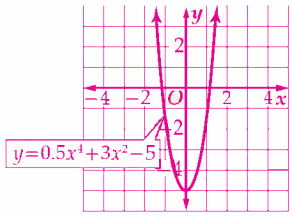
إجابات

9) −1



x	2.99	2.999	3	3.001	3.01
$f(x)$	-1.02	−1.002		−0.998	−0.998

10) −1.5



x	0.99	0.999	1	1.0001	1.001
$f(x)$	−1.579	−1.508		−1.499	−1.492

إجابات:

(31) $p'(v) = -9$

(32) $z'(n) = 8n + 9$

(33) $t'(x) = -\frac{18}{5}x^{\frac{1}{5}}$

(34) $g'(h) = 3h^{-\frac{1}{4}} - 4h^{-\frac{1}{2}}$

8-3 المماس والسرعة المتجهة (الصفحات 154-149)

أوجد ميل مماس منحنى كل دالة مما يأتي عند النقاط المعطاة :

(21) $y = 6 - x$, $(-1, 7)$, $(3, 3)$ **−1, −1**

(22) $y = x^2 + 2$, $(0, 2)$, $(-1, 3)$ **0, −2**

أوجد معادلة ميل منحنى كل دالةٍ مما يأتي عند أي نقطة عليه:

(23) $y = -x^2 + 3x$ **$m = -2x + 3$**

(24) $y = x^3 + 4x$ **$m = 3x^2 + 4$**

تمثّل $s(t)$ في كل مما يأتي موقع جسم بالأقدام بعد t ثانية . أوجد سرعة الجسم المتجهة اللحظية عند الزمن المعطى:

(25) $s(t) = 15t - 16t^2$, $t = 0.5$ **$v(0.5) = -1$ ft/s**

(26) $s(t) = -16t^2 - 35t + 400$, $t = 3.5$ **$v(3.5) = -147$ ft/s**

تمثّل $h(t)$ في كل مما يأتي مسار جسم متحرك . أوجد السرعة المتجهة اللحظية $v(t)$ للجسم عند أي زمن:

(27) $h(t) = 12t^2 - 5$ **$v(t) = 24t$**

(28) $h(t) = 8 - 2t^2 + 3t$ **$v(t) = -4t + 3$**

مثال 3

أوجد ميل مماس منحنى $y = x^2$ عند النقطة $(2, 4)$.

صيغة مُعدّل التغير اللحظي $m = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$

$x = 2$ $= \lim_{h \to 0} \frac{f(2+h) - f(2)}{h}$

$f(2+h) = (2+h)^2$, $f(2) = 2^2$ $= \lim_{h \to 0} \frac{(2+h)^2 - 2^2}{h}$

فك الأقواس $= \lim_{h \to 0} \frac{4 + 4h + h^2 - 4}{h}$

بسّط، ثم حلّل $= \lim_{h \to 0} \frac{h(4+h)}{h}$

اقسم على h $= \lim_{h \to 0} (4 + h)$

عوّض $= 4 + 0 = 4$

أي أن ميل مماس منحنى $y = x^2$ عند النقطة $(2, 4)$ هو 4 .

8-4 المشتقات (الصفحات 163-156)

أوجد مشتقة كل دالة مما يأتي باستعمال النهايات ، ثم احسب قيمة المشتقة عند النقاط المعطاة.

(29) $g(t) = -t^2 + 5t + 11$, $t = -4$, 1 **$g'(t) = -2t + 5, g'(-4) = 13, g'(-1) = 3$**

(30) $m(j) = 10j - 3$, $j = 5$, -3 **$m'(j) = 10; m'(5) = 10$, $m'(-3) = 10$**

أوجد مشتقة كل دالة مما يأتي: للتمارين 34-31 انظر الهامش.

(31) $p(v) = -9v + 14$

(32) $z(n) = 4n^2 + 9n$

(33) $t(x) = -3\sqrt[5]{x^6}$

(34) $g(h) = 4h^{\frac{3}{4}} - 8h^{\frac{1}{2}} + 5$

استعمل قاعدة مشتقة القسمة؛ لإيجاد مشتقة كل دالة مما يأتي:

(35) $f(m) = \frac{5 - 3m}{5 + 2m}$ **$f'(m) = \frac{-25}{(5 + 2m)^2}$**

(36) $m(q) = \frac{2q^4 - q^2 + 9}{q^2 - 12}$ **$m'(q) = \frac{4q^5 - 96q^3 + 6q}{(q^2 - 12)^2}$**

مثال 4

أوجد مشتقة $h(x) = \frac{x^2 - 5}{x^3 + 2}$.

افترض أن $f(x) = x^2 - 5$, $g(x) = x^3 + 2$. لذا، $h(x) = f(x)/g(x)$. أوجد مشتقة كل من $f(x)$, $g(x)$

من الفرض $f(x) = x^2 - 5$

قواعد مشتقات القوة والدالة الثابتة $f'(x) = 2x$

من الفرض $g(x) = x^3 + 2$

قواعد مشتقات القوة والدالة الثابتة $g'(x) = 3x^2$

استعمل $f(x), f'(x), g(x), g'(x)$ لإيجاد مشتقة $h(x)$.

قاعدة مشتقة القسمة $h'(x) = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{[g(x)]^2}$

عوّض $= \frac{2x(x^3 + 2) - (x^2 - 5)3x^2}{(x^3 + 2)^2}$

بسّط $= \frac{-x^4 + 15x^2 + 4x}{(x^3 + 2)^2}$

182 الفصل 8 النهايات والاشتقاق

إجابات:

(43 $G(n) = \frac{5}{2}n^2 - 2n + C$

(44 $R(q) = -q^3 + \frac{9}{2}q^2 - 2q + C$

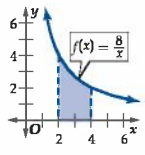
(45 $M(t) = \frac{3}{2}t^4 - 4t^3 + t^2 - 11t + C$

(46 $p(h) = h^7 + \frac{2}{3}h^6 - 3h^4 - 4h + C$

8-5 المساحة تحت المنحنى والتكامل (الصفحات 172-164)

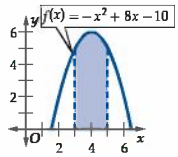
قرّب مساحة المنطقة المظللة تحت منحنى كل دالة مما يأتي باستعمال الأطراف اليمنى و 5 مستطيلات:

(37



5.16 وحدات مربعة

(38



11.28 وحدة مربعة

استعمل النهايات؛ لتقريب مساحة المنطقة المحصورة بين منحنى الدالة والمحور x، والمعطى بالتكامل المحدد في كل مما يأتي:

(39 $\int_1^2 2x^2\,dx$ 4.67 وحدات مربعة تقريبًا

(40 $\int_0^3 (2x^3 - 1)\,dx$ 37.5 وحدة مربعة تقريبًا

(41 $\int_0^2 (x^2 + x)\,dx$ 4.67 وحدات مربعة تقريبًا

(42 $\int_1^4 (3x^2 - x)\,dx$ 55.5 وحدة مربعة تقريبًا

مثال 5

استعمل النهايات لإيجاد مساحة المنطقة المحصورة بين منحنى $y = 2x^2$ والمحور x، في الفترة $[0, 2]$ أو $\int_0^2 2x^2\,dx$.

ابدأ بإيجاد Δx، x_i.

صيغة Δx: $\Delta x = \frac{b-a}{n}$

$b = 2, a = 0$: $\Delta x = \frac{2-0}{n} = \frac{2}{n}$

$a = 0, \Delta x = \frac{2}{n}$: $x_i = 0 + i\frac{2}{n} = \frac{2i}{n}$

$x_i = \frac{2i}{n}, \Delta x = \frac{2}{n}$

$$\int_0^2 2x^2\,dx = \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} 2\left(\frac{2i}{n}\right)^2\left(\frac{2}{n}\right)$$

بسّط: $= \lim_{n\to\infty}\frac{4}{n}\left(\sum_{i=1}^{n}\frac{4i^2}{n^2}\right)$

صيغ المجموع: $= \lim_{n\to\infty}\frac{4}{n}\left(\frac{4}{n^2}\cdot\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}\right)$

بسّط: $= \lim_{n\to\infty}\left(\frac{8(2n^2+3n+1)}{3n^2}\right)$

أخرج عاملًا مشتركًا، ثم اقسم على n^2: $= \lim_{n\to\infty}\left[\frac{8}{3}\cdot\left(2 + \frac{3}{n} + \frac{1}{n^2}\right)\right]$

خصائص النهايات: $= \frac{16}{3} \approx 5.33$

8-6 النظرية الأساسية في التفاضل والتكامل (الصفحات 179-173)

أوجد جميع الدوال الأصلية لكل دالة مما يأتي: 43-46 انظر الهامش

(43 $g(n) = 5n - 2$

(44 $r(q) = -3q^2 + 9q - 2$

(45 $m(t) = 6t^3 - 12t^2 + 2t - 11$

(46 $p(h) = 7h^6 + 4h^5 - 12h^3 - 4$

احسب كل تكامل مما يأتي:

(47 $\int 8x^2\,dx$ $\frac{8}{3}x^3 + C$

(48 $\int (2x^2 - 4)\,dx$ $\frac{2}{3}x^3 - 4x + C$

(49 $\int_3^5 (2x^2 - 4 + 5x^3 + 3x^4)\,dx$ 2466.53 وحدة مربعة

(50 $\int_1^4 (-x^2 + 4x - 2x^3 + 5x^5)\,dx$ 3294 وحدة مربعة

مثال 6

أوجد جميع الدوال الأصلية لكل دالة مما يأتي:

(a $f(x) = \frac{4}{x^5}$

أعد كتابة الدالة المعطاة بقوة سالبة: $f(x) = 4x^{-5}$

قاعدة ضرب دالة القوة في عدد ثابت: $F(x) = \frac{4x^{-5+1}}{-5+1} + C$

بسّط: $= x^{-4} + C = -\frac{1}{x^4} + C$

(b $f(x) = x^2 - 7$

الدالة المعطاة: $f(x) = x^2 - 7$

أعد كتابة الدالة بدلالة قوى x: $= x^2 - 7x^0$

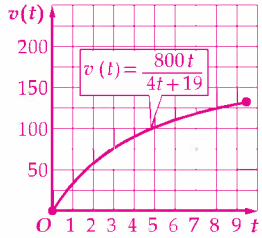
قواعد الدالة الأصلية: $F(x) = \frac{x^{2+1}}{2+1} - \frac{7x^{0+1}}{0+1} + C$

بسّط: $= \frac{1}{3}x^3 - 7x + C$

183 الفصل 8 دليل الدراسة والمراجعة

إجابات:

(52a)

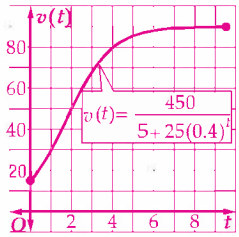


(52d) لن تزيد قيمة التحفة عن 20000 ريال.

(53a)

t	0	1	2	3
v	15	30	50	68.2

(53b)



تطبيقات ومسائل

5) حيوانات: يُعطى عدد الحيوانات P في محميَّة طبيعية بالمئات بعد t سنة بالدالة $P(t)=\frac{40t^3+48t+100}{5t^3-70t-95}$، حيث $t\geq 5$. (الدرس 1-8)

a) أوجد العدد التقريبي للحيوانات في المحميَّة بعد 5 سنوات. **2966 حيوانًا**

b) أوجد $\lim_{t\to\infty} P(t)$. **800**

52) تحف فنية: لدى سلمان تحفة فنية يزداد سعرها كل سنة. افترض أن الدالة $v(t)=\frac{800t}{4t+19}$ تمثِّل سعر التحفة بعد t سنة بمئات الريالات. (الدرس 1-8)

a) استعمل الآلة البيانية لتمثيل الدالة في الفترة $0\leq t\leq 10$. **انظر الهامش.**

b) استعمل التمثيل البياني في الفرع a لتقريب سعر التحفة عندما $t=3,6,10$. **7674, 11114, 13524**

c) استعمل التمثيل البياني في الفرع a لحساب $\lim_{t\to\infty} v(t)$. **20000**

d) وضِّح العلاقة بين نهاية الدالة وسعر التحفة. **انظر الهامش.**

e) بعد 10 سنوات، قدَّم أحد المعارض الفنية عرضًا لشراء التحفة من سلمان بسعر 30000 ريال، هل من الأفضل بيعها بهذا السعر؟ برِّر إجابتك. **نعم؛ العرض أفضل من قيمة التحفة.**

53) مبيعات: افترض أن الدالة $v(t)=\frac{450}{5+25(0.4)^t}$ تمثِّل سعر سلعة ما بالريالات بعد t سنة. (الدرس 2-8)

a) أكمل الجدول أدناه: **للتمارين a, b انظر الهامش.**

السنة	0	1	2	3
السعر				

b) استعمل الآلة البيانية لتمثيل الدالة في الفترة $0\leq t\leq 10$.

c) استعمل التمثيل البياني لتقدير $\lim_{t\to\infty} v(t)$ إذا كانت موجودة. **90**

d) وضِّح العلاقة بين نهاية الدالة وسعر السلعة.
إجابة ممكنة: أقصى سعر يمكن أن تصله السلعة هو 90 ريالًا

54) صواريخ: أُطلق صاروخ رأسيًّا إلى أعلى بسرعة 150 ft/s. افترض أن ارتفاع الصاروخ $h(t)$ بالأقدام بعد t ثانية يُعطى بالدالة $h(t)=-16t^2+150t+8.2$. (الدرس 3-8)

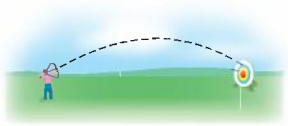
a) أوجد السرعة المتجهة اللحظية $v(t)$ للصاروخ. **$-32t+150$**

b) ما سرعة الصاروخ بعد 1.5 s من إطلاقه؟ **102 ft/s**

c) متى يصل الصاروخ إلى أقصى ارتفاع؟ **≈4.69 s**

d) ما أقصى ارتفاع يصل إليه الصاروخ؟ **≈359.8 ft**

55) رماية: أطلق محمد سهمًا بسرعة 35 ft/s باتجاه هدف. افترض أن ارتفاع السهم h بالأقدام بعد t ثانية من إطلاقه مُعطى بالدالة $h(t)=-16t^2+35t+1.5$. (الدرس 3-8)



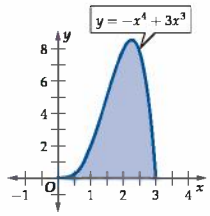
a) اكتب معادلة السرعة المتجهة اللحظية $v(t)$ للسهم. **$-32t+35$**

b) ما سرعة السهم بعد 0.5 s من إطلاقه؟ **19 ft/s**

c) متى يصل السهم إلى أقصى ارتفاع؟ **≈1.09 s**

d) ما أقصى ارتفاع يصل إليه السهم؟ **≈20.64 ft**

56) تصميم: يقوم مصمم ألبسة رياضية بعمل شعار جديد يشبه المنطقة المظللة تحت المنحنى أدناه؛ حيث سيقوم بخياطة هذا الشعار على قمصان لاعبي فريق رياضي، ما مقدار القماش الذي يحتاج إليه لعمل 50 شعارًا إذا كانت x بالبوصات؟ **607.5 in²** (الدرس 6-8)



57) ضفادع: تمثِّل الدالة $v(t)=-32t+26$ سرعة قفز ضفدع بالأقدام لكل ثانية، حيث t الزمن بالثواني. (الدرس 6-8)

a) أوجد موقع الضفدع $s(t)$، على فرض أن $s(t)=0$ عندما $t=0$. **$s(t)=-16t^2+26t$**

b) ما الزمن الذي يستغرقه الضفدع في الهواء عند قفزه؟ **1.63 s**

58) طيور: سقطت حبة قمح من منقار حمامة تطير على ارتفاع 20 ft، وتُعطى سرعة سقوط الحبة بالدالة $v(t)=-32t$، حيث t الزمن بالثواني، $v(t)$ بالأقدام لكل ثانية. (الدرس 6-8)

a) أوجد موقع الحبة $s(t)$ عند أي زمن. **$s(t)=-16t^2+20$**

b) أوجد الزمن الذي تستغرقه الحبة حتى تصل إلى سطح الأرض. **1.12 s**

184 الفصل 8 النهايات والاشتقاق

قدّر كل نهاية مما يأتي:

1) $\lim_{x\to 0^+}\sqrt{x+4}-8$ **−6**

2) $\lim_{x\to 4}\frac{x^2-16}{x-4}$ **8**

3) $\lim_{x\to 7}\frac{6}{x-7}$ **غير موجودة**

4) $\lim_{x\to\infty}x^3+5x^2-2x+21$ **∞**

5) **إلكترونيات:** يُعطى متوسط تكلفة إنتاج جهاز إلكتروني بالريال عند إنتاج x جهاز بالدالة $C(x)=\frac{100x+7105}{x}$.

a) احسب نهاية الدالة عندما تقترب x من المالانهاية. **100**

b) فَسِّر الناتج في الفرع a. **انظر الهامش.**

احسب كل نهاية مما يأتي باستعمال التعويض المباشر إذا كان ممكنًا، وإلا فاذكر السبب:

6) $\lim_{x\to 5}\frac{x^2}{\sqrt{x-4}-2}$ **−25**

7) $\lim_{x\to 9}(2x^3-12x+3)$ **1353**

8) **نادٍ رياضي:** تُمثّل الدالة $S(t)=\frac{2000t^2+4}{1+10t^2}$ عدد المشتركين في نادٍ رياضي بعد t يوم من افتتاحه.

a) ما عدد المشتركين في البداية؟ **4**

b) ما أكبر عدد ممكن لمشتركي النادي؟ **200**

احسب كل نهاية مما يأتي (إن وجدت):

9) $\lim_{x\to\infty}(x^2-7x+2)$ **∞**

10) $\lim_{x\to\infty}(2x^3-8x^2-5)$ **∞**

11) $\lim_{x\to\infty}\frac{2x^3-x-1}{-x^4+7x^3+4}$ **0**

12) $\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt{25+x}-4}{x}$ **0**

13) **اختيار من متعدد:** ما قيمة $\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{x+3}-\frac{1}{3}}{x}$؟ **A**

A) $-\frac{1}{9}$ B) 0

C) $\frac{1}{9}$ D) غير موجودة

أوجد ميل مماس منحنى كل دالةٍ مما يأتي عند النقاط المعطاة:

14) $y=x^2+2x-8$, $(-5,7)$, $(-2,-8)$ **−8, −2**

15) $y=\frac{4}{x^3}+2$, $(-1,-2)$, $\left(2,\frac{5}{2}\right)$ $-12, -\frac{3}{4}$

16) $y=(2x+1)^2$, $(-3,25)$, $(0,1)$ **−20, 4**

أوجد السرعة المتجهة اللحظية $v(t)$ لجسم يُعطى موقعه عند أي زمن بالدالة $h(t)$ في كل مما يأتي:

17) $h(t)=9t+3t^2$ $v(t)=9+6t$

18) $h(t)=10t^2-7t^3$ $v(t)=20t-21t^2$

19) $h(t)=3t^3-2+4t$ $v(t)=9t^2+4$

أوجد مشتقة كل دالة مما يأتي:

20) $f(x)=-3x-7$ $f'(x)=-3$

21) $b(c)=4c^{\frac{1}{2}}-8c^{\frac{2}{3}}+5c^{\frac{4}{5}}$ $b'(c)=\frac{2}{\sqrt{c}}-\frac{16}{3c^{\frac{1}{3}}}+\frac{4}{c^{\frac{1}{5}}}$

22) $w(y)=3y^{\frac{4}{3}}+6y^{\frac{1}{2}}$ $w'(y)=4y^{\frac{1}{3}}+3y^{-\frac{1}{2}}$

23) $g(x)=(x^2-4)(2x-5)$ $g'(x)=6x^2-10x-8$

24) $h(t)=\frac{t^3+4t^2+t}{t^2}$ $h'(t)=\frac{t^2-1}{t^2}$

25) **صناعة:** تُعطى التكلفة الحدّية c بالريال لإنتاج x كرة قدم يوميًّا بالدالة $c(x)=15-0.005x$.

a) أوجد دالة تمثّل التكلفة الحقيقية. $C(x)=15x-0.0025x^2$

b) أوجد تكلفة زيادة الإنتاج اليومي من 1500 كرة إلى 2000 كرة. **3125 ريالًا**

استعمل النهايات؛ لتقريب مساحة المنطقة المحصورة بين منحنى الدالة والمحور x ، والمعطاة بالتكامل المحدد في كل مما يأتي:

26) $\int_1^4(x^2-3x+4)\,dx$ **10.5 وحدات مربعة تقريبًا**

27) $\int_3^8 10x^4\,dx$ **65050 وحدة مربعة تقريبًا**

28) $\int_2^5(7-2x+4x^2)\,dx$ **156 وحدة مربعة تقريبًا**

أوجد جميع الدوال الأصلية لكل دالّة مما يأتي:

29) $d(a)=4a^3+9a^2-2a+8$ $D(a)=a^4+3a^3-a^2+8a+C$

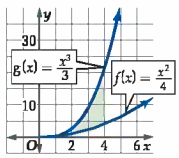
30) $w(z)=\frac{3}{4}z^4+\frac{1}{6}z^2-\frac{2}{5}$ $W(z)=\frac{3}{20}z^5+\frac{1}{18}z^3-\frac{2}{5}z+C$

احسب كل تكامل مما يأتي:

31) $\int(5x^3-6x^2+4x-3)\,dx$ $\frac{5}{4}x^4-2x^3+2x^2-3x+C$

32) $\int_1^4(x^2+4x-2)\,dx$ **45**

33) **مساحات:** ما مساحة المنطقة المحصورة بين منحنيي $f(x)$، $g(x)$ في الفترة $2\le x\le 4$ في الشكل أدناه؟ **C**



A) $17\frac{5}{12}$ وحدة مساحة

B) $17\frac{1}{3}$ وحدة مساحة

C) $15\frac{1}{3}$ وحدة مساحة

D) 16 وحدة مساحة

المعالجة:

بناءً على نتائج اختبار الفصل استعمل مخطط المعالجة في مراجعة المفاهيم التي لا تزال تشكل تحدِّيًا للطلاب.

اختبار الفصل: نماذج متعددة ص (72–79).

إجابة:

5b) إجابة ممكنة: رغم تقلب متوسط تكلفة الجهاز الإلكتروني، إلا أن متوسط التكلفة سيقترب من 100 ريال لكل جهاز.

مخطط المعالجة

المستوى 1	ضمن المتوسط	المستوى 2	دون المتوسط
إذا	أخطأ بعض الطلاب في 25% أو أقل تقريبًا من الأسئلة،	إذا	أخطأ بعض الطلاب في 50% تقريبًا من الأسئلة،
فاختر	أحد المصادر الآتية:	فاختر	المصدر الآتي:
كتاب الطالب	الدروس 8-1, 8-2, 8-3, 8-4, 8-5, 8-6	زيارة الموقع	www.obeikaneducation.com
دليل المعلم	مشروع الفصل، ص (134)		
زيارة الموقع	www.obeikaneducation.com		