مشروع الفصل

رمي الرمح

- اطلب إلى كل طالب تحديد محصلة سرعة واتجاه حركة رمح رماه لاعب، إذا ركض إلى الأمام بسرعة $6m/s$، ورمى الرمح بسرعة $30m/s$، وبزاوية قياسها $20°$ مع الأفقي.
- اطلب إلى الطلاب كتابة تخميناتهم حول محصلة سرعة واتجاه حركة الرمح، إذا زاد قياس الزاوية.
- اطلب إليهم التحقق من صحة تخميناتهم باستعمال الزوايا: $30°, 40°, 50°, 60°, 70°$.

المفردات: قدّم مفردات الفصل مستعملاً الخطوات الآتية:

التعريف: الثُّمُن هو أحد ثمانية مناطق في النظام الإحداثي الثلاثي الأبعاد.

مثال: إذا نظرت إلى أحد أركان غرفةٍ، فإن الأرض تمثل المستوى xy في الثُّمُن الأول.

سؤال: لماذا تعتقد أن أرض الغرفة تقع في المستوى xy؟ لأن المحورين اللذين يشكلان ضلعين متجاورين لأرض الغرفة هما المحوران x ، y.

الفصل 5 المتجهات Vectors

فيما سبق:

درست استعمال حساب المثلثات لحل المثلث .

والآن:

- أُجري العمليات على المتجهات ، وأمثلها في الأنظمة الإحداثية، الثنائية والثلاثية الأبعاد.
- أجِدُ مسقط متجه على متجه آخر.
- أكتب متجهًا باستعمال متجهَي الوحدة.
- أجِدُ الضرب الداخلي، والزاوية بين متجهين في الأنظمة الإحداثية الثنائية، والثلاثية الأبعاد.
- أجِدُ الضرب الاتجاهي لمتجهين في الفضاء ، وأستعملُ الضرب القياسي الثلاثي؛ لإيجاد حجوم متوازيات السطوح.

لماذا؟

رياضة: تستعمل المتجهات لنمذجة مواقف حياتية، فمثلًا يمكن استعمالها لتحديد محصلة سرعة واتجاه حركة رمح رماه لاعب، إذا ركض إلى الأمام بسرعة $6m/s$ ، ورمى الرمح بسرعة $30m/s$ ، وبزاوية مقدارها $40°$ مع الأفقي.

قراءة سابقة: اقرأ عناوين الدروس والمفردات الأساسية في هذا الفصل، واستعملها للتنبؤ بما ستتعلَّمه في هذا الفصل .

8 الفصل 5 المتجهات

قراءة سابقة

شَجِّع الطلاب على الإعداد المُسبق لكل درسٍ بطريقةٍ جيدةٍ، تتم من خلال قراءته قراءةً سريعةً مرة، وقراءةً متأنيةً مرةً أخرى، وأعطهم الوقت الكافي؛ لمناقشة ما يحويه الدرس من أفكار ومفردات أساسية، ثم اطلب إليهم كتابة استفساراتهم التي لم يتوصلوا إلى الإجابة عنها، وما صعُب عليهم فهمه؛ وذلك لمناقشتها في أثناء تقديم الدرس.

تنويع التعليم

نموذج بناء المفردات، ص (9) .

يكمل الطلاب هذا النموذج بكتابة تعريف كل مفردة جديدة تظهر لهم في أثناء دراسة الفصل أو مثال عليها، ويستفيدون من ذلك في أثناء المراجعة والاستعداد لاختبار الفصل.

التهيئة للفصل 5

تشخيص الاستعداد: هناك بديلان للتأكد من المتطلبات السابقة.

البديل 1

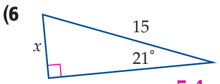
أجب عن أسئلة الاختبار السريع الآتي:

اختبار سريع

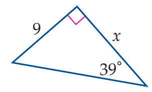
أوجد المسافة بين كل زوج من النقاط الآتية، ثم أوجد إحداثيَّي نقطة منتصف القطعة المستقيمة الواصلة بينهما. **1-4) انظر الهامش**

1) $(1, 4), (-2, 4)$
2) $(-5, 3), (-5, 8)$
3) $(2, -9), (-3, -7)$
4) $(-4, -1), (-6, -8)$

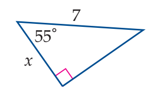
أوجد قيمة x في كلٍّ مما يأتي مقرّبًا الناتج إلى أقرب عُشر.

5) 

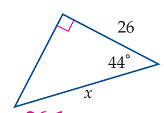
5.4

6) 

11.1

7) 

4

8) 

36.1

9) **بالون:** أُطلق بالون يحتوي على هواء ساخن في الفضاء. إذا كان البالون مربوطًا بحبلين مشدودين يمسك بكلٍّ منهما شخص يقف على سطح الأرض، والمسافة بين الشخصين 35 ft، بحيث كان قياس الزاوية بين كلٍّ من الحبلين والأرض 40°، فأوجد طول كلٍّ من الحبلين إلى أقرب جزء من عشرة. **22.8 ft**

أوجد جميع الحلول الممكنة لكل مثلث مما يأتي إن أمكن، وإذا لم يوجد حَلّ فاكتب " لا يوجد حَلّ " مقرّبًا أطوال الأضلاع إلى أقرب عدد صحيح، وقياسات الزوايا إلى أقرب درجة. **10-12) انظر الهامش**

10) $a = 10, b = 7, A = 128°$
11) $a = 15, b = 16, A = 127°$
12) $a = 15, b = 18, A = 52°$

البديل 2

أسئلة تهيئة إضافية على الموقع www.obeikaneducation.com

مراجعة المفردات

صيغة المسافة في المستوى الإحداثي (Distance Formula in The Coordinate Plane)

المسافة بين النقطتين $A(x_1, y_1), B(x_2, y_2)$ هي:

$$AB = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

صيغة إحداثيَّي منتصف قطعة مستقيمة في المستوى الإحداثي (Midpoint Formula in The Coordinate Plane)

إذا كان $A(x_1, y_1)$، $B(x_2, y_2)$، فإن إحداثيَّي نقطة منتصف $\overline{AB}$:

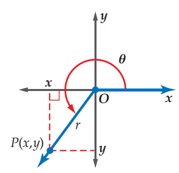
$$M\left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2}\right)$$

النسبة المثلثة (Trigonometric Ratio)

نسبة تقارن بين طولَي ضلعين في المثلث القائم الزاوية.

الدوال المثلثية للزوايا (Trigonometric Functions of Angels)

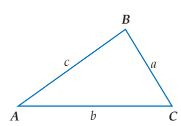
لتكن θ زاوية مرسومةً في الوضع القياسي، وتقع النقطة $P(x, y)$ على ضلع انتهائها. باستعمال نظرية فيثاغورس يمكن إيجاد r (المسافة من النقطة P إلى نقطة الأصل) باستعمال الصيغة $r = \sqrt{x^2 + y^2}$، وتكون الدوال المثلثية الست للزاوية θ معرفه كما يأتي:



$$\sin\theta = \frac{y}{r} \qquad \cos\theta = \frac{x}{r}$$
$$\tan\theta = \frac{y}{x}, x \neq 0 \qquad \csc\theta = \frac{r}{y}, y \neq 0$$
$$\sec\theta = \frac{r}{x}, x \neq 0 \qquad \cot\theta = \frac{x}{y}, y \neq 0$$

قانون جيوب التمام (Law of Cosines)

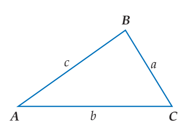
إذا كانت أضلاع $\triangle ABC$ التي أطوالها: a, b, c تقابل الزوايا ذات القياسات A, B, C على الترتيب، فإن العلاقات الآتية تكون صحيحة:



$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A$$
$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cos B$$
$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos C$$

قانون الجيوب (Law of Sines)

إذا كانت أضلاع $\triangle ABC$ التي أطوالها: a, b, c تقابل الزوايا ذات القياسات A, B, C على الترتيب، فإن العلاقات الآتية تكون صحيحة:



$$\frac{\sin A}{a} = \frac{\sin B}{b} = \frac{\sin C}{c}$$

المعالجة

استعمل نتائج الاختبار السريع ومخطط المعالجة أدناه؛ لمساعدتك على تحديد مستوى المعالجة المناسب. كما تساعد العبارة "إذا... فقم" التي في المخطط على تحديد المستوى المناسب للمعالجة، واقتراح مصادر لكل مستوى.

مخطط المعالجة

المستوى 1	ضمن المتوسط
إذا	أخطأ بعض الطلاب فيما لا يزيد على 25% تقريبًا من الأسئلة.
فقم	بمراجعة الطلاب في: إيجاد طول قطعة مستقيمة في المستوى الإحداثي وتحديد إحداثيات منتصفها، والدوال المثلثية في المثلث القائم الزاوية، وحل المثلث.
زيارة الموقع	www.obeikaneducation.com
المستوى 2	**دون المتوسط**
إذا	أخطأ بعض الطلاب في 50% تقريبًا من الأسئلة.
فقم	بتحديد أخطائهم، ووضع أنشطة علاجية لذلك.
زيارة الموقع	www.obeikaneducation.com

إجابات:

1) $3, \left(-\frac{1}{2}, 4\right)$

2) $5, \left(-5, \frac{11}{2}\right)$

3) $\sqrt{29}, \left(-\frac{1}{2}, -8\right)$

4) $\sqrt{53}, \left(-5, -\frac{9}{2}\right)$

10) $B \approx 33°, C \approx 19°, c \approx 4$

11) لا يوجد حل.

12) يوجد حلّان
$B \approx 71°, C \approx 57°, c \approx 16$
$B \approx 109°, C \approx 19°, c \approx 6.2$

تنويع التعليم

دون ضمن

قائمة اطلب إلى الطلاب عمل قائمة بالتعريفات الواردة، وكتابة مثال على كلٍّ منها في أثناء دراستهم الفصل؛ لاستعمالها وسيلة مراجعة لاختبار الفصل.

5-1 ملاحظات الدرس

1 التركيز

الترابط الرأسي

ما قبل الدرس 5-1

حل المثلث باستعمال حساب المثلثات.

الدرس 5-1

- إجراء العمليات على المتجهات باستعمال مقياس الرسم، وتمثيلها هندسيًّا.
- تحليل المتجه إلى مركبتيه المتعامدتين.
- حل مسائل تطبيقية على المتجهات.

ما بعد الدرس 5-1

تمثيل المتجهات و إجراء العمليات الجبرية عليها.

كتابة المتجه باستعمال متجهَي الوحدة.

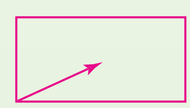
2 التدريس

أسئلة التعزيز

اطلب إلى الطلاب قراءة فقرة "لماذا؟".

واسأل:

- إذا تم ركل كرة، فما الشيئآن اللذان تحتاجهما لتحديد موقع الكرة؟ سرعة الكرة بعد ضربها، واتجاه حركتها.
- ارسم مستطيلًا. وتخيّل أنك تركل كرة قدم من الزاوية السفلى اليسرى للمستطيل. ارسم سهمًا من الزاوية إلى الموقع الذي ستقف عنده الكرة.



- إذا ضُربت الكرة بقوة أكبر، فكيف سترسم السهم؟ إجابة ممكنة: أرسم سهمًا أطول.

5-1 مقدمة في المتجهات

Introduction to Vectors

فيما سبق:

درست استعمال حساب المثلثات في حل المثلث. (مهارة سابقة)

والآن:

- أجري العمليات على المتجهات باستعمال مقياس الرسم، وأمثلها هندسيًّا.
- أحلل المتجه إلى مركبتيه المتعامدتين.
- أحلّ مسائل تطبيقية على المتجهات.

المفردات:

كمية قياسية (عددية) solar quantity
متجه vector
الكمية المتجهة vector quantity
نقطة البداية initial point
نقطة النهاية terminal point
قطعة مستقيمة متجهة directed line segment
الوضع القياسي standard position
اتجاه المتجه direction
طول المتجه (المقدار) magnitude
الاتجاه الربعي quadrant bearing
الاتجاه الحقيقي true bearing
المتجهات المتوازية parallel vectors
المتجهات المتساوية equal vectors
المتجهات المتعاكسة opposite vectors
المحصلة resultant
قاعدة المثلث triangle method
قاعدة متوازي الأضلاع parallelogram method
المتجه الصفري zero vector
المركبات components
المركبات المتعامدة rectangular components

www.obeikaneducation.com

لماذا؟

المحاولة الناجحة لتسجيل هدف في كرة القدم تعتمد على عدة عوامل؛ منها سرعة الكرة بعد ضربها، واتجاه حركتها. ويمكنك وصف كلٍّ من هذين العاملين باستعمال كمية واحدة تُسمى متجهًا.

الكميات القياسية والكميات المتجهة يمكن وصف الكثير من الكميات الفيزيائية مثل الكتلة بقيمة عددية واحدة، وعندئذٍ تُسمى **كمية قياسية (عددية)**، ويدل هذا العدد على مقدار الكمية أو قياسها. أما **المتجه** فهو كمية لها مقدار واتجاه؛ فمثلًا سرعة الكرة المتجهة نحو المرمى جنوبًا تمثل كلًّا من: مقدار سرعة الكرة، واتجاه حركتها، ولذلك تُعبّر متجه والعدد المرتبط بمتجه يسمى **كمية متجهة**.

مثال 1 تحديد الكميات المتجهة

حدّد الكميات المتجهة، والكميات القياسية (العددية) في كلٍّ مما يأتي:

a) يسير قارب بسرعة 15 mi/h في اتجاه الجنوب الغربي.
بما أن لهذه الكمية اتجاهًا، إذن هي كميةٌ متجهةٌ.

b) يسير شخص على قدميه بسرعة 75 m/min جهة الغرب.
بما أن لسرعة الشخص قيمة هي 75 m/min، واتجاهًا للغرب؛ لذا فهي كمية متجهة.

c) قطعت سيارة مسافة قدرها 20 km .
بما أن لهذه الكمية قيمة وهي 20 km، وليس لها اتجاه؛ إذن هذه المسافة كمية قياسية.

تحقق من فهمك

حدّد الكميات المتجهة، والكميات القياسية (العددية) في كلٍّ مما يأتي:

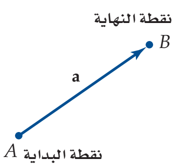
1A) تسير سيارة بسرعة 60 mi / h، وبزاوية 15° جهة الجنوب الشرقي. كمية متجهة

1B) هبوط مظلّي رأسيًّا إلى أسفل بسرعة 12.5 mi / h . كمية متجهة

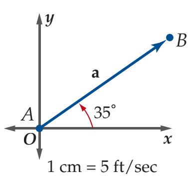
1C) طول قطعةٍ مستقيمةٍ 5 cm . كمية قياسية

المتجهات:

يمكن تمثيل المتجه هندسيًّا بقطعةٍ مستقيمةٍ لها اتجاه **(قطعة مستقيمة متجهة)**، أو سهم يُظهر كلًّا من المقدار والاتجاه. ويمثل الشكل المجاور القطعة المستقيمة المتجهة التي لها **نقطة البداية** A، و**نقطة النهاية** B. ويرمز لهذا المتجه بالرمز $\overline{AB}$ أو $\vec{a}$ أو **a** .



أما **طول المتجه** فهو عبارة عن طول القطعة المستقيمة التي تمثله، ففي الشكل المجاور، إذا كان مقياس الرسم هو 1 cm = 5 ft/s، فإن طول المتجه **a**، ويُرمز له بالرمز |**a**|، يساوي 5 × 2.6 أو 13 ft/s .



يكون المتجه في **الوضع القياسي** إذا كانت نقطة بداية المتجه هي نقطة الأصل ويعبّر عن **اتجاه المتجه** بالزاوية التي يصنعها مع الاتجاه الأفقي (الاتجاه الموجب للمحور x).
فمثلًا: اتجاه المتجه **a** هو 35° .

مصادر الدرس 5-1

المصدر	دون المتوسط	ضمن المتوسط	فوق المتوسط
دليل المعلم	• تنويع التعليم ص (14)	• تنويع التعليم ص (14)	• تنويع التعليم ص (17)
كتاب التمارين	• ص (4)	• ص (4)	• ص (4)
مصادر المعلم للأنشطة الصفية	• تدريبات إعادة التعليم، ص (6, 7) • تدريبات حل المسألة، ص (8)	• تدريبات حل المسألة، ص (8) • التدريبات الإثرائية، ص (9)	• تدريبات حل المسألة، ص (8) • التدريبات الإثرائية، ص (9)

إرشادات للدراسة

زاوية الاتجاه الحقيقي

إذا أعطي قياس زاوية بثلاثة أرقام، ولم تعطَ أي مركبات اتجاهية إضافية، فإنها زاوية اتجاه حقيقي. فمثلًا زاوية الاتجاه الحقيقي للمتجه v في الشكل المجاور هي 145°.

إرشادات للدراسة

النيوتن

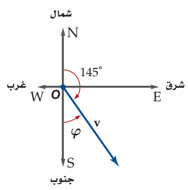
وحدةُ لقياس القوّة، ويرمز له بالحرف N، وهو عبارة عن القوّة التي تؤثر في جسم كتلته 1 kg؛ لتكسبه تسارعًا مقداره $1\,m/s^2$.

تنبيه!

الطول

يمكن أن يمثل طول المتجه مسافة، أو سرعة، أو قوة. وإذا مثل المتجه سرعة، فإن طوله لا يمثّل المسافة المقطوعة.

ويمكن التعبير عن اتجاه المتجه أيضًا باستعمال زاوية **الاتجاه الربعي** φ، وتُقرأ فاي، وهي زاوية قياسها بين 0° و 90° شرق أو غرب الخط الرأسي (خط شمال – جنوب). فمثلًا زاوية الاتجاه الربعي للمتجه v في الشكل المجاور هي 35° جنوب شرق، وتُكتب S 35° E .



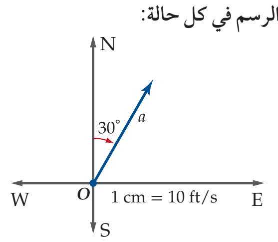
كما يمكن استعمال زاوية **الاتجاه الحقيقي**، حيث تُقاس الزاوية مع عقارب الساعة بدءًا من الشمال. ويُقاس الاتجاه الحقيقي بثلاثة أرقام، فمثلًا يُكتب الاتجاه الذي يحدّد زاوية قياسها 25° من الشمال مع عقارب الساعة باستعمال الاتجاه الحقيقي على الصورة 025° .

مثال 2 تمثيل المتجه هندسيًا

استعمل مسطرةً ومنقلةً؛ لرسم متجه لكلٍّ من الكميات الآتية، واكتب مقياس الرسم في كل حالة:

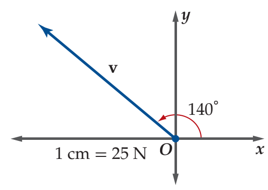
a) $a = 20$ ft/s باتجاه 030° .

استعمل مقياس الرسم 1 cm = 10 ft/s ، وارسم سهمًا طوله 2 cm ، أو $20 \div 10$ بزاوية قياسها 30° من الشمال، وفي اتجاه عقارب الساعة.



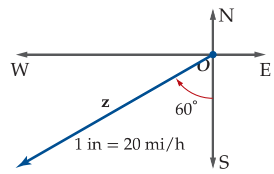
b) $v = 75$ N ، بزاوية قياسها 140° مع الاتجاه الأفقي.

استعمل مقياس الرسم 1 cm = 25 N ، وارسم سهمًا طوله 3 cm ، أو $75 \div 25$ في الوضع القياسي، وبزاوية قياسها 140° مع الاتجاه الموجب للمحور x .



c) $z = 30$ mi/h ، باتجاه S 60° W .

استعمل مقياس الرسم 1 in = 20 mi / h ، وارسم سهمًا طوله $30 \div 20 = 1.5$ in ، بزاوية قياسها 60° في اتجاه جنوب غرب .



تحقق من فهمك

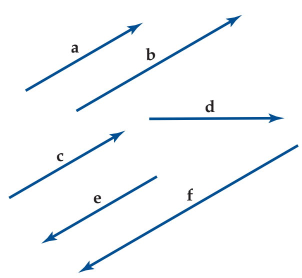
استعمل مسطرة ومنقلة؛ لرسم متجه لكلٍّ من الكميات الآتية، واكتب مقياس الرسم في كل حالة:

2A) $t = 20$ ft/s ، باتجاه 065° . انظر ملحق الإجابات (2A – C)

2B) $u = 15$ mi/h ، باتجاه S 25° E .

2C) $m = 60$ N ، بزاوية قياسها 80° مع الاتجاه الأفقي.

عند إجرائك العمليات على المتجهات، فإنك تحتاج إلى الأنواع الشائعة الآتية من المتجهات:



- **المتجهات المتوازية** لها الاتجاه نفسه، أو اتجاهان متعاكسان، وليس بالضرورة أن يكون لها الطول نفسه. فمثلًا في الشكل المجاور $a \parallel b \parallel c \parallel e \parallel f$.
- **المتجهات المتساوية** لها الاتجاه نفسه، والطول نفسه. ففي الشكل المجاور a, c ؛ لهما الطول والاتجاه نفساهما، لذا هما متساويان، ويعبَّر عنه بالرموز: $a = c$.
لاحظ أن $a \neq b$ ؛ لأن $|a| \neq |b|$ ، $a \neq d$ ؛ لأن لهما اتجاهين مختلفين.
- **المتجهان المتعاكسان** لهما الطول نفسه، لكن اتجاهيهما متعاكسان. يكتب المتجه المعاكس للمتجه a على الصورة $-a$ ، ففي الشكل المجاور $e = -a$.

المتجهات

المثال 1 يُبيّن كيفية تمييز الكميات المتجهة.

المثال 2 يُبيّن كيفية تمثيل المتجه هندسيًا.

المثال 3 يُبيّن كيفية إيجاد محصلة متجهين هندسيًا.

المثال 4 يُبيّن كيفية إجراء العمليات على المتجهات.

التقويم التكويني

استعمل تدريبات "تحقق من فهمك" بعد كل مثال؛ للتحقق من مدى فهم الطلاب المفاهيم.

مثالان إضافيان

1 حدّد الكميات المتجهة، والكميات القياسية (العددية) في كلٍّ مما يأتي:

a) يركل لاعب كرة قدم بسرعة 60 mi/h في اتجاه شمال غرب. متجهة

b) يحمل محمد حقيبة كتلتها 20 kg. قياسية

c) يركض لاعب مسافة 100 m شمالًا. متجهة

2 استعمل مسطرةً ومنقلةً، لرسم متجهٍ لكلٍّ من الكميات الآتية، واكتب مقياس الرسم في كل حالة: للفروع a-c انظر الهامش

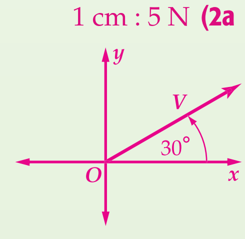
a) $v = 10$ N بزاويةٍ قياسها 30° مع المستوى الأفقي.

b) $z = 25$ m/s باتجاه S70° W

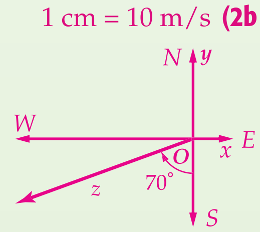
c) $t = 10$ mi/h باتجاه 025°.

إجابة (المثال الإضافي 2):

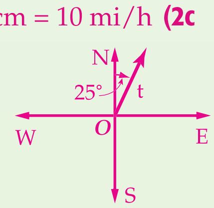
2a) 1 cm : 5 N



2b) 1 cm = 10 m/s



2c) 1 cm = 10 mi/h



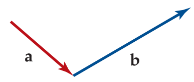
عند جمع متجهين أو أكثر يكون الناتج متجهًا، و يسمى **المحصّلة**. ويكون لمتجه المحصّلة التأثير نفسه الناتج عن تأثير المتجهين الأصليين عند تطبيقهما واحدًا تلو الآخر. ويمكن إيجاد المحصّلة هندسيًّا باستعمال **قاعدة المثلث**، أو **قاعدة متوازي الأضلاع**.

مفهوم أساسي إيجاد المحصلة

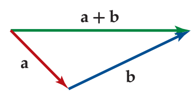
قاعدة المثلث

لإيجاد محصّلة المتجهين **a, b**، اتّبع الخطوتين الآتيتين:

الخطوة 1 أجرِ انسحابًا للمتجه **b**، بحيث تلتقي نقطة بدايته مع نقطة نهاية المتجه **a**.



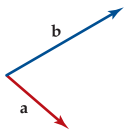
الخطوة 2 محصله المتجهين **a, b** هي المتجه المرسوم من نقطة بداية **a** إلى نقطة نهاية **b**.



قاعدة متوازي الأضلاع

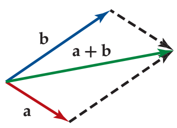
لإيجاد محصّلة المتجهين **a, b**، اتّبع الخطوات الآتية:

الخطوة 1 أجرِ انسحابًا للمتجه **b**، بحيث تلتقي نقطة بدايته مع نقطة بداية المتجه **a**.



الخطوة 2 أكمل رسم متوازي الأضلاع الذي ضلعاه **a, b**.

الخطوة 3 محصلة المتجهين هي المتجه الذي يُمثله قطر متوازي الأضلاع.

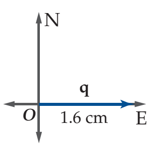


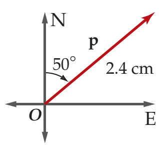
مثال 3 من واقع الحياة إيجاد محصلة متجهين

رياضة المشي: قطع عبد اللّه في سباق للمشي، مسافة 120 m باتجاه N 50° E، ثم مسافة 80 m في اتجاه الشرق. كم يبعُد عبد اللّه عن نقطة البداية، وما هي زاوية الاتجاه الربعي؟

افترض أن المتجه **p** يمثِّل المشي 120 m في الاتجاه N 50° E، وأن المتجه **q** يمثِّل المشي 80 m باتجاه الشرق. ارسم شكلًا يمثِّل **p, q** باستعمال مقياس الرسم 1cm = 50 m.

استعمل مسطرة ومنقلة؛ لرسم سهم طوله 2.4 cm = 50 ÷ 120؛ ويصنع زاوية قياسها 50° شمال شرق؛ ليُمثِّل المتجه **p**، وارسم سهمًا آخر طوله 1.6 cm = 50 ÷ 80 في اتجاه الشرق؛ ليُمثِّل المتجه **q**.

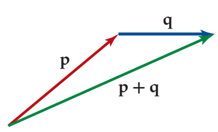




1 cm = 50 m

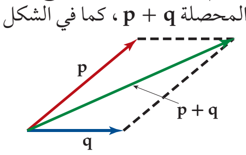
الطريقة 1 قاعدة المثلث

اعمل انسحابًا للمتجه **q**، بحيث تلتقي نقطة بدايته مع نقطة نهاية المتجه **p**، ثم ارسم متجه المحصلة **p + q** كما في الشكل أدناه.



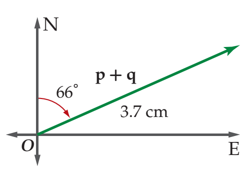
الطريقة 2 قاعدة متوازي الأضلاع

اعمل انسحابًا للمتجه **q**، بحيث تلتقي نقطة بدايته مع نقطة بداية **p**، ثم أكمل متوازي الأضلاع، وارسم قطره الذي يمثِّل المحصلة **p + q**، كما في الشكل أدناه.



نحصل في كلتا الطريقتين على متجه المحصلة **p + q** نفسه. قِس طول **p + q** باستعمال المسطرة، ثم قِس الزاوية التي يصنعها هذا المتجه مع الخط الرأسي كما في الشكل المجاور.

تجد أن طول المتجه يساوي 3.7 cm تقريبًا، ويُمثِّل 185 m = 50 × 3.7.
وعليه يكون عبد الله على بعد 185 m من نقطة البداية باتجاه N 66° E.

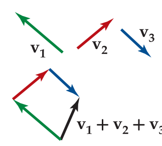


1 cm = 50 ft

إرشادات للدراسة

المحصلة

لإيجاد محصلة أكثر من متجهين باستعمال قاعدة متوازي الأضلاع، يلزم إعادة الرسم أكثر من مرة؛ لذا من الأسهل في هذه الحالة استعمال طريقة مشابهة لقاعدة المثلث، وذلك بوضع نقطة بداية متجه عند نقطة نهاية المتجه الذي يسبقه وهكذا.



مثال إضافي

3 نزهة: قام فيصل بنزهة مشيًا على الأقدام خارج مخيمه الكشفي، فسار مسافة 2 km من المخيم باتجاه N 30° W، ثم سار مسافة 2 km باتجاه الشرق. كم يبعد فيصلٌ عن مخيمه الكشفي، وفي أي اتجاهٍ يكون؟ 2 km, N 30° E

إرشادات للمعلم الجديد

أشكال عند حل الأمثلة، من المهم أن يبدأ الطلاب برسم أشكال دقيقة. شجع الطلاب على استعمال ورق الرسم البياني، والتحقق من معقولية إجاباتهم من خلال الأشكال.

التعليم باستعمال التقنيات

مدوّنة اطلب إلى الطلاب العمل في مجموعات ثنائية؛ لعمل مدونة عن الطرائق التي يستعملونها في إيجاد محصلة متجهين. ثم اطلب إليهم أن يراجع بعضهم أوراق بعض، وأن يعدّلوها في أثناء بناء المدونة.

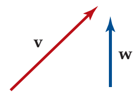
المحتوى الرياضي

جمع المتجهات وطرحها

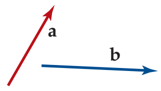
لاحظ أن قاعدة متوازي الأضلاع تستعمل كذلك لطرح المتجهات، فعند جمع متجهين، يكون ناتج الجمع هو قطر متوازي الأضلاع المرتبط بالمتجهين، أما عند طرح متجهَين، فإن ناتج الطرح هو القطر الآخر لمتوازي الأضلاع هذا.

تحقق من فهمك

أوجد محصلة كل زوج من المتجهات الآتية مستعملًا قاعدة المثلث، أو متوازي الأضلاع. ثمّ حدّد اتجاهها بالنسبة للأفقي.

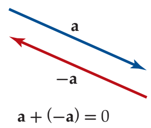
3A)


$3\ cm; 61°$

3B)


$3\ cm; 25°$

3C) **لعبة أطفال:** رمى طفل كرةً صغيرةً في لعبة مخصصة للأطفال بسرعة $7\ in/s$، باتجاه $310°$، فارتدت باتجاه $055°$، وبسرعة $4\ in/s$. أوجد مقدار محصلة حركة الكرة واتجاهها.
(قرب طول المحصلة إلى أقرب بوصة، والاتجاه إلى أقرب درجة) $7\ in/s; 343°$



عند جمع متجهين متعاكسين لهما الطول نفسه، فإن المحصلة هي **المتجه الصفري**. ويرمز له بالرمز $\vec{0}$ أو $\mathbf{0}$، وطوله صفر، وليس له اتجاه. وعملية طرح المتجهات تشبه عملية طرح الأعداد.

لإيجاد $\mathbf{p} - \mathbf{q}$، اجمع معكوس $\mathbf{q}$ إلى $\mathbf{p}$؛ أي أن: $\mathbf{p} - \mathbf{q} = \mathbf{p} + (-\mathbf{q})$.

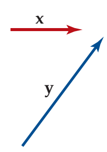
و كذلك يمكن ضرب المتجه في عددٍ حقيقيٍّ.

مفهوم أساسي — ضرب المتجه في عدد حقيقي

إذا ضُرب المتجه $\mathbf{v}$ في عدد حقيقي k، فإن طول المتجه $k\mathbf{v}$ هو $|k|\,|\mathbf{v}|$. ويتحدّد اتجاهه بإشارة k.

- إذا كانت $k > 0$، فإن اتجاه $k\mathbf{v}$ هو اتجاه $\mathbf{v}$ نفسه.
- إذا كانت $k < 0$، فإن اتجاه $k\mathbf{v}$ هو عكس اتجاه $\mathbf{v}$.

مثال 4 العمليات على المتجهات

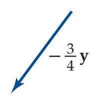


ارسم المتجه $3\mathbf{x} - \frac{3}{4}\mathbf{y}$، حيث $\mathbf{x}, \mathbf{y}$ متجهان كما في الشكل المجاور.

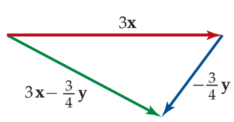
أعد كتابة المتجه $3\mathbf{x} - \frac{3}{4}\mathbf{y}$ على صورة حاصل جمع متجهين $3\mathbf{x} + \left(-\frac{3}{4}\mathbf{y}\right)$، ثم مثّل المتجه $3\mathbf{x}$ برسم متجه طوله 3 أمثال المتجه $\mathbf{x}$، وبالاتجاه نفسه كما في الشكل 5.1.1.

ولتمثيل المتجه $-\frac{3}{4}\mathbf{y}$، ارسم متجهًا طوله $\frac{3}{4}$ طول $\mathbf{y}$، وفي اتجاه معاكس لاتجاه $\mathbf{y}$ كما في الشكل 5.1.2، ثم استعمل قاعدة المثلث؛ لرسم متجه المحصلة كما في الشكل 5.1.3.

الشكل 5.1.1



الشكل 5.1.2

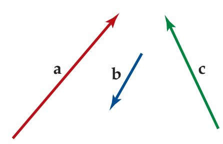


الشكل 5.1.3

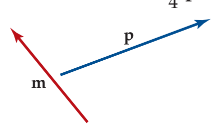
تحقق من فهمك

ارسم المتجه الذي يُمثّل كلًّا مما يأتي: (4A–B) انظر الهامش

4A) $\mathbf{a} - \mathbf{c} + 2\mathbf{b}$



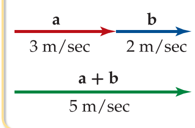
4B) $\mathbf{m} - \frac{1}{4}\mathbf{p}$



إرشادات للدراسة

المتجهات المتوازية في الاتجاه نفسه

محصّلة ناتج جمع متجهين أو أكثر لها الاتجاه نفسه، هو متجه طوله يساوي مجموع أطوال هذه المتجهات، واتجاهه هو اتجاه المتجهات الأصلية نفسه.



قراءة الرياضيات

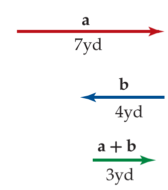
$|k|$ تقرأ القيمة المطلقة للعدد الحقيقي k.

$|\mathbf{v}|$ تمثل طول المتجه $\mathbf{v}$.

إرشادات للدراسة

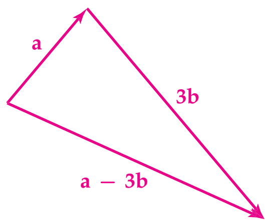
المتجهان المتوازيان المتعاكسان

محصلة ناتج جمع متجهين متوازيين متعاكسين، هو متجه طوله يساوي القيمة المطلقة للفرق بين طولي المتجهين، واتجاهه هو اتجاه المتجه الأكبر طولًا.

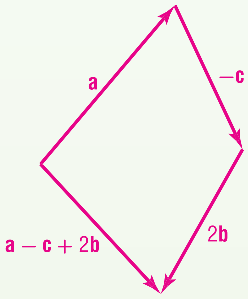


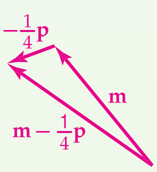
مثال إضافي

4 ارسم المتجه $\mathbf{a} - 3\mathbf{b}$، حيث $\mathbf{a}$، $\mathbf{b}$ متجهان كما في الشكل أدناه.



إجابة (تحقق من فهمك):

4A)


4B)


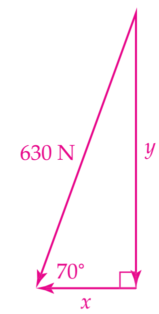
تطبيقات المتجهات

المثال 5 يُبيّن كيفية تحليل قوةٍ إلى مركبتين متعامدتين.

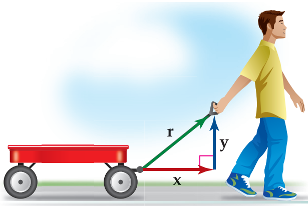
مثال إضافي

5 **حدائق:** يدفع عبد الله مجرفةً في أرض حديقته المنزلية بقوةٍ مقدارها 630 N وبزاوية قياسها °70 مع الأرض.

a) ارسم شكلًا يوضح تحليل القوة التي يبذلها عبد الله إلى مركبتين متعامدتين.



b) أوجد مقدار كلٍّ من المركبتين الأفقية والرأسية للقوة.
المركبة الأفقية تساوي 215.47 N تقريبًا.
المركبة الرأسية تساوي 592.01 N تقريبًا.



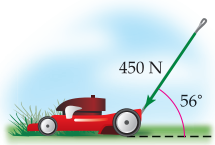
تطبيقات المتجهات: يُسمى المتجهان اللّذان ناتج جمعهما المتجه r ، **مركبتي r** . ومع أن مركبتي المتجه يمكن أن تكونا في أي اتجاه، إلا أنه من المفيد غالبًا تحليل المتجه إلى **مركبتين متعامدتين**، واحدة أفقية، والأخرى رأسية. ففي الشكل المجاور، يمكن اعتبار القوة r المبذولة لسحب العربة بصفتها مجموع مركبتين هما أفقية x تحرك العربة إلى الأمام، ورأسية y تسحب العربة إلى أعلى.

الربط مع الحياة

يتطلب الضغط على مفتاح الكهرباء، لإشعال الضوء قوة مقدارها 3 N . والقوة التي تؤثر بها الجاذبية الأرضية في الشخص تعادل 600 N تقريبًا. والقوة المبذولة من لاعب رفع أثقال تساوي 2000 N تقريبًا .

المصدر: Contemporary College Physics

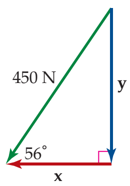
مثال 5 من واقع الحياة — تحليل القوة إلى مركبتين متعامدتين



قص العشب: يدفع علي عربة قصّ العشب بقوة مقدارها 450 N ، وبزاوية قياسها °56 مع سطح الأرض.

a) ارسم شكلًا يوضِّح تحليل القوة التي يبذلها علي إلى مركبتين متعامدتين.

يمكن تحليل قوة الدفع إلى مركبتين؛ أفقية x إلى الأمام ورأسية y إلى أسفل كما في الشكل أدناه.



b) أوجد مقدار كلٍّ من المركبتين؛ الأفقية والرأسية للقوة.

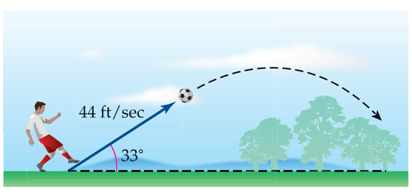
تكوّن كلٌّ من القوة ومركبتاها الأفقية والرأسية مثلثًا قائمَ الزاوية. استعمل تعريف الجيب، أو جيب التمام؛ لإيجاد مقدار كل قوة منهما.

$\cos 56° = \frac{\lvert x\rvert}{450}$	تعريف الجيب، وجيب التمام	$\sin 56° = \frac{\lvert y\rvert}{450}$
$\lvert x\rvert = 450 \cos 56°$	حُل بالنسبة إلى x ، y	$\lvert y\rvert = 450 \sin 56°$
$\lvert x\rvert \approx 252$	استعمل الآلة الحاسبة	$\lvert y\rvert \approx 373$

مقدار المركبة الأفقية 252 N تقريبًا، ومقدار المركبة الرأسية 373 N تقريبًا.

تحقق من فهمك

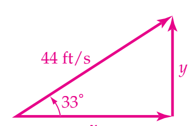
5) **كرة قدم:** يركل لاعبٌ كرةَ قدم من سطح الأرض بسرعةٍ مقدارها 44 ft/s ، وبزاويةٍ قياسها °33 مع سطح الأرض كما في الشكل أدناه.



A) ارسم شكلًا يوضِّح تحليل هذه السرعة إلى مركبتين متعامدتين.

B) أوجد مقدار كلٍّ من المركبتين الأفقية والرأسية للسرعة .

5A)



5B) المركبة الأفقية تساوي 36.90 ft/s تقريبًا؛ المركبة الرأسية تساوي 23.96 ft/s تقريبًا

تنويع التعليم

دون ضمن

المواد لعبة على شكل قارب صغير له شراع متحرك، بركة ماء، مروحة مكتب.

المتعلّمون الحركيون تستعمل المتجهات في الغالب لوصف القوى، وإيجاد المحصلة في مواقف من واقع الحياة. اطلب إلى الطلاب توقع أثر الرياح في قارب، وذلك بوضع لعبة القارب الصغير في حوض ماء، واستعمال مروحة مكتب مصدرًا للرياح. حافظ على سرعة الرياح والمسافة بين المروحة والقارب ليظلّا ثابتين. ضع القارب بحيث يكون في وضع يعامد حركة الرياح، واطلب إلى الطلاب وضع عدة توقعات واختبارها؛ بناءً على موقع القارب وأثر قوة الرياح في القارب.

تدرب وحل المسائل

حدّد الكميات المتجهة والكميات القياسية في كلٍّ مما يأتي: (مثال 1)

1) طول محمد 125 cm . قياسية

2) مساحة مربع $20\ m^2$. قياسية

3) يركض غزال بسرعة 15 m/s باتجاه الغرب. متجهة

4) المسافة التي قطعتها كرة قدم 5 m . قياسية

5) إطار سيارة وزنه 7 kg معلق بحبل. متجهة

6) رمي حجر رأسيًّا إلى أعلى بسرعة 50 ft/s . متجهة

استعمل المسطرة والمنقلة؛ لرسم متجه لكلٍّ من الكميات الآتية، ثم اكتب مقياس الرسم في كل حالة. (مثال 2) **7–12) انظر ملحق الإجابات**

7) $\mathbf{h} = 13$ in/s ، باتجاه °205

8) $\mathbf{g} = 6$ km/h ، باتجاه N 70° W

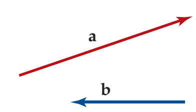
9) $\mathbf{j} = 5$ ft/s ، وبزاوية قياسها °300 مع الأفقي.

10) $\mathbf{d} = 28$ km ، وبزاوية قياسها °35 مع الأفقي.

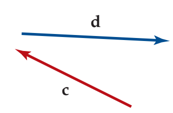
11) $\mathbf{R} = 40$ m ، باتجاه S 55° E

12) $\mathbf{n} = 32$ m/s ، باتجاه °030

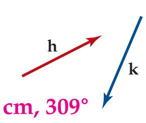
أوجد محصلة كل زوج من المتجهات الآتية باستعمال قاعدة المثلث، أو قاعدة متوازي الأضلاع، قرِّب المحصلة إلى أقرب جزءٍ من عشرة من السنتمتر، ثم حدّد اتجاهها بالنسبة للأفقي مستعملًا المسطرة، والمنقلة: (مثال 3)

13) 

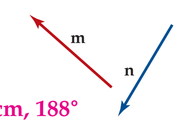
1.4 cm, 45°

14) 

1 cm ، 60° تقريبًا

15) 

1.1 cm, 309°

16) 

2.3 cm, 188°

17) **ركوب الزوارق:** غادر زورق أحد الموانئ باتجاه N 60° W ، فقطع مسافة 12 ميلًا بحريًّا، ثم غيّر قائد الزورق اتجاه حركته إلى N 25° E ، فقطع مسافة 15 ميلًا بحريًّا. أوجد بُعد الزورق، واتجاه حركته في موقعه الحالي بالنسبة إلى الميناء. (مثال 3) **20 ميلًا بحريًّا، N 12° W تقريبًا**

حدّد مقدار المحصلة الناتجة عن جمع المتجهين، واتجاهها في كلٍّ مما يأتي: (مثال 3)

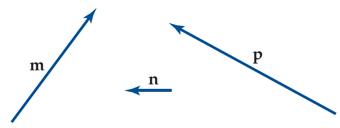
18) 18 N للأمام، ثم 20 N للخلف. **2N للخلف**

19) 100 m للشمال، ثم 350 m للجنوب . **250 m للجنوب**

20) 17 mi شرقًا، ثم 16 mi جنوبًا. **23 mi تقريبًا باتجاه S 47° E**

21) $15\ m/s^2$ باتجاه زاوية قياسها °60 مع الأفقي، ثم $9.8\ m/s^2$ إلى الأسفل. **$8\ m/s^2$ تقريبًا، 23° مع الأفقي**

استعمل المتجهات الآتية؛ لرسم متجه يمثّل كل عبارة مما يأتي: (مثال 4) **22–25) انظر ملحق الإجابات**



22) $m - 2n$

23) $4n + \frac{4}{5}p$

24) $p + 2n - 2m$

25) $m - 3n + \frac{1}{4}p$

ارسم شكلًا يوضِّح تحليل كل متجه مما يأتي إلى مركبتَيه المتعامدتين، ثم أوجد مقدار كلٍّ منهما. (مثال 5) **26–28) انظر الهامش**

26) $2\frac{1}{8}$ in/s ، باتجاه °310 مع الأفقي.

27) 1.5 cm ، باتجاه N 49° E.

28) $\frac{3}{4}$ in/min ، باتجاه °255 .

تنويع الواجبات المنزلية

المستوى	الأسئلة
دون المتوسط	1–29، 42–44، 46–52
ضمن المتوسط	1–41 (فردي)، 42–44، 46–52
فوق المتوسط	30–52

3 التدريب

التقويم التكويني

استعمل الأسئلة 1-29؛ للتأكد من فهم الطلاب.

ثم استعمل الجدول أسفل هذه الصفحة؛ لتعيين الواجبات المنزلية للطلاب بحسب مستوياتهم.

تنبيه لحل الأسئلة

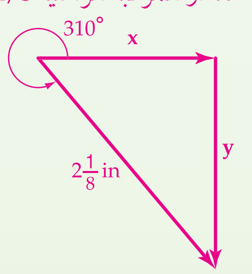
المسطرة والمنقلة يحتاج الطلاب إلى المسطرة والمنقلة في كثيرٍ من أسئلة هذا الدرس.

تنبيه!

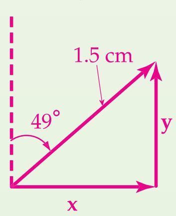
أخطاء شائعة قد لا يستعمل الطلاب الزاوية الصحيحة عندما يُعطى الاتجاه الحقيقي للمتجه؛ لذا ذكّر الطلاب بأن الاتجاه الحقيقي يُعبَّر عنه بزوايا مَقيسة مع عقارب الساعة من الشمال.

إجابات:

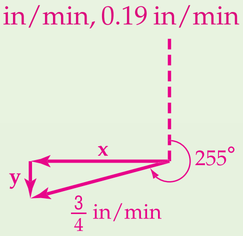
26) مقدار المركبة الرأسية 1.63 in/s تقريبًا
مقدار المركبة الرأسية 1.37 in/s تقريبًا



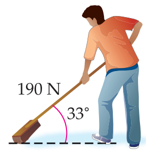
27) 1.13 cm, 0.98 cm



28) 0.72 in/min, 0.19 in/min



29) **تنظيف:** يدفع حسن عصا مكنسة التنظيف بقوة مقدارها 190 N، وبزاوية قياسها 33° مع سطح الأرض كما في الشكل المجاور. (مثال 5)



a) ارسم شكلًا يوضّح تحليل هذه القوة إلى مركبتيها المتعامدتين. انظر الهامش.

b) أوجد مقدار كلٍّ من المركبة الأفقية والمركبة الرأسية. مقدار المركبة الأفقية: 159.3 N؛ مقدار المركبة الرأسية: 103.5 N

30) **لعب أطفال:** يدفع محمد عربة أخته بقوة مقدارها 100 N، وباتجاه 31° مع الأفقي، أوجد مقدار المركبة الرأسية للقوة إلى أقرب عدد صحيح. 52 N تقريبًا

31) **تمثيلات متعددة:** في هذه المسألة ستستقصي ضرب متجه في عدد حقيقي.

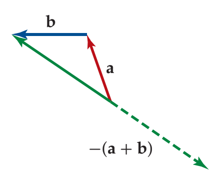
a) **بيانيًا:** ارسم المتجه **a** على المستوى الإحداثي، بحيث تكون نقطة بدايته عند نقطة الأصل. واختر قيمة عددية لـ k، ثم ارسم متجهًا ناتجًا عن ضرب k في المتجه الأصلي على المستوى الإحداثي نفسه. وكرّر العملية مع أربعة متجهات أخرى **b, c, d, e**، واستعمل قيمة k نفسها في كل مرة. انظر الهامش.

b) **جدوليًا:** انسخ الجدول أدناه في دفترك، ثم اكتب البيانات المناسبة داخله لكل متجه رسمته في الفرع **a**.

المتجه	نقطة النهاية للمتجه	نقطة النهاية للمتجه مضروبًا في العدد k
a	(2, 4)	(4, 8)
b	(0, 3)	(0, 6)
c	(−1, 2)	(−2, 4)
d	(−2, −2)	(−4, −4)
e	(3, −1)	(6, −2)

c) **تحليليًا:** إذا كانت (a, b) نقطة النهاية للمتجه **a**، فما إحداثيات نقطة النهاية للمتجه k**a**؟ (ka, kb)

المتجه الموازن هو متجه يساوي متجه المحصلة في المقدار ويعاكسه في الاتجاه، بحيث إن ناتج جمع متجه المحصلة مع المتجه الموازن يساوي المتجه الصفري، والمتجه الموازن للمتجه **a + b** هو **−(a + b)**

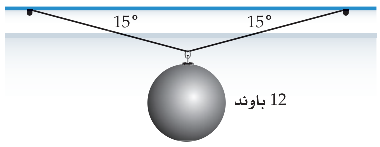


32) أوجد طول واتجاه المتجه الموازن للمتجهين:

a = 15 mi/h، باتجاه 125°

b = 12 mi/h، باتجاه 045°   20.77 mi / h باتجاه 270°

33) **كرة حديدية:** عُلّقت كرة حديدية بحبلين متساويين في الطول كما في الشكل أدناه. 33a, b انظر ملحق الإجابات



a) إذا كانت $\mathbf{T_1}, \mathbf{T_2}$ تُمثّلان قوتَي الشدّ في الحبلين، وكانت $\mathbf{T_1} = \mathbf{T_2}$، فارسم شكلًا يُمثّل وضع التوازن للكرة.

b) أعد رسم الشكل باستعمال قاعدة المثلث لتجد $\mathbf{T_1} + \mathbf{T_2}$

c) استعمل الشكل في الفقرة **b** وحقيقة أن $\mathbf{T_1} + \mathbf{T_2}$ محصلة هي المتجه الموازن لوزن الكرة؛ لحساب مقدار كلٍّ من $\mathbf{T_1}, \mathbf{T_2}$. $\mathbf{T_1} \approx 23.18\,\text{lb}, \mathbf{T_2} \approx 23.18\,\text{lb}$

أوجد طول كل متجه واتجاهه مما يأتي بمعلومية مركبتَيه الأفقية والرأسية، والمدى الممكن لزاوية كلٍّ منها:

34) الأفقية 0.32 in، الرأسية 2.28 in، $90° < \theta < 180°$. 2.3 in.; 98° تقريبًا

35) الأفقية 3.1 ft، الرأسية 4.2 ft، $0° < \theta < 90°$. 5.3 ft; 54° تقريبًا

36) الأفقية 2.6 cm، الرأسية 9.7 cm، $270° < \theta < 360°$. 10 cm; 285° تقريبًا

ارسم ثلاثة متجهات **a, b, c**؛ لتوضح صحة كل خاصية من الخصائص الآتية هندسيًا: 37-39 انظر ملحق الإجابات

37) الخاصية الإبدالية **a + b = b + a**

38) الخاصية التجميعية **(a + b) + c = a + (b + c)**

39) الخاصية التوزيعية $k(\mathbf{a} + \mathbf{b}) = k\mathbf{a} + k\mathbf{b}$، حيث $k = 2, 0.5, -2$

تمثيلات متعددة

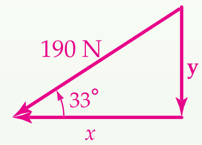
في السؤال 31 يستعمل الطلاب التمثيل البياني والجداول؛ لاستقصاء ضرب متجهٍ في عددٍ حقيقيٍّ.

تنبيه!

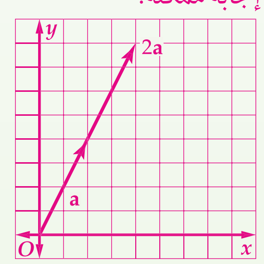
أخطاء شائعة في السؤال 29 قد لا يستعمل الطلاب خاصيتي نسب الجيب وجيب التمام؛ لذا راجع تعريف كل نسبةٍ منها في المثلث القائم الزاوية.

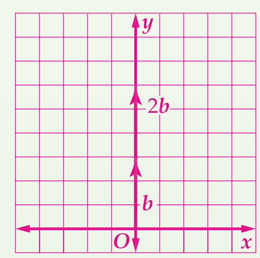
إجابات:

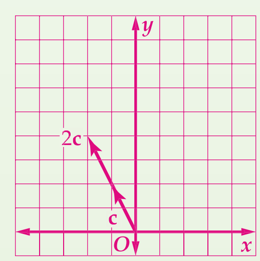
29a)

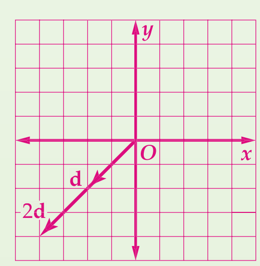


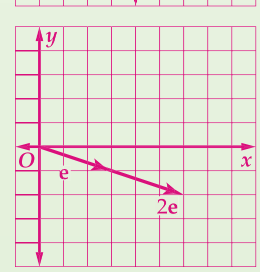
31a) إجابة ممكنة:











16 الفصل 5 المتجهات

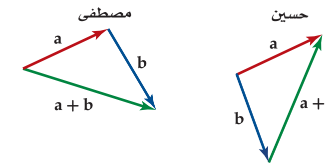
مسائل مهارات التفكير العليا

40) مسألة مفتوحة: لديك متجه مقداره 5 وحدات بالاتجاه الموجب لمحور x، حلّل المتجه إلى مركبتين متعامدتين على ألا تكون أيٌّ منهما أفقية أو رأسية. **انظر ملحق الإجابات**

41) تبرير: حدّد ما إذا كانت العبارة الآتية صحيحة أحيانًا، أو صحيحة دائمًا أو ليست صحيحة أبدًا، وبرّر إجابتك.
"من الممكن إيجاد مجموع متجهين متوازيين باستعمال طريقة متوازي الأضلاع". **انظر الهامش**

42) تبرير: بفرض أن: $|\mathbf{a}| + |\mathbf{b}| \geq |\mathbf{a} + \mathbf{b}|$
a) عبّر عن هذه العبارة بالكلمات . **a-b) انظر الهامش**
b) هل هذه العبارة صحيحة أم خاطئة؟ برّر إجابتك .

43) اكتشف الخطأ: حاول كلٌّ من حسين ومصطفى إيجاد محصلة المتجهين $\mathbf{a}, \mathbf{b}$. أيهما كانت إجابته صحيحة؟ برِّر إجابتك. **انظر ملحق الإجابات**



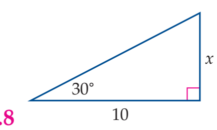
44) تبرير: هل من الممكن أن يكون ناتج جمع متجهين مساويًا لأحدهما؟ برِّر إجابتك. **انظر ملحق الإجابات**

45) اكتب: قارن بين قاعدتَي متوازي الأضلاع والمثلث في إيجاد محصلة متجهين. **انظر ملحق الإجابات**

مراجعة تراكمية

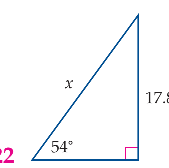
أوجد قيمة x في كلٍّ مما يأتي مقرِّبًا الناتج إلى أقرب عُشر إذا لزم ذلك. (مهارة سابقة)

46)



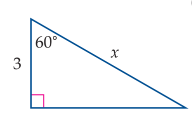
5.8

47)



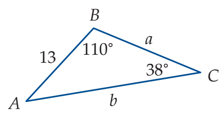
22

48)



6

49) حُلّ المثلث الآتي مقرِّبًا الناتج إلى أقرب عُشر إذا لزم ذلك. (مهارة سابقة) **49, 50) انظر ملحق الإجابات**

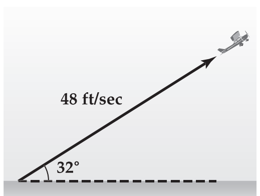


50) حُلّ المعادلة: $\sin 2x - \cos x = 0$ لجميع قيم x. (مهارة سابقة)

تدريب على اختبار

51) نزهة: قام حسان بنزهة خارج مخيمه الكشفي، فقطع مسافة 3.75 km في اتجاه الشرق من المخيم حتى وصل أحد المساجد، ثم سار شمالًا قاصدًا حديقةً عامةً، فقطع مسافة 5.6 km، حدّد موقع الحديقة بالنسبة للمخيم؟ **6.74 km باتجاه °56.2 تقريبًا مع الأفقي**

52) طارت طائرة لعبة تسير باستعمال جهاز التحكم عن بُعد، بزاوية قياسها 32° مع الأفقي، وبسرعة 48 ft/s كما في الشكل أدناه. أيٌّ مما يأتي يُمثّل مقدار المركبتين الأفقية والرأسية لسرعة الطائرة على الترتيب؟ **B**



A 25.4 ft/s , 40.7 ft/s

B 40.7 ft/s , 25.4 ft/s

C 56.6 ft/s , 90.6 ft/s

D 90.6 ft/s , 56.6 ft/s

تنبيه!

اكتشف الخطأ في السؤال 43، ذكِّر الطلاب بدراسة الرسوم بدقةٍ، عند اختيار قاعدة إيجاد محصلة متجهَين (المثلث أو متوازي الأضلاع)، إذ من المهم أن توضع نقاط البداية والنهاية بشكلٍ صحيحٍ.

4 التقويم

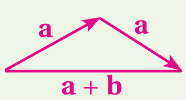
فهم الرياضيات اطلب إلى الطلاب شرح طريقة جمع وطرح متجهين موضحة بالأشكال.

إجابات:

41) ليست صحيحة أبدًا، إجابة ممكنة: إذا توازى متجهان، فإنهما يكونان في الاتجاه نفسه أو في اتجاهين متعاكسين. أمّا إذا وُضع المتجهان بحيث تتطابق نقطتا بدايتيهما، فعندها لا توجد زاوية بين المتجهين تسمح بتكوين متوازي أضلاع.

42a) مجموع طولَي المتجهين $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ أكبر من أو يساوي طول محصلة المتجهين $\mathbf{a} + \mathbf{b}$

42b) صحيحة، إجابة ممكنة:
يوجد ثلاث حالات
الحالة الأولى: المتجهان $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ ليسا على استقامة واحدة، وبذلك يكون متجه المحصلة $\mathbf{a} + \mathbf{b}$ ضلعًا ثالثًا في مثلث ضلعاه المتجهان $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ كما هو مبين بالشكل



ومن المعروف أن طول أي ضلع في المثلث أصغر من مجموع طولَي الضلعين الآخرين إذن:
$|\mathbf{a} + \mathbf{b}| < |\mathbf{a}| + |\mathbf{b}|$
الحالة الثانية: المتجهان على استقامة واحدة وفي اتجاهٍ واحدٍ.

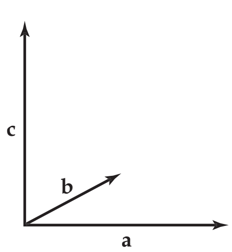
إذن يكون: $|\mathbf{a} + \mathbf{b}| < |\mathbf{a}| + |\mathbf{b}|$
الحالة الثالثة: المتجهان على استقامة واحدة وفي اتجاهين متعاكسين

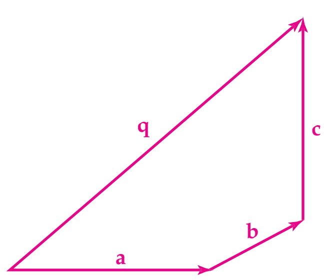
وفي هذه الحالة يكون:
$|\mathbf{a} + \mathbf{b}| = |\mathbf{a}| - |\mathbf{b}| < |\mathbf{a}| + |\mathbf{b}|$
إذن في جميع الحالات:
$|a| + |b| \geq |a + b|$

تنويع التعليم

فوق

توسع اطلب إلى الطلاب حل المسألة الآتية:
إذا كان لديك ثلاث قوى متجهة a, b, c تؤثر في نقطة. فطوّر استراتيجية؛ لإيجاد المتجه q الذي يمثل محصلة هذه القوى .





1 التركيز

الترابط الرأسي

ما قبل الدرس 2-5

إجراء العمليات على المتجهات باستعمال مقياس الرسم .

الدرس 2-5

إجراء العمليات على المتجهات في المستوى الإحداثي، وتمثيلها بيانيًّا. كتابة المتجه باستعمال متجهَي الوحدة.

ما بعد الدرس 2-5

إيجاد الضرب الداخلي لمتجهَين، واستعماله في إيجاد الزاوية بين هذين المتجهين.

2 التدريس

أسئلة التعزيز

اطلب إلى الطلاب قراءة فقرة "لماذا؟".

واسأل:

- كيف تؤثر الرياح العكسية على سرعة الطائرة؟ تعمل الرياح العكسية على تخفيض سرعة الطائرة الفعلية.
- كيف تؤثر الرياح في اتجاه الطائرة وسرعتها؟ تزيد من سرعة الطائرة.
- ما نوع الرياح التي تؤثر في اتجاه حركة الطائرة؟ أيُّ اتجاهٍ للرياح غير اتجاه حركة الطائرة أو عكسه.
- إذا هبَّت رياح جانبيه بزاوية قياسها 90° على اتجاه سير الطائرة، فهل تُخرج هذه الرياح الطائرة عن مسارها بزاوية قياسها 90°؟

لا ؛ لأنه في الوقت الذي تسير فيه الطائرة للأمام، تُدفع إلى اتجاه حركة الرياح، فيصبح خط سيرها، في اتجاه محصلة حركتي الطائرة والرياح، لذلك لا يتغير مسار الطائرة بزاوية أقل من 90°.

5-2 المتجهات في المستوى الإحداثي
Vectors in the Coordinate Plane

فيما سبق:

درست العمليات على المتجهات باستعمال مقياس الرسم . (الدرس 1-5)

والآن:

- أجري العمليات على المتجهات في المستوى الإحداثي، وأمثِّلها بيانيًّا.
- أكتب المتجه باستعمال متجهَي الوحدة.

المفردات:

الصورة الإحداثية
component form

متجه الوحدة
unit vector

متجها الوحدة القياسيان
standard unit vectors

توافق خطي
linear combination

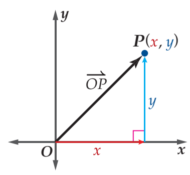
www.obeikaneducation.com

لماذا؟

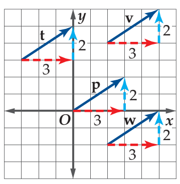
تؤثِّر الرياح في سرعة الطائرة واتجاه حركتها؛ لذا يستعمل قائد الطائرة مقاييس مدرّجة؛ لتحديد السرعة والاتجاه الذي يجب على الطائرة السير فيه؛ لمعادلة أثر الرياح ، وعادة ما يتم إجراء هذه الحسابات باستعمال المتجهات في المستوى الإحداثي.

المتجهات في المستوى الإحداثي في الدرس 1-5 ، تعلمت إيجاد طول (مقدار) المحصِّلة واتجاهها لمتجهين أو أكثر هندسيًّا باستعمال مقياس رسم. وبسبب عدم دقة الرسم، فإننا نحتاج إلى طريقة جبرية باستعمال نظام الإحداثيات المتعامدة للمواقف التي تحتاج إلى دقةٍ أكثر، أو التي تكون فيها المتجهات أكثر تعقيدًا.

ويمكن التعبير عن $\overrightarrow{OP}$ في الوضع القياسي في المستوى الإحداثي كما في الشكل 5.2.1 بصورة وحيدة، وذلك بإحداثيَّي نقطة نهايته $P(x, y)$. وهذه الصورة هي $\langle x, y\rangle$ ، حيث إن x, y هما المركبتان المتعامدتان لـ $\overrightarrow{OP}$ ؛ لذا تُسمى $\langle x, y\rangle$ **الصورة الإحداثية** للمتجه.



الشكل 5.2.1



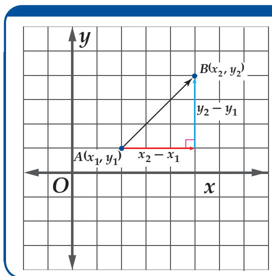
الشكل 5.2.2

وحيث إن المتجهات التي لها الطول والاتجاه نفساهما متكافئة، فإنه بإمكاننا التعبير عن كثير من المتجهات بالإحداثيات نفسها، فمثلاً المتجهات $\mathbf{p}, \mathbf{t}, \mathbf{v}, \mathbf{w}$ في الشكل 5.2.2 متكافئة، إذ يمكن التعبير عن أيٍّ منها بالصورة $\langle 3, 2\rangle$، ولإيجاد الصورة الإحداثية لمتجهٍ مرسوم في وضعٍ غير قياسيٍّ، استعمل إحداثيَي نقطتَي بدايته ونهايته.

مفهوم أساسي — الصورة الإحداثية لمتجه

الصورة الإحداثية لـ $\overrightarrow{AB}$ الذي نقطة بدايته $A(x_1, y_1)$ ، ونقطة نهايته $B(x_2, y_2)$ هي :

$$\langle x_2 - x_1, y_2 - y_1\rangle$$



مثال 1 — التعبير عن المتجه بالصورة الإحداثية

أوجد الصورة الإحداثية لـ $\overrightarrow{AB}$ ، الذي نقطة بدايته $A(-4, 2)$ ، ونقطة نهايته $B(3, -5)$.

$\overrightarrow{AB} = \langle x_2 - x_1, y_2 - y_1\rangle$ — الصورة الإحداثية

$= \langle 3 - (-4), -5 - 2\rangle$ — $(x_1, y_1) = (-4, 2)$, $(x_2, y_2) = (3, -5)$

$= \langle 7, -7\rangle$ — بسِّط

تحقق من فهمك

أوجد الصورة الإحداثية لـ $\overrightarrow{AB}$ المُعطاة نقطتا بدايته ونهايته في كلٍّ ممَّا يأتي:

(1A $A(-2, -7), B(6, 1)$ $\langle 8, 8\rangle$ (1B $A(0, 8), B(-9, -3)$ $\langle -9, -11\rangle$

مصادر الدرس 2-5

المصدر	دون المتوسط	ضمن المتوسط	فوق المتوسط
دليل المعلم	• تنويع التعليم ص (19)	• تنويع التعليم ص (19، 22)	• تنويع التعليم ص (22، 24)
كتاب التمارين	• ص (5)	• ص (5)	• ص (5)
مصادر المعلم للأنشطة الصفية	• تدريبات إعادة التعليم، ص (10, 11) • تدريبات حل المسألة، ص (12)	• تدريبات حل المسألة، ص (12) • التدريبات الإثرائية، ص (13)	• تدريبات حل المسألة، ص (12) • التدريبات الإثرائية، ص (13)

يمكن إيجاد طول المتجه في المستوى الإحداثي باستعمال قانون المسافة بين نقطتين.

قراءة الرياضيات

المعيار
يسمى مقدار المتجه أحيانًا معيار المتجه.

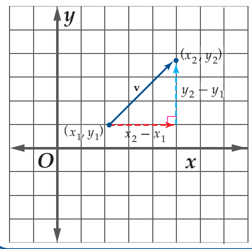
مفهوم أساسي **طول المتجه في المستوى الإحداثي**

إذا كان $\mathbf{v}$ متجهًا، نقطة بدايته (x_1, y_1)، ونقطة نهايته (x_2, y_2)،
فإن طول $\mathbf{v}$ يُعطى بالصيغة:

$$|\mathbf{v}| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

وإذا كانت $\langle a, b\rangle$ هي الصورة الإحداثية للمتجه $\mathbf{v}$ فإن:

$$|\mathbf{v}| = \sqrt{a^2 + b^2}$$



مثال 2 **إيجاد طول متجه**

أوجد طول $\overrightarrow{AB}$ الذي نقطة بدايته $A(-4, 2)$، ونقطة نهايته $B(3, -5)$.

$|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$ قانون المسافة بين نقطتين

$= \sqrt{[3 - (-4)]^2 + (-5 - 2)^2}$ $(x_1, y_1) = (-4, 2)$, $(x_2, y_2) = (3, -5)$

$= \sqrt{98} \approx 9.9$ بسّط

التحقق علمت من المثال 1 أن: $\overrightarrow{AB} = \langle 7, -7\rangle$؛ وعليه فإن: $|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{7^2 + (-7)^2} = \sqrt{98}$ ✔

تحقق من فهمك

أوجد طول $\overrightarrow{AB}$ المعطاة نقطتا بدايته ونهايته في كلٍّ ممّا يأتي:

2A) $A(-2, -7), B(6, 1)$ $\sqrt{128} \approx 11.3$ **2B)** $A(0, 8), B(-9, -3)$ $\sqrt{202} \approx 14.2$

تشبه عمليات الضرب في عدد حقيقي، والجمع والطرح على المتجهات، العمليات نفسها على المصفوفات.

مفهوم أساسي **العمليات على المتجهات**

إذا كان $\mathbf{a} = \langle a_1, a_2\rangle$, $\mathbf{b} = \langle b_1, b_2\rangle$ متجهين، و k عددًا حقيقيًا، فإن:

جمع متجهين $\mathbf{a} + \mathbf{b} = \langle a_1 + b_1, a_2 + b_2\rangle$

طرح متجهين $\mathbf{a} - \mathbf{b} = \langle a_1 - b_1, a_2 - b_2\rangle$

ضرب متجه في عددٍ حقيقيّ $k\mathbf{a} = \langle ka_1, ka_2\rangle$

مثال 3 **العمليات على المتجهات**

أوجد كلًّا مما يأتي للمتجهات $\mathbf{a} = \langle 2, 5\rangle, \mathbf{b} = \langle -3, 0\rangle, \mathbf{c} = \langle -4, 1\rangle$:

a) $\mathbf{c} + \mathbf{a}$

$\mathbf{c} + \mathbf{a} = \langle -4, 1\rangle + \langle 2, 5\rangle$ عوّض

$= \langle -4 + 2, 1 + 5\rangle = \langle -2, 6\rangle$ اجمع المتجهين

b) $\mathbf{b} - 2\mathbf{a}$

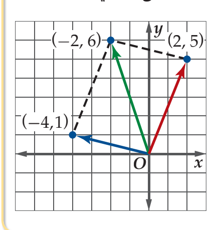
$\mathbf{b} - 2\mathbf{a} = \mathbf{b} + (-2)\mathbf{a}$ أعد كتابة الطرح كعملية جمع

$= \langle -3, 0\rangle + (-2)\langle 2, 5\rangle$ عوّض

$= \langle -3, 0\rangle + \langle -4, -10\rangle = \langle -7, -10\rangle$ اضرب متجهًا في عددٍ حقيقي، واجمع متجهين

إرشادات للدراسة

التحقق بيانيًا
يمكن التحقق بيانيًا من إجابة مثال 3 الفرع a، استعمل طريقة قاعدة متوازي الأضلاع كما في الشكل أدناه.



تحقق من فهمك

أوجد كلًّا مما يأتي للمتجهات: $\mathbf{a} = \langle 2, 5\rangle, \mathbf{b} = \langle -3, 0\rangle, \mathbf{c} = \langle -4, 1\rangle$:

3A) $4\mathbf{c} + \mathbf{b}$ $\langle -19, 4\rangle$ **3B)** $-3\mathbf{c}$ $\langle 12, -3\rangle$ **3C)** $2\mathbf{c} + 4\mathbf{a} - \mathbf{b}$ $\langle 3, 22\rangle$

المتجهات في المستوى الإحداثي

المثال 1 يُبيّن كيفية التعبير عن المتجه على الصورة الإحداثية، إذا أُعطي الزوجان المرتبان اللذان يمثلان نقطتَي بدايته ونهايته.

المثال 2 يُبيّن كيفية إيجاد طول المتجه باستعمال قانون المسافة بين نقطتين.

المثال 3 يُبيّن كيفية إجراء العمليات على المتجهات، وإيجاد ناتج الجمع والطرح والضرب في عددٍ حقيقيٍّ للمتجهات جبريًّا.

التقويم التكويني

استعمل تدريبات "تحقق من فهمك" بعد كل مثال؛ للتحقق من مدى فهم الطلاب المفاهيم.

أمثلة إضافية

1 أوجد الصورة الإحداثية لـ $\overrightarrow{AB}$ الذي نقطة بدايته $A(1, -3)$، ونقطة نهايته $B(1, 3)$. $\langle 0, 6\rangle$

2 أوجد طول $\overrightarrow{AB}$ الذي نقطة بدايته A $(1, -3)$، ونقطة نهايته $B(1, 3)$. 6

3 أوجد كلًّا مما يأتي للمتجهات: $\mathbf{w} = \langle 2, -5\rangle$، $\mathbf{y} = \langle 2, 0\rangle$، $\mathbf{z} = \langle -1, -4\rangle$.

a) $2\mathbf{w} + \mathbf{y}$ $\langle 6, -10\rangle$

b) $3\mathbf{y} - 2\mathbf{z}$ $\langle 8, 8\rangle$

تنويع التعليم

دون ضمن

المتعلمون المتفاعلون اطلب إلى الطلاب العمل في مجموعات صغيرة؛ لإيجاد ناتج جمع وطرح متجهين، وضرب متجهٍ في عددٍ حقيقيٍّ. ثم اطلب إليهم استعمال ورق رسم بياني؛ للتحقق من صحة إجاباتهم.

متجهات الوحدة: يُسمَّى المتجه الذي طوله 1 **متجه الوحدة**، ويرمز له بالرمز $\mathbf{u}$، ولإيجاد متجه الوحدة $\mathbf{u}$ الذي له نفس اتجاه المتجه $\mathbf{v}$، اقسم المتجه $\mathbf{v}$ على طوله $|\mathbf{v}|$.

$$\mathbf{u} = \frac{\mathbf{v}}{|\mathbf{v}|} = \frac{1}{|\mathbf{v}|}\mathbf{v}$$

وبذلك يكون $\mathbf{v} = |\mathbf{v}|\,\mathbf{u}$. ونكون قد عبَّرنا عن المتجه غير الصفريّ $\mathbf{v}$ في صورة حاصل ضرب متجه وحدة بنفس اتجاه $\mathbf{v}$ في عددٍ حقيقيٍّ.

تاريخ الرياضيات

ويليام روان هاميلتون
(1805–1865)
طوّر الرياضي الأيرلندي هاميلتون نظريةً في نظام الأعداد؛ لتوسيع الأعداد المركبة، ونشر العديد من المحاضرات فيها. يُذكر أن العديد من المفاهيم الأساسية في تحليل المتجهات يعتمد على هذه النظرية.

مثال 4 إيجاد متجه وحدة له نفس الاتجاه لمتجه معطًى

أوجد متجه الوحدة $\mathbf{u}$ الذي له نفس اتجاه $\mathbf{v} = \langle -2, 3\rangle$.

$$\mathbf{u} = \frac{1}{|\mathbf{v}|}\mathbf{v} \quad \text{متجه وحدة باتجاه } \mathbf{v}$$

$$= \frac{1}{|\langle -2, 3\rangle|}\langle -2, 3\rangle \quad \text{عوّض}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{(-2)^2 + 3^2}}\langle -2, 3\rangle \quad |\langle a, b\rangle| = \sqrt{a^2 + b^2}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{13}}\langle -2, 3\rangle \quad \text{بسّط}$$

$$= \left\langle \frac{-2}{\sqrt{13}}, \frac{3}{\sqrt{13}} \right\rangle \quad \text{اضرب متجه في عدد حقيقي}$$

$$= \left\langle \frac{-2\sqrt{13}}{13}, \frac{3\sqrt{13}}{13} \right\rangle \quad \text{أنطق المقام}$$

التحقق بما أن $\mathbf{u}$ تمثل حاصل ضرب $\mathbf{v}$ في عدد موجب فإن له اتجاه $\mathbf{v}$ نفسه. تحقَّق من أن طول $\mathbf{u}$ هو 1 .

$$|\mathbf{u}| = \sqrt{\left(\frac{-2}{\sqrt{13}}\right)^2 + \left(\frac{3}{\sqrt{13}}\right)^2} \quad \text{قانون المسافة بين نقطتين}$$

$$= \sqrt{\frac{4}{13} + \frac{9}{13}} \quad \text{بسّط}$$

$$= \sqrt{1} = 1 \checkmark \quad \text{بسّط}$$

تحقق من فهمك

أوجد متجه الوحدة الذي له نفس اتجاه المتجه المُعطى في كلٍّ ممّا يأتي:

4A) $\mathbf{w} = \langle 6, -2\rangle$ $\quad \left\langle \frac{3\sqrt{10}}{10}, \frac{-\sqrt{10}}{10} \right\rangle$

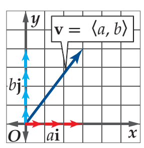
4B) $\mathbf{x} = \langle -4, -8\rangle$ $\quad \left\langle \frac{-\sqrt{5}}{5}, \frac{-2\sqrt{5}}{5} \right\rangle$

يُرمز لمتجهي الوحدة بالاتجاه الموجب لمحور x، والاتجاه الموجب لمحور y بالرمزين $\mathbf{i} = \langle 1, 0\rangle$ ، $\mathbf{j} = \langle 0, 1\rangle$ على الترتيب كما في الشكل 5.2.3 . كما يُسمَّى المتجهان $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$ **متجهَي الوحدة القياسيين**.

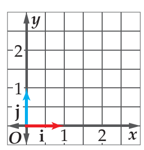
تنبيه!

متجه الوحدة i

لا تخلط بين متجه الوحدة $\mathbf{i}$، والعدد التخيلي i، حيث يُكتب متجه الوحدة بخطٍ داكن غير مائل $\mathbf{i}$، بينما يُكتب العدد التخيلي بخطٍ غير داكن مائل i .



الشكل 5.2.4



الشكل 5.2.3

ويمكن استعمال هذين المتجهين للتعبير عن أي متجه $\mathbf{v} = \langle a, b\rangle$ على الصورة $\mathbf{v} = a\mathbf{i} + b\mathbf{j}$ كما في الشكل 5.2.4؛ وذلك لأن:

$$\mathbf{v} = \langle a, b\rangle \quad \text{الصورة الإحداثية}$$

$$= \langle a, 0\rangle + \langle 0, b\rangle \quad \text{أعد كتابة المتجه على صورة ناتج جمع متجهين}$$

$$= a\langle 1, 0\rangle + b\langle 0, 1\rangle \quad \text{اضرب متجه في عدد حقيقي}$$

$$= a\mathbf{i} + b\mathbf{j} \quad \langle 1, 0\rangle = \mathbf{i}, \langle 0, 1\rangle = \mathbf{j}$$

إرشادات للمعلم الجديد

ضرب المتجه في عدد حقيقي ذكّر الطلاب بأن العدد الذي يُضرب فيه المتجه هو عدد حقيقي.

المحتوى الرياضي

الضرب في عدد حقيقي يمكن اعتبار الضرب في عدد حقيقي للمتجه على أنه تمدد للمتجه الأصلي، وينعكس اتجاه المتجه إذا كان العدد سالبًا، وعليه فإنه لا يحصل تمدد فقط للمتجه، بل يحصل انعكاس أيضًا حول المحور العمودي على المتجه والمار بنقطة بدايته. لاحظ أنه إذا كانت القيمة المطلقة للعدد أقل من 1، فإنه يحدث تصغير للمتجه.

متجهات الوحدة

المثال 4 يُبيّن كيفية إيجاد متجه وحدة له نفس اتجاه المتجه المعطى.

المثال 5 يُبيّن كيفية كتابة متجه على صورة توافق خطي لمتجهي الوحدة.

المثال 6 يُبيّن كيفية إيجاد الصورة الإحداثية لمتجه أُعطي طوله وزاوية اتجاهه.

المثال 7 يُبيّن كيفية إيجاد زاوية اتجاه متجه باستعمال الدالة العكسية لدالة الظل.

المثال 8 يُبيّن كيفية استخدام المتجهات لحل مسائل من واقع الحياة.

مثال إضافي

4 أوجد متجه الوحدة $\mathbf{u}$ الذي له نفس اتجاه $\mathbf{v} = \langle 4, -2\rangle$.

$$\mathbf{u} = \left\langle \frac{2\sqrt{5}}{5}, \frac{-\sqrt{5}}{5} \right\rangle$$

إرشادات للمعلم الجديد

رمز المتجه يمكن التعبير عن المتجهات بأزواج مرتبةٍ مثل النقاط في المستوى الإحداثي، لكن الأقواس في المتجهات تختلف عنها في النقاط، فالنقطة (x, y) تدل على موقع واحدٍ في المستوى البياني، بينما المتجه $\langle x, y\rangle$ يشير إلى متجه (له طول واتجاه) في الوضع القياسي، وينتهي بالنقطة (x, y).

التعليم باستعمال التقنيات

تسجيل مرئي قسّم طلاب الصف مجموعات، وحدّد لكل مجموعة متجهًا، واطلب إليهم إيجاد متجه وحدة له نفس اتجاه المتجه المُعطَى، وصوّر عملهم بالفيديو.

تسمى الصورة $a\mathbf{i} + b\mathbf{j}$ **توافقًا خطيًا** للمتجهين $\mathbf{i}, \mathbf{j}$. ويُقصد بها كتابة المتجه بدلالة متجهَي الوحدة $\mathbf{i}, \mathbf{j}$

مثال 5 كتابة متجه على صورة توافق خطي لمتجهَي الوحدة

إذا كانت نقطة بداية المتجه $\overrightarrow{DE}$ هي $D(-2, 3)$ ، ونقطة نهايته $E(4, 5)$ ، فاكتب $\overrightarrow{DE}$ على صورة توافقٍ خطيٍّ لمتجهَي الوحدة $\mathbf{i}, \mathbf{j}$.

أولًا، أوجد الصورة الإحداثية لـ $\overrightarrow{DE}$.

$\overrightarrow{DE} = \langle x_2 - x_1, y_2 - y_1 \rangle$ — الصورة الإحداثية

$= \langle 4 - (-2), 5 - 3 \rangle$ — $(x_1, y_1) = (-2, 3)$, $(x_2, y_2) = (4, 5)$

$= \langle 6, 2 \rangle$ — بسّط

ثم أعد كتابة المتجه على صورة توافقٍ خطيٍّ لمتجهَي الوحدة.

$\overrightarrow{DE} = \langle 6, 2 \rangle$ — الصورة الإحداثية

$= 6\mathbf{i} + 2\mathbf{j}$ — $\langle a, b \rangle = a\mathbf{i} + b\mathbf{j}$

تحقق من فهمك

اكتب المتجه $\overrightarrow{DE}$ المُعطى نقطتا بدايته ونهايته على صورة توافقٍ خطيٍّ لمتجهَي الوحدة $\mathbf{i}, \mathbf{j}$ في كلٍّ ممّا يأتي :

(5A $D(-6, 0), E(2, 5)$ $\quad 8\mathbf{i} + 5\mathbf{j}$

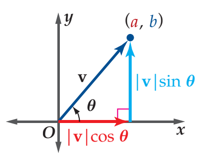
(5B $D(-3, -8), E(7, 1)$ $\quad 10\mathbf{i} + 9\mathbf{j}$

ويمكن كتابة المتجه $\mathbf{v} = \langle a, b \rangle$ ، باستعمال زاوية الاتجاه التي يصنعها $\mathbf{v}$ مع الاتجاه الموجب لمحور x . فمن الشكل 5.2.5 يمكن كتابة $\mathbf{v}$ على الصورة الإحداثية، أو على صورة توافقٍ خطيٍّ لمتجهَي الوحدة $\mathbf{i}, \mathbf{j}$ كما يأتي:

$\mathbf{v} = \langle a, b \rangle$ — الصورة الإحداثية

$= \langle |\mathbf{v}| \cos\theta, |\mathbf{v}| \sin\theta \rangle$ — عوّض

$= |\mathbf{v}| (\cos\theta)\mathbf{i} + |\mathbf{v}| (\sin\theta)\mathbf{j}$ — توافق خطي من $\mathbf{i}, \mathbf{j}$



الشكل 5.2.5

إرشادات للدراسة

متجه الوحدة

تستنتج من الصورة $\mathbf{v} = \langle |\mathbf{v}| \cos\theta, |\mathbf{v}| \sin\theta \rangle$ أن متجه الوحدة الذي له نفس اتجاه $\mathbf{v}$ يأخذ الصورة

$\mathbf{u} = \langle 1 \cos\theta, 1 \sin\theta \rangle$

$= \langle \cos\theta, \sin\theta \rangle$

مثال 6 إيجاد الصورة الإحداثية

أوجد الصورة الإحداثية للمتجه $\mathbf{v}$ الذي طوله 10 ، وزاوية اتجاهه $120°$ مع الأفقي.

$\mathbf{v} = \langle |\mathbf{v}| \cos\theta, |\mathbf{v}| \sin\theta \rangle$ — الصورة الإحداثية للمتجه $\mathbf{v}$ بدلالة $|\mathbf{v}|, \theta$

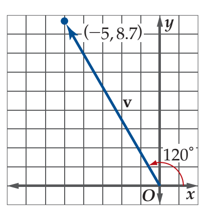
$= \langle 10 \cos 120°, 10 \sin 120° \rangle$ — $|\mathbf{v}| = 10$, $\theta = 120°$

$= \left\langle 10\left(-\frac{1}{2}\right), 10\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) \right\rangle$ — $\cos 120° = -\frac{1}{2}$, $\sin 120° = \frac{\sqrt{3}}{2}$

$= \langle -5, 5\sqrt{3} \rangle$ — بسّط

التحقق مثِّل بيانيًّا: $\mathbf{v} = \langle -5, 5\sqrt{3} \rangle \approx \langle -5, 8.7 \rangle$ ، تجد أن قياس الزاوية التي يصنعها $\mathbf{v}$ مع الاتجاه الموجب لمحور x هي $120°$ كما في الشكل المجاور،

$|\mathbf{v}| = \sqrt{(-5)^2 + (5\sqrt{3})^2} = 10$ ✓



تحقق من فهمك

أوجد الصورة الإحداثية للمتجه $\mathbf{v}$ المُعطى طوله وزاوية اتجاهه مع الأفقي في كلٍّ ممّا يأتي :

(6A $|\mathbf{v}| = 8, \theta = 45°$ $\quad \langle 4\sqrt{2}, 4\sqrt{2} \rangle$

(6B $|\mathbf{v}| = 24, \theta = 210°$ $\quad \langle -12\sqrt{3}, -12 \rangle$

مثالان إضافيان

5 إذا كانت نقطة بداية المتجه DE هي $D(-3, -3)$، ونقطة نهايته $E(2, 6)$ ، فاكتب $\overrightarrow{DE}$ على صورة توافق خطي لمتجهي الوحدة $\mathbf{i}$ ، $\mathbf{j}$. $\quad 5\mathbf{i} + 9\mathbf{j}$

6 أوجد الصورة الإحداثية للمتجه $\mathbf{v}$ الذي طوله 7 ، وزاوية اتجاهه $60°$ مع الأفقي.

$\mathbf{v} = \left\langle \frac{7}{2}, \frac{7\sqrt{3}}{2} \right\rangle$

21 الدرس 2-5 المتجهات في المستوى الإحداثي

من الشكل (5.2.5) تستنتج أنه يمكن إيجاد زاوية اتجاه المتجه $\mathbf{v} = \langle a, b\rangle$ مع الاتجاه الأفقي (الموجب لمحور x)
بحَلّ المعادلة المثلثية: $\tan\theta = \frac{|\mathbf{v}|\sin\theta}{|\mathbf{v}|\cos\theta}$، أو $\tan\theta = \frac{b}{a}$.

مـثال 7 زوايا الاتجاه للمتجهات

أوجد زاوية اتجاه كلٍّ من المتجهات الآتية مع الاتجاه الموجب لمحور x.

a) $\mathbf{p} = 3\mathbf{i} + 7\mathbf{j}$

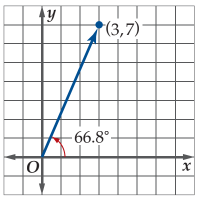
$\tan\theta = \frac{b}{a}$ معادلة زاوية الاتجاه

$\tan\theta = \frac{7}{3}$ $a = 3 , b = 7$

$\theta = \tan^{-1}\frac{7}{3}$ حُل بالنسبة إلى θ

من خلال الصورة الإحداثية للمتجه $x = 3$ ، $y = 7$،
فإن المتجه يقع في الربع الأول، إذن:

$\theta \approx 66.8°$ استعمل الآلة الحاسبة



الشكل 5.2.6

أي أن زاوية اتجاه المتجه **p** هي °66.8 تقريبًا كما في الشكل **5.2.6** .

b) $\mathbf{r} = \langle 4, -5\rangle$

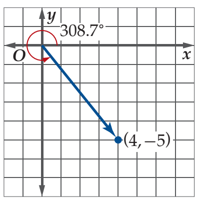
$\tan\theta = \frac{b}{a}$ معادلة زاوية الاتجاه

$\tan\theta = \frac{-5}{4}$ $a = 4 , b = -5$

$\theta = \tan^{-1}\left(-\frac{5}{4}\right)$ حُل بالنسبة إلى θ

من خلال الصورة الإحداثية للمتجه $x = 4 > 0$ ، $y = -5 < 0$،
فإن المتجه يقع في الربع الرابع وبالتالي زاويته

$\theta \approx -51.3°$ استعمل الآلة الحاسبة



الشكل 5.2.7

بما أن **r** يقع في الربع الرابع، كما في الشكل **5.2.7** ، فإن: $\theta \approx 360° - 51.3° = 308.7°$

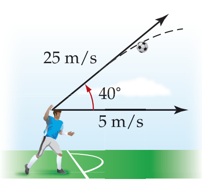
تحقق من فهمك

أوجد زاوية اتجاه كلٍّ من المتجهين الآتيين مع الاتجاه الموجب لمحور x.

7A) $-6\mathbf{i} + 2\mathbf{j}$ 161.6° تقريبًا   **7B)** $\langle -3, -8\rangle$ 249.4° تقريبًا

مثال 8 من واقع الحياة تطبيق العمليات على المتجهات

كرة قدم: يركض حارس مرمى في لعبة كرة القدم للأمام بسرعة 5 m/s ، ليرمي الكرة بسرعة 25 m/s ، بزاوية 40° مع الأفقي. أوجد محصلة السرعة، واتجاه حركة الكرة.



بما أن اللاعب يتحرك للأمام بشكل مستقيم، فإن الصورة الإحداثية لمتجه سرعة اللاعب $\mathbf{v}_1$ هي $\langle 5, 0\rangle$ ، وتكون الصورة الإحداثية لمتجه سرعة الكرة $\mathbf{v}_2$ هي:

$\mathbf{v}_2 = \langle |\mathbf{v}_2|\cos\theta, |\mathbf{v}_2|\sin\theta\rangle$ الصورة الإحداثية للمتجه $\mathbf{v}_2$

$= \langle 25\cos 40°, 25\sin 40°\rangle$ $|\mathbf{v}_2| = 25 , \theta = 40°$

$\approx \langle 19.2, 16.1\rangle$ بسِّط

تنبيه!

لكل قيمة لـ $\tan\theta$ توجد زاويتان مختلفتان، بناءً على العلاقة:
$\tan\theta = \tan(\theta + 180)$
فإذا كانت قيمة $\tan\theta$ موجبة فإن θ زاوية تقع في الربع الأول أو الربع الثالث، وإذا كانت قيمة $\tan\theta$ سالبة، فإن θ زاوية تقع في الربع الثاني أو الرابع، وتكون العلاقة بين الزاويتين هي أن قياس إحداهما عبارة عن قياس الأولى مجموعًا لها 180°.

مثالان إضافيان

7 أوجد زاوية اتجاه كل من المتجهين الآتيين مع المحور x الموجب:

a) $\mathbf{p} = \langle 2, 9\rangle$ 77.5° تقريبًا

b) $\mathbf{r} = -7\mathbf{i} + 2\mathbf{j}$ 164.1° تقريبًا

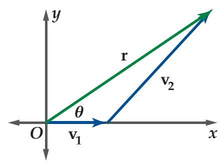
8 **كرة قدم:** يركض حارس مرمى في لعبة كرة القدم للأمام بسرعة 7 m/s ؛ ليرمي الكرة للأمام بسرعة 30 m/s بزاوية 10° مع الأفقي. أوجد محصلة السرعة، واتجاه حركة الكرة؟ 36.9 m/s, 8.1° تقريبًا

تنويع التعليم

ضمن فوق

المتعلمون الحركيون اطلب إلى الطلاب تعليق جسم بحبلين بين مقعدين، واطلب إلى كل واحد منهم رسم شكل يمثل هذا الوضع وتوضيح طريقة إيجاد القوة على كلا الحبلين.

اجمع المتجهين $\mathbf{v_1}$ ، $\mathbf{v_2}$ جبريًّا؛ لتجد متجه محصلة السرعة $\mathbf{r}$.



$\mathbf{r} = \mathbf{v_1} + \mathbf{v_2}$ متجه المحصلة

$= \langle 5, 0\rangle + \langle 19.2, 16.1\rangle$ عوّض

$= \langle 24.2, 16.1\rangle$ اجمع

طول متجه المحصلة هو $|\mathbf{r}| = \sqrt{24.2^2 + 16.1^2} \approx 29.1$. وتكون زاوية اتجاه المحصلة مع الأفقي هي θ حيث:

$\tan\theta = \frac{16.1}{24.2}$ ، $\tan\theta = \frac{b}{a}$ حيث $\langle a, b\rangle = \langle 24.2, 16.1\rangle$

$\theta = \tan^{-1}\frac{16.1}{24.2} \approx 33.6°$ حُل بالنسبة إلى θ

أي أن محصلة سرعة الكرة هي 29.1 m/s تقريبًا، وتصنع زاوية قياسها 33.6° مع الأفقي تقريبًا.

تحقق من فهمك 30.75m/s وتصنع زاوية قياسها 31.6° تقريبًا مع الأفقي

8) **كرة قدم:** أوجد محصلة السرعة، واتجاه الكرة إذا تحرك اللاعب إلى الأمام بسرعة 7 m/s

تدرب وحل المسائل

أوجد الصورة الإحداثية، وطول $\overline{AB}$ ، المُعطاة نقطتا بدايته ونهايته في كلٍّ ممّا يأتي: (المثالان 1, 2) 6–1) انظر الهامش

1) $A(-3, 1), B(4, 5)$

2) $A(2, -7), B(-6, 9)$

3) $A(10, -2), B(3, -5)$

4) $A(-2, 6), B(1, 10)$

5) $A(2.5, -3), B(-4, 1.5)$

6) $A\left(\frac{1}{2}, -9\right), B\left(6, \frac{5}{2}\right)$

إذا كان: $\mathbf{f} = \langle 8,0\rangle, \mathbf{g} = \langle -3, -5\rangle, \mathbf{h} = \langle -6,2\rangle$ ، فأوجد كلًّا مما يأتي: (مثال 3)

7) $4\mathbf{h} - \mathbf{g}$ $\langle -21, 13\rangle$

8) $\mathbf{f} + 2\mathbf{h}$ $\langle -4, 4\rangle$

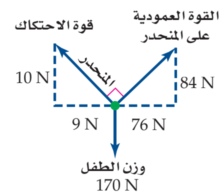
9) $2\mathbf{f} + \mathbf{g} - 3\mathbf{h}$ $\langle 31, -11\rangle$

10) $\mathbf{f} - 2\mathbf{g} - 2\mathbf{h}$ $\langle 26, 6\rangle$

11) $\mathbf{h} - 4\mathbf{f} + 5\mathbf{g}$ $\langle -53, -23\rangle$

12) $4\mathbf{g} - 3\mathbf{f} + \mathbf{h}$ $\langle -42, -18\rangle$

13) **فيزياء:** يُستعمل مخطط القوى؛ لتوضيح أثر القوى المختلفة في جسم، والمخطط أدناه يمثل القوى التي تؤثر في طفل يتزلق على منحدر أسفل. (مثال 3)



a) اعتبر أن النقطة الخضراء التي تُمثّل الطفل هي نقطة الأصل، واكتب كل متجه على الصورة الإحداثية. a,b) انظر الهامش

b) أوجد الصورة الإحداثية لمتجه المحصلة الذي يمثل القوة التي تسبب انزلاق الطفل إلى أسفل.

19-14) انظر الهامش

أوجد متجه وحدة له اتجاه المتجه $\mathbf{v}$ نفسه في كلٍّ ممّا يأتي: (مثال 4)

14) $\mathbf{v} = \langle -2, 7\rangle$

15) $\mathbf{v} = \langle 9, -3\rangle$

16) $\mathbf{v} = \langle -8, -5\rangle$

17) $\mathbf{v} = \langle 6, 3\rangle$

18) $\mathbf{v} = \langle -1, -5\rangle$

19) $\mathbf{v} = \langle 1, 7\rangle$

3 التدريب

التقويم التكويني

استعمل الأسئلة 35-1 للتأكد من فهم الطلاب.

ثم استعمل الجدول أسفل هذه الصفحة؛ لتعيين الواجبات المنزلية للطلاب حسب مستوياتهم.

إجابات:

1) $\langle 7, 4\rangle, \sqrt{65} \approx 8.1$

2) $\langle -8, 16\rangle, \sqrt{320} \approx 17.9$

3) $\langle -7, -3\rangle, \sqrt{58} \approx 7.6$

4) $\langle 3, 4\rangle, 5$

5) $\langle -6.5, 4.5\rangle, \sqrt{62.5} \approx 7.9$

6) $\left\langle \frac{11}{2}, \frac{23}{2}\right\rangle, \sqrt{\frac{325}{2}} \approx 12.7$

13a) $n = <76, 84>, f = <-9, 10>,$ $w = <0, -170>$

13b) مجموع مركبات القوى في الاتجاه الأفقي:

$76N - 9N = 67N$

مجموع مركبات القوى في الاتجاه الرأسي:

$48N + 10N - 170N = -67N$

إذن الصورة الإحداثية لمتجه المحصلة $<67, -76>$

14) $\mathbf{u} = \left\langle -\frac{2\sqrt{53}}{53}, \frac{7\sqrt{53}}{53}\right\rangle$

15) $\mathbf{u} = \left\langle \frac{3\sqrt{10}}{10}, -\frac{\sqrt{10}}{10}\right\rangle$

16) $\mathbf{u} = \left\langle -\frac{8\sqrt{89}}{89}, -\frac{5\sqrt{89}}{89}\right\rangle$

17) $\mathbf{u} = \left\langle \frac{2\sqrt{5}}{5}, \frac{\sqrt{5}}{5}\right\rangle$

18) $\mathbf{u} = \left\langle -\frac{\sqrt{26}}{26}, -\frac{5\sqrt{26}}{26}\right\rangle$

19) $\mathbf{u} = \left\langle \frac{\sqrt{2}}{10}, \frac{7\sqrt{2}}{10}\right\rangle$

تنبيه!

أخطاء شائعة في السؤال 36، لاحظ الطلاب الذين لا يرسمون رسمًا صحيحًا يعبّر عن الموقف. واقترح عليهم كتابة الاتجاهات الشمال، الجنوب، الشرق، الغرب على رسومهم.

تنويع الواجبات المنزلية

المستوى	الأسئلة
دون دون المتوسط	35–1، 44، 45، 57–47
ضمن ضمن المتوسط	36–1 فردي، 43، 44، 57–47
فوق فوق المتوسط	57–36

اكتب $\overrightarrow{DE}$، المُعطاة نقطتا بدايته ونهايته في كلٍّ ممّا يأتي على صورة توافق خطّي لمتجهَي الوحدة $\mathbf{i}, \mathbf{j}$: (مثال 5) **انظر الهامش (20-25**

20) $D(4, -1), E(5, -7)$

21) $D(9, -6), E(-7, 2)$

22) $D(3, 11), E(-2, -8)$

23) $D(9.5, 1), E(0, -7.3)$

24) $D(-4, -6), E(9, 5)$

25) $D\left(\frac{1}{8}, 3\right), E\left(-4, \frac{2}{7}\right)$

أوجد الصورة الإحداثية للمتجه $\mathbf{v}$، المُعطى طوله وزاوية اتجاهه مع الاتجاه الموجب لمحور x في كلٍّ ممّا يأتي: (مثال 6) **انظر الهامش (26-29**

26) $|\mathbf{v}| = 12, \theta = 60°$

27) $|\mathbf{v}| = 16, \theta = 330°$

28) $|\mathbf{v}| = 4, \theta = 135°$

29) $|\mathbf{v}| = 15, \theta = 125°$

أوجد زاوية اتجاه كلٍّ من المتجهات الآتية مع الاتجاه الموجب لمحور x: (مثال 7)

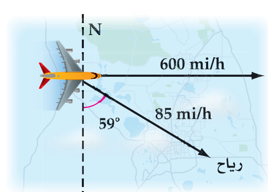
30) $3\mathbf{i} + 6\mathbf{j}$ **63.4° تقريبًا**

31) $-2\mathbf{i} + 5\mathbf{j}$ **111.8° تقريبًا**

32) $-4\mathbf{i} - 3\mathbf{j}$ **216.9° تقريبًا**

33) $\langle -5, 9 \rangle$ **119.1° تقريبًا**

34) **ملاحة جوية:** تطير طائرة جهة الشرق بسرعةٍ مقدارها 600 mi/h، وتهب الرياح بسرعةٍ مقدارها 85 mi/h باتجاه S59°E. (مثال 8)



a) أوجد محصِّلة سرعة الطائرة. **674 mi/h**

b) أوجد زاوية اتجاه مسار الطائرة. **S86°E**

35) **تجديف:** يجدف شخص بقاربه في نهر باتجاه عمودي على الشاطئ بسرعة 5 mi/h، ويؤثّر فيه تيار مائي باتجاه مجرى النهر سرعته 3 mi/h.

a) أوجد السرعة التي يتحرك بها القارب إلى أقرب جزء من عشرة. **5.8 mi/h تقريبًا**

b) أوجد زاوية اتجاه حركة القارب بالنسبة للشاطئ إلى أقرب درجة. **59° تقريبًا**

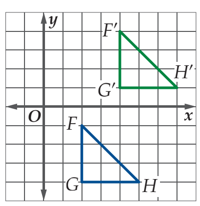
36) **ملاحة جوية:** تطير طائرة بسرعة مقدارها 480 mi/h بالاتجاه N82°E، وبسبب الرياح، فإن محصلة سرعة الطائرة بالنسبة لسطح الأرض أصبحت 518 mi/h باتجاه N79°E. ارسم شكلًا يُمثّل هذا الموقف. **انظر الهامش**

بيّن ما إذا كان $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD}$ المُعطاة نقطتا البداية والنهاية لكلٍّ منهما فيما يأتي متكافئين أو لا، وإذا كانا متكافئين، فأثبت أن $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$، وإذا كانا غير ذلك، فاذكر السبب. **انظر الهامش (37, 38**

37) $A(3, 5), B(6, 9), C(-4, -4), D(-2, 0)$

38) $A(1, -3), B(0, -10), C(11, 8), D(10, 1)$

39) **انسحاب:** يمكنك سحب شكل هندسي باستعمال المتجه $\langle a, b \rangle$؛ وذلك بإضافة a إلى الإحداثي x، وإضافة b إلى الإحداثي y.



a) حدّد المتجه الذي يُستعمل لسحب $\triangle FGH$ إلى $\triangle F'G'H'$ في الشكل المجاور. **$\langle 2, 5 \rangle$**

b) إذا استعمل المتجه $\langle -3, -6 \rangle$ لسحب $\triangle F'G'H'$، فمثّل بيانيًا كلًّا من $\triangle F'G'H'$، وصورته $\triangle F''G''H''$. **انظر الهامش**

c) حدّد المتجه الذي يُستعمل لسحب $\triangle FGH$ إلى $\triangle F''G''H''$. **$\langle -1, -1 \rangle$**

أوجد نقطة نهاية ممكنة لكل متجه مما يأتي، إذا علِمتُ طوله ونقطة بدايته:

40) $\sqrt{37}, (-1, 4)$ **إجابة ممكنة: $(0, -2)$**

41) $10, (-3, -7)$ **إجابة ممكنة: $(5, -1)$**

4 التقويم

تعلّم سابق اطلب إلى الطلاب توضيح الربط بين التمثيل الهندسي للمتجهات في درس اليوم، والتعبير عن المتجهات بالصورة الجبرية.

التقويم التكويني

تحقق من فهم الطلاب الدرسين 1-5, 2-5 بإعطائهم:

الاختبار القصير 1، ص (11)

إجابات:

20) $\mathbf{i} - 6\mathbf{j}$

21) $-16\mathbf{i} + 8\mathbf{j}$

22) $-5\mathbf{i} - 19\mathbf{j}$

23) $-9.5\mathbf{i} - 8.3\mathbf{j}$

24) $13\mathbf{i} + 11\mathbf{j}$

25) $-\frac{33}{8}\mathbf{i} - \frac{19}{7}\mathbf{j}$

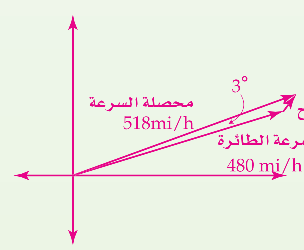
26) $\langle 6, 6\sqrt{3} \rangle$

27) $\langle 8\sqrt{3}, -8 \rangle$

28) $\langle -2\sqrt{2}, 2\sqrt{2} \rangle$

29) $\langle -8.6, 12.3 \rangle$

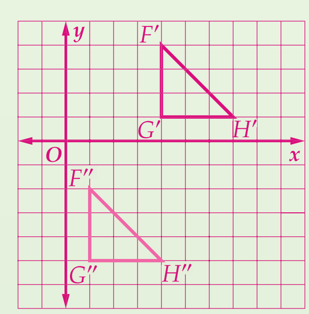
36a)



37) إجابة ممكنة: يختلف المقدار والاتجاه في كلٍّ من المتجهين؛ لذا فالمتجهان غير متكافئين.

38) نعم؛ إجابة ممكنة: للمتجهين كلٍّ من المقدار والاتجاه نفسه؛ لذا فهما متكافئان.

39b)

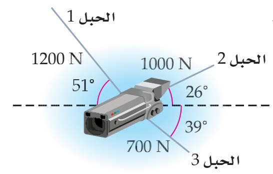


تنويع التعليم

فوق

توسع اطلب إلى الطلاب حل المسألة الآتية: تعاون مزارع وجاره على إزالة صخرة كبيرة من الحقل. وذلك بسحب الصخرة بواسطة حبلين مثبّتين بها، الزاوية بينهما 35°. إذا كان المزارع يسحب الحبل بقوةٍ مقدارها 105 N، وجاره يسحب الحبل الآخر بقوةٍ مقدارها 95 N، فأوجد مقدار القوة المحصلة المؤثرة في الصخرة واتجاهها (بإهمال قوة الاحتكاك). **190.8 N بزاوية قياسها 16.6° مع القوة 105 N.**

42) آلة تصوير: عُلِّقت آلة تصوير معدة لمتابعة حدث رياضي بثلاثة حبال كما في الشكل المجاور، إذا كان الشد في كل حبل يمثّل متجهًا، فأجب عما يأتي:



$\langle -755, 933\rangle; \langle 899, 438\rangle; \langle 544, -441\rangle$

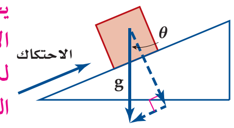
a) أوجد الصورة الإحداثية لكل متجه لأقرب عدد صحيح.

b) أوجد الصورة الإحداثية لمتجه المحصلة المؤثر على آلة التصوير. $\langle 688, 930\rangle$

c) أوجد مقدار واتجاه محصلة القوى. 1157 N; 54°

43) قوة: تؤثّر قوة الجاذبية **g** وقوة الاحتكاك على صندوق في وضع السكون موضوع على سطح مائل، ويبيّن الشكل أدناه المركبتين المتعامدتين للجاذبية الأرضية (الموازية للسطح والعمودية عليه). ما الوصف الصحيح لقوة الاحتكاك ليكون هذا الوضع ممكنًا؟

يجب أن تكون قوة الاحتكاك مساوية لمركبة الجاذبية الموازية للسطح المائل.



مسائل مهارات التفكير العليا

44) تبرير: إذا كان **a** , **b** متجهين متوازيين، فعبِّر عن كلٍّ من المتجهين بالصورة الإحداثية مبيِّنًا العلاقة بين **a** , **b**. انظر الهامش

45) تبرير: إذا أُعطيت طول متجه، ونقطة بدايته، فصف المحل الهندسي للنقاط التي يمكن أن تُمثِّل نقطة نهايته. (إرشاد: المحل الهندسي هو مجموعة من النقاط تحقق شرطًا معيّنًا). انظر الهامش

46) تحدٍّ: إذا كانت زاوية اتجاه $\langle x, y\rangle$ هي $(4y)°$، فأوجد قيمة x بدلالة y. $x = \frac{y}{\tan 4y}$

برهان: إذا كان: $\mathbf{a} = \langle x_1, y_1\rangle, \mathbf{b} = \langle x_2, y_2\rangle, \mathbf{c} = \langle x_3, y_3\rangle$، فأثبت الخصائص الآتية: 47-50 انظر ملحق الإجابات

47) $\mathbf{a} + \mathbf{b} = \mathbf{b} + \mathbf{a}$

48) $(\mathbf{a} + \mathbf{b}) + \mathbf{c} = \mathbf{a} + (\mathbf{b} + \mathbf{c})$

49) $k(\mathbf{a} + \mathbf{b}) = k\mathbf{a} + k\mathbf{b}$، حيث k عدد حقيقي.

50) $|k\mathbf{a}| = |k|\,|\mathbf{a}|$، حيث k عدد حقيقي.

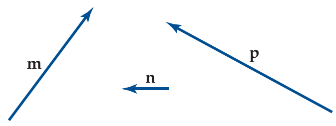
مراجعة تراكمية

51) دُمى أطفال: يقوم محمد بسحب دميته بقوة مقدارها 1.5 N بواسطة نابض مثبَّت بها. (الدرس 5-1)

a) إذا كان النابض يصنع زاوية 52° مع سطح الأرض، فأوجد مقدار كلٍّ من المركبتين الرأسية والأفقية للقوة. ≈0.92 N, ≈1.18 N

b) إذا رفع محمد النابض، وأصبح يصنع زاوية قياسها 78° مع سطح الأرض، فأوجد مقدار كلٍّ من المركبتين الأفقية والرأسية للقوة. ≈0.31 N, ≈1.47 N

استعمل مجموعة المتجهات الآتية لرسم متجه يمثّل كلًّا مما يأتي: (الدرس 5-1) 52-55 انظر ملحق الإجابات



52) $\mathbf{n} - \frac{3}{4}\mathbf{m}$

53) $\frac{1}{2}\mathbf{p} + 3\mathbf{n}$

54) $\mathbf{m} - 3\mathbf{n}$

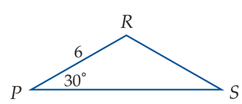
55) $\mathbf{p} + 2\mathbf{n} - \mathbf{m}$

تدريب على اختبار

56) ما طول المتجه الذي نقطة بدايته $(2, 5)$، ونقطة نهايته $(-3, -4)$؟ D

A $\sqrt{2}$ B $\sqrt{26}$ C $\sqrt{82}$ D $\sqrt{106}$

57) ما مساحة المثلث المجاور، إذا علمت أن $PR = RS$؟ B



A $9\sqrt{2}$ B $9\sqrt{3}$ C $18\sqrt{2}$ D $18\sqrt{3}$

إجابة:

44) إجابة ممكنة: $\mathbf{a} = x\,\mathbf{i} + y\,\mathbf{j}$، $\mathbf{b} = kx\,\mathbf{i} + ky\,\mathbf{j}$، حيث k عدد حقيقي لا يساوي الصفر.

45) إجابة ممكنة: إذا كانت نقطة بداية المتجه هي (a, b)، وطول المتجه هو m، فإن أي نقطة (x, y) تحقق المعادلة: $m = \sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2}$، يمكن أن تكون نقطة نهاية للمتجه. وهي دائرة مركزها النقطة (a, b)، وطول نصف قطرها m.

5-3 ملاحظات الدرس

5-3 الضرب الداخلي
Dot Product

فيما سبق:
درست عمليتي الجمع والضرب في عدد حقيقي على المتجهات هندسيًّا وجبريًّا. (الدرس 2–5)

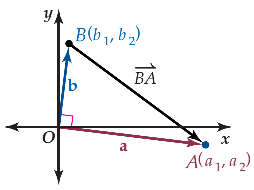
والآن:
- أجدُ الضرب الداخلي لمتجهين، وأستعمله في إيجاد الزاوية بينهما.

المفردات:
الضرب الداخلي
dot product
المتجهان المتعامدان
Orthogonal vectors
الشغل
work

www.obeikaneducation.com

لماذا؟
تحمل كلمة الشغل معانٍ متعددة في الحياة اليومية، إلا أن لها معنى محددًا في الفيزياء، وهو مقدار القوة المؤثرة في جسم مضروبة في المسافة، التي يتحركها الجسم في اتجاه القوة. ومثال ذلك: الشغل المبذول لدفع سيارة مسافة محددة. ويمكن حساب هذا الشغل باستعمال عملية على المتجهات تسمى الضرب الداخلي.

الضرب الداخلي تعلمت في الدرس 2-5 عمليتي الجمع والضرب في عدد حقيقي على المتجهات. وفي هذا الدرس سوف تتعلم عملية ثالثة على المتجهات. إذا كان لديك المتجهان المتعامدان $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ في الوضع القياسي، وكان $\overrightarrow{BA}$ المتجه الواصل بين نقطتي نهاية المتجهين كما في الشكل المجاور. فإنك تعلم من نظرية فيثاغورس أن $|\overrightarrow{BA}|^2 = |\mathbf{a}|^2 + |\mathbf{b}|^2$.



وباستعمال مفهوم طول المتجه يمكنك إيجاد $|\overrightarrow{BA}|^2$.

$$|\overrightarrow{BA}| = \sqrt{(a_1 - b_1)^2 + (a_2 - b_2)^2}$$ تعريف طول متجه

$$|\overrightarrow{BA}|^2 = (a_1 - b_1)^2 + (a_2 - b_2)^2$$ ربِّع الطرفين

$$|\overrightarrow{BA}|^2 = a_1^2 - 2a_1b_1 + b_1^2 + a_2^2 - 2a_2b_2 + b_2^2$$ فُك الأقواس

$$|\overrightarrow{BA}|^2 = (a_1^2 + a_2^2) + (b_1^2 + b_2^2) - 2(a_1b_1 + a_2b_2)$$ جمِّع الحدود المربعة

$$|\overrightarrow{BA}|^2 = |\mathbf{a}|^2 + |\mathbf{b}|^2 - 2(a_1b_1 + a_2b_2)$$ $|\mathbf{a}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2}\ , |\mathbf{a}|^2 = a_1^2 + a_2^2\ ,$ $|\mathbf{b}| = \sqrt{b_1^2 + b_2^2}\ , |\mathbf{b}|^2 = b_1^2 + b_2^2$

لاحظ أن العبارتين $|\mathbf{a}|^2 + |\mathbf{b}|^2$ ، $|\mathbf{a}|^2 + |\mathbf{b}|^2 - 2(a_1b_1 + a_2b_2)$ متكافئتان، إذا وفقط إذا كان $a_1b_1 + a_2b_2 = 0$. ويُسمَّى التعبير $a_1b_1 + a_2b_2$ **الضرب الداخلي** للمتجهين $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ ، ويُرمز له بالرمز $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}$ ، ويُقرأ الضرب الداخلي للمتجهين a, b ، أو يُقرأ اختصارًا $\mathbf{a}$ dot $\mathbf{b}$.

> **مفهوم أساسي** — **الضرب الداخلي لمتجهين في المستوى الإحداثي**
>
> يُعرَّف الضرب الداخلي للمتجهين $\mathbf{a} = \langle a_1, a_2 \rangle , \mathbf{b} = \langle b_1, b_2 \rangle$ كالآتي :
>
> $$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = a_1b_1 + a_2b_2$$

قراءة الرياضيات
الضرب القياسي يسمى الضرب الداخلي في بعض الأحيان بالضرب القياسي.

لاحظ أنه خلافًا لعمليتي الجمع والضرب في عدد حقيقي على المتجهات، فإن حاصل الضرب الداخلي لمتجهين يكون عددًا وليس متجهًا. ويتعامد متجهان غير صفريين، إذا وفقط إذا كان حاصل ضربهما الداخلي صفرًا. ويقال للمتجهين اللّذين حاصل ضربهما الداخلي صفر: **متجهان متعامدان** .

> **مفهوم أساسي** — **المتجهان المتعامدان**
>
> يكون المتجهان غير الصفريين $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ متعامدين، إذا وفقط إذا كان $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = 0$.

على الرغم من أن حاصل الضرب الداخلي للمتجه الصفري في أي متجه آخر يساوي الصفر، أي أن : $\langle 0, 0 \rangle \cdot \langle a_1, a_2 \rangle = 0a_1 + 0a_2 = 0$ ، إلا أن المتجه الصفري لا يعامد أي متجه آخر؛ لأنه ليس له طول أو اتجاه.

1 التركيز

الترابط الرأسي

ما قبل الدرس 5-3
إيجاد مقادير المتجهات وإجراء العمليات عليها جبريًّا.

الدرس 5-3
إيجاد الضرب الداخلي لمتجهَين، واستعماله في إيجاد الزاوية بينهما.

ما بعد الدرس 5-3
استعمال المتجهات في الفضاء الثلاثي الأبعاد.

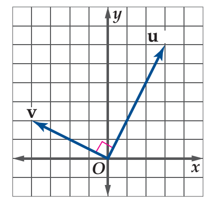
2 التدريس

أسئلة التعزيز
اطلب إلى الطلاب قراءة فقرة "لماذا؟".

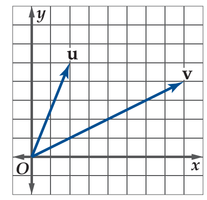
واسأل:
- انظر إلى الصورة، وبيّن كيف يعرف الأشخاص الذين يدفعون السيارة أنهم يبذلون شغلًا؟ إذا تحركت السيارة.
- لماذا يُعدُّ الشغل تحويلًا للطاقة؟ عند بذل شغل على جسم ما، يحدث تحويل للطاقة على الجسم مما يسبب حركته.
- إذا حاولت المجموعة نفسها دفع السيارة بقوة أكبر، وتحركت السيارة مسافة أكبر، فهل بذل الأشخاص شغلًا أكبر أم أصغر؟ بذلوا شغلًا أكبر.
- هل وضع كتاب على ذراع شخص من دون حركة يُعطِي شغلًا؟ لا ؛ لأن الكتاب لم يتحرك.

مصادر الدرس 5-3

المصدر	دون المتوسط	ضمن المتوسط	فوق المتوسط
دليل المعلم	• تنويع التعليم ص (29)	• تنويع التعليم ص (31)	
كتاب التمارين	• ص (6)	• ص (6)	• ص (6)
مصادر المعلم للأنشطة الصفية	• تدريبات إعادة التعليم ص (14, 15) • تدريبات حل المسألة، ص (16)	• تدريبات حل المسألة، ص (16) • التدريبات الإثرائية، ص (17)	• تدريبات حل المسألة، ص (16) • التدريبات الإثرائية، ص (17)



الشكل 5.3.1



الشكل 5.3.2

مثال 1 استعمال الضرب الداخلي في التحقق من تعامد متجهين

أوجد الضرب الداخلي للمتجهين $\mathbf{u}, \mathbf{v}$ ، ثم تحقق مما إذا كانا متعامدين .

a) $\mathbf{u} = \langle 3, 6\rangle, \mathbf{v} = \langle -4, 2\rangle$

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = 3(-4) + 6(2)$$
$$= 0$$

بما أن $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = 0$ ، فإن $\mathbf{u}, \mathbf{v}$ متعامدان كما هو موضَّح في الشكل 5.3.1 .

b) $\mathbf{u} = \langle 2, 5\rangle, \mathbf{v} = \langle 8, 4\rangle$

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = 2(8) + 5(4)$$
$$= 36$$

بما أن $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} \neq 0$ ،فإن $\mathbf{u}, \mathbf{v}$ غير متعامدين كما هو موضَّح في الشكل 5.3.2 .

تحقق من فهمك

أوجد الضرب الداخلي للمتجهين $\mathbf{u}, \mathbf{v}$، ثم تحقق مما إذا كانا متعامدين .

1A) $\mathbf{u} = \langle 3, -2\rangle, \mathbf{v} = \langle -5, 1\rangle$ -17 ؛ ليسا متعامدين

1B) $\mathbf{u} = \langle -2, -3\rangle, \mathbf{v} = \langle 9, -6\rangle$ 0؛ متعامدان

يحقق الضرب الداخلي الخصائص الآتية :

نظريَّة خصائص الضرب الداخلي

إذا كانت $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}$ متجهات، وكان k عددًا حقيقيًّا، فإن الخصائص الآتية صحيحة:

الخاصية الإبدالية	$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = \mathbf{v} \cdot \mathbf{u}$
خاصية التوزيع	$\mathbf{u} \cdot (\mathbf{v} + \mathbf{w}) = \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} + \mathbf{u} \cdot \mathbf{w}$
خاصية الضرب في عدد حقيقي	$k(\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}) = k\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = \mathbf{u} \cdot k\mathbf{v}$
خاصية الضرب الداخلي في المتجه الصفري	$\mathbf{0} \cdot \mathbf{u} = 0$
العلاقة بين الضرب الداخلي وطول المتجه	$\mathbf{u} \cdot \mathbf{u} = \lvert\mathbf{u}\rvert^2$

البرهان

إثبات أن: $\mathbf{u} \cdot \mathbf{u} = |\mathbf{u}|^2$

افترض أن: $\mathbf{u} = \langle u_1, u_2\rangle$

$\mathbf{u} \cdot \mathbf{u} = u_1^2 + u_2^2$ الضرب الداخلي

$= \left(\sqrt{u_1^2 + u_2^2}\right)^2$ اكتب على صورة مربع جذر $(u_1^2 + u_2^2)$

$= |\mathbf{u}|^2$ $\sqrt{u_1^2 + u_2^2} = |\mathbf{u}|$

ستبرهن الخصائص الثلاث الأولى في الأسئلة 37–35

مثال 2 استعمال الضرب الداخلي لإيجاد طول متجه

استعمل الضرب الداخلي؛ لإيجاد طول $\mathbf{a} = \langle -5, 12\rangle$.

بما أن: $|\mathbf{a}|^2 = \mathbf{a} \cdot \mathbf{a}$ ، فإن: $|\mathbf{a}| = \sqrt{\mathbf{a} \cdot \mathbf{a}}$.

$|\langle -5, 12\rangle| = \sqrt{\langle -5, 12\rangle \cdot \langle -5, 12\rangle}$ $\mathbf{a} = \langle -5, 12\rangle$

$= \sqrt{(-5)^2 + 12^2} = 13$ بسّط

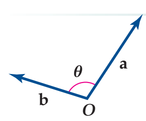
تحقق من فهمك

استعمل الضرب الداخلي؛ لإيجاد طول كلٍّ من المتجهات الآتية :

2A) $\mathbf{b} = \langle 12, 16\rangle$ 20

2B) $\mathbf{c} = \langle -1, -7\rangle$ $5\sqrt{2} \approx 7.07$

الزاوية θ بين أي متجهين غير صفريين $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ هي الزاوية بين هذين المتجهين، عندما يكونان في وضع قياسي كما في الشكل المجاور، حيث إن: $0 \le \theta \le \pi$ ، أو $0° \le \theta \le 180°$ ، ويمكن استعمال الضرب الداخلي؛ لإيجاد قياس الزاوية بين متجهين غير صفريين.



الضرب الداخلي

المثال 1 يُبيّن كيفية إيجاد الضرب الداخلي لمتجهين، والتحقق من كونهما متعامدين.

المثال 2 يُبيّن كيفية إيجاد طول متجه باستعمال الضرب الداخلي.

المثال 3 يُبيّن كيفية إيجاد الزاوية بين متجهين باستعمال الضرب الداخلي.

التقويم التكويني

استعمل تدريبات "تحقق من فهمك" بعد كل مثال؛ للتحقق من مدى فهم الطلاب المفاهيم.

مثالان إضافيان

1 أوجد الضرب الداخلي للمتجهين $\mathbf{u}, \mathbf{v}$ في كلٍّ مما يأتي، ثم تحقق مما إذا كانا متعامدين:

a) $\mathbf{u} = \langle -3, 4\rangle, \mathbf{v} = \langle 3, 6\rangle$.

15، غير متعامدين .

b) $\mathbf{u} = \langle 2, 7\rangle, \mathbf{v} = \langle -14, 4\rangle$.

0، متعامدين.

2 استعمل الضرب الداخلي؛ لإيجاد طول $\mathbf{a} = \langle -6, 5\rangle$.

$\sqrt{61} \approx 7.81$

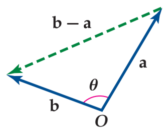
إرشادات للمعلم الجديد

الضرب الداخلي أعطِ مثالًا على كلٍّ من جمع متجهين، وضرب متجه في عدد والضرب الداخلي لمتجهين، ثم اسأل الطلاب عن الفرق بين إجابة الضرب الداخلي والإجابات الأخرى، وعليهم ملاحظة أن ناتج الضرب الداخلي عدد، وليس متجهًا.

مفهوم أساسي الزاوية بين متجهين

إذا كانت θ هي الزاوية بين متجهين غير صفريين $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ ، فإن:

$$\cos\theta = \frac{\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}}{|\mathbf{a}|\,|\mathbf{b}|}$$



البرهان

إذا كان: $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{b}-\mathbf{a}$ أضلاع مثلث كما في الشكل أعلاه ، فإن:

$$|\mathbf{a}|^2 + |\mathbf{b}|^2 - 2\,|\mathbf{a}|\,|\mathbf{b}|\cos\theta = |\mathbf{b}-\mathbf{a}|^2$$ قانون جيوب التمام

$$|\mathbf{a}|^2 + |\mathbf{b}|^2 - 2\,|\mathbf{a}|\,|\mathbf{b}|\cos\theta = (\mathbf{b}-\mathbf{a})\cdot(\mathbf{b}-\mathbf{a})$$ $|\mathbf{u}|^2 = \mathbf{u}\cdot\mathbf{u}$

$$|\mathbf{a}|^2 + |\mathbf{b}|^2 - 2\,|\mathbf{a}|\,|\mathbf{b}|\cos\theta = \mathbf{b}\cdot\mathbf{b} - \mathbf{b}\cdot\mathbf{a} - \mathbf{a}\cdot\mathbf{b} + \mathbf{a}\cdot\mathbf{a}$$ خاصية التوزيع للضرب الداخلي

$$|\mathbf{a}|^2 + |\mathbf{b}|^2 - 2\,|\mathbf{a}|\,|\mathbf{b}|\cos\theta = |\mathbf{b}|^2 - 2\mathbf{a}\cdot\mathbf{b} + |\mathbf{a}|^2$$ $\mathbf{u}\cdot\mathbf{u} = |\mathbf{u}|^2$

$$-2\,|\mathbf{a}|\,|\mathbf{b}|\cos\theta = -2\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}$$ بطرح $|\mathbf{a}|^2 + |\mathbf{b}|^2$ من الطرفين

$$\cos\theta = \frac{\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}}{|\mathbf{a}|\,|\mathbf{b}|}$$ بقسمة الطرفين على $-2|\mathbf{a}|\,|\mathbf{b}|$

إرشادات للدراسة

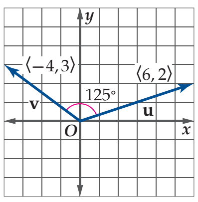
المتجهات المتعامدة والمتجهات المتوازية

يقال لمتجهين: إنهما متعامدان، إذا كانت الزاوية بينهما $90°$. ويقال لمتجهين أنهما متوازيان، إذا كانت الزاوية بينهما $0°$ أو $180°$.

مثال 3 إيجاد قياس الزاوية بين متجهين

أوجد قياس الزاوية θ بين المتجهين $\mathbf{u}, \mathbf{v}$ في كلٍّ مما يأتي:

a) $\mathbf{u} = \langle 6, 2\rangle , \mathbf{v} = \langle -4, 3\rangle$



$$\cos\theta = \frac{\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}}{|\mathbf{u}|\,|\mathbf{v}|}$$ الزاوية بين متجهين

$$\cos\theta = \frac{\langle 6, 2\rangle \cdot \langle -4, 3\rangle}{|\langle 6, 2\rangle|\,|\langle -4, 3\rangle|}$$ $\mathbf{u} = \langle 6, 2\rangle , \mathbf{v} = \langle -4, 3\rangle$

$$\cos\theta = \frac{-24+6}{\sqrt{40}\,\sqrt{25}}$$ الضرب الداخلي لمتجهين، طول المتجه

$$\cos\theta = \frac{-18}{10\sqrt{10}}$$ بسّط

$$\theta = \cos^{-1}\frac{-18}{10\sqrt{10}} \approx 125°$$ معكوس جيب التمام

أي أن قياس الزاوية بين $\mathbf{u}, \mathbf{v}$ هو $125°$ تقريبًا، كما في الشكل أعلاه.

b) $\mathbf{u} = \langle 3, 1\rangle , \mathbf{v} = \langle 3, -3\rangle$

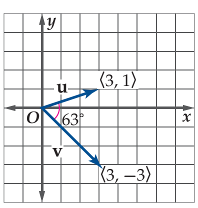
$$\cos\theta = \frac{\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}}{|\mathbf{u}|\,|\mathbf{v}|}$$ الزاوية بين متجهين

$$\cos\theta = \frac{\langle 3, 1\rangle \cdot \langle 3, -3\rangle}{|\langle 3, 1\rangle|\,|\langle 3, -3\rangle|}$$ $\mathbf{u} = \langle 3, 1\rangle , \mathbf{v} = \langle 3, -3\rangle$

$$\cos\theta = \frac{9+(-3)}{\sqrt{10}\,\sqrt{18}}$$ الضرب الداخلي لمتجهين، طول المتجه

$$\cos\theta = \frac{1}{\sqrt{5}}$$ بسّط

$$\theta = \cos^{-1}\frac{1}{\sqrt{5}} \approx 63°$$ معكوس جيب التمام



أي أن قياس الزاوية بين $\mathbf{u}, \mathbf{v}$ هو $63°$ تقريبًا، كما في الشكل المجاور.

مثال إضافي

3 أوجد قياس الزاوية θ بين المتجهين $\mathbf{u}$ ، $\mathbf{v}$ في كلٍّ مما يأتي:

a) $\mathbf{u} = \langle -3, -5\rangle$, $\mathbf{v} = \langle 2, -3\rangle$ $64.7°$ تقريبًا

b) $\mathbf{u} = \langle 1, -4\rangle$, $\mathbf{v} = \langle 2, 6\rangle$ $147.5°$ تقريبًا

التعليم باستعمال التقنيات

الكاميرا التوثيقية اختر مجموعة من الطلاب لحل بعض المسائل، وشرح طريقة استعمال معكوس دالة جيب التمام؛ لإيجاد الزاوية بين متجهين، ووثّق هذا الشرح باستعمال الكاميرا.

المحتوى الرياضي

المتجه الصفري:

- ناتج الضرب الداخلي للمتجه الصفري $\langle 0, 0\rangle$، وأيِّ متجهٍ آخر يساوي 0.
- ناتج جمع أيِّ متجهٍ مع المتجه الصفري يُعطي المتجه نفسه.
- المتجه الصفري هو العنصر المحايد لعملية جمع المتجهات.

إرشادات للمعلم الجديد

صورة أخرى للضرب الداخلي تقود قاعدة الزاوية بين متجهين إلى صورةٍ بديلةٍ للضرب الداخلي لمتجهين .

$$\mathbf{a}\cdot\mathbf{b} = |\mathbf{a}|\,|\mathbf{b}|\cos\theta$$

ويمكن استعمال هذه الصورة؛ لحساب الضرب الداخلي للمتجهين $\mathbf{a}$ و $\mathbf{b}$ ، عند معرفة طول كلٍّ من المتجهين والزاوية بينهما.

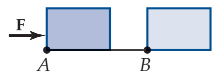
تحقق من فهمك

أوجد قياس الزاوية θ بين المتجهين $\mathbf{u}, \mathbf{v}$ في كلٍّ مما يأتي:

(3A $\mathbf{u} = \langle -5, -2 \rangle, \mathbf{v} = \langle 4, 4 \rangle$ **$156.8°$**

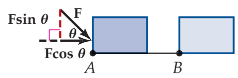
(3B $\mathbf{u} = \langle 9, 5 \rangle, \mathbf{v} = \langle -6, 7 \rangle$ **$101.5°$**

من التطبيقات على الضرب الداخلي للمتجهات، حساب الشغل الناتج عن قوة، فإذا كانت $\mathbf{F}$ قوةً مؤثرةً في جسم لتحريكه من النقطة A إلى B كما في الشكل أدناه، وكانت $\mathbf{F}$ موازيةً لـ $\overrightarrow{AB}$ ، فإن **الشغل** W الناتج عن $\mathbf{F}$ يساوي مقدار القوة $\mathbf{F}$ مضروبًا في المسافة من A إلى B ، أو $W = |\mathbf{F}||\overrightarrow{AB}|$.



ولحساب الشغل الناتج عن قوة ثابتة $\mathbf{F}$ ، بأي اتجاه لتحريك جسم من النقطة A إلى B ، كما في الشكل المجاور، يمكنك استعمال الصيغة:

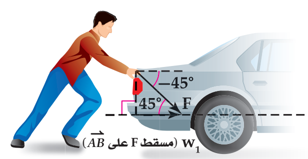
$$W = \mathbf{F} \cdot \overrightarrow{AB}$$



أي أنه يمكن حساب هذا الشغل بإيجاد الضرب الداخلي بين القوة الثابتة $\mathbf{F}$ ، والمسافة المتجهة $\overrightarrow{AB}$ بعد كتابتهما في الصورة الإحداثية.

مثال 4 من واقع الحياة — حساب الشغل

سيارة: يدفع شخص سيارةً بقوةٍ ثابتة مقدارها 120 N بزاوية 45° كما في الشكل المجاور، أوجد الشغل المبذول بالجول لتحريك السيارة 10 m (بإهمال قوة الاحتكاك).



استعمل قاعدة الضرب الداخلي للشغل.

الصورة الإحداثية للقوة المتجهة $\mathbf{F}$ بدلالة مقدار القوة، وزاوية الاتجاه هي : $\langle 120 \cos(-45°), 120 \sin(-45°) \rangle$. الصورة الإحداثية لمتجه المسافة هي $\langle 10, 0 \rangle$.

$W = \mathbf{F} \cdot \overrightarrow{AB}$ — قاعدة الضرب الداخلي للشغل

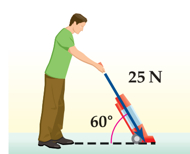
$= \langle 120 \cos(-45°), 120 \sin(-45°) \rangle \cdot \langle 10, 0 \rangle$ — عوّض

$= [120 \cos(-45°)](10) \approx 848.5$ — الضرب الداخلي

أي أن الشخص يبذل 848.5J من الشغل؛ لدفع السيارة.

تحقق من فهمك

4) **تنظيف:** يدفع إبراهيم مكنسةً كهربائيةً بقوةٍ مقدارها 25 N، إذا كان قياس الزاوية بين ذراع المكنسة وسطح الأرض 60°، فأوجد الشغل بالجول الذي بذله إبراهيم عند تحريك المكنسة مسافة 6 m؟ **75 جولًا**



إرشادات للدراسة

وحدات الشغل
وحدة قياس الشغل في النظام الإنجليزي هي قدم-رطل ، وفي النظام المتري نيوتن-متر أو جول.

المثال 4 يُبيّن كيفية استعمال الضرب الداخلي للمتجهات في حساب الشغل.

مثال إضافي

4 **حركة:** يدفع شخص آلة قص العشب بقوةٍ مقدارها 40 N بزاوية مقدارها 45°، أوجد الشغل المبذول بالجول واللازم لتحريك آلة قص العشب 12 m (بإهمال قوة الاحتكاك). **339.4 J**

تنبيه!

في مثال 4 والأسئلة المشابهة، نلاحظ أننا نهتم بالمركبة الأفقية لمتجه القوة والتي توازي متجه المسافة.

تنويع التعليم

دون

المتعلمون السمعيون قسّم طلاب الصف مجموعاتٍ صغيرةً من ذوي قدرات لغوية متفاوتة، ثم اطلب إليهم توضيح كيفية حل مسائل من واقع الحياة شبيهة بالمثال 4 ، باستعمال خطة التفكير بصوتٍ مسموعٍ، وذلك من خلال شرح خطوات حل المسألة، وتفسير دور كل معلومةٍ من معطيات المسألة في وضع مخططٍ للحل.

29 الدرس 3-5 الضرب الداخلي

3 التدريب

التقويم التكويني

استعمل الأسئلة 16-1 ؛ للتأكد من فهم الطلاب.

ثم استعمل الجدول أسفل هذه الصفحة؛ لتعيين الواجبات المنزلية للطلاب بحسب مستوياتهم.

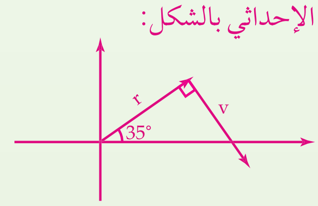
تنبيه!

أخطاء شائعة قد يقع الطلاب في أخطاء بسيطة عند حساب قياس الزاوية بين متجهين في المسائل 11–14؛ لذا اقترح عليهم رسم المتجهات في المستوى الإحداثي؛ لتحديد ما إذا كانت زاوية المتجه حادةً أم منفرجةً، ومقارنتها بالزاوية التي يحصلون عليها في الحل الجبري.

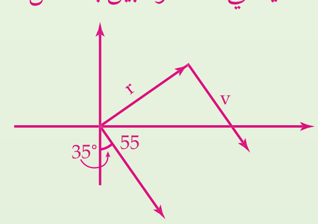
اكتشف الخطأ في السؤال 33 ، اقترح على الطلاب الرجوع إلى خصائص الضرب الداخلي صفحة 27، وشجِّع الطلاب على اختبار متجهاتٍ ذات قيم حقيقيةٍ لكلٍّ من **u**, **v**, **w** للتحقق من إجاباتهم.

إجابة:

a21) يمكن تمثيل متجهَي نصف القطر، والسرعة المماسية في المستوى الإحداثي بالشكل:



فتكون مركبة r الأفقية $20\cos 35°$
وتكون مركبة r الرأسية $20\sin 35°$
إذن الزوج المرتب للمتجه r
$\langle 20\cos 35°, 20\sin 35°\rangle$،
أو $\langle 16.38, 11.47\rangle$
أما بالنسبة للمتجه v فنضعه في الوضع القياسي كما هو مبين بالشكل:



فتكون مركبة v الأفقية $40\cos 55$
وتكون مركبة v الرأسية $-40\sin 55$
إذن الزوج المرتب للمتجهة v
$\langle 40\cos 55, -40\sin 55\rangle$،
أو $\langle 22.94, -32.77\rangle$

تدرب وحل المسائل

أوجد حاصل الضرب الداخلي للمتجهين **u**, **v**، ثم تحقق ممَّا إذا كانا متعامدين أم لا. (مثال 1)

1) $\mathbf{u} = \langle 3, -5\rangle, \mathbf{v} = \langle 6, 2\rangle$ 8 ؛ غير متعامدين

2) $\mathbf{u} = \langle 9, -3\rangle, \mathbf{v} = \langle 1, 3\rangle$ 0 ؛ متعامدان

3) $\mathbf{u} = \langle 4, -4\rangle, \mathbf{v} = \langle 7, 5\rangle$ 8 ؛ غير متعامدين

4) $\mathbf{u} = 11\mathbf{i} + 7\mathbf{j}, \mathbf{v} = -7\mathbf{i} + 11\mathbf{j}$ 0 ؛ متعامدان

5) $\mathbf{u} = \langle -4, 6\rangle, \mathbf{v} = \langle -5, -2\rangle$ 8 ؛ غير متعامدين

6) **زيت الزيتون:** يمثِّل المتجه $\mathbf{u} = \langle 406, 297\rangle$ أعداد علبتين مختلفتين من زيت الزيتون في متجر، ويمثِّل المتجه $\mathbf{v} = \langle 27.5, 15\rangle$ سعر العلبة من كلا النوعين على الترتيب. (مثال 1)

a) أوجد $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}$. 15620

b) فسِّر النتيجة التي حصلت عليها في الفرع a في سياق المسألة. ثمن العلب جميعها هو 15620 ريالًا

استعمل الضرب الداخلي؛ لإيجاد طول المتجه المعطى. (مثال 2)

7) $\mathbf{m} = \langle -3, 11\rangle$ $\sqrt{130} \approx 11.4$

8) $\mathbf{r} = \langle -9, -4\rangle$ $\sqrt{97} \approx 9.8$

9) $\mathbf{v} = \langle 1, -18\rangle$ $5\sqrt{13} \approx 18.0$

10) $\mathbf{t} = \langle 23, -16\rangle$ $\sqrt{785} \approx 28.0$

أوجد قياس الزاوية θ بين المتجهين **u**, **v** في كلٍّ مما يأتي، وقرِّب الناتج إلى أقرب جزءٍ من عشرة. (مثال 3)

11) $\mathbf{u} = \langle 0, -5\rangle, \mathbf{v} = \langle 1, -4\rangle$ 14.0°

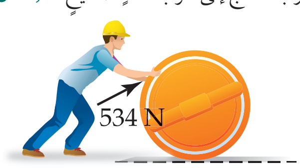
12) $\mathbf{u} = \langle 7, 10\rangle, \mathbf{v} = \langle 4, -4\rangle$ 100.0°

13) $\mathbf{u} = \langle -2, 4\rangle, \mathbf{v} = \langle 2, -10\rangle$ 164.7°

14) $\mathbf{u} = -2\mathbf{i} + 3\mathbf{j}, \mathbf{v} = -4\mathbf{i} - 2\mathbf{j}$ 82.9°

15) **مخيم كشفي:** غادر يوسف ويحيى مخيَّمهما الكشفي للبحث عن حطب. إذا كان المتجه $\mathbf{u} = \langle 3, -5\rangle$ يُمثِّل الطريق الذي سلكه يوسف، والمتجه $\mathbf{v} = \langle -7, 6\rangle$ يُمثِّل الطريق الذي سلكه يحيى، فأوجد قياس الزاوية بين المتجهين. (مثال 3) 161.6°

16) **فيزياء:** يدفع طارق برميلًا على أرضٍ مستوية مسافة 1.5 m بقوة مقدارها 534 N؛ بزاوية 25°، أوجد مقدار الشغل بالجول الذي يبذله طارق، وقرِّب الناتج إلى أقرب عددٍ صحيح. (مثال 4) 726 J



أوجد متجهًا يعامد المتجه المعطى في كلٍّ مما يأتي:

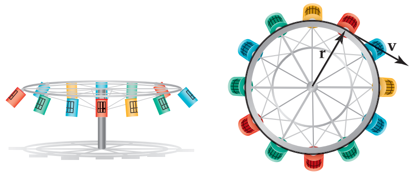
17) $\langle -2, -8\rangle$ إجابة ممكنة: $\langle -12, 3\rangle$

18) $\langle 3, 5\rangle$ إجابة ممكنة: $\langle 10, -6\rangle$

19) $\langle 7, -4\rangle$ إجابة ممكنة: $\langle 8, 14\rangle$

20) $\langle -1, 6\rangle$ إجابة ممكنة: $\langle 6, 1\rangle$

21) **عجلة دوَّارة:** يعامد المتجه **r** في العجلة الدوارة في الوضع القياسي متجه السرعة المماسية **v** عند أيِّ نقطةٍ من نقاط الدائرة.



a) إذا كان طول نصف قطر العجلة 20 ft، وسرعتها ثابتة ومقدارها 40 ft/s، فاكتب الصورة الإحداثية للمتجه **r** في الوضع القياسي، إذا كان يصنع زاوية قياسها 35° مع الأفقي، فاكتب الصورة الإحداثية لمتجه السرعة المماسية في هذه الحالة؟ قرِّب الناتج إلى أقرب جزءٍ من مئة. انظر الهامش

b) ما الطريقة التي يمكن استعمالها لإثبات تعامد المتجه **r**، ومتجه السرعة باستعمال الصورتين الإحداثيتين اللتين أوجدتهما في الفرع **a**؟ وأثبت أن المتجهين متعامدان.

21b) الضرب الداخلي؛
$\mathbf{r}.\mathbf{v} = (20\cos 35°)(40\cos 55°) + (20\sin 35°)(-40\sin 55°) = 0$
بما أن $\mathbf{r}.\mathbf{v} = 0$ إذن المتجهان متعامدان.

إذا علمت كلًّا من **v**, **u • v**، فأوجد قيمةً ممكنةً للمتجه **u** في كلٍّ مما يأتي:

22) $\mathbf{v} = \langle 3, -6\rangle, \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = 33$ إجابة ممكنة: $\mathbf{u} = \langle 5, -3\rangle$

23) $\mathbf{v} = \langle 4, 6\rangle, \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = 38$ إجابة ممكنة: $\mathbf{u} = \langle -1, 7\rangle$

24) **مدرسة:** يسحب طالب حقيبته المدرسية بقوة مقدارها 100 N، إذا بذل الطالب شغلًا مقداره 1747 J، لسحب حقيبته مسافة 31 m، فما قياس الزاوية بين قوة السحب والأفقي (بإهمال قوة الاحتكاك)؟ 55.7° تقريبًا

تنويع الواجبات المنزلية

المستوى	الأسئلة
دون المتوسط	1–16، 31–32، 33، 35–46
ضمن المتوسط	1–37 فردي، 32 ، 36–46
فوق المتوسط	18–46

اختبر كل زوج من المتجهات في كلٍّ مما يأتي، من حيث كونها متعامدة، أو متوازية، أو غير ذلك. **(25, 26** انظر الهامش

(25 $\mathbf{u} = \left\langle -\frac{2}{3}, \frac{3}{4} \right\rangle, \mathbf{v} = \langle 9, 8 \rangle$ متعامدان

(26 $\mathbf{u} = \langle -1, -4 \rangle, \mathbf{v} = \langle 3, 6 \rangle$ غير ذلك

أوجد قياس الزاوية بين كل متجهين في كلٍّ مما يأتي، قرّب الناتج إلى أقرب عُشرٍ.

(27 $\mathbf{u} = \mathbf{i} + 5\mathbf{j}, \mathbf{v} = -2\mathbf{i} + 6\mathbf{j}$ $29.7°$

(28 $\mathbf{u} = 4\mathbf{i} + 3\mathbf{j}, \mathbf{v} = -5\mathbf{i} - 2\mathbf{j}$ $164.9°$

(29 النقاط: $(2, 3), (4, 7), (8, 1)$ تُمثّل رؤوس مثلث، أوجد قياسات زواياه باستعمال المتجهات. انظر الهامش

إذا علمت كلًّا من $|\mathbf{v}|$ و $\mathbf{u}$، والزاوية θ بين المتجهين $\mathbf{u}, \mathbf{v}$، فأوجد قيمةً ممكنةً للمتجه $\mathbf{v}$، قرّب الناتج إلى أقرب جزءٍ من مئةٍ.

(30 $\mathbf{u} = \langle 4, -2 \rangle, |\mathbf{v}| = 10, \theta = 45°$ $\langle 3.16, -9.49 \rangle$

(31 $\mathbf{u} = \langle 3, 4 \rangle, |\mathbf{v}| = \sqrt{29}, \theta = 121°$ $\langle -5.36, 0.55 \rangle$

مسائل مهارات التفكير العليا

(32 **تبرير:** اختبر صحة أو خطأ العبارة الآتية: خطأ؛ انظر الهامش
إذا كانت $|\mathbf{d}|, |\mathbf{e}|, |\mathbf{f}|$ تُمثّل ثلاثية فيثاغورس، وكانت الزاويتان بين $\mathbf{d}, \mathbf{e}$ وبين $\mathbf{e}, \mathbf{f}$ حادتين، فإن الزاوية بين $\mathbf{d}, \mathbf{f}$ يجب أن تكون قائمة. فسّر تبريرك.

(33 **اكتشف الخطأ:** يدرس كلٌّ من فهد وفيصل خصائص الضرب الداخلي للمتجهات، فقال فهد: إن الضرب الداخلي للمتجهات عملية تجميعية؛ لأنها إبدالية؛ أي أن: $(\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}) \cdot \mathbf{w} = \mathbf{u} \cdot (\mathbf{v} \cdot \mathbf{w})$، ولكن فيصل عارضه، فأيهما كان على صواب؟ وضّح إجابتك. فيصل؛ $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}$ عدد ثابت، وعليه فإن $(\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}) \cdot \mathbf{w}$ ليس معرفًا؛ لأنه لا يمكن إجراء الضرب الداخلي بين مقدارٍ ثابتٍ ومتجه.

(34 **اكتب:** وضّح كيف تجد الضرب الداخلي لمتجهين غير صفريين. انظر الهامش

برهان: إذا كان: $\mathbf{u} = \langle u_1, u_2 \rangle, \mathbf{v} = \langle v_1, v_2 \rangle, \mathbf{w} = \langle w_1, w_2 \rangle$، فأثبت خصائص الضرب الداخلي الآتية: **(35-37)** انظر ملحق الإجابات

(35 $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = \mathbf{v} \cdot \mathbf{u}$

(36 $\mathbf{u} \cdot (\mathbf{v} + \mathbf{w}) = \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} + \mathbf{u} \cdot \mathbf{w}$

(37 $k(\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}) = k\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = \mathbf{u} \cdot k\mathbf{v}$

(38 **برهان:** إذا كان قياس الزاوية بين المتجهين $\mathbf{u}, \mathbf{v}$ يساوي $90°$، فأثبت أن $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = 0$ باستعمال قاعدة الزاوية بين متجهين غير صفريين. انظر ملحق الإجابات

مراجعة تراكمية

إذا علمت أن: $\mathbf{a} = \langle 10, 1 \rangle, \mathbf{b} = \langle -5, 2.8 \rangle, \mathbf{c} = \left\langle \frac{3}{4}, -9 \right\rangle$، فأوجد كلًّا مما يأتي: (الدرس 2-5)

(39 $\mathbf{b} - \mathbf{a} + 4\mathbf{c}$ $\langle -12, -34.2 \rangle$

(40 $\mathbf{c} - 3\mathbf{a} + \mathbf{b}$ $\left\langle -\frac{137}{4}, -9.2 \right\rangle$

(41 $2\mathbf{a} - 4\mathbf{b} + \mathbf{c}$ $\left\langle \frac{163}{4}, -18.2 \right\rangle$

أوجد زاوية اتجاه كلٍّ من المتجهات الآتية مع الاتجاه الموجب لمحور x: (الدرس 2-5)

(42 $-\mathbf{i} - 3\mathbf{j}$ $251.6°$

(43 $\langle -9, 5 \rangle$ $150.95°$

(44 $\langle -7, 7 \rangle$ $135°$

تدريب على اختبار

(45 ما قياس الزاوية بين المتجهين $\langle -1, -1 \rangle$ ، $\langle -9, 0 \rangle$ ؟ **B**

A $0°$ **C** $90°$

B $45°$ **D** $135°$

(46 إذا كان: $\mathbf{s} = \langle 4, -3 \rangle, \mathbf{t} = \langle -6, 2 \rangle$، فأيٌّ مما يأتي يمثّل r، حيث $\mathbf{r} = \mathbf{t} - 2\mathbf{s}$ ؟ **C**

A $\langle 14, 8 \rangle$ **C** $\langle -14, 8 \rangle$

B $\langle 14, 6 \rangle$ **D** $\langle -14, -8 \rangle$

4 التقويم

بطاقة مكافأة اطلب إلى الطلاب كتابة متجه وتوضيح طريقة إيجاد طوله باستعمال الضرب الداخلي.

التقويم التكويني

تحقق من فهم الطلاب الدرس 3-5 بإعطائهم:

الاختبار القصير 2، ص (11)

إجابات:

(25 بما أن $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = 0$، فإن المتجهين متعامدان.

(26 ليسا متعامدين، ولا متوازيين، حيث إن الزاوية بين المتجهين $\theta = 167°$.
وقياس الزاوية بين المتجهين المتوازيين إما 0 أو $180°$، وبين المتجهين المتعامدين $90°$

(29 المتجهات التي تشكل المثلث:
$A\langle 2, 4 \rangle, B\langle 4, -6 \rangle, C\langle 6, -2 \rangle$

$$\cos A = \frac{b.c}{|b| \cdot |c|} = \frac{36}{\sqrt{52} \cdot \sqrt{40}}$$
$$= \frac{9}{\sqrt{130}}$$
$$A = \cos^{-1} \frac{9}{\sqrt{130}}$$
$$\cos B = \frac{a.b}{|a| \cdot |c|} = \frac{2}{5\sqrt{2}}$$
$$B = \cos^{-1} = \frac{2}{5\sqrt{2}} \approx$$
$$C = 180° - (A+B) \approx$$

إذن قياسات زوايا المثلث

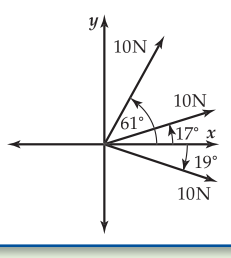
(32 العبارة خاطئة؛ إذ قد تكون نقطة بداية للمتجهات الثلاثة واحدة ولا تشكل هذه المتجهات مثلثًا مطلقًا، إذا كان الأمر كذلك، فإن الزاوية بين المتجهين **d** و **f** تكون حادة أو قائمة أو منفرجة.

(34 إجابة ممكنة: لأي متجهين غير صفريين $\langle a, d \rangle$ ، $\langle c, b \rangle$ يكون الضرب الداخلي لهما يساوي مجموع حاصل ضرب الاحداثيين x والإحداثيين y أو $ac + bd$.

تنويع التعليم

ضمن

توسع في الشكل المجاور، أوجد R مقدار محصلة القوى.
(إرشاد: أوجد الصورة الإحداثية لكل قوةٍ).
$\langle 23.9, 8.4 \rangle$ ومقدارها 25.3N تقريبًا.



الدروس من 5-1 إلى 5-3

التقويم التكويني

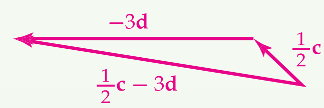
استعمل اختبار منتصف الفصل؛ للتحقق من مدى فهم الطلاب. للأسئلة التي لم يُجيبوا عنها بشكل صحيح، اطلب إلى الطلاب مراجعة الدروس المشار إليها بعد كل سؤال.

التقويم الختامي

اختبار منتصف الفصل، ص (13)

إجابة:

4)



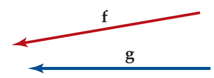
الفصل 5

اختبار منتصف الفصل

الدروس من 5-1 إلى 5-3

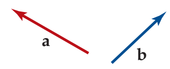
أوجد محصلة كل زوج من المتجهات الآتية مستعملًا قاعدة المثلث، أو متوازي الأضلاع، وقرِّب المحصلة إلى أقرب جزءٍ من عشرةٍ من السنتمتر، ثم حدِّد اتجاهها بالنسبة للأفقي، مستعملًا المسطرة والمنقلة. (الدرس 5-1)

1)



6.2 cm, 185°

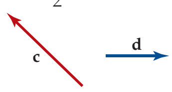
2)



1.1 cm, 57°

3) **التزلُّج:** يسحب شخص مزلجةً على الجليد بقوةٍ مقدارها 50 N بزاوية 35° مع الأفقي، أوجد مقدار كلٍّ من المركبة الأفقية، والعمودية للقوة، وقرِّب إلى أقرب جزء من مئة. (الدرس 5-1)
40.96 N; 28.68 N

4) ارسم شكلًا يُمثِّل المتجه $\frac{1}{2}c - 3d$ (الدرس 5-1) **انظر الهامش**



اكتب $\overline{BC}$ المُعطاة نقطتا بدايته ونهايته، في كلٍّ ممَّا يأتي بدلالة متجهَي الوحدة $\mathbf{i}, \mathbf{j}$. (الدرس 5-2)

5) $B(3,-1), C(4,-7)$ **$i + -6j$**

6) $B(10,-6), C(-8,2)$ **$-18i + 8j$**

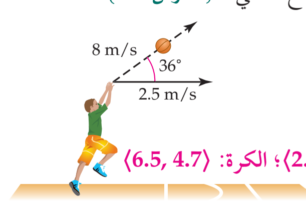
7) $B(1,12), C(-2,-9)$ **$-3i + -21j$**

8) $B(4,-10), C(14,10)$ **$10i + 20j$**

9) **اختيار من متعدد:** أيٌّ مما يأتي يُمثِّل الصورة الإحداثية لـ $\overline{AB}$، حيث $A(-5,3)$ نقطة بدايته، و $B(2,-1)$ نقطة نهايته؟ (الدرس 5-2) **B**

A $\langle 4,-1\rangle$
B $\langle 7,-4\rangle$
C $\langle -4,7\rangle$
D $\langle -6,4\rangle$

10) **كرة سلة:** ركض راشد في اتجاه السلة في أثناء مباراة بسرعة 2.5 m/s، ومن منتصف الملعب صوَّب كرةً بسرعة 8 m/s بزاوية قياسها 36° مع الأفقي. (الدرس 5-2)



a) اكتب الصورة الإحداثية للمتجهين اللّذين يُمثِّلان سرعة راشد، وسرعة الكرة، قرِّب الناتج إلى أقرب جزء من عشرة.
a) راشد: $\langle 2.5, 0\rangle$؛ الكرة: $\langle 6.5, 4.7\rangle$

b) ما السرعة المحصلة، واتجاه حركة الكرة؟ قرِّب المحصلة إلى أقرب جزء من عشرة، وقياس الزاوية إلى أقرب درجة.
10.2 m/s بزاوية قياسها 28° مع الأفقي

أوجد الصورة الإحداثية، وطول المتجه المُعطاة نقطتا بدايته ونهايته على الترتيب في كلٍّ مما يأتي، قرِّب الناتج إلى أقرب جزء من عشرة. (الدرس 5-2)

11) $A(-4,2), B(3,6)$ **$\langle 7,4\rangle; \sqrt{65} \approx 8.1$**

12) $Q(1,-5), R(-7,8)$ **$\langle -8,13\rangle; \sqrt{233} \approx 15.3$**

أوجد قياس الزاوية θ بين المتجهين $\mathbf{u}, \mathbf{v}$، وقرِّب الناتج إلى أقرب درجة: (الدرس 5-3)

13) $\mathbf{u}=\langle 9,-4\rangle, \mathbf{v}=\langle -1,-2\rangle$ **93°**

14) $\mathbf{u}=\langle 8,4\rangle, \mathbf{v}=\langle -2,4\rangle$ **90°**

15) $\mathbf{u}=\langle 2,-2\rangle, \mathbf{v}=\langle 3,8\rangle$ **114°**

16) **اختيار من متعدد:** إذا كان: $\mathbf{u}=\langle 2,3\rangle, \mathbf{v}=\langle -1,4\rangle, \mathbf{w}=\langle 8,-5\rangle$، فما ناتج $(\mathbf{u}\cdot\mathbf{v})+(\mathbf{w}\cdot\mathbf{v})$؟ (الدرس 5-3) **B**

A -2
B -18
C 15
D 38

أوجد الضرب الداخلي للمتجهين في كلٍّ مما يأتي، ثم تحقَّق مما إذا كانا متعامدين أم لا: (الدرس 5-3)

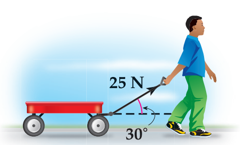
17) $\langle 2,-5\rangle\cdot\langle 4,2\rangle$ **-2؛ غير متعامدين**

18) $\langle 4,-3\rangle\cdot\langle 7,4\rangle$ **16؛ غير متعامدين**

19) $\langle 1,-6\rangle\cdot\langle 5,8\rangle$ **-43؛ غير متعامدين**

20) $\langle 3,-6\rangle\cdot\langle 10,5\rangle$ **0؛ متعامدان**

21) **عربة:** يسحب أحمد عربةً بقوةٍ مقدارها 25 N، وبزاوية 30° مع الأفقي كما في الشكل أدناه. (الدرس 5-3)



a) ما مقدار الشغل الذي يبذله أحمد عندما يسحب العربة 150 m، قرِّب الناتج إلى أقرب جزء من عشرة. **3247.6 جولًا**

b) إذا كانت الزاوية بين ذراع العربة والأفقي 40°، وسحب أحمد العربة المسافة نفسها، وبالقوة نفسها، فهل يبذل شغلًا أكبر أم أقل؟ فسِّر إجابتك. **أقل؛ سيبذل 2872.7 جولًا**

مخطط المعالجة

المستوى 1	ضمن المتوسط	المستوى 2	دون المتوسط
إذا	أخطأ بعض الطلاب في 25% تقريبًا من الأسئلة،	إذا	أخطأ بعض الطلاب في 50% تقريبًا من الأسئلة،
فاختر	أحد المصدرين الآتيين:	فاختر	المصدر الآتي:
كتاب الطالب	الدروس 5-1, 5-2, 5-3	زيارة الموقع	www.obeikaneducation.com
دليل المعلم	مشروع الفصل، ص (8)		

5-4 ملاحظات الدرس

5-4 المتجهات في الفضاء الثلاثي الأبعاد
Vectors in Three-Dimensional Space

فيما سبق:
درست المتجهات في النظام الثنائي الأبعاد هندسيًا وجبريًا. الدرس (1-5)

والآن:
- أعيِّنُ نقاطًا، ومتجهات في النظام الإحداثي الثلاثي الأبعاد.
- أعبِّرُ عن المتجهات جبريًا، وأجري العمليات عليها في الفضاء الثلاثي الأبعاد.

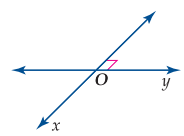
المفردات:
نظام الإحداثيات الثلاثي الأبعاد
three-dimensional coordinate system
المحور z
z-axis
الثُّمن
octant
الثلاثي المرتب
ordered triple

www.obeikaneducation.com

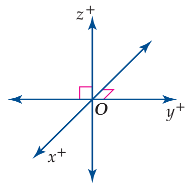
لماذا؟

لإطلاق صاروخ في الفضاء، يلزم تحديد اتجاهه وزاويته في الفضاء. وبما أن مفاهيم المسافة والسرعة والقوة المتجهة غير مقيدة في المستوى، فلا بد من توسيع مفهوم المتجه إلى الفضاء الثلاثي الأبعاد.

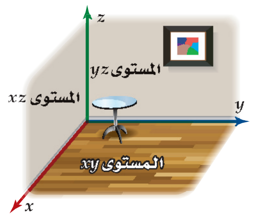
الإحداثيات في الفضاء الثلاثي الأبعاد المستوى الإحداثي: هو نظام إحداثي ثنائي الأبعاد يتشكل بواسطة خطَّي أعداد متعامدين، هما المحور x والمحور y، اللذان يتقاطعان في نقطة تسمى نقطة الأصل. ويسمح لك هذا النظام بتحديد وتعيين نقاطٍ في المستوى، وتحتاج إلى **نظام الإحداثيات الثلاثي الأبعاد**؛ لتعيين نقطةٍ في الفضاء، فنبدأ بالمستوى xy، ونضعه بصورة تُظهر عمقًا للشكل كما في الشكل 5.4.1، ثم نضيف محورًا ثالثًا يُسمَّى **المحور z** يمر بنقطة الأصل، ويعامد كلًّا من المحورين x ،y كما في الشكل 5.4.2. فيكون لدينا ثلاثة مستويات هي xy, yz, xz ، وتقسم هذه المستويات الفضاء إلى ثماني مناطق، يُسمَّى كلٌّ منها **الثُّمن**، ويمكن تمثيل الثُّمن الأول بجزء الحجرة في الشكل 5.4.3.



الشكل 5.4.1



الشكل 5.4.2



الشكل 5.4.3

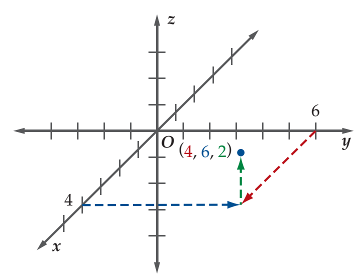
تُمثَّل النقطة في الفضاء **بثلاثيات مرتبة** من الأعداد الحقيقية (x, y, z)، ولتعيين مثل هذه النقطة، عيِّن أولًا النقطة (x, y) في المستوى $x\ y$ ، ثم تحرك لأعلى، أو إلى أسفل موازيًا للمحور z ، بحسب المسافة المتجهة التي يُمثِّلها z .

مثال 1 تعيين نقطة في الفضاء

عيِّن كلًّا من النقطتين الآتيتين في نظام الإحداثيات الثلاثي الأبعاد:

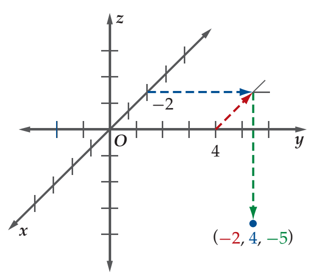
a) $(4, 6, 2)$

عيِّن $(4, 6)$ في المستوى xy بوضع إشارة مناسبة، ثم ضع نقطةً على بُعد وحدتين أعلى الإشارة التي وضعتها، وبموازاة المحور z ، كما في الشكل أدناه .



b) $(-2, 4, -5)$

عيِّن $(-2, 4)$ في المستوى xy بوضع إشارة مناسبة، ثم ضع نقطةً على بُعد 5 وحداتٍ أسفل الإشارة التي وضعتها، وبموازاة المحور z ، كما في الشكل أدناه.



تحقق من فهمك

عيِّن كلًّا من النقاط الآتية في نظام الإحداثيات الثلاثي الأبعاد: انظر ملحق الإجابات

1A) $(-3, -4, 2)$ **1B)** $(3, 2, -3)$ **1C)** $(5, -4, -1)$

1 التركيز

الترابط الرأسي

ما قبل الدرس 5-4

تمثيل المتجهات في النظام الثنائي الأبعاد هندسيًّا وجبريًّا.

الدرس 5-4

تعيين النقاط والمتجهات في النظام الإحداثي الثلاثي الأبعاد.

التعبير عن المتجهات جبريًّا، وإجراء العمليات عليها في الفضاء الثلاثي الأبعاد.

ما بعد الدرس 5-4

إيجاد الضرب الداخلي والزاوية بين متجهَين في الفضاء.

2 التدريس

أسئلة التعزيز

اطلب إلى الطلاب قراءة فقرة "لماذا؟".

واسأل:

- ما عدد أجزاء المستوى الإحداثي؟ وماذا يسمى كلُّ جزءٍ منها؟ أربعة ، رُبُع.
- ما الإشارات الممكنة للأزواج المرتبة في المستوى الإحداثي الثنائي الأبعاد؟
$(+, +), (-, +), (-, -), (+, -)$
- ما عدد أجزاء نظام الإحداثيات الثلاثي الأبعاد؟ وماذا يُسمى كل جزء منها؟ ثمانية ، ثُمُن.
- ما الإشارات الممكنة للثلاثيات المرتبة في نظام الإحداثيات الثلاثي الأبعاد .

$(+, +, +), (-, -, -), (-, -, +),$
$(+, -, -), (+, -, +), (-, +, -),$
$(+, +, -), (-, +, +)$

مصادر الدرس 5-4

المصدر	دون المتوسط	ضمن المتوسط	فوق المتوسط
دليل المعلم	• تنويع التعليم ص (36)	• تنويع التعليم ص (36)	• تنويع التعليم ص (38 ،35)
كتاب التمارين	• ص (7)	• ص (7)	• ص (7)
مصادر المعلم للأنشطة الصفية	• تدريبات إعادة التعليم، ص (19 ،18) • تدريبات حل المسألة، ص (20)	• تدريبات حل المسألة، ص (20) • التدريبات الإثرائية، ص (21)	• تدريبات حل المسألة، ص (20) • التدريبات الإثرائية، ص (21)

الإحداثيات في الفضاء الثلاثي الأبعاد

المثال 1 يُبيّن كيفية تعيين نقطة في الفضاء الثلاثي الأبعاد.

المثال 2 يُبيّن كيفية إيجاد المسافة بين نقطتين وإحداثيات نقطة منتصف قطعة مستقيمة في الفضاء.

التقويم التكويني

استعمل تدريبات "تحقق من فهمك" بعد كل مثال؛ للتحقق من مدى فهم الطلاب المفاهيم.

مثالان إضافيان

1 عيِّن كلًّا من النقطتين الآتيتين في نظام الإحداثيات الثلاثي الأبعاد.

a) $(1, 5, 3)$.

b) $(-1, -5, 2)$.

للفرعين **a, b** انظر الهامش

2 **هندسة معمارية:** صمّم مهندس معماري غرفة خشبيةً على سطح أحد المنازل، واستعمل قطعة خشب طويلة؛ لتثبيت السقف بحيث ينتهي طرفاها بنقطتين إحداثياتهما هي: $(30, 40, 10)$ ، $(70, 80, 20)$، وكانت الإحداثيات معطاة بالقدم، فأجب عمَّا يأتي:

a) أوجد طول قطعة الخشب.
57.45ft

b) يرغب صاحب المنزل في تثبيت مصباح كهربائي في منتصف قطعة الخشب، أوجد إحداثيات موقع المصباح. $(50, 60, 15)$

عملية إيجاد المسافة بين نقطتين، وإيجاد نقطة منتصف قطعة مستقيمة في الفضاء تشبهان عملية إيجاد المسافة، ونقطة منتصف قطعة مستقيمة في المستوى الإحداثي .

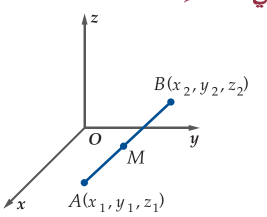
مفهوم أساسي: صيغتا المسافة ونقطة المنتصف في الفضاء

تُعطى المسافة بين النقطتين $A(x_1, y_1, z_1)$, $B(x_2, y_2, z_2)$ بالصيغة:

$$AB = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$$

وتعطى نقطة المنتصف M لـ $\overline{AB}$ بالصيغة:

$$M\left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2}, \frac{z_1 + z_2}{2}\right)$$

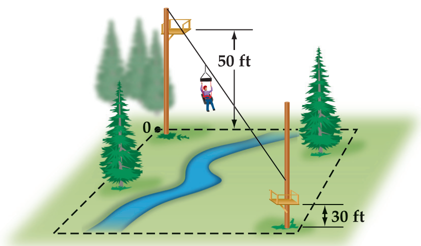


الربط مع الحياة

يستمتع سكان البنايات الشاهقة، خصوصًا في الأماكن المرتفعة، بمشاهدة أجزاء من المدينة كالجسور وحركة المرور، والحدائق ... إلخ .

مثال 2 من واقع الحياة: المسافة بين نقطتين ونقطة منتصف قطعة مستقيمة في الفضاء

رحلة: تتحرك العربة في الشكل المجاور على سلسلة مشدودة، تربط بين منصّتين تسمح للمتنزهين بالمرور فوق مناظر طبيعية خلابة. إذا مُثلت المنصتان بالنقطتين: $(10, 12, 50)$ ، $(70, 92, 30)$، وكانت الإحداثيات معطاة بالأقدام، فأجب عما يأتي:



a) أوجد طول السلسلة اللازمة للربط بين المنصّتَين إلى أقرب قدم.

استعمل صيغة المسافة بين نقطتين.

$$AB = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2} \quad \text{صيغة المسافة}$$

$$= \sqrt{(70 - 10)^2 + (92 - 12)^2 + (30 - 50)^2} \quad (x_2, y_2, z_2) = (70, 92, 30) , (x_1, y_1, z_1) = (10, 12, 50)$$

$$\approx 101.98 \quad \text{بسّط}$$

أي أننا نحتاج إلى حبلٍ طوله 102 ft تقريبًا للربط بين المنصّتين.

b) أوجد إحداثيات منتصف المسافة بين المنصَّتين.

استعمل صيغة نقطة المنتصف في الفضاء .

$$M = \left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2}, \frac{z_1 + z_2}{2}\right) \quad \text{صيغة المنتصف}$$

$$= \left(\frac{10 + 70}{2}, \frac{12 + 92}{2}, \frac{50 + 30}{2}\right) \quad (x_2, y_2, z_2) = (70, 92, 30) , (x_1, y_1, z_1) = (10, 12, 50)$$

$$= (40, 52, 40)$$

أي أن إحداثيات منتصف المسافة بين المنصتين هي $(40, 52, 40)$

تحقق من فهمك

2A) نعم؛ تبعد الطائرتان عن بعضهما حوالي 2045 قدمًا، وهذه المسافة أقل من المسافة المسموح بها، وهي نصف ميل تقريبًا. (2640 قدم)

2) **طائرات:** تفرض أنظمة السلامة ألّا تقل المسافة بين الطائرات عن 0.5 mi في أثناء طيرانها، إذا علمت أن طائرتين تطيران فوق إحدى المناطق، وفي لحظةٍ معينةٍ كانت إحداثيات موقعَي الطائرتين: $(300, 150, 30000)$, $(450, -250, 28000)$، مع العلم بأن الإحداثيات معطاة بالأقدام، فأجب عما يأتي:

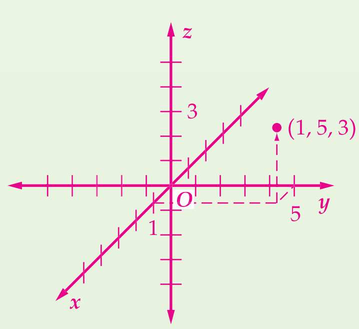
A) هل تخالف الطائرتان أنظمة السلامة؟

B) إذا أطلقت ألعابٌ ناريةٌ، وانفجرت في منتصف المسافة بين الطائرتين، فما إحداثيات نقطة الانفجار؟ $(375, -50, 29000)$

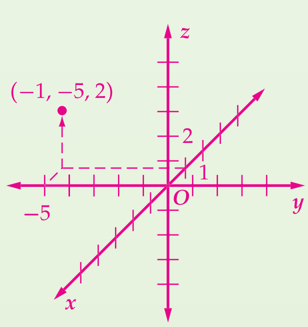
إرشادٌ: الميل = 5280 قدمًا

إجابات (مثال إضافي):

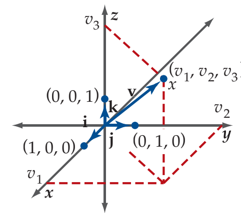
1a)



1b)



المتجهات في الفضاء إذا كان **v** متجهًا في الفضاء في وضع قياسي، وكانت (v_1, v_2, v_3) نقطة نهايته، فإننا نعبّر عنه بالصورة الإحداثية $\langle v_1, v_2, v_3 \rangle$، كما يُعبّر عن المتجه الصفري بالصورة الثلاثية $\mathbf{0} = \langle 0, 0, 0 \rangle$، وعن متجهات الوحدة القياسية بالصورة الإحداثية $\mathbf{i} = \langle 1, 0, 0 \rangle, \mathbf{j} = \langle 0, 1, 0 \rangle, \mathbf{k} = \langle 0, 0, 1 \rangle$، كما في الشكل 5.4.4، ويمكن التعبير عن الصورة الإحداثية للمتجه **v** على صورة توافق خطي لمتجهات الوحدة **i, j, k** بالآتي: $\langle v_1, v_2, v_3 \rangle = v_1\mathbf{i} + v_2\mathbf{j} + v_3\mathbf{k}$.



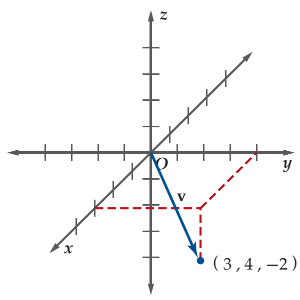
الشكل 5.4.4

مثال 3 تعيين متجه في الفضاء

مثِّل بيانيًا كلًّا من المتجهين الآتيين في نظام الإحداثيات الثلاثي الأبعاد:

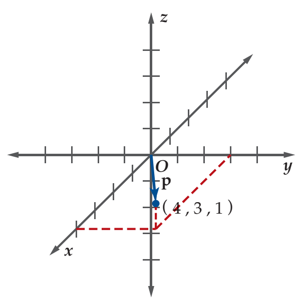
a) $\mathbf{v} = \langle 3, 4, -2 \rangle$

عيِّن النقطة $(3, 4, -2)$، ثم مثِّل المتجه **v** بيانيًا، بحيث تكون النقطة $(3, 4, -2)$ نقطة نهايته.



b) $\mathbf{p} = 4\mathbf{i} + 3\mathbf{j} + \mathbf{k}$

عيِّن النقطة $(4, 3, 1)$، ثم مثِّل المتجه **p** بيانيًا، بحيث تكون النقطة $(4, 3, 1)$ نقطة نهايته.



تحقق من فهمك (3A, B) انظر ملحق الإجابات

مثِّل بيانيًا كلًّا من المتجهين الآتيين في نظام الإحداثيات الثلاثي الأبعاد:

3A) $\mathbf{u} = \langle -4, 2, -3 \rangle$

3B) $\mathbf{w} = -\mathbf{i} - 3\mathbf{j} + 4\mathbf{k}$

إذا كُتبت المتجهات في الفضاء على الصورة الإحداثية، فإنه يمكن أن تُجرى عليها عمليات الجمع، والطرح، والضرب في عدد حقيقي كما هي الحال في المتجهات في المستوى الإحداثي.

مفهوم أساسي العمليات على المتجهات في الفضاء

إذا كان $\mathbf{a} = \langle a_1, a_2, a_3 \rangle$، $\mathbf{b} = \langle b_1, b_2, b_3 \rangle$ متجهين في الفضاء، وكان k عددًا حقيقيًا، فإن:

جمع متجهين $\mathbf{a} + \mathbf{b} = \langle a_1 + b_1, a_2 + b_2, a_3 + b_3 \rangle$

طرح متجهين $\mathbf{a} - \mathbf{b} = \mathbf{a} + (-\mathbf{b}) = \langle a_1 - b_1, a_2 - b_2, a_3 - b_3 \rangle$

ضرب متجهٍ في عددٍ حقيقيٍّ $k\mathbf{a} = \langle ka_1, ka_2, ka_3 \rangle$

المتجهات في الفضاء

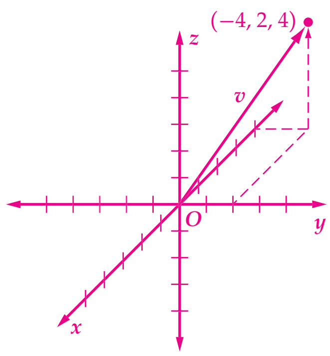
المثال 3 يُبيّن كيفية تعيين متجه في الفضاء.

المثال 4 يُبيّن كيفية إجراء العمليات على المتجهات في الفضاء.

المثال 5 يُبيّن كيفية التعبير عن المتجهات في الفضاء جبريًّا.

مثالان إضافيان

3 مثِّل بيانيًّا المتجه $\mathbf{v} = \langle -4, 2, 4 \rangle$ في نظام الإحداثيات الثلاثي الأبعاد.



4 أوجد كلًّا مما يأتي للمتجهات: $\mathbf{v} = \langle 1, 5, 2 \rangle, \mathbf{w} = \langle -6, 3, -2 \rangle$، $\mathbf{z} = \langle 0, 5, -1 \rangle$:

a) $3\mathbf{v} - \mathbf{w} - \mathbf{z}$ $\langle 9, 7, 9 \rangle$

b) $-\mathbf{v} + 2\mathbf{w} + 3\mathbf{z}$

$\langle -13, 16, -9 \rangle$

تنويع التعليم

فوق

توسع ما الشكل الثلاثي الأبعاد الذي رؤوسه:

$A(2, 6, 6), B(2, 6, 0), C(5, 6, 6), D(5, 6, 0), E(2, 1, 6), F(2, 1, 0), G(5, 1, 6), H(5, 1, 0)$

متوازي مستطيلات

التعليم باستعمال التقنيات

السبورة التفاعلية اعرض نموذجًا للنظام الإحداثي الثلاثي الأبعاد على السبورة، ثم عيِّن عليه نقطة، واطلب إلى أحد الطلاب إيجاد إحداثياتها. اسحب النقطة إلى أعلى أو إلى أسفل باتجاه المحور z، وإلى الأمام أو إلى الخلف باتجاه المحور x، وإلى اليسار أو إلى اليمين باتجاه المحور y، واطلب إلى الطلاب إيجاد إحداثيات النقطة على صورة ثلاثيٍّ مرتب بعد كل مرةٍ تسحب فيها النقطة. ناقش أوجه الشبه وأوجه الاختلاف بين الزوج المرتب والثلاثي المرتب.

مثال إضافي

5 أوجد الصورة الإحداثية، وطول $\overrightarrow{AB}$ الذي نقطة بدايته $A(3, -2, -1)$، ونقطة نهايته $B(1, 5, -3)$، ثم أوجد متجه الوحدة باتجاه $\overrightarrow{AB}$.

$\langle -2, 7, -2\rangle, \sqrt{57},$

$\left\langle -\frac{2\sqrt{57}}{57}, \frac{7\sqrt{57}}{57}, -\frac{2\sqrt{57}}{57}\right\rangle$

إرشادات للمعلم الجديد

ترتيب الإحداثيات في المثال 5، ذكّر الطلاب بأن عكس ترتيب نقطتَي البداية والنهاية يُغيِّر المتجه من $\overrightarrow{AB}$ إلى $\overrightarrow{BA}$، وهما متجهان لهما الطول نفسه، ولكن في اتجاهين متعاكسين.

إرشادات للدراسة

العمليات على المتجهات خصائص العمليات على المتجهات في الفضاء هي الخصائص نفسها في المستوى الإحداثي.

مثال 4 العمليات على المتجهات في الفضاء

أوجد كلًّا مما يأتي للمتجهات: $\mathbf{y} = \langle 3, -6, 2\rangle, \mathbf{w} = \langle -1, 4, -4\rangle, \mathbf{z} = \langle -2, 0, 5\rangle$:

a) $4\mathbf{y} + 2\mathbf{z}$

$4\mathbf{y} + 2\mathbf{z} = 4\langle 3, -6, 2\rangle + 2\langle -2, 0, 5\rangle$ عوِّض

$= \langle 12, -24, 8\rangle + \langle -4, 0, 10\rangle$ اضرب متجهًا في عدد حقيقي

$= \langle 8, -24, 18\rangle$ اجمع المتجهين

b) $2\mathbf{w} - \mathbf{z} + 3\mathbf{y}$

$2\mathbf{w} - \mathbf{z} + 3\mathbf{y} = 2\langle -1, 4, -4\rangle - \langle -2, 0, 5\rangle + 3\langle 3, -6, 2\rangle$ عوِّض

$= \langle -2, 8, -8\rangle + \langle 2, 0, -5\rangle + \langle 9, -18, 6\rangle$ اضرب متجهٍ في عددٍ حقيقي

$= \langle 9, -10, -7\rangle$ اجمع المتجهات

تحقق من فهمك

أوجد كلًّا مما يأتي للمتجهات: $\mathbf{y} = \langle 3, -6, 2\rangle, \mathbf{w} = \langle -1, 4, -4\rangle, \mathbf{z} = \langle -2, 0, 5\rangle$:

4A) $4\mathbf{w} - 8\mathbf{z}$ $\langle 12, 16, -56\rangle$

4B) $3\mathbf{y} + 3\mathbf{z} - 6\mathbf{w}$ $\langle 9, -42, 45\rangle$

وكما في المتجهات ذات البُعدين، نجد الصورة الإحداثية للمتجه $\overrightarrow{AB}$ الذي نقطة بدايته $A(x_1, y_1, z_1)$ ونقطة نهايته $B(x_2, y_2, z_2)$، وذلك بطرح إحداثيات نقطة البداية من إحداثيات نقطة النهاية.

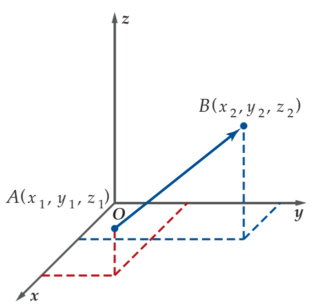
$$\overrightarrow{AB} = \langle x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1\rangle$$

وعندها يكون: $|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$ ،

وهذا يعني أنه إذا كان: $\overrightarrow{AB} = \langle a_1, a_2, a_3\rangle$ ، فإن:

$$|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}$$

ويكون متجه الوحدة $\mathbf{u}$ باتجاه $\overrightarrow{AB}$ هو $\mathbf{u} = \frac{\overrightarrow{AB}}{|\overrightarrow{AB}|}$



مثال 5 التعبير عن المتجهات في الفضاء جبريًا

أوجد الصورة الإحداثية، وطول $\overrightarrow{AB}$ الذي نقطة بدايته $A(-4, -2, 1)$، ونقطة نهايته $B(3, 6, -6)$، ثم أوجد متجه الوحدة باتجاه $\overrightarrow{AB}$.

$\overrightarrow{AB} = \langle x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1\rangle$ الصورة الإحداثية لمتجه

$= \langle 3-(-4), 6-(-2), -6-1\rangle = \langle 7, 8, -7\rangle$ $(x_1, y_1, z_1) = (-4, -2, 1), (x_2, y_2, z_2) = (3, 6, -6)$

وباستعمال الصورة الإحداثية، فإن طول $\overrightarrow{AB}$ هو :

$|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{7^2 + 8^2 + (-7)^2}$ $\overrightarrow{AB} = \langle 7, 8, -7\rangle$

$= 9\sqrt{2}$

ويستعمل هذا الطول والصورة الإحداثية؛ لإيجاد متجه وحدة $\mathbf{u}$ باتجاه $\overrightarrow{AB}$ كما يأتي:

$\mathbf{u} = \frac{\overrightarrow{AB}}{|\overrightarrow{AB}|}$ متجه وحدة باتجاه $\overrightarrow{AB}$

$= \frac{\langle 7, 8, -7\rangle}{9\sqrt{2}} = \left\langle \frac{7\sqrt{2}}{18}, \frac{4\sqrt{2}}{9}, \frac{-7\sqrt{2}}{18}\right\rangle$ $\overrightarrow{AB} = \langle 7, 8, -7\rangle, |\overrightarrow{AB}| = 9\sqrt{2}$

تحقق من فهمك

أوجد الصورة الإحداثية، وطول $\overrightarrow{AB}$ المُعطاة نقطتا بدايته ونهايته، ثم أوجد متجه الوحدة باتجاه $\overrightarrow{AB}$ في كلٍّ مما يأتي:

5A) $A(-2, -5, -5), B(-1, 4, -2)$

5B) $A(-1, 4, 6), B(3, 3, 8)$

5A) $\langle 1, 9, 3\rangle; \sqrt{91};$ $\left\langle \frac{\sqrt{91}}{91}, \frac{9\sqrt{91}}{91}, \frac{3\sqrt{91}}{91}\right\rangle$

5B) $\langle 4, -1, 2\rangle; \sqrt{21};$ $\left\langle \frac{4\sqrt{21}}{21}, \frac{-\sqrt{21}}{21}, \frac{2\sqrt{21}}{21}\right\rangle$

تنويع التعليم

دون ضمن

المتعلمون البصريون / المكانيون اطلب إلى الطلاب، بناءَ نظام إحداثيات ثلاثي الأبعاد باستعمال أعوادٍ من الخشب، ثم اطلب إليهم تدريج محاوره وتلوين الجزء السالب منها، وفي الوقت الذي يرفع فيه أحد الطلاب النموذج، اطلب إلى طلابٍ آخرين تعيين نقاطٍ وتحديد إحداثيَّاتها.

تدرب وحل المسائل

عيِّن كل نقطة مما يأتي في نظام الإحداثيات الثلاثي الأبعاد: (مثال 1)

1) $(1, -2, -4)$ **1-6 انظر ملحق الإجابات**

2) $(3, 2, 1)$

3) $(-5, -4, -2)$

4) $(-2, -5, 3)$

5) $(2, -2, 3)$

6) $(-16, 12, -13)$

أوجد طول القطعة المستقيمة المعطاة نقطتا نهايتها وبدايتها، ثم أوجد إحداثيات نقطة منتصفها في كلٍّ مما يأتي: (مثال 2)

7) $(-4, 10, 4), (1, 0, 9)$ **7-10 انظر ملحق الإجابات**

8) $(-6, 6, 3), (-9, -2, -2)$

9) $(8, 3, 4), (-4, -7, 5)$

10) $(-7, 2, -5), (-2, -5, -8)$

11) **طيّارون:** في لحظةٍ ما أثناء تدريب عسكري، كانت إحداثيات موقع طائرة $(675, -121, 19300)$، وإحداثيات موقع طائرة أخرى $(-289, 715, 16100)$، علمًا بأن الإحداثيات معطاة بالأقدام. (مثال 2)

a) أوجد المسافة بين الطائرتين مقرَّبة إلى أقرب قدم. **3445 ft**

b) عيِّن إحداثيات النقطة التي تقع في منتصف المسافة بين الطائرتين في تلك اللحظة. **(193, 297, 17700)**

مثّل بيانيًّا كلًّا من المتجهات الآتية في نظام الإحداثيات الثلاثي الأبعاد: (مثال 3) **12-19 انظر ملحق الإجابات**

12) $\mathbf{a} = \langle 0, -4, 4\rangle$

13) $\mathbf{b} = \langle -3, -3, -2\rangle$

14) $\mathbf{c} = \langle -1, 3, -4\rangle$

15) $\mathbf{d} = \langle 4, -2, -3\rangle$

16) $\mathbf{v} = 6\mathbf{i} + 8\mathbf{j} - 2\mathbf{k}$

17) $\mathbf{w} = -10\mathbf{i} + 5\mathbf{k}$

18) $\mathbf{m} = 7\mathbf{i} - 6\mathbf{j} + 6\mathbf{k}$

19) $\mathbf{n} = \mathbf{i} - 4\mathbf{j} - 8\mathbf{k}$

أوجد كلًّا مما يأتي للمتجهات: $\mathbf{a} = \langle -5, -4, 3\rangle, \mathbf{b} = \langle 6, -2, -7\rangle, \mathbf{c} = \langle -2, 2, 4\rangle$. (مثال 4)

20) $6\mathbf{a} - 7\mathbf{b} + 8\mathbf{c}$ **$\langle -88, 6, 99\rangle$**

21) $7\mathbf{a} - 5\mathbf{b}$ **$\langle -65, -18, 56\rangle$**

22) $2\mathbf{a} + 5\mathbf{b} - 9\mathbf{c}$ **$\langle 38, -36, -65\rangle$**

23) $6\mathbf{b} + 4\mathbf{c} - 4\mathbf{a}$ **$\langle 48, 12, -38\rangle$**

24) $8\mathbf{a} - 5\mathbf{b} - \mathbf{c}$ **$\langle -68, -24, 55\rangle$**

25) $-6\mathbf{a} + \mathbf{b} + 7\mathbf{c}$ **$\langle 22, 36, 3\rangle$**

أوجد كلًّا مما يأتي للمتجهات: $\mathbf{x} = -9\mathbf{i} + 4\mathbf{j} + 3\mathbf{k}, \mathbf{y} = 6\mathbf{i} - 2\mathbf{j} - 7\mathbf{k}, \mathbf{z} = -2\mathbf{i} + 2\mathbf{j} + 4\mathbf{k}$. (مثال 4)

26) $7\mathbf{x} + 6\mathbf{y}$ **$-27\mathbf{i} + 16\mathbf{j} - 21\mathbf{k}$**

27) $3\mathbf{x} - 5\mathbf{y} + 3\mathbf{z}$ **$-63\mathbf{i} + 28\mathbf{j} + 56\mathbf{k}$**

28) $4\mathbf{x} + 3\mathbf{y} + 2\mathbf{z}$ **$-22\mathbf{i} + 14\mathbf{j} - \mathbf{k}$**

29) $-8\mathbf{x} - 2\mathbf{y} + 5\mathbf{z}$ **$50\mathbf{i} - 18\mathbf{j} + 10\mathbf{k}$**

30) $-6\mathbf{y} - 9\mathbf{z}$ **$-18\mathbf{i} - 6\mathbf{j} + 6\mathbf{k}$**

31) $-\mathbf{x} - 4\mathbf{y} - \mathbf{z}$ **$-13\mathbf{i} + 2\mathbf{j} + 21\mathbf{k}$**

أوجد الصورة الإحداثية، وطول $\overrightarrow{AB}$ المُعطاة نقطتا بدايته ونهايته، في كلٍّ مما يأتي، ثم أوجد متجه الوحدة في اتجاه $\overrightarrow{AB}$. (مثال 5)

32) $A(-5, -5, -9), B(11, -3, -1)$ **32-39 انظر ملحق الإجابات**

33) $A(-4, 0, -3), B(-4, -8, 9)$

34) $A(3, 5, 1), B(0, 0, -9)$

35) $A(-3, -7, -12), B(-7, 1, 8)$

36) $A(2, -5, 4), B(1, 3, -6)$

37) $A(8, 12, 7), B(2, -3, 11)$

38) $A(3, 14, -5), B(7, -1, 0)$

39) $A(1, -18, -13), B(21, 14, 29)$

المحتوى الرياضي

خصائص المتجهات في الفضاء

خصائص العمليات على المتجهات في الفضاء تشبه مثيلاتها في المستوى. ويمكن تعريف عمليات الجمع والطرح والضرب في عددٍ ثابتٍ، وإيجاد طول المتجه، كما يمكن كتابة المتجه على صورة توافقٍ خطيٍّ لمتجهات الوحدة $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$، فإذا كان: $\mathbf{a} = \langle a_1, a_2, a_3\rangle, \mathbf{b} = \langle b_1, b_2, b_3\rangle$، وكان n أيَّ عددٍ حقيقيٍّ، فإن:

- $\mathbf{a} = \mathbf{b}$ إذا وفقط إذا كانت: $a_1 = b_1$، $a_2 = b_2$، $a_3 = b_3$.
- $\mathbf{a} \pm \mathbf{b} = \langle a_1 \pm b_1, a_2 \pm b_2, a_3 \pm b_3\rangle$
- $n\mathbf{a} = \langle na_1, na_2, na_3\rangle$
- $|\mathbf{a}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}$

3 التدريب

التقويم التكويني

استعمل الأسئلة 1-39 ؛ للتأكد من فهم الطلاب.

ثم استعمل الجدول أسفل هذه الصفحة؛ لتعيين الواجبات المنزلية للطلاب بحسب مستوياتهم.

تنويع الواجبات المنزلية

المستوى	الأسئلة
دون دون المتوسط	1–39، 54–61
ضمن ضمن المتوسط	1–39 فردي ، 40–51، 54–61
فوق فوق المتوسط	40–61

إذا كانت N منتصف $\overline{MP}$ ، فأوجد إحداثيات النقطة P في كلٍّ ممّا يأتي:

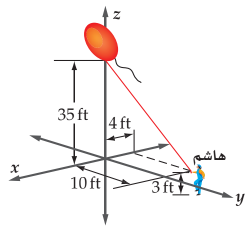
40) $M(3, 4, 5), N\left(\frac{7}{2}, 1, 2\right)$ **$(4, -2, -1)$**

41) $M(-1, -4, -9), N(-2, 1, -5)$ **$(-3, 6, -1)$**

42) $M(7, 1, 5), N\left(5, -\frac{1}{2}, 6\right)$ **$(3, -2, 7)$**

43) $M\left(\frac{3}{2}, -5, 9\right), N\left(-2, -\frac{13}{2}, \frac{11}{2}\right)$ **$\left(-\frac{11}{2}, -8, 2\right)$**

44) **تطوُّع:** تطَوَّع هاشم لحمل بالونٍ كدليل في استعراض رياضي. إذا كان البالون يرتفع 35 ft عن سطح الأرض، ويمسك هاشم بالحبل الذي ثبت به البالون على ارتفاع 3 ft عن سطح الأرض، كما في الشكل أدناه، فأوجد طول الحبل إلى أقرب قدم. **34 ft**



حدّد نوع المثلث الذي رؤوسه هي النقاط الثلاث في كلٍّ مما يأتي (قائم الزاوية، أو متطابق الضلعين، أو مختلف الأضلاع): **45–47 انظر ملحق الإجابات**

45) $A(3, 1, 2)$, $B(5, -1, 1)$, $C(1, 3, 1)$

46) $A(4, 3, 4)$, $B(4, 6, 4)$, $C(4, 3, 6)$

47) $A(-1, 4, 3)$, $B(2, 5, 1)$, $C(0, -6, 6)$

48) **كرات:** استعمل قانون المسافة بين نقطتين في الفضاء؛ لكتابة صيغة عامة لمعادلة كرة مركزها (h, k, ℓ)، وطول نصف قطرها r . "إرشاد: الكرة هي مجموعة نقاط في الفضاء تبعد بعدًا ثابتًا (نصف القطر) عن نقطة ثابتة (المركز)". **انظر ملحق الإجابات**

استعمل الصيغة العامة لمعادلة الكرة التي وجدتها في السؤال 48؛ لإيجاد معادلة الكرة المعطى مركزها، وطول نصف قطرها في كلٍّ مما يأتي:

49) مركزها $(-4, -2, 3)$ ، طول نصف قطرها 4 **49-52 انظر الهامش**

50) مركزها $(6, 0, -1)$ ، طول نصف قطرها $\frac{1}{2}$

51) مركزها $(5, -3, 4)$ ، طول نصف قطرها $\sqrt{3}$

52) مركزها $(0, 7, -1)$ ، طول نصف قطرها 12

مسائل مهارات التفكير العليا

53) **تحدٍّ:** إذا كانت M هي نقطة منتصف القطعة المستقيمة الواصلة بين النقطتين: $M_1(-1, 2, -5), M_2(3, 8, -1)$ ، فأوجد إحداثيات منتصف القطعة المستقيمة M_1M . **$(0, 3.5, -4)$**

54) **اكتب:** اذكر موقفًا يكون فيه استعمال النظام الإحداثي الثنائي الأبعاد أكثر معقولية، وآخر يكون فيه استعمال النظام الإحداثي الثلاثي الأبعاد أكثر منطقية. **انظر ملحق الإجابات**

مراجعة تراكمية

أوجد الصورة الإحداثية وطول $\overrightarrow{AB}$ المُعطاة نقطتا بدايته ونهايته في كلٍّ ممّا يأتي: (الدرس 2-5)

55) $A(6, -4), B(-7, -7)$ **$\langle -13, -3\rangle, \sqrt{178} \approx 13.3$**

56) $A(-4, -8), B(1, 6)$ **$\langle 5, 14\rangle, \sqrt{221} \approx 14.9$**

57) $A(-5, -12), B(1, 6)$ **$\langle 6, 18\rangle, 6\sqrt{10} \approx 19$**

اكتب $\overrightarrow{DE}$ المعطاة نقطتا بدايته ونهايته على صورة توافقٍ خطيٍّ لمتجهَي الوحدة $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$ في كلٍّ ممّا يأتي: (الدرس 2-5)

58) $D\left(-5, \frac{2}{3}\right), E\left(-\frac{4}{5}, 0\right)$ **$\frac{21}{5}\mathbf{i} + -\frac{2}{3}\mathbf{j}$**

59) $D\left(-\frac{1}{2}, \frac{4}{7}\right), E\left(-\frac{3}{4}, \frac{5}{7}\right)$ **$-\frac{1}{4}\mathbf{i} + \frac{1}{7}\mathbf{j}$**

60) $D(9.7, -2.4), E(-6.1, -8.5)$ **$-15.8\mathbf{i} + -6.1\mathbf{j}$**

تدريب على اختبار

61) ما نوع المثلث الذي رؤوسه هي النقاط $A(0, 3, 5)$, $B(1, 0, 2)$, $C(0, -3, 5)$ ؟ **B**

A قائم الزاوية

B متطابق الضلعين

C متطابق الأضلاع

D مختلف الأضلاع

تنبيه!

أخطاء شائعة قد يجد بعض الطلاب صعوبة في البدء بحل التمارين 47–45؛ لذا ذكِّرهم بأن المثلث القائم الزاوية فيه زاوية قياسها °90 وضلعان متعامدان، وأن المثلث المتطابق الضلعين فيه ضلعان لهما الطول نفسه، وأن أطوال أضلاع المثلث المتطابق الأضلاع متساوية في الطول، وأنه لا يوجد ضلعان لهما الطول نفسه في المثلث المختلف الأضلاع.

4 التقويم

تعلُّم لاحق اطلب إلى الطلاب كتابة فقرة حول ما تعلّموه في هذا الدرس، وكيف سيساعدهم في الدرس القادم المتعلق بإيجاد الزاوية بين متجهَين.

التقويم التكويني

تحقق من فهم الطلاب الدرس 4-5 بإعطائهم:

الاختبار القصير 3، ص (12)

إجابات:

49) $(x+4)^2 + (y+2)^2 + (z-3)^2 = 16$

50) $(x-6)^2 + y^2 + (z+1)^2 = \frac{1}{4}$

51) $(x-5)^2 + (y+3)^2 + (z-4)^2 = 3$

52) $x^2 + (y-7)^2 + (z+1)^2 = 144$

تنويع التعليم

فوق

توسع يكون الجسم في وضع اتزان، إذا كانت محصلة القوى المؤثرة فيه صفرًا، اسأل الطلاب إذا أثرت ثلاث قوى في جسم ومُثلت بالمتجهات $\langle -1, 2, -6\rangle$ ، $\langle 5, 2, 3\rangle$ ، $\langle 4, -1, 3\rangle$، فما المتجه الرابع الذي يؤثر في الجسم ويجعله في حالة اتزان. **$\langle -8, -3, 0\rangle$**

5-5 ملاحظات الدرس

5-5 الضرب الداخلي والضرب الاتجاهي للمتجهات في الفضاء

Dot and Cross Products of Vectors in Space

فيما سبق:

درست الضرب الداخلي لمتجهين في المستوى.

الدرس (3–5)

والآن:

- أجدُ الضرب الداخلي لمتجهين، والزاوية بينهما في الفضاء.
- أجدُ الضرب الاتجاهي للمتجهات، وأستعمله في إيجاد المساحات والحجوم.

المفردات:

الضرب الاتجاهي
cross product

متوازي السطوح
parallelepiped

الضرب القياسي الثلاثي
triple scalar product

www.obeikaneducation.com

لماذا؟

يستعمل طارق المتجهات؛ ليتحقق ممَّا إذا كان خطَّا سير طائرتين متوازيين أم لا؛ وذلك بمعرفة إحداثيات نقطتَي الإقلاع، ونقطتين تصلان إليهما بعد فترة زمنية معينة.

الضرب الداخلي في الفضاء إيجاد الضرب الداخلي لمتجهين في الفضاء يشبه إيجاده لمتجهين في المستوى، وكما هي الحال مع المتجهات في المستوى، يتعامد متجهان غير صفريين في الفضاء، إذا وفقط إذا كان حاصل ضربهما الداخلي صفرًا.

مفهوم أساسي — الضرب الداخلي والمتجهات المتعامدة في الفضاء

يُعرَّف الضرب الداخلي للمتجهين: $\mathbf{a} = \langle a_1, a_2, a_3\rangle , \mathbf{b} = \langle b_1, b_2, b_3\rangle$ في الفضاء كالآتي:
$\mathbf{a}\cdot\mathbf{b} = a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3$ ، ويكون المتجهان غير الصفريين $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ متعامدين، إذا وفقط إذا كان $\mathbf{a}\cdot\mathbf{b} = 0$

مثال 1 — إيجاد الضرب الداخلي لتحديد المتجهات المتعامدة

أوجد حاصل الضرب الداخلي للمتجهين $\mathbf{u}, \mathbf{v}$ في كلٍّ مما يأتي، ثم حدِّد ما إذا كانا متعامدين:

a) $\mathbf{u} = \langle -7, 3, -3\rangle, \mathbf{v} = \langle 5, 17, 5\rangle$

$$\mathbf{u}\cdot\mathbf{v} = -7(5) + 3(17) + (-3)(5)$$
$$= -35 + 51 + (-15) = 1$$

وبما أن $\mathbf{u}\cdot\mathbf{v} \neq 0$ ، فإن $\mathbf{u}, \mathbf{v}$ غير متعامدين .

b) $\mathbf{u} = \langle 3, -3, 3\rangle, \mathbf{v} = \langle 4, 7, 3\rangle$

$$\mathbf{u}\cdot\mathbf{v} = 3(4) + (-3)(7) + 3(3)$$
$$= 12 + (-21) + 9 = 0$$

وبما أن $\mathbf{u}\cdot\mathbf{v} = 0$ ، فإن $\mathbf{u}, \mathbf{v}$ متعامدان.

تحقق من فهمك

أوجد حاصل الضرب الداخلي للمتجهين $\mathbf{u}, \mathbf{v}$ في كلٍّ مما يأتي، ثم حدِّد ما إذا كانا متعامدين أم لا:

1A) $\mathbf{u} = \langle 3, -5, 4\rangle, \mathbf{v} = \langle 5, 7, 5\rangle$ 0 ؛ متعامدان

1B) $\mathbf{u} = \langle 4, -2, -3\rangle, \mathbf{v} = \langle 1, 3, -2\rangle$ 4 ؛ غير متعامدين

وكما هو في المتجهات في المستوى، إذا كانت θ هي الزاوية بين متجهين غير صفريين $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ في الفضاء فإن $\cos\theta = \frac{\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}}{|\mathbf{a}|\,|\mathbf{b}|}$.

مثال 2 — الزاوية بين متجهين في الفضاء

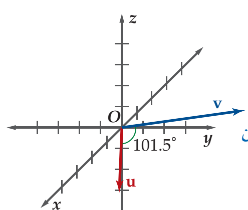
أوجد قياس الزاوية θ بين $\mathbf{u}, \mathbf{v}$ ، إذا كان: $\mathbf{u} = \langle 3, 2, -1\rangle, \mathbf{v} = \langle -4, 3, -2\rangle$ ، إلى أقرب جزءٍ من عشرة.

$\cos\theta = \frac{\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}}{|\mathbf{u}|\,|\mathbf{v}|}$ الزاوية بين متجهين

$\cos\theta = \frac{\langle 3, 2, -1\rangle\cdot\langle -4, 3, -2\rangle}{|\langle 3, 2, -1\rangle|\,|\langle -4, 3, -2\rangle|}$ $\mathbf{u} = \langle 3, 2, -1\rangle , \mathbf{v} = \langle -4, 3, -2\rangle$

$\cos\theta = \frac{-4}{\sqrt{14}\,\sqrt{29}}$ أوجد الضرب الداخلي، وطول كلٍّ من المتجهين

$\theta = \cos^{-1}\frac{-4}{\sqrt{406}} \approx 101.5°$ بسِّط وحُل بالنسبة إلى θ



أي أن قياس الزاوية بين $\mathbf{u}, \mathbf{v}$ هو $101.5°$ تقريبًا.

تحقق من فهمك

2) أوجد قياس الزاوية بين المتجهين: $\mathbf{u} = -4\mathbf{i} + 2\mathbf{j} + \mathbf{k}, \mathbf{v} = 4\mathbf{i} + 3\mathbf{k}$ ، إلى أقرب منزلةٍ عشرية. $124.6°$

1 التركيز

الترابط الرأسي

ما قبل الدرس 5-5

إيجاد الضرب الداخلي لمتجهَين في المستوى الإحداثي.

الدرس 5-5

إيجاد الضرب الداخلي لمتجهَين والزاوية بينهما في الفضاء.

إيجاد الضرب الاتجاهي للمتجهات واستعماله في إيجاد المساحات والحجوم.

ما بعد الدرس 5-5

إيجاد متوسط السرعة المتجهة، والسرعة المتجهة اللحظية.

2 التدريس

أسئلة التعزيز

اطلب إلى الطلاب قراءة فقرة "لماذا؟".

واسأل:

- كيف تجد المتجه الذي يمثل مسار كلٍّ من الطائرتين؟ بطرح إحداثيات نقطة الإقلاع من إحداثيات النقطة التي تصل إليها الطائرة بعد الفترة الزمنية المحددة.
- كيف تتحقق من توازي خطَّي سيرهما؟ إذا كانت الزاوية بين المتجهين (المسارين) $0°$ أو $180°$، أو إذا كانت النسبة بين الإحداثيات المتناظرة ثابتةً.

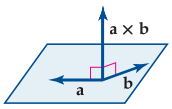
الضرب الداخلي في الفضاء

المثال 1 يُبيّن كيفية إيجاد الضرب الداخلي لمتجهين في الفضاء؛ للتحقق من كونهما متعامدين.

المثال 2 يُبيّن كيفية إيجاد الزاوية بين متجهَين في الفضاء.

مصادر الدرس 5-5

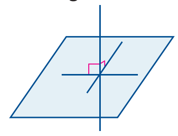
المصدر	دون المتوسط	ضمن المتوسط	فوق المتوسط
دليل المعلم	• تنويع التعليم ص (41)	• تنويع التعليم ص (41)	• تنويع التعليم ص (41, 43)
كتاب التمارين	• ص (8)	• ص (8)	• ص (8)
مصادر المعلم للأنشطة الصفية	• تدريبات إعادة التعليم، ص (22, 23) • تدريبات حل المسألة، ص (24)	• تدريبات حل المسألة، ص (24) • التدريبات الإثرائية، ص (25)	• تدريبات حل المسألة، ص (24) • التدريبات الإثرائية، ص (25)



الضرب الاتجاهي هو نوع آخر من الضرب بين المتجهات في الفضاء، وبخلاف الضرب الداخلي، فإن **الضرب الاتجاهي** لمتجهين $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ هو متجه وليس عددًا، ويُرمز له بالرمز $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$، ويُقرأ a cross b ، ويكون المتجه $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ عموديًّا على المستوى الذي يحوي المتجهين $\mathbf{a}, \mathbf{b}$.

إرشادات للدراسة

يكون المستقيم عموديًّا على مستوى، إذا كان عموديًّا على كل مستقيم يقع في هذا المستوى ويتقاطع معه.



مفهوم أساسي — الضرب الاتجاهي للمتجهات في الفضاء

إذا كان: $\mathbf{a} = a_1\mathbf{i} + a_2\mathbf{j} + a_3\mathbf{k}, \mathbf{b} = b_1\mathbf{i} + b_2\mathbf{j} + b_3\mathbf{k}$ ، فإن الضرب الاتجاهي للمتجهين $\mathbf{a}, \mathbf{b}$

هو المتجه: $\mathbf{a} \times \mathbf{b} = (a_2b_3 - a_3b_2)\mathbf{i} - (a_1b_3 - a_3b_1)\mathbf{j} + (a_1b_2 - a_2b_1)\mathbf{k}$

إذا طبَّقنا قاعدة حساب قيمة محدّدة من الدرجة الثالثة على المحدّدة أدناه، والتي تتضمن متجهات الوحدة $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$ ، وإحداثيات كلٍّ من $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ ، فإننا نتوصل إلى القاعدة نفسها للمتجه $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$.

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix}$$

بوضع متجهات الوحدة $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$ في الصف 1

بوضع إحداثيات $\mathbf{a}$ في الصف 2

بوضع إحداثيات $\mathbf{b}$ في الصف 3

$$\begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix}\mathbf{i} - \begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ b_1 & b_3 \end{vmatrix}\mathbf{j} + \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}\mathbf{k}$$

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = (a_2 b_3 - a_3 b_2)\mathbf{i} - (a_1 b_3 - a_3 b_1)\mathbf{j} + (a_1 b_2 - a_2 b_1)\mathbf{k}$$

مثال 3 إيجاد الضرب الاتجاهي لمتجهين

أوجد الضرب الاتجاهي للمتجهين: $\mathbf{u} = \langle 3, -2, 1\rangle, \mathbf{v} = \langle -3, 3, 1\rangle$، ثم بيّن أن $\mathbf{u} \times \mathbf{v}$ يعامد كلًّا من $\mathbf{u}, \mathbf{v}$.

$$\mathbf{u} \times \mathbf{v} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 3 & -2 & 1 \\ -3 & 3 & 1 \end{vmatrix} \quad \mathbf{u} = 3\mathbf{i} - 2\mathbf{j} + \mathbf{k}, \mathbf{v} = -3\mathbf{i} + 3\mathbf{j} + \mathbf{k}$$

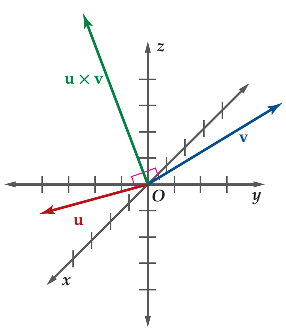
$$= \begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 3 & 1 \end{vmatrix}\mathbf{i} - \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ -3 & 1 \end{vmatrix}\mathbf{j} + \begin{vmatrix} 3 & -2 \\ -3 & 3 \end{vmatrix}\mathbf{k}$$ قاعدة إيجاد قيمة محدّدة الدرجة الثالثة

$$= (-2 - 3)\mathbf{i} - [3 - (-3)]\mathbf{j} + (9 - 6)\mathbf{k}$$ أوجد قيمة محدّدة الدرجة الثانية

$$= -5\mathbf{i} - 6\mathbf{j} + 3\mathbf{k}$$ بسّط

$$= \langle -5, -6, 3\rangle$$ الصورة الإحداثية

ولإثبات أن $\mathbf{u} \times \mathbf{v}$ يعامد كلًّا من $\mathbf{u}, \mathbf{v}$ جبريًّا، أوجد الضرب الداخلي لـ $\mathbf{u} \times \mathbf{v}$ مع كلٍّ من $\mathbf{u}, \mathbf{v}$.



$(\mathbf{u} \times \mathbf{v}) \cdot \mathbf{u}$

$= \langle -5, -6, 3\rangle \cdot \langle 3, -2, 1\rangle$

$= -5(3) + (-6)(-2) + 3(1)$

$= -15 + 12 + 3 = 0$ ✓

$(\mathbf{u} \times \mathbf{v}) \cdot \mathbf{v}$

$= \langle -5, -6, 3\rangle \cdot \langle -3, 3, 1\rangle$

$= -5(-3) + (-6)(3) + 3(1)$

$= 15 + (-18) + 3 = 0$ ✓

بما أن حاصل الضرب الداخلي في الحالتين يساوي صفرًا، فإن $\mathbf{u} \times \mathbf{v}$ عمودي على كلٍّ من $\mathbf{v}, \mathbf{u}$.

تنبيه!

الضرب الاتجاهي

يطبق الضرب الاتجاهي على المتجهات في نظام الإحداثيات الثلاثي الأبعاد فقط، ولا يطبق على المتجهات في المستوى الإحداثي.

تحقق من فهمك (3A, B للإثبات انظر ملحق الإجابات

أوجد الضرب الاتجاهي للمتجهين $\mathbf{u}, \mathbf{v}$ في كلٍّ ممايأتي، ثم بيّن أن $\mathbf{u} \times \mathbf{v}$ يعامد كلًّا من $\mathbf{u}, \mathbf{v}$:

(3A $\mathbf{u} = \langle 4, 2, -1\rangle, \mathbf{v} = \langle 5, 1, 4\rangle$ (3B $\mathbf{u} = \langle -2, -1, -3\rangle, \mathbf{v} = \langle 5, 1, 4\rangle$

(3A $\langle 9, -21, -6\rangle$

(3B $\langle -1, -7, 3\rangle$

مثالان إضافيان

1 أوجد حاصل الضرب الداخلي للمتجهين $\mathbf{u}$ و $\mathbf{v}$ في كلٍّ مما يأتي، ثم حدد ما إذا كانا متعامدين:

(a $\mathbf{u} = \langle -1, 6, -3\rangle$, $\mathbf{v} = \langle 3, -1, -3\rangle$.

0، متعامدان

(b $\mathbf{u} = \langle 2, 4, -6\rangle$, $\mathbf{v} = \langle -3, 2, 4\rangle$.

−22، غير متعامدين

2 أوجد قياس الزاوية θ بين $\mathbf{u}$، $\mathbf{v}$ إذا كان: $\mathbf{u} = \langle -4, -1, -3\rangle$ ، $\mathbf{v} = \langle 7, 3, 4\rangle$ إلى أقرب منزلةٍ عشرية. $168.6°$ تقريبًا

التقويم التكويني

استعمل تدريبات "تحقق من فهمك" بعد كل مثال؛ للتحقق من مدى فهم الطلاب المفاهيم.

إرشادات للمعلم الجديد

محددة المصفوفة من الرتبة 3 × 3

يمكن أن يستعمل الطلاب قاعدة الأقطار؛ لحساب قيمة محددة المصفوفة من الرتبة 3×3.

الضرب الاتجاهي

المثال 3 يُبيِّن كيفية إيجاد الضرب الاتجاهي لمتجهَين في الفضاء.

المثال 4 يُبيِّن كيفية إيجاد مساحة متوازي أضلاع في الفضاء.

المثال 5 يُبيِّن كيفية إيجاد حجم متوازي سطوح.

مثالان إضافيان

4 أوجد مساحة متوازي الأضلاع الذي فيه: $\mathbf{u} = -3\mathbf{i} - 4\mathbf{j} + 2\mathbf{k}$, $\mathbf{v} = 5\mathbf{i} - 4\mathbf{j} - \mathbf{k}$ ضلعان متجاوران. 34.89 وحدةً مربعةً تقريبًا.

5 أوجد حجم متوازي السطوح الذي فيه: $\mathbf{t} = -3\mathbf{i} + 3\mathbf{j} + 2\mathbf{k}$, $\mathbf{u} = -3\mathbf{i} - 4\mathbf{j} + 2\mathbf{k}$, $\mathbf{v} = 5\mathbf{i} - 4\mathbf{j} - \mathbf{k}$ أحرف متجاورة. 49 وحدةً مكعبةً.

مثال إضافي

3 أوجد الضرب الاتجاهي للمتجهين: $\mathbf{u} = \langle 6, -1, -2\rangle, \mathbf{v} = \langle -1, -4, 2\rangle$، ثم بيّن أن $\mathbf{u} \times \mathbf{v}$ يُعامد كلًّا من $\mathbf{u}, \mathbf{v}$، $\langle -10, -10, -25\rangle$

$(\mathbf{u} \times \mathbf{v}) \cdot \mathbf{u} = \langle -10, -10, -25\rangle \cdot \langle 6, -1, -2\rangle$

$= -60 + 10 + 50 = 0$

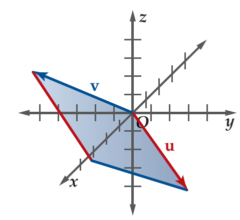
أي أن: $\mathbf{u} \times \mathbf{v}$ يعامد $\mathbf{u}$

$(\mathbf{u} \times \mathbf{v}) \cdot \mathbf{v} = \langle -10, -10, -25\rangle \cdot \langle -1, -4, 2\rangle$

$= 10 + 40 - 50 = 0$

أي أن: $\mathbf{u} \times \mathbf{v}$ يعامد $\mathbf{v}$

للضرب الاتجاهي تطبيقات هندسية عديدة، فمثلًا مقدار المتجه $|\mathbf{u} \times \mathbf{v}|$ يُعبِّر عن مساحة متوازي الأضلاع الذي فيه $\mathbf{u}, \mathbf{v}$ ضلعان متجاوران كما في الشكل **5.5.1** .



الشكل 5.5.1

مثال 4 مساحة متوازي أضلاعٍ في الفضاء

أوجد مساحة متوازي الأضلاع الذي فيه: $\mathbf{u} = 2\mathbf{i} + 4\mathbf{j} - 3\mathbf{k}, \mathbf{v} = \mathbf{i} - 5\mathbf{j} + 3\mathbf{k}$ ضلعان متجاوران.

الخطوة 1 أوجد $\mathbf{u} \times \mathbf{v}$

$$\mathbf{u} \times \mathbf{v} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 2 & 4 & -3 \\ 1 & -5 & 3 \end{vmatrix} \qquad \mathbf{u} = 2\mathbf{i} + 4\mathbf{j} - 3\mathbf{k}, \mathbf{v} = \mathbf{i} - 5\mathbf{j} + 3\mathbf{k}$$

$$= \begin{vmatrix} 4 & -3 \\ -5 & 3 \end{vmatrix}\mathbf{i} - \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 1 & 3 \end{vmatrix}\mathbf{j} + \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 1 & -5 \end{vmatrix}\mathbf{k}$$ بإيجاد قيمة محدّدة الدرجة الثالثة

$$= -3\mathbf{i} - 9\mathbf{j} - 14\mathbf{k}$$ بإيجاد قيمة محدّدة الدرجة الثانية

الخطوة 2 أوجد طول $\mathbf{u} \times \mathbf{v}$

$$|\mathbf{u} \times \mathbf{v}| = \sqrt{(-3)^2 + (-9)^2 + (-14)^2}$$ طول متجه في الفضاء

$$= \sqrt{286} \approx 16.91$$ بسِّط

أي أن مساحة متوازي الأضلاع في الشكل **5.5.1** ، تساوي 16.91 وحدةً مربعةً تقريبًا.

تحقق من فهمك $\sqrt{545}$ أو حوالي 23.35 وحدةً مربعةً.

4) أوجد مساحة متوازي الأضلاع الذي فيه: $\mathbf{u} = -6\mathbf{i} - 2\mathbf{j} + 3\mathbf{k}, \mathbf{v} = 4\mathbf{i} + 3\mathbf{j} + \mathbf{k}$ ضلعان متجاوران .

الضرب القياسي الثلاثي إذا التقت ثلاثة متجهات في مستويات مختلفة في نقطة البداية، فإنها تكوّن أحرفًا متجاورة **لمتوازي سطوح**، وهو عبارة عن مجسم له ستة أوجهٍ، كل وجهٍ منها على شكل متوازي أضلاع كما في الشكل **5.5.2** أدناه، إن القيمة المطلقة **للضرب القياسيّ الثلاثي** لهذه المتجهات يُمثِّل حجم متوازي السطوح.

مفهوم أساسي الضرب القياسي الثلاثي

إذا كان: $\mathbf{t} = t_1\mathbf{i} + t_2\mathbf{j} + t_3\mathbf{k}, \mathbf{u} = u_1\mathbf{i} + u_2\mathbf{j} + u_3\mathbf{k}, \mathbf{v} = v_1\mathbf{i} + v_2\mathbf{j} + v_3\mathbf{k}$ ،

فإن الضرب القياسي الثلاثي للمتجهات $\mathbf{t}, \mathbf{u}, \mathbf{v}$ يُعرف كالآتي

$$\mathbf{t} \cdot (\mathbf{u} \times \mathbf{v}) = \begin{vmatrix} t_1 & t_2 & t_3 \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{vmatrix}$$

مثال 5 حجم متوازي السطوح

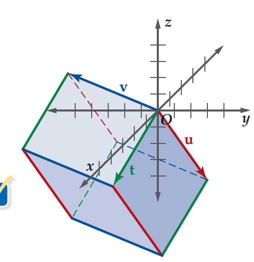
أوجد حجم متوازي السطوح الذي فيه: $\mathbf{t} = 4\mathbf{i} - 2\mathbf{j} - 2\mathbf{k}, \mathbf{u} = 2\mathbf{i} + 4\mathbf{j} - 3\mathbf{k}, \mathbf{v} = \mathbf{i} - 5\mathbf{j} + 3\mathbf{k}$ أحرف متجاورة.

$$\mathbf{t} \cdot (\mathbf{u} \times \mathbf{v}) = \begin{vmatrix} 4 & -2 & -2 \\ 2 & 4 & -3 \\ 1 & -5 & 3 \end{vmatrix} \qquad \begin{matrix} \mathbf{t} = 4\mathbf{i} - 2\mathbf{j} - 2\mathbf{k} \\ \mathbf{u} = 2\mathbf{i} + 4\mathbf{j} - 3\mathbf{k} \\ \mathbf{v} = \mathbf{i} - 5\mathbf{j} + 3\mathbf{k} \end{matrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 4 & -3 \\ -5 & 3 \end{vmatrix}(4) - \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 1 & 3 \end{vmatrix}(-2) + \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 1 & -5 \end{vmatrix}(-2)$$ أوجد قيمة محدّدة المصفوفة من الرتبة 3×3

$$= -12 + 18 + 28 = 34$$ بسّط

أي أن حجم متوازي السطوح في الشكل **5.5.2** هو $|\mathbf{t} \cdot (\mathbf{u} \times \mathbf{v})|$ ، ويساوي 34 وحدةً مكعبةً.



الشكل 5.5.2

تحقق من فهمك

5) أوجد حجم متوازي السطوح الذي فيه: $\mathbf{t} = 2\mathbf{j} - 5\mathbf{k}, \mathbf{u} = -6\mathbf{i} - 2\mathbf{j} + 3\mathbf{k}, \mathbf{v} = 4\mathbf{i} + 3\mathbf{j} + \mathbf{k}$ أحرف متجاورة. 86 وحدةً مكعبةً.

إرشادات للمعلم الجديد

الضرب الداخلي والضرب الإتجاهي

لاحظ أن عملية الضرب الداخلي إبدالية بخلاف عملية الضرب الاتجاهي.

التعليم باستعمال التقنيات

نظام استجابة الطالب زوّد الطلاب بعدد من الأمثلة على مصفوفات من الرتبة 2×2 مثل:

$$\begin{vmatrix} -3 & 4 \\ -2 & -5 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 2 & 6 \\ 3 & -5 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} -2 & 3 \\ 3 & 5 \end{vmatrix}$$

واسأل الطلاب أن يحددوا ما إذا كانت قيمة محددة كل من المصفوفات أعلاه موجبة أو سالبة. واختيار الرمز إشارة معينة مثل وضع كف اليد بشكل أفقي إذا كانت سالبة وإشارة أخرى مثل وضع كف اليد بشكل عمودي إذا كانت موجبة.

المحتوى الرياضي

متوازي السطوح هو مجسم ثلاثي الأبعاد في الفضاء، له ستة أوجه، كل منها على شكل متوازي أضلاع، وإذا التقت ثلاثة متجهات من الأحرف الاثني عشر في مستويات مختلفة في نقطة واحدة، فإنها تشكل أحرفًا متجاورة لمتوازي السطوح.

وحجم متوازي السطوح يساوي ناتج ضرب مساحة سطح القاعدة في الارتفاع، كما يساوي الضرب القياسي لثلاثيات المتجهات.

وهناك حالات خاصة من متوازي السطوح منها:

المكعب (جميع أوجهه مربعات).

متوازي المستطيلات (جميع أوجهه مستطيلات).

إرشادات للمعلم الجديد

نبه الطلاب إلى أن اختلاف الترتيب للمتجهات الثلاثة في الضرب القياسي الثلاثي لا يؤثر على القيمة المطلقة للناتج.

تنويع التعليم

دون ضمن فوق

المتعلمون المنطقيون اطلب إلى الطلاب إيجاد الضرب الاتجاهي للمتجهين: $\mathbf{u} = 2\mathbf{i} - 3\mathbf{j} + 4\mathbf{k}, \mathbf{v} = 3\mathbf{i} - 2\mathbf{j} - 5\mathbf{k}$ ، بوضع العدد المناسب في الفراغات في المعادلة الآتية:

$$\mathbf{u} \times \mathbf{v} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \boxed{\mathbf{j}} & \mathbf{k} \\ 2 & -3 & \boxed{4} \\ \boxed{3} & -2 & \boxed{-5} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -3 & 4 \\ \boxed{-2} & -5 \end{vmatrix}\mathbf{i} \boxed{-} \begin{vmatrix} \boxed{2} & 4 \\ \boxed{3} & -5 \end{vmatrix}\boxed{\mathbf{j}} + \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 3 & \boxed{-2} \end{vmatrix}\mathbf{k} = \boxed{23}\,\mathbf{i} - \boxed{-22}\,\mathbf{j} + \boxed{5}\,\mathbf{k}$$

تدرب وحل المسائل

أوجد الضرب الداخلي للمتجهين $\mathbf{u}, \mathbf{v}$ في كلٍّ مما يأتي، ثم حدِّد ما إذا كانا متعامدين أم لا: (مثال 1)

1) $\mathbf{u} = \langle 3, -9, 6\rangle, \mathbf{v} = \langle -8, 2, 7\rangle$ 0؛ متعامدان

2) $\mathbf{u} = \langle 5, 0, -4\rangle, \mathbf{v} = \langle 6, -1, 4\rangle$ 14؛ غير متعامدين

3) $\mathbf{u} = \langle -7, -3, 1\rangle, \mathbf{v} = \langle -4, 5, -13\rangle$ 0؛ متعامدان

4) $\mathbf{u} = \langle 11, 4, -2\rangle, \mathbf{v} = \langle -1, 3, 8\rangle$ -15؛ غير متعامدين

5) $\mathbf{u} = 6\mathbf{i} - 2\mathbf{j} - 5\mathbf{k}, \mathbf{v} = 3\mathbf{i} - 2\mathbf{j} + 6\mathbf{k}$ -8؛ غير متعامدين

6) $\mathbf{u} = 9\mathbf{i} - 9\mathbf{j} + 6\mathbf{k}, \mathbf{v} = 6\mathbf{i} + 4\mathbf{j} - 3\mathbf{k}$ 0؛ متعامدان

7) **كيمياء:** تقع إحدى ذرتَي الهيدروجين في جُزيء الماء عند $\langle 55.5, 55.5, -55.5\rangle$، والأخرى عند $\langle -55.5, -55.5, -55.5\rangle$، وذلك في الوقت الذي تقع فيه ذرة الأكسجين في نقطة الأصل. أوجد الزاوية بين المتجهين اللّذين يكوّنان رابطة الأكسجين – الهيدروجين مقرَّبة إلى أقرب جزء من عشرة. (مثال 2) $109.5°$

أوجد قياس الزاوية θ بين المتجهين $\mathbf{u}, \mathbf{v}$ في كلٍّ مما يأتي، وقرّب الناتج إلى أقرب جزءٍ من عشرة: (مثال 2)

8) $\mathbf{u} = \langle 6, -5, 1\rangle, \mathbf{v} = \langle -8, -9, 5\rangle$ $88.9°$

9) $\mathbf{u} = \langle -8, 1, 12\rangle, \mathbf{v} = \langle -6, 4, 2\rangle$ $45.4°$

10) $\mathbf{u} = \langle 10, 0, -8\rangle, \mathbf{v} = \langle 3, -1, -12\rangle$ $37.5°$

11) $\mathbf{u} = -3\mathbf{i} + 2\mathbf{j} + 9\mathbf{k}, \mathbf{v} = 4\mathbf{i} + 3\mathbf{j} - 10\mathbf{k}$ $152.3°$

12-15) انظر ملحق الإجابات

أوجد الضرب الاتجاهي للمتجهين $\mathbf{u}, \mathbf{v}$ في كلٍّ مما يأتي، ثم بيِّن أن $\mathbf{u} \times \mathbf{v}$ عمودي على كلٍّ من $\mathbf{u}, \mathbf{v}$: (مثال 3)

12) $\mathbf{u} = \langle -1, 3, 5\rangle, \mathbf{v} = \langle 2, -6, -3\rangle$ $\langle 21, 7, 0\rangle$

13) $\mathbf{u} = \langle 4, 7, -2\rangle, \mathbf{v} = \langle -5, 9, 1\rangle$ $\langle 25, 6, 71\rangle$

14) $\mathbf{u} = \langle 3, -6, 2\rangle, \mathbf{v} = \langle 1, 5, -8\rangle$ $\langle 38, 26, 21\rangle$

15) $\mathbf{u} = -2\mathbf{i} - 2\mathbf{j} + 5\mathbf{k}, \mathbf{v} = 7\mathbf{i} + \mathbf{j} - 6\mathbf{k}$ $\langle 7, 23, 12\rangle$

أوجد مساحة متوازي الأضلاع الذي فيه $\mathbf{u}, \mathbf{v}$ ضلعان متجاوران في كلٍّ مما يأتي: (مثال 4) 16-19) انظر الهامش

16) $\mathbf{u} = \langle -9, 1, 2\rangle, \mathbf{v} = \langle 6, -5, 3\rangle$

17) $\mathbf{u} = \langle 4, 3, -1\rangle, \mathbf{v} = \langle 7, 2, -2\rangle$

18) $\mathbf{u} = 6\mathbf{i} - 2\mathbf{j} + 5\mathbf{k}, \mathbf{v} = 5\mathbf{i} - 4\mathbf{j} - 8\mathbf{k}$

19) $\mathbf{u} = \mathbf{i} + 4\mathbf{j} - 8\mathbf{k}, \mathbf{v} = -2\mathbf{i} + 3\mathbf{j} - 7\mathbf{k}$

أوجد حجم متوازي السطوح الذي فيه $\mathbf{t}, \mathbf{u}, \mathbf{v}$ أحرف متجاورة في كلٍّ مما يأتي: (مثال 5)

20) $\mathbf{t} = \langle -1, -9, 2\rangle, \mathbf{u} = \langle 4, -7, -5\rangle, \mathbf{v} = \langle 3, -2, 6\rangle$ 429 وحدة مكعبة

21) $\mathbf{t} = \langle 2, -3, -1\rangle, \mathbf{u} = \langle 4, -6, 3\rangle, \mathbf{v} = \langle -9, 5, -4\rangle$ 85 وحدة مكعبة

22) $\mathbf{t} = \mathbf{i} + \mathbf{j} - 4\mathbf{k}, \mathbf{u} = -3\mathbf{i} + 2\mathbf{j} + 7\mathbf{k}, \mathbf{v} = 2\mathbf{i} - 6\mathbf{j} + 8\mathbf{k}$ 40 وحدة مكعبة

23) $\mathbf{t} = 5\mathbf{i} - 2\mathbf{j} + 6\mathbf{k}, \mathbf{u} = 3\mathbf{i} - 5\mathbf{j} + 7\mathbf{k}, \mathbf{v} = 8\mathbf{i} - \mathbf{j} + 4\mathbf{k}$ 69 وحدة مكعبة

24-27) إجابات ممكنة

أوجد متجهًا غير صفري يعامد المتجه المُعطى في كلٍّ ممّا يأتي:

24) $\langle 3, -8, 4\rangle$ إجابة ممكنة: $\langle 4, 3, 3\rangle$

25) $\langle -1, -2, 5\rangle$ إجابة ممكنة: $\langle 5, 5, 3\rangle$

26) $\left\langle 6, -\frac{1}{3}, -3\right\rangle$ إجابة ممكنة: $\langle 1, 9, 1\rangle$

27) $\langle 7, 0, 8\rangle$ إجابة ممكنة: $\langle -8, 0, 7\rangle$

إذا عُلم كلٌّ من $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}$ ، $\mathbf{v}$، فأوجد حالةً ممكنةً للمتجه $\mathbf{u}$ في كلٍّ مما يأتي:

28) $\mathbf{v} = \langle 2, -4, -6\rangle, \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = -22$ إجابة ممكنة: $\langle 3, 4, 2\rangle$

29) $\mathbf{v} = \left\langle \frac{1}{2}, 0, 4\right\rangle, \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = \frac{31}{2}$ إجابة ممكنة: $\langle -1, -3, 4\rangle$

30) $\mathbf{v} = \langle -2, -6, -5\rangle, \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = 35$ إجابة ممكنة: $\langle -3, 1, -7\rangle$

حدِّد ما إذا كانت النقاط المعطاة واقعةً على استقامةٍ واحدةٍ أم لا؟

31) $(-1, 7, 7), (-3, 9, 11), (-5, 11, 13)$ ليست على استقامة واحدة.

32) $(11, 8, -1), (17, 5, -7), (8, 11, 5)$ ليست على استقامة واحدة.

حدِّد ما إذا كان كل متجهين مما يأتي متوازيين أم لا:

33) $\mathbf{m} = \langle 2, -10, 6\rangle, \mathbf{n} = \langle 3, -15, 9\rangle$ متوازيان.

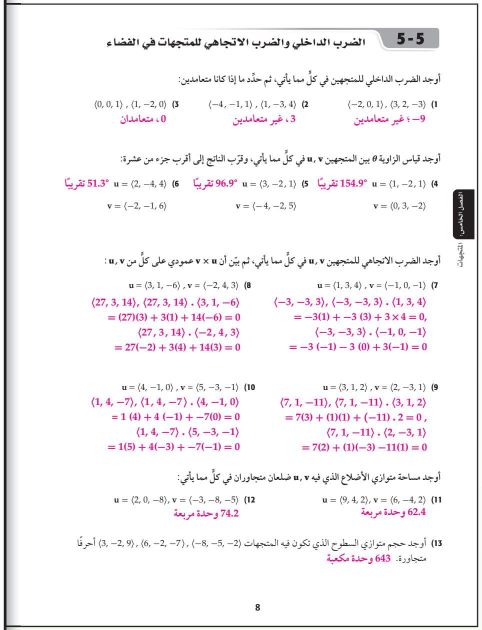
34) $\mathbf{a} = \langle 6, 3, -7\rangle, \mathbf{b} = \langle -4, -2, 3\rangle$ غير متوازيين.

35) اكتب الصورة الإحداثية للمتجه $\mathbf{u}$ الذي يقع في المستوى yz، وطوله 8، ويصنع زاويةً قياسها $60°$ فوق الاتجاه الموجب للمحور y. $\langle 0, 4, 4\sqrt{3}\rangle$

حدِّد ما إذا كان الشكل الرباعي $ABCD$ المُعطاة إحداثيات رؤوسه متوازي أضلاع أم لا، وإذا كان كذلك، فأوجد مساحته، وحدِّد ما إذا كان مستطيلًا أم لا:

36) $A(3, 0, -2), B(0, 4, -1), C(0, 2, 5), D(3, 2, 4)$ ليس متوازي أضلاع

37) $A(7, 5, 5), B(4, 4, 4), C(4, 6, 2), D(7, 7, 3)$ متوازي أضلاع؛ 9.4 وحداتٍ مربعة تقريبًا، مستطيل


5-5 الضرب الداخلي والضرب الاتجاهي للمتجهات في الفضاء

3 التدريب

التقويم التكويني

استعمل الأسئلة 1-23 ؛ للتأكد من فهم الطلاب.

ثم استعمل الجدول أسفل هذه الصفحة؛ لتعيين الواجبات المنزلية للطلاب بحسب مستوياتهم.

تنبيه!

أخطاء شائعة في الأسئلة 20–23 ، قد يعتبر بعض الطلاب أن قيمة حجم متوازي السطوح، يمكن أن تكون سالبة عند تطبيق الضرب القياسي لثلاثيات المتجهات؛ لذا ذكرهم بأن الحجم هو قياس والقياس موجب، لذلك فالحجم هو القيمة المطلقة للضرب القياسي للثلاثيات.

تنويع الواجبات المنزلية

المستوى	الأسئلة
دون دون المتوسط	1–27، 42، 44–55
ضمن ضمن المتوسط	1–39 فردي، 42، 44–55
فوق فوق المتوسط	28–55

إجابات:

16) $13\sqrt{19}$ أو 56.7 وحدة مربعة تقريبًا.

17) $\sqrt{186}$ أو 13.6 وحدة مربعة تقريبًا.

18) $\sqrt{6821}$ أو 82.6 وحدة مربعة تقريبًا.

19) $3\sqrt{74}$ أو 25.8 وحدة مربعة تقريبًا.

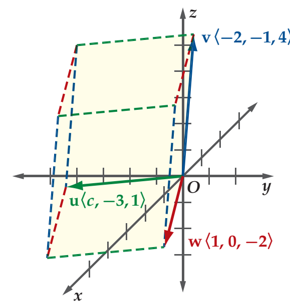
38) عرض جوي: أقلعت طائرتان معًا في عرض جوي، فأقلعت الأولى من موقع إحداثياته $(0, -2, 0)$، وبعد 3 ثوانٍ وصلت موقعًا إحداثياته $(6, -10, 15)$، في حين أقلعت الثانية من موقع إحداثياته $(0, 2, 0)$، وبعد 3 ثوانٍ وصلت موقعًا إحداثياته $(6, 10, 15)$. هل يتوازى خطَّا سير الطائرتين؟ وضِّح إجابتك. انظر الهامش

إذا كان: $\mathbf{u} = \langle 3, 2, -2 \rangle$, $\mathbf{v} = \langle -4, 4, 5 \rangle$، فأوجد كلًّا مما يأتي إن أمكن:

39) $\mathbf{u} \cdot (\mathbf{u} \times \mathbf{v})$ 0

40) $\mathbf{v} \times (\mathbf{u} \cdot \mathbf{v})$ انظر الهامش

41) إذا كانت $\mathbf{v}, \mathbf{w}, \mathbf{u}$ تُمثِّل ثلاثة أحرف متجاورة لمتوازي السطوح في الشكل المجاور، وكان حجمه 7 وحداتٍ مكعبةٍ، فما قيمة c؟ انظر الهامش



مسائل مهارات التفكير العليا

42) تبرير: حدِّد ما إذا كانت العبارة الآتية صحيحة أحيانًا، أو صحيحة دائمًا، أو غير صحيحة أبدًا، برِّر إجابتك.

«لأي متجهين غير صفريين وغير متوازيين، يوجد متجه عمودي على هذين المتجهين». انظر الهامش

43) تحدٍّ: إذا كان: $\mathbf{u} = \langle 4, 6, c \rangle$, $\mathbf{v} = \langle -3, -2, 5 \rangle$، فأوجد قيمة c التي تجعل: $\mathbf{u} \times \mathbf{v} = 34\mathbf{i} - 26\mathbf{j} + 10\mathbf{k}$. 2

44) تبرير: فسِّر لماذا لا يمكن تعريف الضرب الاتجاهي في المستوى. انظر الهامش

45) اكتب: بيِّن طرق الكشف عن توازي متجهَين أو تعامدهما. انظر ملحق الإجابات

مراجعة تراكمية

أوجد طول كل قطعةٍ مستقيمةٍ مما يأتي، والمعطاة نقطتا طرفيها، ثم أوجد إحداثيات نقطة منتصفها: (الدرس 4-5)

46) $(1, 10, 13), (-2, 22, -6)$ $22.67; \left(-\frac{1}{2}, 16, \frac{7}{2}\right)$

47) $(12, -1, -14), (21, 19, -23)$ $23.71; \left(\frac{33}{2}, 9, -\frac{37}{2}\right)$

48) $(-22, 24, -9), (10, 10, 2)$ $36.62; \left(-6, 17, -\frac{7}{2}\right)$

أوجد الضرب الداخلي للمتجهين $\mathbf{u}, \mathbf{v}$ في كلٍّ ممَّا يأتي، ثم حدّد ما إذا كانا متعامدين أم لا: (الدرس 3-5)

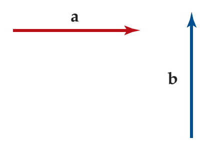
49) $\langle -8, -7 \rangle \cdot \langle 1, 2 \rangle$ -22؛ ليسا متعامدين

50) $\langle -4, -6 \rangle \cdot \langle 7, 5 \rangle$ -58؛ ليسا متعامدين

51) $\langle 6, -3 \rangle \cdot \langle -3, 5 \rangle$ -33؛ ليسا متعامدين

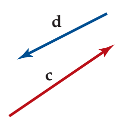
أوجد محصلة كل زوج من المتجهات الآتية، مُستعملًا قاعدة المثلث أو متوازي الأضلاع، ثم حدِّد اتجاهها بالنسبة للأفقي. (الدرس 1-5)

52)



3cm, 45° تقريبًا

53)



0.5cm, 60°

تدريب على اختبار

54) أيٌّ مما يأتي متجهان متعامدان؟ D

A) $\langle 1, 0, 0 \rangle$, $\langle 1, 2, 3 \rangle$

B) $\langle 1, -2, 3 \rangle$, $\langle 2, -4, 6 \rangle$

C) $\langle 3, 4, 6 \rangle$, $\langle 6, 4, 3 \rangle$

D) $\langle 3, -5, 4 \rangle$, $\langle 6, 2, -2 \rangle$

55) ما حاصل الضرب الاتجاهي للمتجهين: $\mathbf{u} = \langle 3, 8, 0 \rangle$, $\mathbf{v} = \langle -4, 2, 6 \rangle$؟ A

A) $48\mathbf{i} - 18\mathbf{j} + 38\mathbf{k}$

B) $48\mathbf{i} - 22\mathbf{j} + 38\mathbf{k}$

C) $46\mathbf{i} - 22\mathbf{j} + 38\mathbf{k}$

D) $46\mathbf{i} - 18\mathbf{j} + 38\mathbf{k}$

4 التقويم

فهم الرياضيات اطلب إلى الطلاب تحديد أيٍّ ممَّا يأتي (قانون المسافة، الضرب في عدد حقيقي، المتجه، المحددة) ترتبط بالضرب الاتجاهي؟ المحددة، المتجه.

التقويم التكويني

تحقق من فهم الطلاب الدرس 5-5 بإعطائهم:

الاختبار القصير 4، ص (12)

إجابات:

38) إجابة ممكنة: لا؛ لأن الزاوية بين المتجهين لا تساوي $0°$ ولا $180°$، وعليه فالمتجهان غير متوازيين.

40) ليس ممكنًا؛ لأن $\mathbf{u}.\mathbf{v}$ كمية قياسية وليست متجهًا، والضرب الاتجاهي يكون لمتجهين.

41) حجم متوازي السطوح يساوي $|\mathbf{u}.(\mathbf{v}\times\mathbf{w})|$

$$\mathbf{v}\times\mathbf{w} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ -2 & -1 & 4 \\ 1 & 0 & -2 \end{vmatrix} = 2\mathbf{i} + \mathbf{k}$$

$$\mathbf{u}.(\mathbf{v}\times\mathbf{w}) = \langle c, -3, 1 \rangle . \langle 2, 0, 1 \rangle$$
$$= 2c + 1$$
$$|2c + 1| = 7$$

إذن $c = 3$ أو $c = -4$

42) صحيحة دائمًا، إجابة ممكنة: الضرب الاتجاهي في الفضاء يُعطِي متجهًا يعامد كلًّا من المتجهين الأصليين.

44) إجابة ممكنة: إن تعريف الضرب الاتجاهي للمتجهين $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ هو متجه عمودي على المستوى الذي يحوي كلًّا من $\mathbf{a}, \mathbf{b}$، وللحصول على متجهٍ عمودي على مستوى ثنائي الأبعاد تحتاج لبُعدٍ ثالثٍ.

تنويع التعليم

فوق

توسع اطلب إلى الطلاب استعمال ما تعلَّموه حول إيجاد مساحة متوازي الأضلاع؛ لإثبات أن مساحة المثلث الذي ضلعاه المتجهان: $\mathbf{u} = 2\mathbf{i} + 7\mathbf{j} - \mathbf{k}, \mathbf{v} = 3\mathbf{i} - 2\mathbf{k}$ هي $\frac{\sqrt{638}}{2}$ أو 12.63 وحدةً مربعةً تقريبًا.

إجابة ممكنة: مساحة سطح متوازي الأضلاع الذي: $\mathbf{u} = 2\mathbf{i} + 7\mathbf{j} - \mathbf{k}$, $\mathbf{v} = 3\mathbf{i} - 2\mathbf{k}$ ضلعان متجاوران فيه تساوي $\sqrt{638}$ وحدةً مربعةً، ومساحة المثلث الذي يشكِّل ضلعان منه ضلعين متجاورين في متوازي أضلاع تساوي نصف مساحة متوازي الأضلاع، وهي $\frac{\sqrt{638}}{2}$ أو 12.63 وحدةً مربعةً تقريبًا.

✓ التقويم التكويني

المفردات

رقم الصفحة بعد كل مفردة يُشير إلى الصفحة التي وردت فيها المفردة أول مرة، فإذا واجه بعض الطلاب صعوبات في حل الأسئلة 9-1، فذكِّرهم بأنه يمكنهم استعمال هذه الصفحات مرجعًا ليتذكَّروا المعلومات حول هذه المفردات.

✓ التقويم الختامي

اختبار المفردات للفصل 5، ص (14)

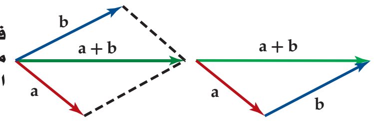
ملخص الفصل

مفاهيم أساسية

مقدمة في المتجهات (الدرس 5-1)

- يُعبَّر عن اتجاه المتجه بالزاوية بين المتجه، والأفقي. ومقدار المتجه هو طوله.
- ناتج جمع متجهين هو متجه يُسمى المحصِّلة، ويمكن إيجاده باستعمال قاعدة المثلث، أو قاعدة متوازي الأضلاع.

قاعدة متوازي الاضلاع



قاعدة المثلث

المتجهات في المستوى الإحداثي (الدرس 5-2)

- الصورة الإحداثية للمتجه في الوضع القياسي هي $\langle x, y\rangle$.
- الصورة الإحداثية للمتجه في الوضع غير القياسي الذي نقطة بدايته $A(x_1, y_1)$، ونقطة نهايته $B(x_2, y_2)$ هي: $\langle x_2 - x_1, y_2 - y_1\rangle$.
- يُعطى طول المتجه $\mathbf{v} = \langle v_1, v_2\rangle$ بالصيغة $|\mathbf{v}| = \sqrt{(v_1)^2 + (v_2)^2}$
- إذا كان: $\mathbf{a} = \langle a_1, a_2\rangle, \mathbf{b} = \langle b_1, b_2\rangle$ متجهين، وكان k عددًا حقيقيًّا، فإن: $\mathbf{a} + \mathbf{b} = \langle a_1 + b_1, a_2 + b_2\rangle$، $\mathbf{a} - \mathbf{b} = \langle a_1 - b_1, a_2 - b_2\rangle$، $k\mathbf{a} = \langle ka_1, ka_2\rangle$
- يمكن استعمال متجهَي الوحدة $\mathbf{i}$، $\mathbf{j}$ للتعبير عن المتجه $\mathbf{v} = \langle a, b\rangle$ على الصورة $a\mathbf{i} + b\mathbf{j}$.

الضرب الداخلي (الدرس 5-3)

- يُعرَّف الضرب الداخلي للمتجهين: $\mathbf{a} = \langle a_1, a_2\rangle$، $\mathbf{b} = \langle b_1, b_2\rangle$ بالصيغة: $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = a_1 b_1 + a_2 b_2$
- إذا كانت θ زاوية بين متجهين غير صفريين $\mathbf{a}, \mathbf{b}$، فإن: $\cos\theta = \dfrac{\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}}{|\mathbf{a}|\,|\mathbf{b}|}$

المتجهات في الفضاء الثلاثي الأبعاد (الدرس 5-4)

- تعطى المسافة بين النقطتين $A(x_1, y_1, z_1)$، $B(x_2, y_2, z_2)$ بالصيغة:
$$AB = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$$
- تعطى نقطة منتصف $\overline{AB}$ بالصيغة:
$$M\left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2}, \frac{z_1 + z_2}{2}\right)$$

الضرب الداخلي والضرب الاتجاهي لمتجهين في الفضاء (الدرس 5-5)

- يُعرّف الضرب الداخلي للمتجهين: $\mathbf{a} = \langle a_1, a_2, a_3\rangle$، $\mathbf{b} = \langle b_1, b_2, b_3\rangle$ بالصيغة $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3$
- إذا كان: $\mathbf{a} = a_1\mathbf{i} + a_2\mathbf{j} + a_3\mathbf{k}, \mathbf{b} = b_1\mathbf{i} + b_2\mathbf{j} + b_3\mathbf{k}$، فإن الضرب الاتجاهي للمتجهين $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ هو $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ ، ويساوي $(a_2b_3 - a_3b_2)\mathbf{i} - (a_1b_3 - a_3b_1)\mathbf{j} + (a_1b_2 - a_2b_1)\mathbf{k}$

المفردات

- كمية قياسية عددية ص 10
- المتجه ص 10
- كمية متجهة ص 10
- نقطة البداية ص 10
- نقطة النهاية ص 10
- قطعة مستقيمة متجهة ص 10
- طول المتجه ص 10
- الوضع القياسي ص 10
- اتجاه المتجه ص 10
- الاتجاه الربعي ص 11
- الاتجاه الحقيقي ص 11
- المتجهات المتوازية ص 11
- المتجهات المتساوية ص 11
- المتجهان المتعاكسان ص 11
- المحصلة ص 12
- قاعدة المثلث ص 12
- قاعدة متوازي الأضلاع ص 12
- المتجه الصفري ص 13
- المركبات ص 14
- المركبات المتعامدة ص 14
- الصورة الإحداثية ص 18
- متجه الوحدة ص 20
- متجها الوحدة القياسيّان ص 20
- توافق خطيّ ص 21
- الضرب الداخلي ص 26
- المتجهان المتعامدان ص 26
- الشغل ص 29
- نظام الإحداثيات الثلاثي الأبعاد ص 33
- المحور z ص 33
- الثُمن ص 33
- الثلاثي المرتب ص 33
- الضرب الاتجاهي ص 40
- متوازي السطوح ص 41
- الضرب القياسي الثلاثي ص 41

اختبر مفرداتك

حدِّد ما إذا كانت العبارات الآتية صحيحة أم خاطئة، وإذا كانت خاطئة فاستبدل ما تحته خط لتصبح العبارة صحيحة:

1) نقطة نهاية المتجه هي الموقع الذي يبدأ منه . **خطأ؛ ينتهي عنده**

2) إذا كان: $\mathbf{a} = \langle -4, 1\rangle, \mathbf{b} = \langle 3, 2\rangle$، فإن الضرب الداخلي للمتجهين هو $-4(1) + 3(2)$. **خطأ؛ $-4(3) + 1(2)$**

3) نقطة منتصف $\overline{AB}$ عندما تكون $A(x_1, y_1, z_1), B(x_2, y_2, z_2)$ هي $\left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2}, \frac{z_1 + z_2}{2}\right)$. **صحيحة**

4) طول المتجه $\mathbf{r}$ الذي نقطة بدايته $A(-1, 2)$، ونقطة نهايته $B(2, -4)$ هو $\langle 3, -6\rangle$. **خطأ؛ الصورة الإحداثية للمتجه**

5) يتساوَى متجهان إذا وفقط إذا كان لهما الطول نفسه، والاتجاه نفسه. **صحيحة**

6) إذا تعامد متجهان غير صفريين، فإن قياس الزاوية بينهما $180°$. **خطأ؛ $90°$**

7) لتجد متجهًا يعامد أي متجهين على الأقل في الفضاء، أوجد الضرب الاتجاهي للمتجهين الأصليين. **صحيحة**

8) طرح متجه يكافئ إضافة معكوس المتجه. **صحيحة**

9) إذا كان $\mathbf{v}$ متجه وحدةٍ باتجاه $\mathbf{u}$، فإن $\mathbf{v} = \dfrac{|\mathbf{u}|}{\mathbf{u}}$. **خطأ؛ $\mathbf{v} = \dfrac{\mathbf{u}}{|\mathbf{u}|}$**

44 الفصل 5 المتجهات

مراجعة الدروس

5-1 مقدمة في المتجهات (الصفحات 17 - 10)

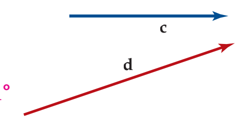
حدِّد الكميات المتجهة، والكميات القياسية في كلٍّ مما يأتي:

10) تسير سيارة بسرعة 50 mi/h باتجاه الشرق. **كمية متجهة**

11) شجرة طولها 20 ft. **كمية قياسية**

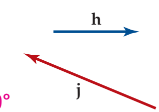
أوجد محصلة كل زوج من المتجهات الآتية باستعمال قاعدة المثلث، أو قاعدة متوازي الأضلاع. قرِّب المحصلة إلى أقرب جزء من عشرة من السنتمتر، ثم حدِّد اتجاهها بالنسبة للأفقي، مستعملًا المسطرة، والمنقلة.

12)



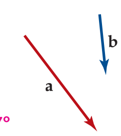
6.3 cm, 11°

13)



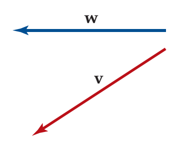
1.2 cm, 130°

14)



2.8, 297° تقريبًا

15)



4.8, 195° تقريبًا

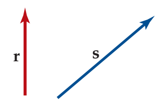
أوجد طول المحصِّلة لناتج جمع المتجهين واتجاهها في كلٍّ مما يأتي:

16) 70 m جهة الغرب، ثم 150 m جهة الشرق. **80 m للشرق**

17) 8 N للخلف، ثم 12 N للخلف. **20 N للخلف**

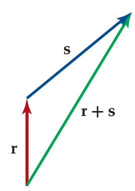
مثال 1

أوجد محصلة المتجهين r, s مستعملًا قاعدة المثلث، أو قاعدة متوازي الأضلاع. قرِّب المحصّلة إلى أقرب جزء من عشرة من السنتمتر، ثم حدِّد اتجاهها بالنسبة للأفقي مستعملًا المسطرة، والمنقلة.



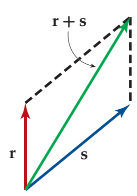
قاعدة المثلث

اسحب **r** ، بحيث تلتقي نقطة نهاية **r** مع نقطة بداية **s** ، فتكون المحصلة هي المتجه الذي يبدأ من نقطة بداية **r** ، وينتهي عند نقطة نهاية **s**.



قاعدة متوازي الأضلاع

اسحب **s** ، بحيث تلتقي نقطة بدايته مع نقطة بداية **r** ، ثم أكمل متوازي الأضلاع الذي فيه **r, s** ضلعان متجاوران، فتكون المحصلة هي المتجه الذي يكوّن قطر متوازي الأضلاع.



فيكون طول المحصلة 3.4 cm ، وقياس زاويتها 59° مع الأفقي.

45 الفصل 5 دليل الدراسة والمراجعة

مراجعة الدروس

مراجعة إذا كانت الأمثلة المعطاة غير كافية لمراجعة الموضوعات التي تناولتها الأسئلة، فذكّر الطلاب بمرجع الصفحات الذي يدلُّهم على أين يراجعون تلك الموضوعات في كتابهم المقرر.

نموذج التوقع

اطلب إلى الطلاب تعبئة نموذج التوقع للفصل 5 ص (8)، وناقشهم حول تغيّر إجاباتهم بعد إتمام دراسة الفصل عمّا كانت عليه عند بدايته.

إجابات:

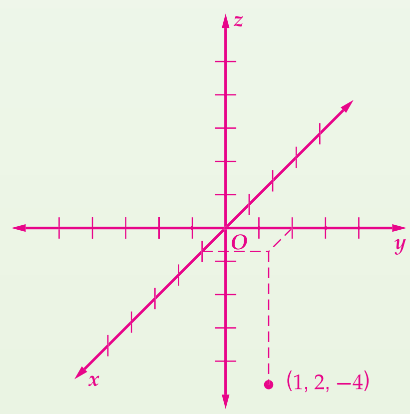
26) $\left\langle -\frac{7\sqrt{53}}{53}, \frac{2\sqrt{53}}{53} \right\rangle$

27) $\left\langle \frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2} \right\rangle$

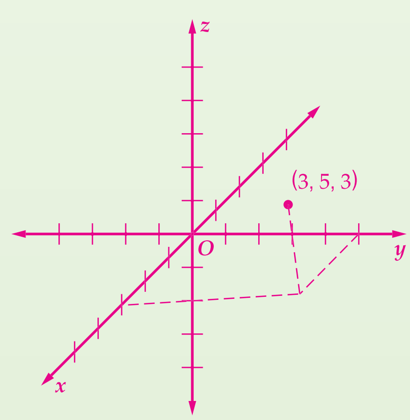
28) $\left\langle -\frac{5\sqrt{89}}{89}, -\frac{8\sqrt{89}}{89} \right\rangle$

29) $\left\langle \frac{3\sqrt{10}}{10}, \frac{\sqrt{10}}{10} \right\rangle$

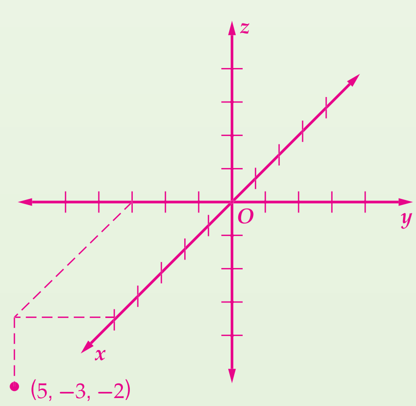
36)



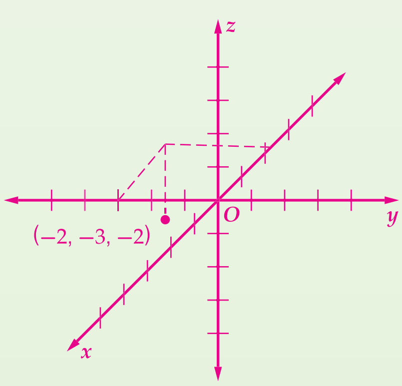
37)



38)



39)



5-2 المتجهات في المستوى الإحداثي (الصفحات 25 - 18)

أوجد الصورة الإحداثية، وطول $\overrightarrow{AB}$ المعطاة نقطتا بدايته ونهايته في كلٍّ مما يأتي:

18) $A(-1, 3), B(5, 4)$ $\langle 6, 1\rangle; \sqrt{37} \approx 6.1$

19) $A(7, -2), B(-9, 6)$ $\langle -16, 8\rangle; \sqrt{320} = 8\sqrt{5} \approx 17.9$

20) $A(-8, -4), B(6, 1)$ $\langle 14, 5\rangle; \sqrt{221} \approx 14.9$

21) $A(2, -10), B(3, -5)$ $\langle 1, 5\rangle; \sqrt{26} \approx 5.1$

إذا كان: $\mathbf{p} = \langle 4, 0\rangle$ ، $\mathbf{q} = \langle -2, -3\rangle$ ، $\mathbf{t} = \langle -4, 2\rangle$ ، فأوجد كلًّا ممّا يأتي:

22) $2\mathbf{q} - \mathbf{p}$ $\langle -8, -6\rangle$

23) $\mathbf{p} + 2\mathbf{t}$ $\langle -4, 4\rangle$

24) $\mathbf{t} - 3\mathbf{p} + \mathbf{q}$ $\langle -18, -1\rangle$

25) $2\mathbf{p} + \mathbf{t} - 3\mathbf{q}$ $\langle 10, 11\rangle$

أوجد متجه وحدة $\mathbf{u}$ باتجاه $\mathbf{v}$ في كلٍّ مما يأتي: (26-29) انظر الهامش

26) $\mathbf{v} = \langle -7, 2\rangle$

27) $\mathbf{v} = \langle 3, -3\rangle$

28) $\mathbf{v} = \langle -5, -8\rangle$

29) $\mathbf{v} = \langle 9, 3\rangle$

مثال 2

أوجد الصورة الإحداثية، وطول $\overrightarrow{AB}$ الذي نقطة بدايته $A(3, -2)$ ، ونقطة نهايته $B(4, -1)$.

$\overrightarrow{AB} = \langle x_2 - x_1, y_2 - y_1\rangle$ الصورة الإحداثية

$= \langle 4 - 3, -1 - (-2)\rangle$ عوّض

$= \langle 1, 1\rangle$ اطرح

أوجد طول المتجه $\overrightarrow{AB}$.

$|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{a^2+b^2}$ قانون المسافة

$= \sqrt{1^2 + 1^2}$ عوّض

$= \sqrt{2} \approx 1.4$ بسّط

5-3 الضرب الداخلي (الصفحات 31 - 26)

أوجد الضرب الداخلي للمتجهين $\mathbf{u}, \mathbf{v}$ في كلٍّ ممّا يأتي، ثم تحقّق ممّا إذا كانا متعامدين أم لا:

30) $\mathbf{u} = \langle -3, 5\rangle, \mathbf{v} = \langle 2, 1\rangle$ -1 ؛ غير متعامدين

31) $\mathbf{u} = \langle 4, 4\rangle, \mathbf{v} = \langle 5, 7\rangle$ 48 ؛ غير متعامدين

32) $\mathbf{u} = \langle -1, 4\rangle, \mathbf{v} = \langle 8, 2\rangle$ 0 ؛ متعامدان

33) $\mathbf{u} = \langle -2, 3\rangle, \mathbf{v} = \langle 1, 3\rangle$ 7 ؛ غير متعامدين

أوجد الزاوية θ بين المتجهين $\mathbf{u}, \mathbf{v}$ في كلٍّ ممّا يأتي:

34) $\mathbf{u} = \langle 5, -1\rangle, \mathbf{v} = \langle -2, 3\rangle$ $135°$

35) $\mathbf{u} = \langle -1, 8\rangle, \mathbf{v} = \langle 4, 2\rangle$ $70.6°$

مثال 3

أوجد الضرب الداخلي للمتجهين: $\mathbf{x} = \langle 2, -5\rangle$ ، $\mathbf{y} = \langle -4, 7\rangle$ ، ثم تحقق مما إذا كانا متعامدين أم لا.

$\mathbf{x} \cdot \mathbf{y} = x_1 y_1 + x_2 y_2$ الضرب الداخلي

$= 2(-4) + (-5)(7)$ عوّض

$= -8 + (-35) = -43$ بسّط

بما أن $\mathbf{x} \cdot \mathbf{y} \neq 0$ ، فإن المتجهين $\mathbf{x}$ ، $\mathbf{y}$ غير متعامدين.

5-4 المتجهات في الفضاء الثلاثي الأبعاد (الصفحات 33 - 38)

عيِّن كل نقطة من النقاط الآتية في الفضاء الثلاثي الأبعاد: 36-39) انظر الهامش

36) $(1, 2, -4)$

37) $(3, 5, 3)$

38) $(5, -3, -2)$

39) $(-2, -3, -2)$

أوجد طول القطعة المستقيمة المُعطاة نقطتا طرفَيها في كلٍّ مما يأتي، ثم أوجد إحداثيات نقطة منتصفها. 40-43) انظر الهامش

40) $(-4, 10, 4), (2, 0, 8)$

41) $(-5, 6, 4), (-9, -2, -2)$

42) $(3, 2, 0), (-9, -10, 4)$

43) $(8, 3, 2), (-4, -6, 6)$

مثِّل بيانيًّا كلًّا من المتجهات الآتية في الفضاء: 44-47) انظر الهامش

44) $\mathbf{a} = \langle 0, -3, 4\rangle$

45) $\mathbf{b} = -3\mathbf{i} + 3\mathbf{j} + 2\mathbf{k}$

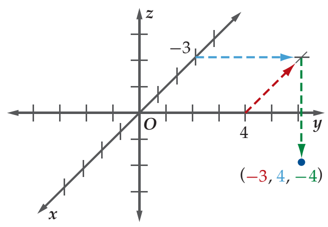
46) $\mathbf{c} = -2\mathbf{i} - 3\mathbf{j} + 5\mathbf{k}$

47) $\mathbf{d} = \langle -4, -5, -3\rangle$

مثال 4

عيّن النقطة $(-3, 4, -4)$ في الفضاء الثلاثي الأبعاد .

حدّد موقع النقطة $(-3, 4)$ في المستوى xy بوضع إشارة، ثم عيّن نقطةً تبعد 4 وحداتٍ أسفل هذه النقطة، وباتجاه موازٍ للمحور z .



5-5 الضرب الداخلي والضرب الاتجاهي للمتجهات في الفضاء (الصفحات 39 - 43)

أوجد الضرب الداخلي للمتجهين $\mathbf{u}, \mathbf{v}$ في كلٍّ مما يأتي، ثم حدّد ما إذا كانا متعامدين أم لا.

48) $\mathbf{u} = \langle 2, 5, 2\rangle, \mathbf{v} = \langle 8, 2, -13\rangle$ 0 ؛ متعامدان

49) $\mathbf{u} = \langle 5, 0, -6\rangle, \mathbf{v} = \langle -6, 1, 3\rangle$ −48 ؛ غير متعامدين

أوجد الضرب الاتجاهي للمتجهين $\mathbf{u}, \mathbf{v}$ في كلٍّ مما يأتي، ثم بيِّن أن $\mathbf{u} \times \mathbf{v}$ يعامد كلًّا من $\mathbf{u}, \mathbf{v}$: 50, 51) انظر الهامش

50) $\mathbf{u} = \langle 1, -3, -2\rangle, \mathbf{v} = \langle 2, 4, -3\rangle$

51) $\mathbf{u} = \langle 4, 1, -2\rangle, \mathbf{v} = \langle 5, -4, -1\rangle$

مثال 5

أوجد الضرب الاتجاهي للمتجهين: $\mathbf{u} = \langle -4, 2, -3\rangle$ ، $\mathbf{v} = \langle 7, 11, 2\rangle$ ، ثم بيّن أن $\mathbf{u} \times \mathbf{v}$ يعامد كلًّا من $\mathbf{u}, \mathbf{v}$.

$$\mathbf{u} \times \mathbf{v} = \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 11 & 2 \end{vmatrix}\mathbf{i} - \begin{vmatrix} -4 & -3 \\ 7 & 2 \end{vmatrix}\mathbf{j} + \begin{vmatrix} -4 & 2 \\ 7 & 11 \end{vmatrix}\mathbf{k}$$

$$= \langle 37, -13, -58\rangle$$

$$(\mathbf{u} \times \mathbf{v}) \cdot \mathbf{u} = \langle 37, -13, -58\rangle \cdot \langle -4, 2, -3\rangle$$

$$= -148 - 26 + 174 = 0 \checkmark$$

$$(\mathbf{u} \times \mathbf{v}) \cdot \mathbf{v} = \langle 37, -13, -58\rangle \cdot \langle 7, 11, 2\rangle$$

$$= 259 - 143 - 116 = 0 \checkmark$$

بما أن حاصل الضرب الداخلي في الحالتين يساوي صفرًا، فإن $\mathbf{u} \times \mathbf{v}$ عمودي على كلٍّ من $\mathbf{u}, \mathbf{v}$

50) $\langle 17, -1, 10\rangle, \langle 17, -1, 10\rangle \cdot \langle 1, -3, -2\rangle = 0, \langle 17, -1, 10\rangle \cdot \langle 2, 4, -3\rangle = 0$

51) $\langle -9, -6, -21\rangle, \langle -9, -6, -21\rangle \cdot \langle 4, 1, -2\rangle = 0, \langle -9, -6, -21\rangle \cdot \langle 5, -4, -1\rangle = 0$

إجابات:

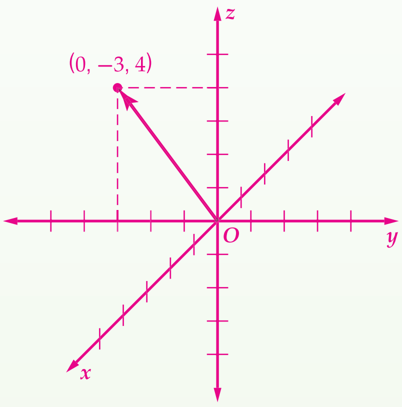
40) $12.33; (-1, 5, 6)$

41) $10.77; (-7, 2, 1)$

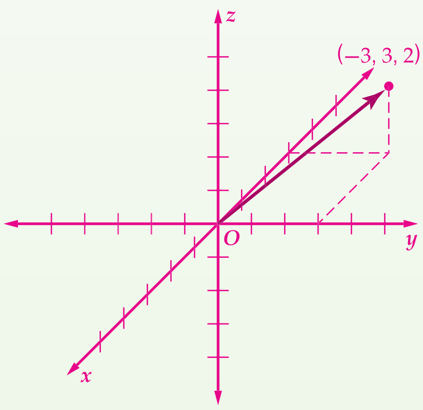
42) $17.44; (-3, -4, 2)$

43) $15.52; (2, -1.5, 4)$

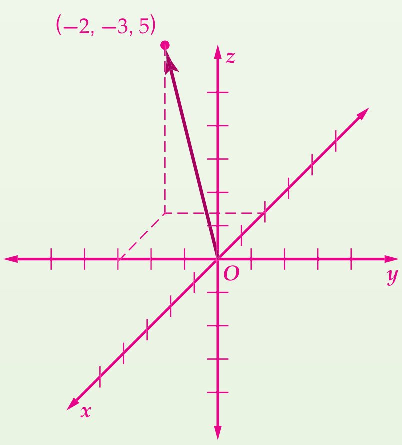
44)



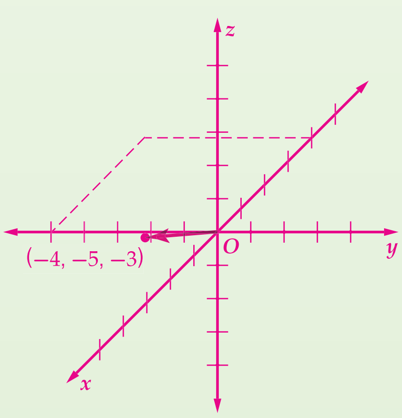
45)



46)



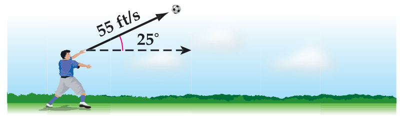
47)



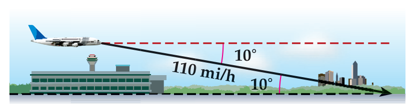
الفصل 5 دليل الدراسة والمراجعة

تطبيقات ومسائل

52) كرة قدم: تلقَّى لاعب كرة قدم الكرة برأسه، فارتدَّت بسرعةٍ ابتدائيةٍ مقدارها 55 ft/s ، وبزاويةٍ قياسها °25 فوق الأفقي كما في الشكل أدناه. أوجد مقدار كلٍّ من المركبتين الأفقية، والرأسية للسرعة. (الدرس 1-5) 49.8 ft/s تقريبًا، 23.2ft/s تقريبًا

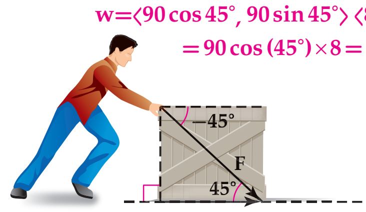


53) طيران: تهبط طائرة بسرعة مقدارها 110 mi/h ، وبزاوية قياسها °10 تحت الأفقي، أوجد الصورة الإحداثية للمتجه الذي يُمثّل سرعة الطائرة. (الدرس 2-5) $\langle 108.3, -19.1\rangle$



54) صناديق: يدفع عامل صندوقًا بقوةٍ ثابتةٍ مقدارها 90 N بزاوية °45 في الشكل أدناه. أوجد الشغل المبذول بالجول لتحريك الصندوق 8 m (مع إهمال قوة الاحتكاك). (الدرس 3-5)

$$w=\langle 90\cos 45°, 90\sin 45°\rangle \langle 8, 0\rangle$$
$$=90\cos(45°)\times 8=509\text{J}$$



55) أقمار اصطناعية: إذا مَثّلت النقطتان: $(28625, 32461, -38426)$، $(-31613, -29218, 43015)$ موقعَي قمرين اصطناعيين، ومَثّلتِ النقطة $(0, 0, 0)$ مركز الأرض، وعلمت أن الإحداثيات معطاة بالميل، وأن طول نصف قطر الأرض يساوي 3963 mi تقريبًا، فأجب عمّا يأتي: (الدرس 4-5)

a) أوجد المسافة بين القمرين. 118598 mi تقريبًا

b) إذا وضع قمر ثالث في منتصف المسافة بين القمرين، فما إحداثيات موقعه؟ $(-1494, 1621.5, 2294.5)$

c) اشرح إمكانية وضع قمر ثالث في الإحداثيات التي أوجدتها في الفرع b . انظر الهامش

56) استعمل الضرب القياسي الثلاثي لحساب حجم غرفةٍ أبعادها 3 m, 4 m, 5 m
"إرشاد: اعتبر متوازي المستطيلات حالةً خاصةً من متوازي السطوح". (الدرس 5-5)

$$\langle 3, 0, 0\rangle\cdot(\langle 0, 4, 0\rangle\times\langle 0, 0, 5\rangle)=60\text{ m}^3$$

إجابة:

55c) إجابة ممكنة : لا يمكن وجود قمر ثالث؛ لأن إحداثياته ستكون داخل الأرض؛ وذلك لأن القيمة المطلقة لجميع إحداثيات موقع القمر الثالث أقل من نصف قطر الأرض.

48 الفصل 5 المتجهات

المعالجة:

بناءً على نتائج اختبار الفصل، استعمل مخطط المعالجة في مراجعة المفاهيم التي لا تزال تشكل تحدِّيًا للطلاب.

اختبار الفصل: نماذج متعددة ص (22–15).

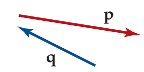
إجابات:

17) $\langle 65, 16, -59\rangle$,
$\langle 65, 16, -59\rangle \cdot \langle 1, 7, 3\rangle$
$= 65(1) + 16(7) + (-59)(3)$
$= 0$
$\langle 65, 16, -59\rangle \cdot \langle 9, 4, 11\rangle$
$= 65(9) + 16(4) + (-59)(11)$
$= 0$
المتجه $\mathbf{u}\times\mathbf{v}$ يعامد كلًّا من المتجهين $\mathbf{v}, \mathbf{u}$

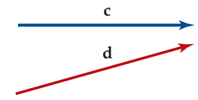
18) $-7\mathbf{i} - 17\mathbf{j} + 8\mathbf{k}$,
$\langle -7, -17, 8\rangle \cdot \langle -6, 2, -1\rangle$
$= (-7)(-6) + (-17)(2) + 8(-1)$
$= 0$
$\langle -7, -17, 8\rangle \cdot \langle 5, -3, -2\rangle$
$= (-7)(5) + (-17)(-3) + 8(-2)$
$= 0$
المتجه $\mathbf{u}\times\mathbf{v}$ يعامد كلًّا من المتجهين $\mathbf{v}, \mathbf{u}$

اختبار الفصل

أوجد محصِّلة كل زوج من المتجهات الآتية باستعمال قاعدة المثلث، أو قاعدة متوازي الأضلاع، قرِّب المحصلة إلى أقرب جزءٍ من عشرة من السنتمتر، ثم حدِّد اتجاهها بالنسبة للأفقي مستعملًا المسطرة، والمنقلة.

1)


0.8 cm, $25°$

2)


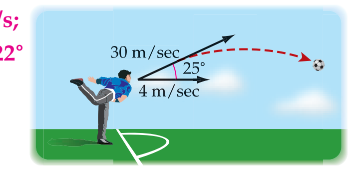
4.6 cm, $8°$ تقريبًا

أوجد الصورة الإحداثية، وطول $\overrightarrow{AB}$ المعطاة نقطتا بدايته ونهايته في كلٍّ مما يأتي:

3) $A(1, -3), B(-5, 1)$ — $\langle -6, 4\rangle, \sqrt{52} \approx 7.2$

4) $A\left(\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right), B(-1, 7)$ — $\left\langle -\frac{3}{2}, \frac{11}{2}\right\rangle, \sqrt{32.5} \approx 5.7$

5) **كرة قدم:** ركض لاعب بسرعة 4 m/s ؛ للتصدي لكرة قادمة من الاتجاه المعاكس لحركته، فضربها برأسه بسرعة 30 m/s ، وبزاوية قياسها 25° مع الأفقي، فما محصّلة سرعة الكرة، واتجاه حركتها؟



33.7 m/s; 22° تقريبًا

أوجد متجه وحدة باتجاه **u** في كلٍّ مما يأتي:

6) $\mathbf{u} = \langle -1, 4\rangle$ — $\left\langle -\frac{\sqrt{17}}{17}, \frac{4\sqrt{17}}{17}\right\rangle$

7) $\mathbf{u} = \langle 6, -3\rangle$ — $\left\langle \frac{2\sqrt{5}}{5}, -\frac{\sqrt{5}}{5}\right\rangle$

أوجد الضرب الداخلي للمتجهين $\mathbf{u}, \mathbf{v}$ في كلٍّ مما يأتي، ثم بيّن ما إذا كانا متعامدين أم لا:

8) $\mathbf{u} = \langle 2, -5\rangle, \mathbf{v} = \langle -3, 2\rangle$ — -16 ؛ غير متعامدين

9) $\mathbf{u} = \langle 4, -3\rangle, \mathbf{v} = \langle 6, 8\rangle$ — 0 ؛ متعامدان

10) $\mathbf{u} = 10\mathbf{i} - 3\mathbf{j}, \mathbf{v} = \mathbf{i} + 8\mathbf{j}$ — -14 ؛ غير متعامدين

11) **اختيار من متعدد:** إذا علمت أن: $\mathbf{u} = \langle 1, 3\rangle$, $\mathbf{v} = \langle -4, 2\rangle$ ، فأيٌّ مما يأتي يُمثل ناتج جمع متجهين متعامدين أحدهما مسقط **u** على **v** ؟ **D**

A $\mathbf{u} = \left\langle \frac{2}{5}, -\frac{3}{5}\right\rangle + \left\langle \frac{3}{5}, \frac{18}{5}\right\rangle$

B $\mathbf{u} = \left\langle \frac{2}{5}, \frac{3}{5}\right\rangle + \left\langle \frac{3}{5}, \frac{12}{5}\right\rangle$

C $\mathbf{u} = \left\langle -\frac{4}{5}, \frac{2}{5}\right\rangle + \left\langle \frac{9}{5}, \frac{13}{5}\right\rangle$

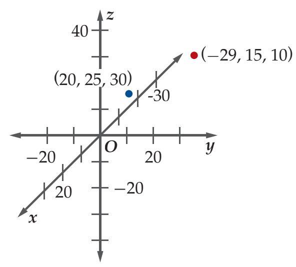
D $\mathbf{u} = \left\langle -\frac{2}{5}, \frac{1}{5}\right\rangle + \left\langle \frac{7}{5}, \frac{14}{5}\right\rangle$

إذا كان: $\mathbf{a} = \langle 2, 4, -3\rangle$, $\mathbf{b} = \langle -5, -7, 1\rangle$, $\mathbf{c} = \langle 8, 5, -9\rangle$ ، فأوجد كلًّا مما يأتي:

12) $2\mathbf{a} + 5\mathbf{b} - 3\mathbf{c}$ — $\langle -45, -42, 26\rangle$

13) $\mathbf{b} - 6\mathbf{a} + 2\mathbf{c}$ — $\langle -1, -21, 1\rangle$

14) **بالونات الهواء الساخن:** أُطلق 12 بالونًا تحوي هواءً ساخنًا في أحد المهرجانات، وبعد عدة دقائق من الإطلاق، كانت إحداثيات البالونين الأول والثاني هي: $(20, 25, 30)$, $(-29, 15, 10)$ كما في الشكل أدناه ، علمًا بأن الإحداثيات معطاة بالأقدام.



a) أوجد المسافة بين البالونين الأول والثاني في تلك اللحظة. 53.9 ft تقريبًا

b) إذا كان البالون الثالث عند نقطة منتصف المسافة بين البالونين الأول والثاني، فأوجد إحداثياته. $\left(-\frac{9}{2}, 20, 20\right)$

أوجد الزاوية θ بين المتجهين $\mathbf{u}, \mathbf{v}$ في كلٍّ ممّا يأتي:

15) $\mathbf{u} = \langle -2, 4, 6\rangle, \mathbf{v} = \langle 3, 7, 12\rangle$ — $27.9°$ تقريبًا

16) $\mathbf{u} = -9\mathbf{i} + 5\mathbf{j} + 11\mathbf{k}, \mathbf{v} = -5\mathbf{i} - 7\mathbf{j} - 6\mathbf{k}$ — $110.8°$ تقريبًا

أوجد الضرب الاتجاهي للمتجهين $\mathbf{u}, \mathbf{v}$ في كلٍّ مما يأتي، ثم بيّن أن $\mathbf{u} \times \mathbf{v}$ يعامد كلًّا من $\mathbf{u}, \mathbf{v}$: (18-17) انظر الهامش

17) $\mathbf{u} = \langle 1, 7, 3\rangle, \mathbf{v} = \langle 9, 4, 11\rangle$

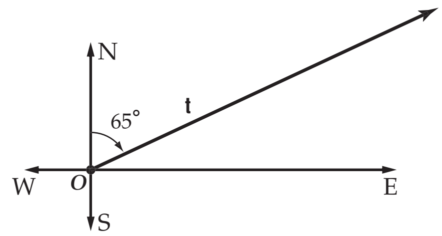
18) $\mathbf{u} = -6\mathbf{i} + 2\mathbf{j} - \mathbf{k}, \mathbf{v} = 5\mathbf{i} - 3\mathbf{j} - 2\mathbf{k}$

مخطط المعالجة

المستوى 1	ضمن المتوسط	المستوى 2	دون المتوسط
إذا	أخطأ بعض الطلاب في 25% أو أقل تقريبًا من الأسئلة،	إذا	أخطأ بعض الطلاب في 50% تقريبًا من الأسئلة،
فاختر	أحد المصادر الآتية:	فاختر	المصدر الآتي:
كتاب الطالب	الدروس: 5-1, 5-2, 5-3, 5-4, 5-5	زيارة الموقع	www.obeikaneducation.com
دليل المعلم	مشروع الفصل، ص (8)		
زيارة الموقع	www.obeikaneducation.com		

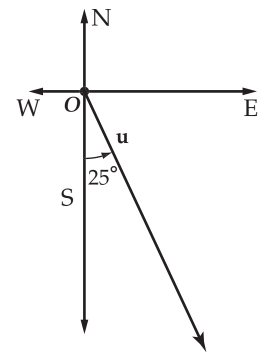
الدرس 5-1 (تحقق من فهمك)، ص (11)

2A)



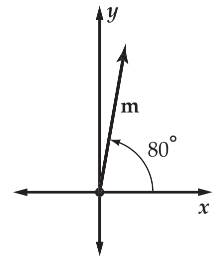
1 in = 10 ft/s

2B)



1 in = 10 mi/h

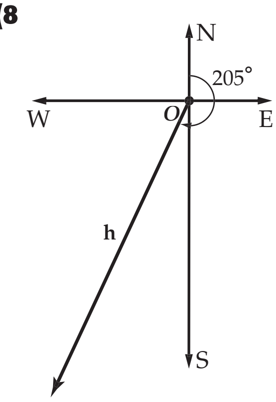
2C)



1 cm = 30 N

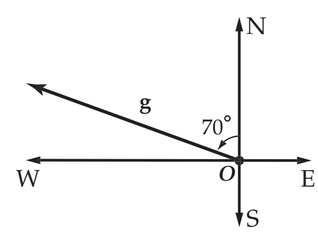
الدرس 5-1، ص (15–17)

7)



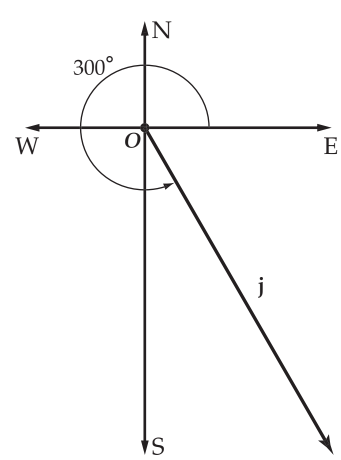
1 cm : 3 in/s

8)



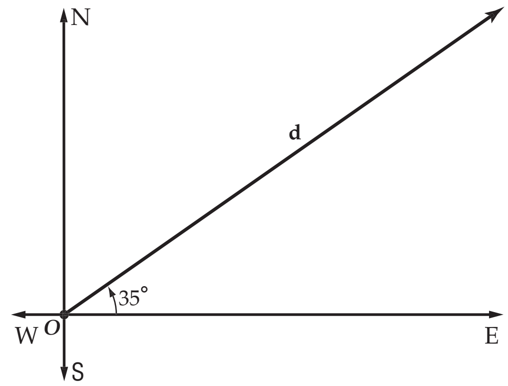
1 cm : 2 km/h

9)



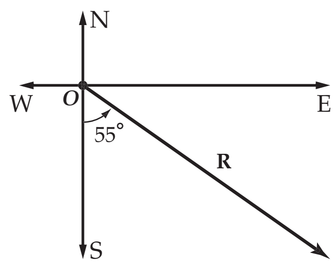
1 cm : 1 ft/s

10)



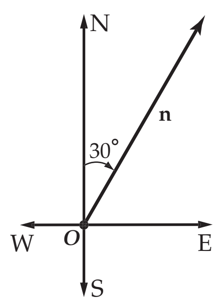
1 in = 10 km

11)



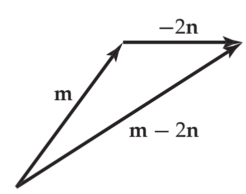
1 cm = 10 m

12)

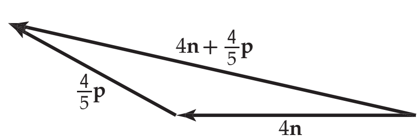


1 cm = 10 m/s

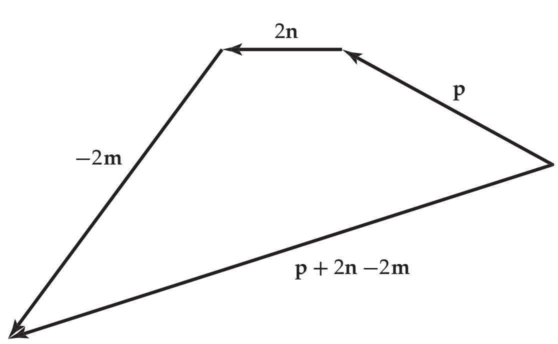
22)



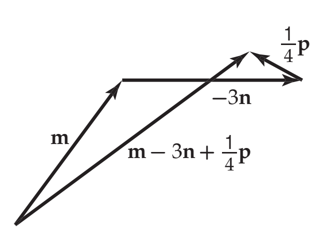
23)



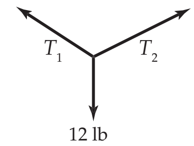
24)



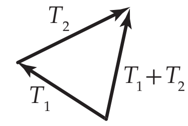
25)



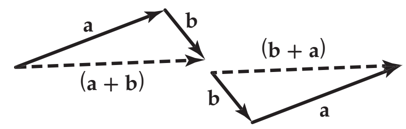
(33a



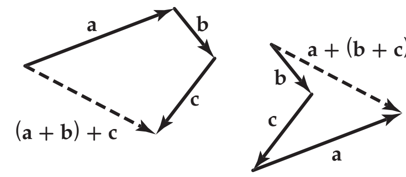
(33b



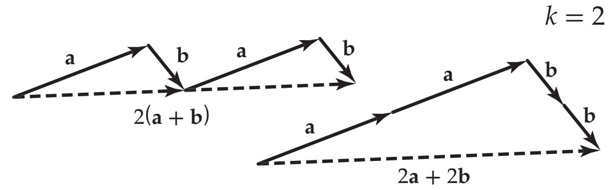
(37



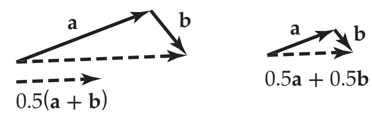
(38



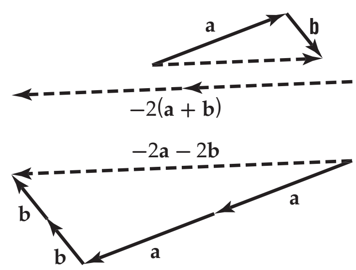
(39 $k = 2$



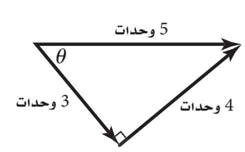
$k = 0.5$



$k = -2$



(40 إجابة ممكنة:



(43 مصطفى، إجابة ممكنة: وضع مصطفى نقطة بداية المتجه الثاني عند نقطة نهاية المتجه الأول، ثم رسم المحصلة من نقطة بداية المتجه الأول إلى نقطة نهاية المتجه الثاني، وهي الطريقة الصحيحة لاستعمال قاعدة المثلث. أما حسين فقد وضع نقطتَي بداية المتجهين معًا، وهي الخطوة الأولى لاستعمال قاعدة متوازي الأضلاع، لكنه لم يُكمل متوازي الأضلاع.

(44 نعم، إجابة ممكنة: من الممكن أن يكون حاصل جمع متجهين يساوي أحد المتجهين، ويحدث ذلك عندما يكون أحد المتجهين هو المتجه الصفري.

(45 إجابة ممكنة: عند استعمال قاعدة المثلث، تضع نقطة بداية المتجه عند نقطة نهاية المتجه الذي يسبقه، وهكذا مع باقي المتجهات، ثم ترسم المحصلة من نقطة بداية المتجه الأول إلى نقطة نهاية المتجه الأخير. أما عند استعمال طريقة متوازي الأضلاع، فتضع نقطة بداية المتجهين عند نقطةٍ واحدةٍ، ثم تُكمل متوازي الأضلاع، وترسم المحصلة من نقطة البداية المشتركة للمتجهين إلى الرأس المقابل لمتوازي الأضلاع، يمكن استعمال كلتا القاعدتين، المثلث ومتوازي الأضلاع لإيجاد المحصلة لمتجهين أو أكثر.

(49 $A = 32°$ ، $a = 11.2$ ، $b = 19.9$

(50

$$\sin 2x - \cos x = 0$$
$$2\sin x \cos x - \cos x = 0$$
$$\cos x\,(2\sin x - 1) = 0$$

$\sin x = \frac{1}{2}$ أو $\cos x = 0$

$x = \frac{\pi}{6} + 2n\pi$ أو $x = \frac{\pi}{2} + 2n\pi$

$x = \frac{5\pi}{6} + 2n\pi$ $x = \frac{3\pi}{2} + 2n\pi$

حيث n عدد صحيح

الدرس 2-5 ، ص (25)

(47

$$\begin{aligned} \mathbf{a}+\mathbf{b} &= \langle x_1, y_1\rangle + \langle x_2, y_2\rangle \\ &= \langle x_1 + x_2, y_1 + y_2\rangle \\ &= \langle x_2 + x_1, y_2 + y_1\rangle \\ &= \langle x_2, y_2\rangle + \langle x_1, y_1\rangle \\ &= \mathbf{b}+\mathbf{a} \end{aligned}$$

(48

$$\begin{aligned} (\mathbf{a}+\mathbf{b})+\mathbf{c} &= (\langle x_1, y_1\rangle + \langle x_2, y_2\rangle) + \langle x_3, y_3\rangle \\ &= \langle x_1 + x_2, y_1 + y_2\rangle + \langle x_3, y_3\rangle \\ &= \langle x_1 + x_2 + x_3, y_1 + y_2 + y_3\rangle \\ &= \langle x_1, y_1\rangle + \langle x_2 + x_3, y_2 + y_3\rangle \\ &= \langle x_1, y_1\rangle + (\langle x_2, y_2\rangle + \langle x_3, y_3\rangle) \\ &= \mathbf{a}+(\mathbf{b}+\mathbf{c}) \end{aligned}$$

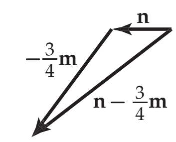
(49

$$\begin{aligned} k(\mathbf{a}+\mathbf{b}) &= k(\langle x_1, y_1\rangle + \langle x_2, y_2\rangle) \\ &= k\langle x_1 + x_2, y_1 + y_2\rangle \\ &= \langle k(x_1 + x_2), k(y_1 + y_2)\rangle \\ &= \langle kx_1 + kx_2, ky_1 + ky_2\rangle \\ &= \langle kx_1, ky_1\rangle + \langle kx_2, ky_2\rangle \\ &= k\langle x_1, y_1\rangle + k\langle x_2, y_2\rangle \\ &= k\mathbf{a} + k\mathbf{b} \end{aligned}$$

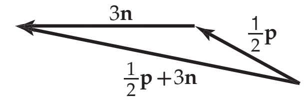
(50

$$|k\mathbf{a}| = |k\langle x_1, y_1\rangle|$$
$$= |\langle kx_1, ky_1\rangle|$$
$$= \sqrt{(kx_1)^2 + (ky_1)^2}$$
$$= \sqrt{k^2{x_1}^2 + k^2{y_1}^2}$$
$$= \sqrt{k^2({x_1}^2 + {y_1}^2)}$$
$$= \sqrt{k^2}\sqrt{{x_1}^2 + {y_1}^2}$$
$$= |k|\,|\langle x_1, y_1\rangle|$$
$$= |k|\,|\mathbf{a}|$$

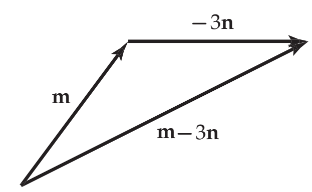
(52



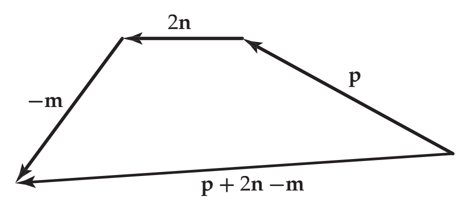
(53



(54



(55



الدرس 5-3 ، ص (31)

(35

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = \mathbf{v} \cdot \mathbf{u}$$
$$\langle \mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2\rangle \cdot \langle \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2\rangle \stackrel{?}{=} \langle \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2\rangle \cdot \langle \mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2\rangle$$
$$\mathbf{u}_1\mathbf{v}_1 + \mathbf{u}_2\mathbf{v}_2 \stackrel{?}{=} \mathbf{v}_1\mathbf{u}_1 + \mathbf{v}_2\mathbf{u}_2$$
$$\mathbf{u}_1\mathbf{v}_1 + \mathbf{u}_2\mathbf{v}_2 = \mathbf{u}_1\mathbf{v}_1 + \mathbf{u}_2\mathbf{v}_2$$

(36

$$\langle \mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2\rangle \cdot (\langle \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2\rangle + \langle \mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2\rangle) \stackrel{?}{=} \langle \mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2\rangle \cdot \langle \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2\rangle + \langle \mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2\rangle \cdot \langle \mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2\rangle$$

$$\langle \mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2\rangle \cdot \langle \mathbf{v}_1 + \mathbf{w}_1, \mathbf{v}_2 + \mathbf{w}_2\rangle \stackrel{?}{=} (\mathbf{u}_1\mathbf{v}_1 + \mathbf{u}_2\mathbf{v}_2) + (\mathbf{u}_1\mathbf{w}_1 + \mathbf{u}_2\mathbf{w}_2)$$

$$\mathbf{u}_1(\mathbf{v}_1 + \mathbf{w}_1) + \mathbf{u}_2(\mathbf{v}_2 + \mathbf{w}_2) \stackrel{?}{=} \mathbf{u}_1\mathbf{v}_1 + \mathbf{u}_1\mathbf{w}_1 + \mathbf{u}_2\mathbf{v}_2 + \mathbf{u}_2\mathbf{w}_2$$

$$\mathbf{u}_1\mathbf{v}_1 + \mathbf{u}_1\mathbf{w}_1 + \mathbf{u}_2\mathbf{v}_2 + \mathbf{u}_2\mathbf{w}_2 = \mathbf{u}_1\mathbf{v}_1 + \mathbf{u}_1\mathbf{w}_1 + \mathbf{u}_2\mathbf{v}_2 + \mathbf{u}_2\mathbf{w}_2$$

(37

$$k(\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}) = k\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = \mathbf{u} \cdot k\mathbf{v}$$
$$k(\langle \mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2\rangle \cdot \langle \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2\rangle) \stackrel{?}{=} k\langle \mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2\rangle \cdot \langle \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2\rangle \stackrel{?}{=} \langle \mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2\rangle \cdot k\langle \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2\rangle$$
$$k(\mathbf{u}_1\mathbf{v}_1 + \mathbf{u}_2\mathbf{v}_2) \stackrel{?}{=} \langle k\mathbf{u}_1, k\mathbf{u}_2\rangle \cdot \langle \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2\rangle \stackrel{?}{=} \langle \mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2\rangle \cdot \langle k\mathbf{v}_1, k\mathbf{v}_2\rangle$$
$$k\mathbf{u}_1\mathbf{v}_1 + k\mathbf{u}_2\mathbf{v}_2 = k\mathbf{u}_1\mathbf{v}_1 + k\mathbf{u}_2\mathbf{v}_2 = k\mathbf{u}_1\mathbf{v}_1 + k\mathbf{u}_2\mathbf{v}_2$$

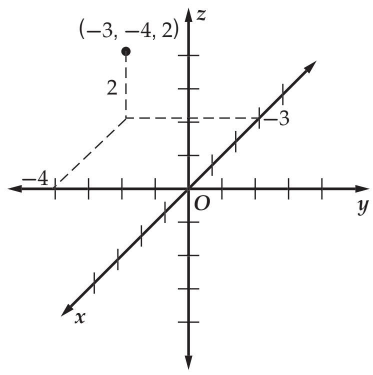
(38 الزاوية بين u ، v هي $\theta = 90°$ $\qquad \cos 90° = \dfrac{\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}}{|\mathbf{u}| \cdot |\mathbf{v}|}$

$\cos 90° = 0 \qquad 0 = \dfrac{\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}}{|\mathbf{u}| \cdot |\mathbf{v}|}$

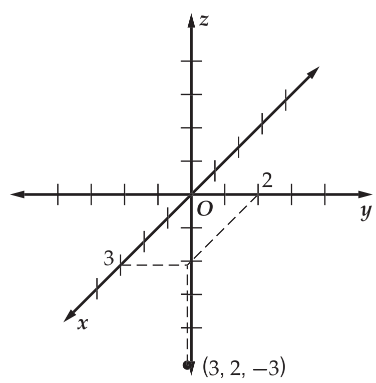
بضرب الطرفين في $|\mathbf{u}| \cdot |\mathbf{v}|$ $\qquad \mathbf{v} \cdot \mathbf{u} = 0$

الدرس 5-4 ، تحقق من فهمك ، ص (33, 35)

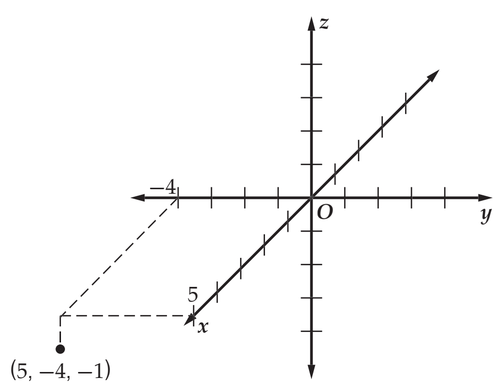
(1A



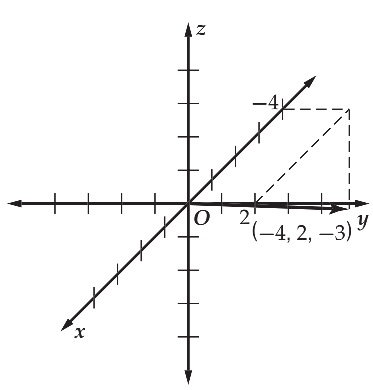
(1B



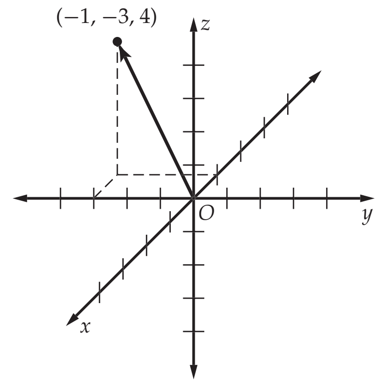
(1C



(3A

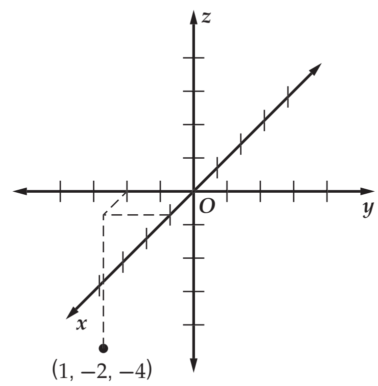


3B)

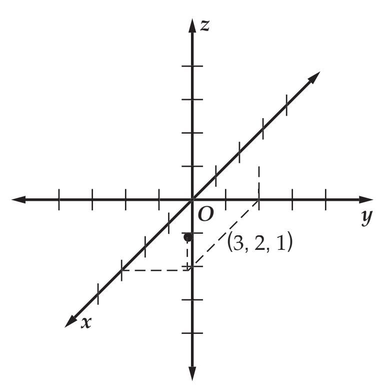


الدرس 5-4، ص (37, 38)

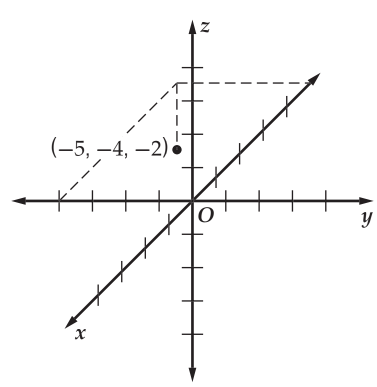
1)



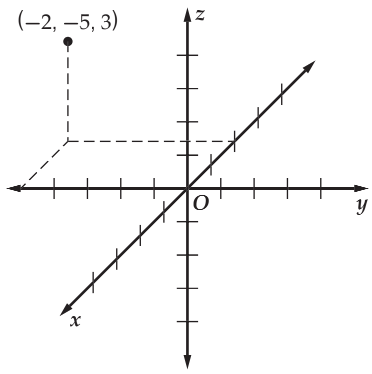
2)



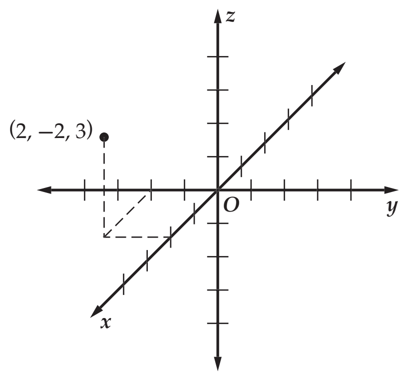
3)



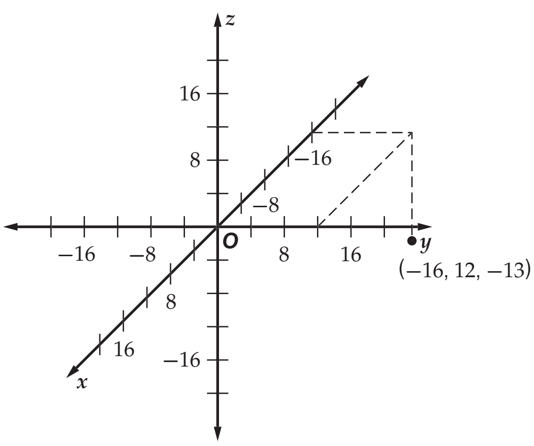
4)



5)



6)



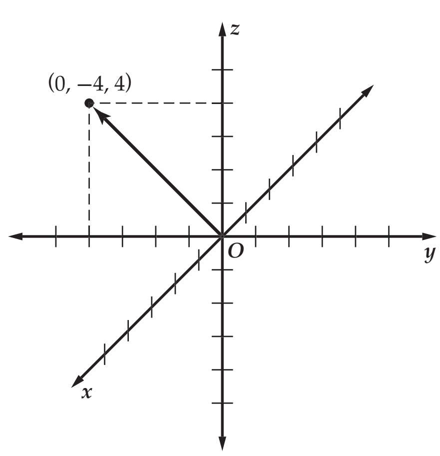
7) 12.25, $\left(-\frac{3}{2}, 5, \frac{13}{2}\right)$

8) 9.90, $\left(-\frac{15}{2}, 2, \frac{1}{2}\right)$

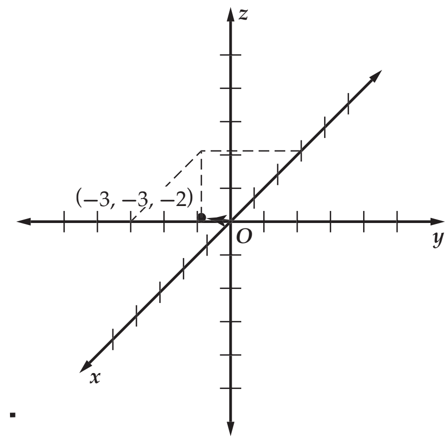
9) 15.65, $\left(2, -2, \frac{9}{2}\right)$

10) 9.11, $\left(-\frac{9}{2}, -\frac{3}{2}, -\frac{13}{2}\right)$

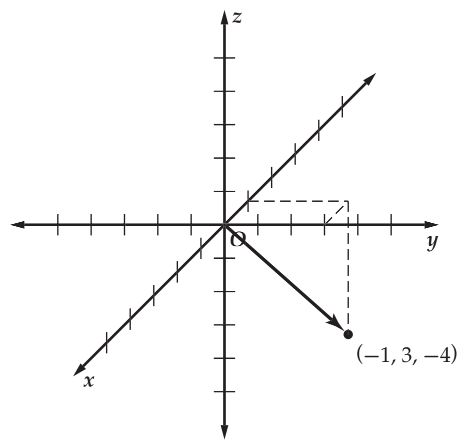
12)



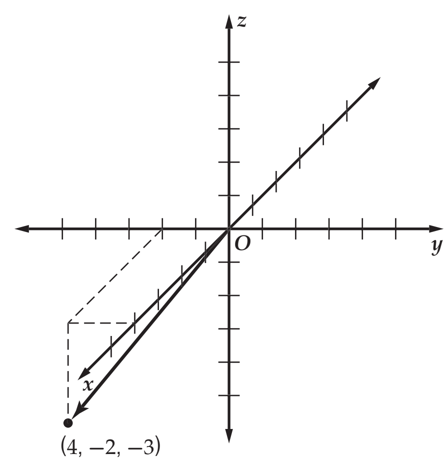
(13



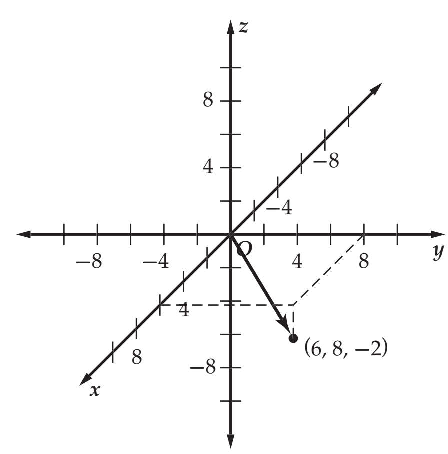
(14



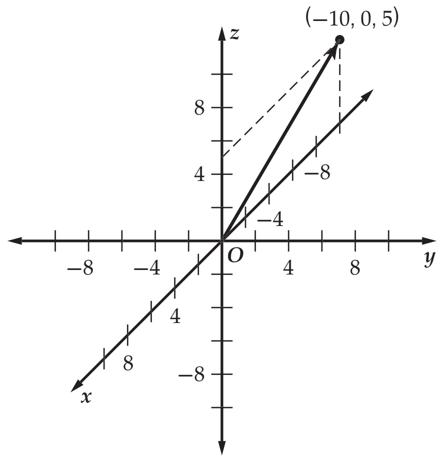
(15



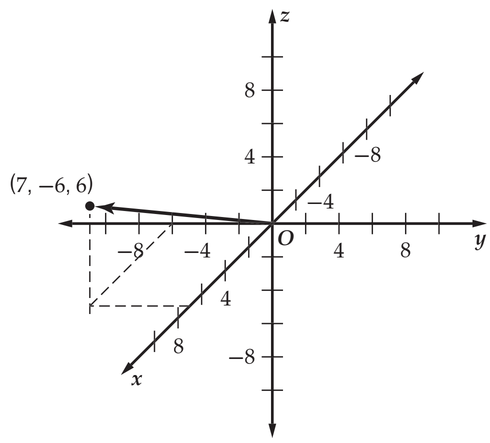
(16



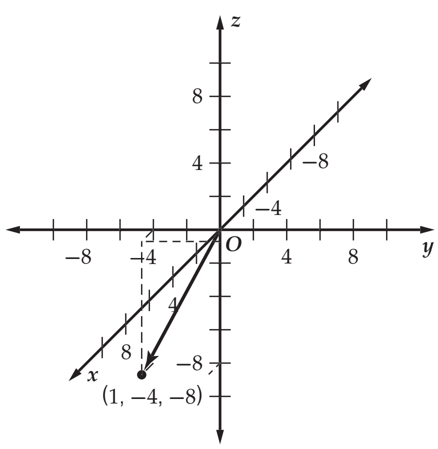
(17



(18



(19



(32 $\langle 16, 2, 8\rangle, 18, \left\langle \frac{8}{9}, \frac{1}{9}, \frac{4}{9} \right\rangle$

(33 $\langle 0, -8, 12\rangle, \left\langle 0, -\frac{2\sqrt{13}}{13}, \frac{3\sqrt{13}}{13} \right\rangle$

(34 $\langle -3, -5, -10\rangle, \sqrt{134},$

$\left\langle -\frac{3\sqrt{134}}{134}, -\frac{5\sqrt{134}}{134}, -\frac{5\sqrt{134}}{67} \right\rangle$

(35 $\langle -4, 8, 20\rangle, 4\sqrt{30},$

$\left\langle -\frac{\sqrt{30}}{30}, \frac{\sqrt{30}}{15}, \frac{\sqrt{30}}{6} \right\rangle$

(36 $\langle -1, 8, -10\rangle, \sqrt{165},$

$\left\langle -\frac{\sqrt{165}}{165}, \frac{8\sqrt{165}}{165}, -\frac{2\sqrt{165}}{33} \right\rangle$

37) $\langle -6, -15, 4\rangle, \sqrt{277}$,

$\left\langle -\frac{6\sqrt{277}}{277}, -\frac{15\sqrt{277}}{277}, \frac{4\sqrt{277}}{277}\right\rangle$

38) $\langle 4, -15, 5\rangle, \sqrt{266}$,

$\left\langle \frac{2\sqrt{266}}{133}, -\frac{15\sqrt{266}}{266}, \frac{5\sqrt{266}}{266}\right\rangle$

39) $\langle 20, 32, 42\rangle, 2\sqrt{797}$,

$\left\langle \frac{10\sqrt{797}}{797}, \frac{16\sqrt{797}}{797}, \frac{21\sqrt{797}}{797}\right\rangle$

45) $AB = \sqrt{(5-3)^2+(-1-1)^2+(1-2)^2} = \sqrt{4+4+1} = 3$

$Bc = \sqrt{(1-5)^2+(3+1)^2+(1-1)^2} = \sqrt{16+16} = 4\sqrt{2}$

$AB = \sqrt{(1-3)^2+(3-1)^2+(1-2)^2} = \sqrt{4+4+1} = 3$

بما أن: $AB = Ac \neq Bc$ فالمثلث متطابق الضلعين.

46) $AB = \sqrt{(4-4)^2+(6-3)^2+(4-4)^2} = 3$

$Ac = \sqrt{(4-4)^2+(3-6)^2+(6-4)^2} = \sqrt{9+4} = \sqrt{13}$

$Ac = \sqrt{(4-4)^2+(3-3)^2+(6-4)^2} = 2$

بما أن: $\left(\sqrt{13}\right)^2 = (2)^2 + (3)^2$

إذن المثلث القائم الزاوية، وبما أن أطوال أضلاعه مختلفة، إذن فهو مختلف الأضلاع.

47) $AB=\sqrt{(2+1)^2+(5-4)^2+(1-3)^2} = \sqrt{9+1+4} = \sqrt{14}$

$Ac=\sqrt{(0-2)^2+(-6-5)^2+(6-1)^2} = \sqrt{4+121+25} = \sqrt{150} = 5\sqrt{6}$

$Ac=\sqrt{(0+1)^2+(-6-4)^2+(6-3)^2} = \sqrt{1+100+9} = \sqrt{110}$

بما أن أطوال أضلاع المثلث مختلفة، إذن المثلث مختلف الأضلاع.

الكرة هي مجموعة النقاط في الفضاء التي تبعد عن مركز الكرة بُعدًا ثابتًا (نصف القطر) إذن إذا كانت النقطة (z ,y ,x) نقطة تقع على الكرة التي مركزها m(h ,k ,y)، فإنه يجب أن تكون المسافة بين A وَ M تساوي r

نفترض أن النقطة $A(x, y, z)$ نقطة تقع على الكرة التي مركزها $m(h, k, l)$ نستخدم صيغة المسافة بين نقطتين.

48) $d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$

لإيجاد معادلة الكرة

$r = \sqrt{(x-h)^2 + (y-k)^2 + (z-l)^2}$

$r^2 = (x-h)^2 + (y-k)^2 + (z-l)^2$

54) إجابة ممكنة: يكون استعمال بُعدين أكثر منطقيةً، عند وصف موقع على الخريطة؛ لأن الخريطة نفسها مرسومة ببعدين. ويكون استعمال ثلاثة أبعاد أكثر منطقيةً، عند وصف موقع على الكرة الأرضية؛ لأن للكرة الأرضية أبعادًا ثلاثة.

الدرس 5-5 ، تحقق من فهمك ، ص (40)

3A)
$(\mathbf{u} \times \mathbf{v}) \cdot \mathbf{u}$
$= \langle 9, -21, -6\rangle \cdot \langle 4, 2, -1\rangle$
$= 9(4) + (-21)(2) + (-6)(-1)$
$= 36 + (-42) + 6$
$= 0$

$(\mathbf{u} \times \mathbf{v}) \cdot \mathbf{v}$
$= \langle 9, -21, -6\rangle \cdot \langle 5, 1, 4\rangle$
$= 9(5) + (-21)(1) + (-6)(4)$
$= 45 + (-21) + (-24)$
$= 0$

3B)
$(\mathbf{u} \times \mathbf{v}) \cdot \mathbf{u}$
$= \langle -1, -7, 3\rangle \cdot \langle -2, -1, -3\rangle$
$= (-1)(-2) + (-7)(-1) + 3(-3)$
$= 2 + 7 + (-9)$
$= 0$

$(\mathbf{u} \times \mathbf{v}) \cdot \mathbf{v}$
$= \langle -1, -7, 3\rangle \cdot \langle 5, 1, 4\rangle$
$= (-1)(5) + (-7)(1) + 3(4)$
$= -5 + (-7) + 12$
$= 0$

الدرس 5-5 ، ص (42, 43)

12) $\langle 21, 7, 0\rangle$

$(\mathbf{u} \times \mathbf{v}) \cdot \mathbf{u}$
$= \langle 21, 7, 0\rangle \cdot \langle -1, 3, 5\rangle$
$= 21(-1) + 7(3) + 0(5)$
$= 0$

$(\mathbf{u} \times \mathbf{v}) \cdot \mathbf{v}$
$= \langle 21, 7, 0\rangle \cdot \langle 2, -6, -3\rangle$
$= 21(2) + 7(-6) + 0(-3)$
$= 0$

13) $\langle 25, 6, 71\rangle$

$(\mathbf{u} \times \mathbf{v}) \cdot \mathbf{u}$
$= \langle 25, 6, 71\rangle \cdot \langle 4, 7, -2\rangle$
$= 25(4) + 6(7) + 71(-2)$
$= 0$

$(\mathbf{u} \times \mathbf{v}) \cdot \mathbf{v}$
$= \langle 25, 6, 71\rangle \cdot \langle -5, 9, 1\rangle$
$= 25(-5) + 6(9) + 71(1)$
$= 0$

14) $\langle 38, 26, 21\rangle$

$(\mathbf{u} \times \mathbf{v}) \cdot \mathbf{u}$
$= \langle 38, 26, 21\rangle \cdot \langle 3, -6, 2\rangle$
$= 38(3) + 26(-6) + 21(2)$
$= 0$

$(\mathbf{u} \times \mathbf{v}) \cdot \mathbf{v}$
$= \langle 38, 26, 21\rangle \cdot \langle 1, 5, -8\rangle$
$= 38(1) + 26(5) + 21(-8)$
$= 0$

15) $\langle 7, 23, 12\rangle$

$(\mathbf{u} \times \mathbf{v}) \cdot \mathbf{u}$
$= \langle 7, 23, 12\rangle \cdot \langle -2, -2, 5\rangle$
$= 7(-2) + 23(-2) + 12(5)$
$= 0$

$(\mathbf{u} \times \mathbf{v}) \cdot \mathbf{v}$
$= \langle 7, 23, 12\rangle \cdot \langle 7, 1, -6\rangle$
$= 7(7) + 23(1) + 12(-6)$
$= 0$

45) إجابة ممكنة: للتحقق من توازي أو تعامد متجهين، يمكنك استعمال قاعدة حساب الزاوية بين متجهين، إذا كان قياس الزاوية °0 أو °180، يكونان متوازيين، وإذا كان قياسها °90 يكونان متعامدين. يمكنك كذلك إيجاد الصورة الإحداثية للمتجهين، واستعمال النسب بين الإحداثيات المتناظرة للتحقق مما إذا كان المتجهان متوازيين، إذا كانت النسب بين الإحداثيات الثلاثة المتناظرة في الصيغة المركبة نفسها، يكون المتجهان متوازيين، ولا يمكن استعمال هذه الطريقة إذا كان المتجهان متعامدين. وللتحقق من تعامد متجهين، يمكنك إيجاد الضرب الداخلي بينهما، فإذا كان الناتج صفرًا يكون المتجهان متعامدين، ولا يمكن استعمال طريقة الضرب الداخلي هذه للتحقق من التوازي.