الفصل 6
الإحداثيات القطبية والأعداد المركبة
Polar Coordinates and Complex Numbers

فيما سبق:

درست القطوع المخروطية ومعادلاتها وتمثيلها بيانيًا.

والآن:

- أُمثِّل الإحداثيات القطبية بيانيًا.
- أحول بين الإحداثيات والمعادلات الديكارتية والقطبية.
- أكتب الأعداد المركبة على الصورة القطبية والصورة الديكارتية وأحول بينهما.

لماذا؟

تصاميم هندسية: يمكن استعمال المعادلات القطبية في عمل تصاميم هندسية فمثلًا لوحة سهام تظهر عليها المواقع بوصفها أعدادًا مركبة على الصورتين القطبية والديكارتية. كما يمكن استعمالها لنمذجة أنماط الصوت التي تساعد على تحديد وضعية تجهيزات المسرح، مثل: السماعات ومكبرات الصوت، وتحديد قوة الصوت ومستوى التسجيل.

قراءة سابقة: اقرأ عناوين الدروس والمفردات الأساسية في هذا الفصل؛ لتساعدك على التنبؤ بالأفكار التي ستتعلمها في هذا الفصل.

50 الفصل 6 الإحداثيات القطبية والأعداد المركبة

مشروع الفصل

تصميم لوحة سهام

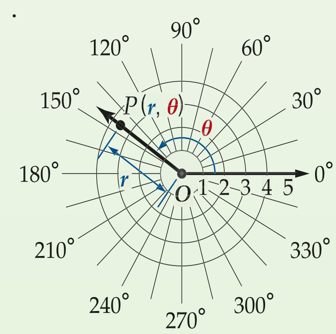
يستعمل الطلاب التمثيل القطبي لعمل تصاميم هندسية مثل لوحة السهام؛ لذا اطلب إليهم:

- تصميم لوحة سهام في مستوى قطبي، تتكون من 5 دوائر متحدة المركز، بحيث يكون للحلقات الدائرية السمك نفسه، ويساوي طول نصف قطر الدائرة الداخلية، ويتدرج عدد النقاط المكتسبة من 1 إلى 5 من الحلقة الدائرية الخارجية إلى الدائرة الداخلية على الترتيب.
- تحديد أنصاف أقطار الحلقات.
- تحديد ثلاثة مواقع (نقاط مكتوبة بالإحداثيات القطبية) أصابها لاعب أطلق ثلاثة أسهم على اللوحة.
- إيجاد مجموع النقاط التي حصل عليها اللاعب.
- تحويل إحداثيات كل نقطة منها إلى الإحداثيات الديكارتية.

المفردات: قدّم مفردات الفصل مستعملًا الخطوات الآتية:

التعريف: نظام الإحداثيات القطبية هو نظام يستعمل الإحداثيات القطبية (r, θ)، حيث r المسافة المتجهة من القطب إلى النقطة P، وθ الزاوية المتجهة من المحور القطبي إلى $\overrightarrow{OP}$.

مثال:



سؤال: إلامَ يُشير الزوج المرتب (r, θ)؟

إجابة ممكنة: تقع النقطة على بُعد r وحدة من القطب، وعلى نصف المستقيم الذي يصنع زاوية قياسها θ مع المحور القطبي.

قراءة سابقة

شجع الطلاب على الإعداد المسبق لكل درس بطريقة جيدة تتم من خلال قراءته قراءة سريعة مرة، وأخرى متأنية، وأعطهم الوقت الكافي؛ لمناقشة ما يحويه الدرس من أفكار ومفردات أساسية، واطلب إليهم كتابة استفساراتهم التي لم يتوصلوا إلى الإجابة عنها، وما صعُب عليهم فهمه؛ وذلك لمناقشتها في أثناء تقديم الدرس.

تنويع التعليم

نموذج بناء المفردات، ص (28).

يكمل الطلاب هذا النموذج بكتابة تعريف كل مفردة جديدة تظهر لهم في أثناء دراسة الفصل أو مثال عليها، ويستفيدون من ذلك في أثناء المراجعة والاستعداد لاختبار الفصل.

التهيئة للفصل 6

تشخيص الاستعداد: هناك بديلان للتأكد من المتطلبات السابقة.

البديل 1

أجب عن أسئلة الاختبار السريع الآتي: **6-1) انظر ملحق الإجابات.**

اختبار سريع

ارسم كلًّا من الزاويتين المعطى قياسهما فيما يأتي في الوضع القياسي:

1) $200°$

2) $-45°$

أوجد زاوية بقياس موجب، وأخرى بقياس سالب مشتركتين في ضلع الانتهاء مع كل من الزوايا الآتية، ومثِّلهما في الوضع القياسي:

3) $165°$

4) $-10°$

5) $\frac{4\pi}{3}$

6) $-\frac{\pi}{4}$

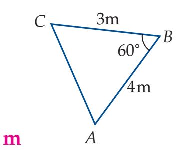
حوِّل قياس الزاوية المكتوبة بالدرجات إلى الراديان، والمكتوبة بالراديان إلى درجات في كل مما يأتي:

7) $-60°$ $\quad -\frac{\pi}{3}$

8) $\frac{3\pi}{2}$ $\quad 270°$

9) أوجد القيمة الدقيقة لـ $\sin 15$ باستعمال متطابقة الفرق بين زاويتين. $\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$

10) أوجد طول الضلع AC في المثلث المرسوم أدناه (قرِّب إلى أقرب جزء من عشرة).



3.6 m تقريبًا

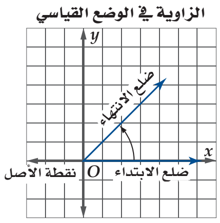
البديل 2

أسئلة تهيئة إضافية على الموقع www.obeikaneducation.com

مراجعة المفردات

ضلع الابتداء للزاوية (Initial Side of an Angle)
الضلع المنطبق على المحور x عندما تكون الزاوية في الوضع القياسي.

ضلع الانتهاء للزاوية (Terminal Side of an Angle)
الضلع الذي يدور حول نقطة الأصل عندما تكون الزاوية في الوضع القياسي.



قياس الزاوية (Measure of an Angle)
يكون قياس الزاوية موجبًا إذا دار ضلع الانتهاء عكس اتجاه عقارب الساعة، ويكون سالبًا إذا دار ضلع الانتهاء في اتجاه عقارب الساعة.

متطابقات المجموع والفرق (Sum and Difference Identities)

- $\sin(A+B) = \sin A \cos B + \cos A \sin B$
- $\cos(A+B) = \cos A \cos B - \sin A \sin B$
- $\sin(A-B) = \sin A \cos B - \cos A \sin B$
- $\cos(A-B) = \cos A \cos B + \sin A \sin B$

المعالجة

استعمل نتائج الاختبار السريع ومخطط المعالجة أدناه، لمساعدتك على تحديد مستوى المعالجة المناسب، والعبارة "إذا... فقم" في المخطط تساعدك على تحديد المستوى المناسب للمعالجة، واقتراح مصادر لكل مستوى.

مخطط المعالجة

المستوى 1 — ضمن المتوسط

إذا أخطأ بعض الطلاب فيما لا يزيد على 25% من الأسئلة تقريبًا.

فقم بمراجعة الطلاب في: موضوع الزوايا وأنظمة قياسها، ومتطابقات جيب وجيب تمام مجموع زاويتين والفرق بينهما.

زيارة الموقع www.obeikaneducation.com

المستوى 2 — دون المتوسط

إذا أخطأ بعض الطلاب في 50% تقريبًا من الأسئلة.

فقم بتحديد أخطائهم، ووضع أنشطة علاجية لذلك.

زيارة الموقع www.obeikaneducation.com

تنويع التعليم

دون ضمن

لوحة اطلب إلى الطلاب عمل قائمة بالتعريفات الواردة، وكتابة مثال على كلٍّ منها في أثناء دراستهم الفصل 6، ويمكن استعمال هذه القائمة وسيلة مراجعة لاختبار الفصل.

6-1 الإحداثيات القطبية

Polar Coordinates

لماذا؟

يَستعملُ مراقبو الحركة الجوية أنظمةَ رادار حديثة لتوجيه مسار الطائرات، والحصول على مسارات ورحلات جوية آمنة. وهذا يضمن بقاء الطائرة على مسافة آمنة من الطائرات الأخرى، والتضاريس الأرضية. ويستعمل الرادار قياسات الزوايا والمسافات المتجهة؛ لتمثيل موقع الطائرة. ويقوم المراقبون بتبادل هذه المعلومات مع الطيارين.

فيما سبق:

درست الزوايا الموجبة والسالبة ورسمتها في الوضع القياسي. (مهارة سابقة)

والآن:

- أمثّل نقاطًا بالإحداثيات القطبية.
- أمثّل بيانيًا معادلات قطبية بسيطة.

المفردات:

نظام الإحداثيات القطبية polar coordinate system

القطب pole

المحور القطبي polar axis

الإحداثيات القطبية polar coordinates

المعادلة القطبية polar equation

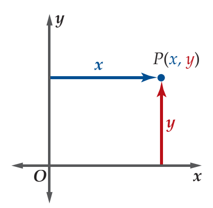
التمثيل القطبي polar graph

www.obeikaneducation.com

تمثيل الإحداثيات القطبيّة لقد تعلمتَ التمثيلَ البياني لمعادلات معطاة في نظام الإحداثيات الديكارتيّة (المستوى الإحداثي). وعندما يحدد مراقبو الحركة الجوية موقع الطائرة باستعمال المسافات والزوايا، فإنهم يستعملون **نظام الإحداثيات القطبية** (المستوى القطبي).

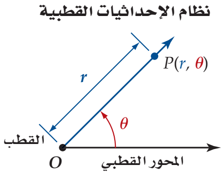
في نظام الإحداثيات الديكارتية، المحوران x, y هما المحوران الأفقي والرأسي على الترتيب، وتُسمَّى نقطة تقاطعهما نقطة الأصل، ويرمز لها بالحرف O. ويُعيَّنُ موقع النقطة P بالإحداثيات الديكارتية من خلال زوج مرتب (x, y)، حيث x, y المسافتان المتّجهتان الأفقية، والرأسية على الترتيب من المحورين إلى النقطة. فمثلًا، تقع النقطة $(1, \sqrt{3})$ على بُعد وحدة واحدة إلى يمين المحور y، وعلى بُعد $\sqrt{3}$ وحدة إلى أعلى المحور x.

نظام الإحداثيات الديكارتية



في نظام الإحداثيات القطبية، نقطة الأصل O نقطة ثابتة تُسمى **القطب**. و**المحور القطبي** هو نصف مستقيم يمتد أفقيًا من القطب إلى اليمين. يمكن تعيين موقع نقطة P في نظام الإحداثيات القطبية باستعمال **الإحداثيات** (r, θ)، حيث r المسافة المتّجهة (أي تتضمن قيمةً واتجاهًا)، فمن الممكن أن تكون r سالبة) من القطب إلى النقطة P، و θ الزاوية المتّجهة (أي تتضمن قيمةً واتجاهًا) من المحور القطبيّ إلى $\overrightarrow{OP}$.

نظام الإحداثيات القطبية



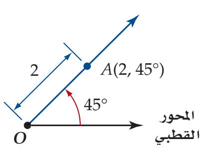
القياس الموجب للزاوية θ يعني دورانًا بعكس اتجاه عقارب الساعة بدءًا من المحور القطبي، في حين يعني القياس السالب دورانًا باتجاه عقارب الساعة، ولتمثيل النقطة P بالإحداثيات القطبيّة، فإن P تقع على ضلع الانتهاء للزاوية θ إذا كانت r موجبة. أما إذا كانت سالبة، فإن P تقع على نصف المستقيم المقابل (الامتداد) لضلع الانتهاء للزاوية θ.

مثال 1 تمثيل الإحداثيات القطبية

مثّل كل نقطة من النقاط الآتية في المستوى القطبي:

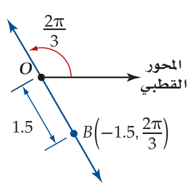
a) $A(2, 45°)$

بما أن $\theta = 45°$، فارسم ضلع الانتهاء للزاوية $45°$، بحيث يكون المحور القطبي هو ضلع الابتداء لها، ولأن $r = 2$، لذا عيِّن نقطةَ A تبعُد وحدتين عن القطب على ضلع الانتهاء للزاوية $45°$، كما في الشكل المجاور.



b) $B\left(-1.5, \frac{2\pi}{3}\right)$

بما أن $\theta = \frac{2\pi}{3}$، لذا ارسم ضلع الانتهاء للزاوية $\frac{2\pi}{3}$، بحيث يكون المحور القطبي هو ضلع الابتداء لها، ولأن r سالبة، لذا مُدَّ ضلع الانتهاء في الاتجاه المقابل، وعيِّن نقطةَ B تبعُد 1.5 وحدة عن القطب على امتداد ضلع الانتهاء، كما في الشكل المجاور.



1 التركيز

الترابط الرأسي

ما قبل الدرس 6-1

رسم زوايا موجبة وسالبة معطاة بالدرجات والراديان في الوضع القياسي.

الدرس 6-1

تمثيل نقاط بالإحداثيات القطبية.

تمثيل معادلات قطبية بسيطة بيانيًا.

ما بعد الدرس 6-1

تحويل الإحداثيات القطبية إلى ديكارتية والعكس.

2 التدريس

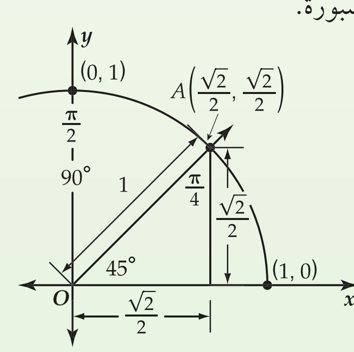
أسئلة التعزيز

اطلب إلى الطلاب قراءة فقرة "لماذا؟".

واسأل:

- إلامَ يُشير الإحداثيان في الزوج المرتب (x, y)؟ يشيران إلى المسافة الأفقية والمسافة الرأسية عن نقطة الأصل.
- ما قياس الزاوية الناتجة عن المستقيم الواصل بين نقطة الأصل والنقطة $A\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$؟ $45°$

ارسم الجزء الآتي من دائرة الوحدة على السبورة.



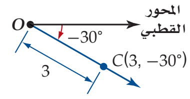
- إلامَ يُشير الزوج المرتب $(1, 45°)$؟ إجابة ممكنة: تقع النقطة على بُعد وحدة واحدة من نقطة الأصل، وعلى نصف المستقيم الذي يصنع زاويةً قياسها $45°$ مع المحور x.

مصادر الدرس 6-1

المصدر	دون المتوسط	ضمن المتوسط	فوق المتوسط
دليل المعلم	• تنويع التعليم ص (51, 55)	• تنويع التعليم ص (51, 55)	• تنويع التعليم ص (58)
كتاب التمارين	• ص (9)	• ص (9)	• ص (9)
مصادر المعلم للأنشطة الصفية	• تدريبات إعادة التعليم، ص (6) • تدريبات حل المسألة، ص (8)	• تدريبات حل المسألة، ص (8) • التدريبات الإثرائية، ص (9)	• تدريبات حل المسألة، ص (8) • التدريبات الإثرائية، ص (9)

c) $C(3, -30°)$

بما أن $\theta = -30°$ ، لذا ارسم ضلع الانتهاء للزاوية $-30°$ ، بحيث يكون المحور القطبي هو ضلع الابتداء لها، ولأن $r = 3$ ، لذا عيِّن نقطة C تبعُد 3 وحدات عن القطب على ضلع الانتهاء للزاوية، كما في الشكل المجاور.



تحقق من فهمك (1A–1C) انظر ملحق الإجابات.

مثّل كل نقطة من النقاط الآتية:

1A) $D\left(-1, \frac{\pi}{2}\right)$ 1B) $E(2.5, 240°)$ 1C) $F\left(4, -\frac{5\pi}{6}\right)$

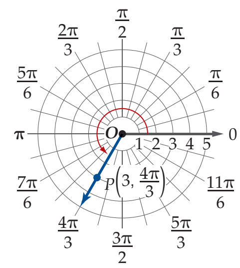
تُعيَّن الإحداثيات القطبية في المستوى القطبي الذي يتخذ شكلًا دائريًا، كما تُعيَّنُ الإحداثيات الديكارتية في المستوى الإحداثي الذي يتخذ شكلًا مستطيلًا.

مثال 2 تمثيل النقاط في المستوى القطبي

مثّل كلًا من النقاط الآتية في المستوى القطبي:

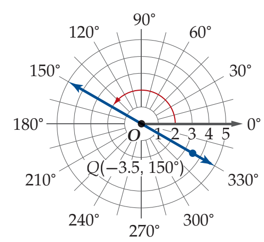
a) $P\left(3, \frac{4\pi}{3}\right)$

بما أن $\theta = \frac{4\pi}{3}$ ، لذا ارسم ضلع الانتهاء للزاوية $\frac{4\pi}{3}$ ، بحيث يكون المحور القطبي هو ضلع الابتداء لها، ولأن $r = 3$ ، لذا عيِّن نقطة P تبعُد 3 وحدات عن القطب على ضلع الانتهاء للزاوية، كما في الشكل المجاور.



b) $Q(-3.5, 150°)$

بما أن $\theta = 150°$ ، لذا ارسم ضلع الانتهاء للزاوية $150°$ ، بحيث يكون المحور القطبي ضلع الابتداء لها، ولأن r سالبة، لذا مُدَّ ضلع الانتهاء للزاوية في الاتجاه المقابل، وعيِّن نقطةً Q تبعد 3.5 وحدات عن القطب على امتداد ضلع الانتهاء للزاوية، كما في الشكل المجاور.

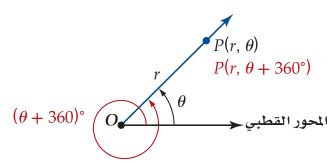


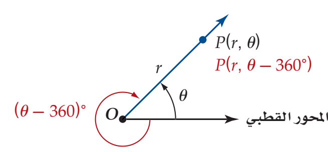
تحقق من فهمك

مثّل كلًا من النقاط الآتية في المستوى القطبي: (2A, 2B) انظر ملحق الإجابات.

2A) $R\left(1.5, -\frac{7\pi}{6}\right)$ 2B) $S(-2, -135°)$

في نظام الإحداثيات الديكارتية كل نقطة يُعبَّر عنها بزوج وحيد من الإحداثيات (x, y). إلا أن هذا لا ينطبق على نظام الإحداثيات القطبية؛ وذلك لأن كل قياس كل زاوية يُكتب بعدد لانهائي من الطرائق؛ وعليه فإن للنقطة (r, θ) الإحداثيات $(r, \theta \pm 360°)$ أو $(r, \theta \pm 2\pi)$ أيضًا كما هو مبيّن أدناه.





إرشادات للدراسة

القطب

يمكن تمثيل القطب بالنقطة $(0, \theta)$ ، حيث θ أي زاوية.

تمثيل الإحداثيات القطبية

المثالان 1, 2 يبيّنان كيفية تمثيل الإحداثيات القطبية على الصورة (r, θ)، عندما تُعطى θ بالدرجات أو الراديان في نظام الإحداثيات القطبية.

المثال 3 يبيّن كيفية إيجاد إحداثيات قطبية متعددة تمثل نقطةً واحدةً.

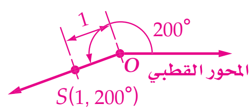
التقويم التكويني

استعمل تدريبات "تحقق من فهمك" بعد كل مثال؛ للتحقق من مدى فهم الطلاب المفاهيم.

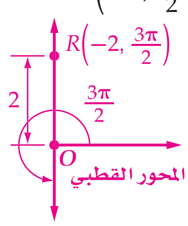
مثال إضافي

1 مثّل كل نقطة من النقاط الآتية في المستوى القطبي:

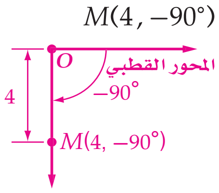
a) $S(1, 200°)$



b) $R\left(-2, \frac{3\pi}{2}\right)$

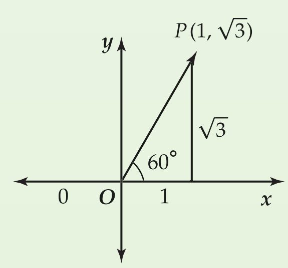


c) $M(4, -90°)$



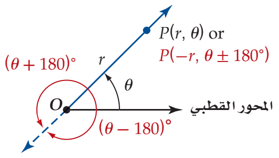
إرشادات للمعلم الجديد

فكرة الإحداثيات القطبية



في المستوى الإحداثي، يمكن التعبير عن موقع النقطة $P(1, \sqrt{3})$ (الواردة في فقرة تمثيل الإحداثيات القطبية في الصفحة 52) بالمتجه $\overrightarrow{OP}$ ، والذي طوله وحدتان، وزاويته مع الأفقي 60°، الأمر الذي دعا إلى التفكير في إمكانية التعبير عن موقع النقطة P مباشرةً، بدلالة طول هذا المتجه والزاوية θ بالصورة $P(2, 60°)$، ومن هنا ظهرت فكرة إنشاء نظام الإحداثيات القطبية؛ لتحديد موقع النقطة P بدلالة الإحداثيين (المسافة المتجهة، والزاوية المتجهة).

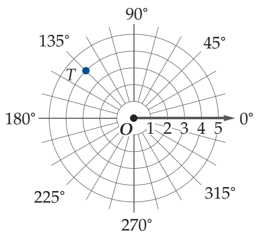
وكذلك لأن r مسافة متجهة، فإن $(r,\ \theta)$ و $(-r,\ \theta \pm 180°)$، أو $(-r,\ \theta \pm \pi)$ تمثِّل النقطة نفسها، كما في الشكل المجاور.



وبصورة عامة، إذا كان n عددًا صحيحًا، فإنه يمكن تمثيل النقطة $(r,\ \theta)$ بالإحداثيات $(r,\ \theta + 360°n)$ أو $(-r,\ \theta + (2n+1)180°)$. وبالمثل، إذا كانت θ مقيسة بالراديان، وكان n عددًا صحيحًا، فإنه يمكن تمثيل النقطة $(r,\ \theta)$ بالإحداثيات $(r,\ \theta + 2n\pi)$ أو $(-r,\ \theta + (2n+1)\pi)$.

مثال 3 تمثيلات قطبية متعددة

إذا كانت $-360° \le \theta \le 360°$، فأوجد أربعة أزواج مختلفة كل منها يمثّل إحداثيين قطبيين للنقطة T في الشكل المجاور.



أحد الأزواج القطبية التي تمثِّل النقطة T هو $(4,\ 135°)$.
وفيما يأتي الأزواج الثلاثة الأخرى:

$(4,\ 135°) = (4,\ 135° - 360°)$ اطرح $360°$ من θ
$= (4,\ -225°)$

$(4,\ 135°) = (-4,\ 135° + 180°)$ ضع $-r$ بدلًا من r، وأضف $180°$ إلى θ
$= (-4,\ 315°)$

$(4,\ 135°) = (-4,\ 135° - 180°)$ ضع $-r$ بدلًا من r، واطرح $180°$ من θ
$= (-4,\ -45°)$

(3A $(5, -120°), (-5, 60°), (-5, -300°)$

(3B $\left(-2, -\frac{11\pi}{6}\right), \left(+2, \frac{7\pi}{6}\right), \left(+2, -\frac{5\pi}{6}\right)$

✓ تحقق من فهمك

أوجد ثلاثة أزواج مختلفة كل منها يمثّل إحداثيين قطبيين للنقطة المعطاة، علمًا بأن: $-360° \le \theta \le 360°$، أو $-2\pi \le \theta \le 2\pi$.

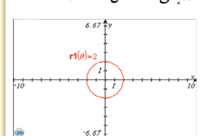
(3A $(5,\ 240°)$ **(3B** $\left(-2,\ \frac{\pi}{6}\right)$

التمثيل البياني للمعادلات القطبية تُسمى المعادلة المعطاة بدلالة الإحداثيات القطبية **معادلة قطبية**. فمثلًا: $r = 2\sin\theta$ هي معادلة قطبية. **التمثيل القطبي** هو مجموعة كل النقاط $(r,\ \theta)$ التي تحقق إحداثياتها المعادلة القطبية.

لقد تعلمت سابقًا كيفية تمثيل المعادلات في نظام الإحداثيات الديكارتية (في المستوى الإحداثي). ويُعدُّ تمثيل المعادلات مثل $x = a$، و $y = b$ أساسيًا في نظام الإحداثيات الديكارتية. وبالمثل فإن التمثيل البياني لمعادلات قطبية مثل $r = k$، و $\theta = h$، حيث k, h عددان حقيقيان، يُعدُّ أساسيًا في نظام الإحداثيات القطبية.

إرشاد تقني

تمثيل المعادلات القطبية
لتمثيل المعادلة القطبية $r = 2$ على الحاسبة البيانية TI-nspire، اضغط على [home] أولًا ثم [menu] و [3: إدخال / تحرير الرسم البياني] وغيِّر وضع الرسم إلى [4: قطبي]، لاحظ أن المتغير التابع تغيَّر من $f(x)$ إلى r، والمتغيِّر المستقل من x إلى θ. مثل $r = 2$.



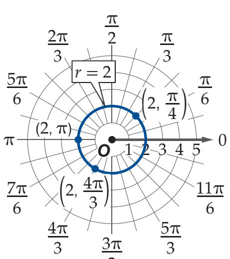
مثال 4 التمثيل البياني للمعادلات القطبية

مَثِّل كل معادلة من المعادلات القطبية الآتية بيانيًّا:

(a $r = 2$

تتكون حلول المعادلة $r = 2$ من جميع النقاط على الصورة $(2,\ \theta)$، حيث θ أي عدد حقيقي فمثلًا تعد النقاط $\left(2, \frac{\pi}{4}\right)$، $(2, \pi)$، $\left(2, \frac{4\pi}{3}\right)$ حلولًا لها.

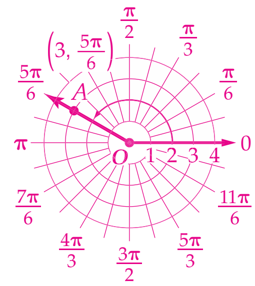
يتكون التمثيل البياني من جميع النقاط التي تبعُد 2 وحدة عن القطب. وعليه فإن المنحنى هو دائرة مركزها نقطة الأصل (القطب)، وطول نصف قطرها 2 كما في الشكل المجاور.



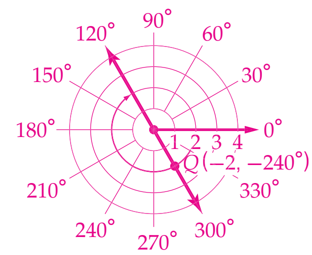
مثالان إضافيان

2 مثل كلًا من النقطتين الآتيتين في المستوى القطبي:

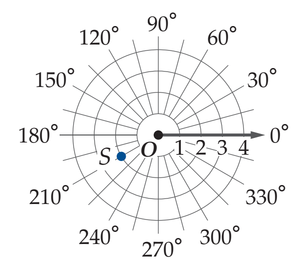
(a $A\left(3, \frac{5\pi}{6}\right)$



(b $Q(-2, -240°)$



3 أوجد أربعة أزواج مختلفة، كلٌّ منها يمثل إحداثيين قطبيين للنقطة S، إذا كانت $-360° < \theta < 360°$



$(2, -150°), (2, 210°), (-2, 30°), (-2, -330°)$

التمثيل البياني للمعادلات القطبية

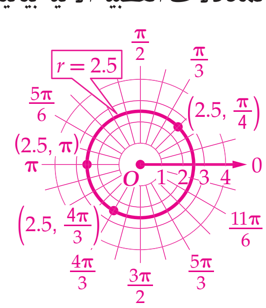
المثال 4 يُبيّن كيفية تمثيل معادلات قطبية بسيطة مثل الدوائر والمستقيمات.

المثال 5 يُبيّن كيفية إيجاد المسافة بين نقطتين مُعطاتين بالإحداثيات القطبية، وذلك باستعمال الصيغة القطبية للمسافة.

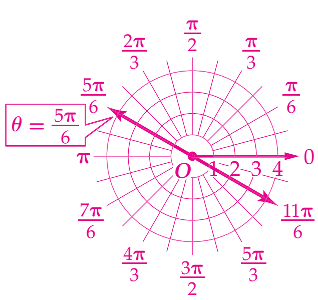
مثال إضافي

4 مثّل كل معادلة من المعادلات القطبية الآتية بيانيًّا:

(a $r = 2.5$

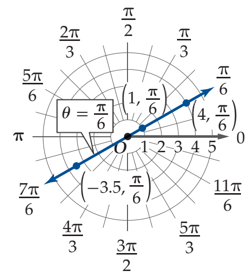


(b $\theta = \frac{5\pi}{6}$



b) $\theta = \frac{\pi}{6}$

تتكوّن حلول المعادلة $\theta = \frac{\pi}{6}$ من جميع النقاط $\left(r, \frac{\pi}{6}\right)$، حيث r أي عدد حقيقي مثل النقاط $\left(1, \frac{\pi}{6}\right)$, $\left(4, \frac{\pi}{6}\right)$, $\left(-3.5, \frac{\pi}{6}\right)$؛ وعليه فإن التمثيل البياني عبارة عن جميع النقاط الواقعة على المستقيم الذي يصنع زاوية $\frac{\pi}{6}$ مع المحور القطبي.



تحقق من فهمك (4A, 4B) انظر ملحق الإجابات.

مَثِّل كل معادلة من المعادلات القطبية الآتية بيانيًّا:

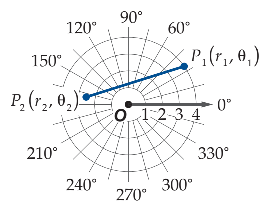
4A) $r = 3$ **4B)** $\theta = \frac{2\pi}{3}$

يمكنُ إيجاد المسافة بين نقطتين في المستوى القطبي باستعمال الصيغة الآتية.

مفهوم أساسي: المسافة بالصيغة القطبية

افترض أن $P_1(r_1, \theta_1)$, $P_2(r_2, \theta_2)$ نقطتان في المستوى القطبي، تُعطى المسافة P_1P_2 بالصيغة:

$$P_1P_2 = \sqrt{r_1^2 + r_2^2 - 2r_1r_2\cos(\theta_2 - \theta_1)}$$



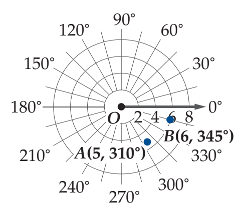
سوف تبرهن هذه الصيغة في السؤال 56

مثال 5 من واقع الحياة: إيجاد المسافة باستعمال الصيغة القطبية

حركة جوية: يتابع مراقبُ الحركة الجوية طائرتين تطيران على الارتفاع نفسه، حيث إحداثيات موقعي الطائرتين هما $A(5, 310°)$, $B(6, 345°)$، وتقاس المسافة المتجهة بالأميال.

a) مثِّل هذا الموقف في المستوى القطبي.

تقع الطائرة A على بُعد 5 mi من القطب، وعلى ضلع الانتهاء لزاوية قياسها 310°، في حين تقع الطائرة B على بُعد 6 mi من القطب، وعلى ضلع الانتهاء لزاوية قياسها 345°، كما في الشكل المجاور.



b) إذا كانت تعليمات الطيران تتطلب أن تكون المسافة بين الطائرتين أكثر من 3 mi، فهل تخالف هاتان الطائرتان هذه التعليمات؟ وَضِّح إجابتك.

باستعمال الصيغة القطبية للمسافة، فإن:

$$AB = \sqrt{r_1^2 + r_2^2 - 2r_1r_2\cos(\theta_2 - \theta_1)}$$ المسافة بالصيغة القطبية

$$= \sqrt{5^2 + 6^2 - 2(5)(6)\cos(345° - 310°)} \approx 3.44$$ $(r_1, \theta_1) = (5, 310°)$, $(r_2, \theta_2) = (6, 345°)$

أي أن المسافة بين الطائرتين 3.44 mi تقريبًا؛ وعليه فإنهما لا تخالفان تعليمات الطيران.

تحقق من فهمك

5) قوارب: يرصُد رادار بحري حركة قاربين، إذا كانت إحداثيات موقعي القاربين $(3, 65°)$, $(8, 150°)$، حيث r بالأميال.

A) انظر ملحق الإجابات.

5A) فمثِّل هذا الموقف في المستوى القطبي. **5B)** ما المسافة بين القاربين؟ 8.3 mi

الدرس 1-6 الإحداثيات القطبية 55

تنبيه!

تهيئة الحاسبة البيانيّة عند استعمال صيغة المسافة القطبية، تأكد من ضبط الحاسبة البيانية على وضعية الدرجات، أو الراديان بحسب قياسات الزوايا المعطاة.

الربط مع الحياة

لقد طوَّرت ألمانيا جهاز رادار عام 1936 يستطيع رصد الطائرات ضمن دائرة نصف قطرها 80 mi.

المصدر: A History of the World Semiconductor Industry

المحتوى الرياضي

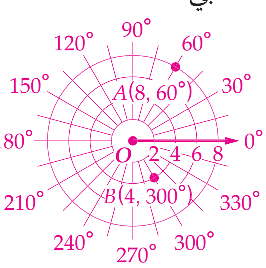
المسافة في المستوى القطبي

انظر إلى المسافة بين النقطتين في المستوى القطبي على أنها ضلع ثالث لمثلث، ضلعاه الآخران هما نصفا مستقيمٍ، ينطلقان من القطب ويمرَّان بالنقطتين. لاحظ أن صيغة المسافة في المستوى القطبي هي إحدى صيغ قانون جيب التمام المُستعملة في إيجاد طول ضلع ثالث في مثلث بمعلومية كلٍّ من الزاوية المقابلة له وطولَي الضلعين الآخرين.

مثال إضافي

5 **حركة جويّة** يتابع مراقب الحركة الجوية طائرتين تطيران على الارتفاع نفسه، حيث إحداثيات موقعَي الطائرتين هما $A(8, 60°)$, $B(4, 300°)$، وتُقاس المسافة المتجهة بالأميال.

a) مثِّل هذا الموقف في المستوى القطبي.



b) استعمل الصيغة القطبية للمسافة، لتجد المسافة بين الطائرتين؟ 10.6 mi تقريبًا

التعليم باستعمال التقنيات

الكاميرا التوثيقية اختر طالبًا وأعطه مجموعة نقاط في المستوى القطبي، ثم اطلب إليه استعمال الكاميرا التوثيقية؛ لتوضيح كيفية تمثيلها في مستوى قطبي بيانيًّا، وإيجاد المسافة بين كل نقطتين منها.

تنويع التعليم

دون ضمن

المتعلمون الحركيون: ارسم مستوى قطبيًّا مكبرًا بمقياس رسم معلوم على سطح الأرض مستعملًا قلمًا قابلًا للمسح. ثم قسِّم الطلاب مجموعات ثلاثية، وأعطِ كل مجموعة شريط قياس، واطلب إلى أحد طلاب المجموعة الوقوف عند القطب، ويقف الطالبان الآخران عند نقطتين مختلفتين في المستوى القطبي، واطلب إليهم حساب المسافة بين الطالبين باستعمال شريط القياس ومقياس الرسم، وقارن النتيجة بنتيجة استعمال الصيغة القطبية للمسافة.

3 التدريب

التقويم التكويني

استعمل الأسئلة 37-1؛ للتأكد من مدى فهم الطلاب، ثم استعمل الجدول أسفل هذه الصفحة؛ لتعيين الواجبات المنزلية للطلاب بحسب مستوياتهم.

تنبيه لحل الأسئلة!

المستوى القطبي في كثير من أسئلة هذا الدرس، يحتاج الطلاب إلى ورقة فيها المستوى القطبي.

تنبيه!

خطأ شائع في الأسئلة 36–25، قد يحسبُ الطلاب المسافة بين نقطتين قطبيتين خطأً؛ لذا اقترح عليهم التأكد مرتين من الإجابة، وذلك عند تعويض قيم سالبةٍ لـ θ في معادلة المسافة القطبية، وكذلك التأكد من ضبط الآلة الحاسبة على وضعية الدرجات أو الراديان بحسب المسألة.

إجابات:

12) $(-1, 330°), (1, -210°), (-1, -30°)$

13) $(2, 120°), (2, -240°), (-2, -60°)$

14) $(4, \frac{5\pi}{6}), (-4, \frac{11\pi}{6}), (-4, \frac{-\pi}{6})$

15) $(3, \frac{5\pi}{3}), (3, \frac{-\pi}{3}), (-3, \frac{-4\pi}{3})$

16) $(5, \frac{-\pi}{6}), (-5, \frac{5\pi}{6}), (-5, \frac{-7\pi}{6})$

17) $(5, \frac{5\pi}{3}), (5, \frac{-\pi}{3}), (-5, \frac{2\pi}{3})$

18) $(2, 330°), (-2, 150°), (-2, -210°)$

19) $(1, 300°), (1, -60°), (-1, 120°)$

تدرب وحل المسائل

مثّل كل نقطة مما يأتي في المستوى القطبي. (المثالان 1 , 2) **1-10) انظر ملحق الإجابات.**

1) $R(1, 120°)$
2) $T(-2.5, 330°)$
3) $F\left(-2, \frac{2\pi}{3}\right)$
4) $A\left(3, \frac{\pi}{6}\right)$
5) $B(5, -60°)$
6) $D\left(-1, -\frac{5\pi}{3}\right)$
7) $G\left(3.5, -\frac{11\pi}{6}\right)$
8) $C(-4, \pi)$
9) $M(0.5, 270°)$
10) $W(-1.5, 150°)$

11) **رماية:** يتكون هدف في منافسة للرماية من 10 دوائر متحدة المركز. ويتدرج عدد النقاط المكتسبة من 1 إلى 10 من الحلقة الدائرية الخارجية إلى الدائرة الداخلية على الترتيب. افترض أن راميًا يستعمل هدفًا نصف قطره 120 cm، وأنه قد أطلق ثلاثة أسهم، فأصابت الهدف عند النقاط $(114, 45°)$, $(82, 315°)$, $(30, 240°)$. إذا كان لجميع الحلقات الدائرية السمك نفسه، ويساوي طول نصف قطر الدائرة الداخلية. (المثالان 1 , 2)

a) فمثّل النقاط التي أصابها الرّامي في المستوى القطبي. **a) انظر ملحق الإجابات.**

b) ما مجموع النقاط التي حصل عليها الرّامي؟ **13 نقطة**

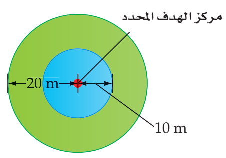
إذا كانت $-360° \le \theta \le 360°$ ، فأوجد ثلاثة أزواج مختلفة كل منها يمثّل إحداثيين قطبيين للنقطة في كلٍّ مما يأتي: (مثال 3) **12–19) انظر الهامش.**

12) $(1, 150°)$
13) $(-2, 300°)$
14) $\left(4, -\frac{7\pi}{6}\right)$
15) $\left(-3, \frac{2\pi}{3}\right)$
16) $\left(5, \frac{11\pi}{6}\right)$
17) $\left(-5, -\frac{4\pi}{3}\right)$
18) $(2, -30°)$
19) $(-1, -240°)$

مَثّل كل معادلة من المعادلات القطبية الآتية بيانيًا: (مثال 4) **20–23) انظر ملحق الإجابات.**

20) $r = 1.5$
21) $\theta = 225°$
22) $\theta = -\frac{7\pi}{6}$
23) $r = -3.5$

24) **القفز بالمظلات:** في مسابقة لتحديد دقة موقع الهبوط، يحاول مظلي الوصول إلى «مركز الهدف المحدد»؛ ومركز الهدف عبارة عن دائرة حمراء طول قطرها 2m. كما يشمل الهدف دائرتين طولا نصفي قطريهما 10m و 20m . (مثال 4)



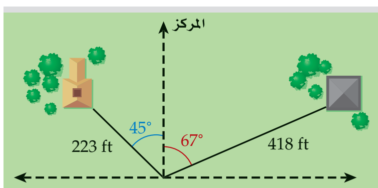
a) اكتب 3 معادلات قطبية تمثّل حدود المناطق الثلاث للهدف. $r = 1, r = 10, r = 20$

b) مثّل هذه المعادلات في المستوى القطبي. **انظر ملحق الإجابات.**

أوجد المسافة بين كل زوج من النقاط فيما يأتي: (مثال 5)

25) $(2, 30°), (5, 120°)$ ≈ 5.39
26) $\left(3, \frac{\pi}{2}\right), \left(8, \frac{4\pi}{3}\right)$ ≈ 10.70
27) $(6, 45°), (-3, 300°)$ ≈ 5.97
28) $\left(7, -\frac{\pi}{3}\right), \left(1, \frac{2\pi}{3}\right)$ 8
29) $\left(-5, \frac{7\pi}{6}\right), \left(4, \frac{\pi}{6}\right)$ 1
30) $(4, -315°), (1, 60°)$ ≈ 3.05
31) $(-2, -30°), (8, 210°)$ ≈ 7.21
32) $\left(-3, \frac{11\pi}{6}\right), \left(-2, \frac{5\pi}{6}\right)$ 5
33) $\left(1, -\frac{\pi}{4}\right), \left(-5, \frac{7\pi}{6}\right)$ ≈ 4.84
34) $(7, -90°), (-4, -330°)$ ≈ 6.08
35) $\left(8, -\frac{2\pi}{3}\right), \left(4, -\frac{3\pi}{4}\right)$ ≈ 4.26
36) $(-5, 135°), (-1, 240°)$ ≈ 5.35

37) **مسّاحون:** أراد مسّاح تحديد حدود قطعة أرض، فحدّد أثرًا يبعُد 223 ft، بزاوية 45° إلى يسار المركز ، وأثرًا آخر على بُعد 418 ft، بزاوية 67° إلى يمين المركز، كما في الشكل أدناه، أوجد المسافة بين الأثرين. (مثال 5) ≈ 542.5 ft



38) **مراقبة:** تراقب آلة تصوير مثبتة منطقة جبلية تمثّل جزءًا من دائرة، وتُحدَّدُ بالمتباينتين $0 \le r \le 40$ ، $-60° \le \theta \le 150°$ ، حيث r بالأمتار.

a) مثّل في المستوى القطبي المنطقة التي يمكن لآلة التصوير مراقبتها. **انظر ملحق الإجابات.**

b) أوجد مساحة المنطقة (مساحة القطاع الدائري تساوي: $\frac{\text{قياس زاوية القطاع بالدرجات}}{360°}$ × مساحة الدائرة). حوالي $2932.2\ m^2$

تنويع الواجبات المنزلية

دون ضمن فوق

المستوى	الأسئلة
دون المتوسط	1–37، 54، 56–72
ضمن المتوسط	1–45 (فردي)، 46، 48، 50، 51، 53، 54، 56–72
فوق المتوسط	38–72

إذا كانت $0 \leq \theta \leq 180°$ ، فأوجد زوجًا آخر من الإحداثيات القطبية لكل نقطة مما يأتي:

39) $(5, 960°)$ **$(-5, 60°)$**

40) $\left(-2.5, \frac{15\pi}{6}\right)$ **$\left(-2.5, \frac{\pi}{2}\right)$**

41) $\left(4, \frac{33\pi}{12}\right)$ **$\left(4, \frac{3\pi}{4}\right)$**

42) $(1.25, -920°)$ **$(1.25, 160°)$**

43) $\left(-1, -\frac{21\pi}{8}\right)$ **$\left(1, \frac{3\pi}{8}\right)$**

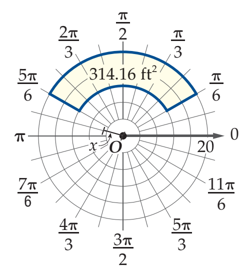
44) $(-6, -1460°)$ **$(6, 160°)$**

45) **مسرح:** يلقي شاعر قصيدة في مسرح. ويمكنُ وصف المسرح بمستوى قطبي، بحيث يقف الشاعر في القطب باتجاه المحور القطبي. افترض أن الجمهور يجلس في المنطقة المحددة بالمتباينتين $30 \leq r \leq 240$ ، $-\frac{\pi}{4} \leq \theta \leq \frac{\pi}{4}$ ، حيث r بالأقدام.

a) مثِّل المنطقة التي يجلس بها الجمهور في المستوى القطبي.
a) انظر ملحق الإجابات.

b) إذا كان كل شخص بحاجة إلى $5\,ft^2$، فكم مقعدًا يتسع المسرح؟ **8906 مقاعد تقريبًا**

46) **أمن:** يضيء مصباح مراقبة مثبت على سطح أحد المنازل منطقة على شكل جزء من قطاع دائري محدَّد بالمتباينتين $\frac{\pi}{6} \leq \theta \leq \frac{5\pi}{6}$ ، $x \leq r \leq 20$ ، حيث r بالأقدام. إذا كانت مساحة المنطقة $314.16\,ft^2$ ، كما هو مبين في الشكل أدناه، فأوجد قيمة x .
10 ft تقريبًا



أوجد الإحداثي المجهول الذي يحقِّق الشروط المعطاة في كل مما يأتي:

47) $P_1 = (3, 35°)$, $P_2 = (r, 75°)$, $P_1P_2 = 4.174$
$r = 6$ أو $r = -1.40$

48) $P_1 = (5, 125°)$, $P_2 = (2, \theta)$, $P_1P_2 = 4$, $0 \leq \theta \leq 180°$
48) $\theta \approx 75.5$ أو $\theta \approx 174.46°$

49) $P_1 = (3, \theta)$, $P_2 = \left(4, \frac{7\pi}{9}\right)$, $P_1P_2 = 5$, $0 \leq \theta \leq \pi$
$\theta \approx \frac{5\pi}{18}$

50) $P_1 = (r, 120°)$, $P_2 = (4, 160°)$, $P_1P_2 = 3.297$
$r \approx 5.13$ أو $r \approx 1$

51) **تمثيلات متعددة:** في هذه المسألة، سوف تستقصي العلاقة بين الإحداثيات القطبية والإحداثيات الديكارتية.
a – e) انظر ملحق الإجابات.

a) **بيانيًّا:** عيِّن $A\left(2, \frac{\pi}{3}\right)$ في المستوى القطبي، وارسم نظام الإحداثيات الديكارتية فوق المستوى القطبي بحيث تنطبق نقطة الأصل على القطب، والجزء الموجب من المحور x على المحور القطبي. وبالتالي سينطبق المحور y على المستقيم $\theta = \frac{\pi}{2}$. ارسم مثلثًا قائمًا بوصل A مع نقطة الأصل، وارسم منها عمودًا على المحور x .

b) **عدديًّا:** احسب طولي ضلعي الزاوية القائمة باستعمال طول الوتر والمتطابقات المثلثية.

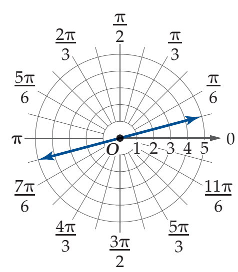
c) **بيانيًّا:** عيِّن $B\left(4, \frac{5\pi}{6}\right)$ على المستوى القطبي نفسه، وارسم مثلثًا قائمًا بوصل B مع نقطة الأصل، وارسم منها عمودًا على المحور x ، واحسب طولي ضلعي الزاوية القائمة.

d) **تحليليًّا:** كيف ترتبط أطوال أضلاع المثلث بالإحداثيات الديكارتية لكل نقطة؟

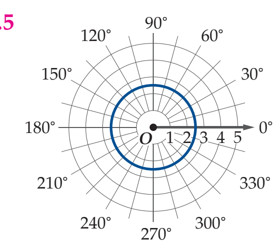
e) **تحليليًّا:** اشرح العلاقة بين الإحداثيات القطبية (r, θ) ، والإحداثيات الديكارتية (x, y) .

اكتب المعادلة لكل تمثيل قطبي مما يأتي:

52) **إجابة ممكنة: $\theta = \frac{\pi}{12}$**



53) **$r = -2.5$ أو $r = 2.5$**



تمثيلات متعددة

في السؤال 51 ، يستعمل الطلاب التمثيل البياني، والتحليل؛ لاستقصاء العلاقة بين الإحداثيات القطبية والإحداثيات الديكارتية.

الدرس 1-6 الإحداثيات القطبية 57

4 التقويم

بطاقة مكافأة اطلب إلى الطلاب كتابة بعض الجمل؛ للمقارنة بين الإحداثيات القطبية والإحداثيات الديكارتية، وإبراز التباين بينهما.

التقويم التكويني

تحقق من مدى استيعاب الطلاب للمفاهيم الواردة في الدرس 1-6، بإعطائهم:

الاختبار القصير 1، ص (30)

مسائل مهارات التفكير العليا

54) **تبرير:** وضّح لماذا لا يكون ترتيب النقاط في معادلة المسافة القطبية مهمًّا، أو بعبارة أخرى، لماذا يمكنك اختيار أي نقطة لتكون P_1، والنقطة الأخرى لتكون P_2؟ **انظر ملحق الإجابات.**

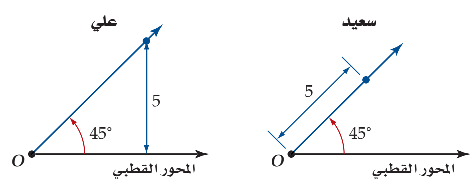
55) **تحدٍّ:** أوجد زوجًا مُرَتَّبًا من الإحداثيات القطبية؛ لتمثيل النقطة التي إحداثياتها الديكارتية $(-3, -4)$. **إجابة ممكنة: $(5, 233°)$ تقريبًا**

56) **برهان:** أثبت أن المسافة بين النقطتين $P_1(r_1, \theta_1), P_2(r_2, \theta_2)$ هي $P_1P_2 = \sqrt{r_1^2 + r_2^2 - 2r_1r_2\cos(\theta_2 - \theta_1)}$.

(**إرشاد:** استعمل قانون جيوب التمام). **انظر ملحق الإجابات.**

57) **تبرير:** وضّح ماذا يحدث لمعادلة المسافة المعطاة بالصيغة القطبية عندما يكون $\theta_2 - \theta_1 = \frac{\pi}{2}$. فسِّر هذا التغيّر. **انظر ملحق الإجابات.**

58) **اكتشف الخطأ:** قام كل من سعيد وعلي بتمثيل النقطة $(5, 45°)$ في المستوى القطبي كما هو مبيّن أدناه. أيهما كانت إجابته صحيحة؟ برِّر إجابتك. **انظر ملحق الإجابات.**



59) **اكتب:** خمِّن سبب عدم كفاية الإحداثيات القطبية لتحديد موقع طائرة بشكل دقيق. **انظر ملحق الإجابات.**

مراجعة تراكمية

أوجد حاصل الضرب الداخلي للمتجهين $\mathbf{u}, \mathbf{v}$ في كل مما يأتي، ثم حدِّد ما إذا كان $\mathbf{u}, \mathbf{v}$ متعامدين أولًا: (الدرس 5-5)

60) $\mathbf{u} = \langle 4, 10, 1\rangle, \mathbf{v} = \langle -5, 1, 7\rangle$ **-3، ليسا متعامدين**

61) $\mathbf{u} = \langle -5, 4, 2\rangle, \mathbf{v} = \langle -4, -9, 8\rangle$ **0، متعامدان**

62) $\mathbf{u} = \langle -8, -3, 12\rangle, \mathbf{v} = \langle 4, -6, 0\rangle$ **-14، ليسا متعامدين**

إذا كان $\mathbf{a} = \langle -4, 3, -2\rangle, \mathbf{b} = \langle 2, 5, 1\rangle, \mathbf{c} = \langle 3, -6, 5\rangle$. فأوجد كلًا مما يأتي: (الدرس 4-5)

63) $3\mathbf{a} + 2\mathbf{b} + 8\mathbf{c}$ **$\langle 16, -29, 36\rangle$**

64) $-2\mathbf{a} + 4\mathbf{b} - 5\mathbf{c}$ **$\langle 1, 44, -17\rangle$**

أوجد الزاوية θ بين المتجهين $\mathbf{u}, \mathbf{v}$ لكل مما يأتي: (الدرس 5-5)

65) $\mathbf{u} = \langle 4, -3, 5\rangle, \mathbf{v} = \langle 2, 6, -8\rangle$ **133.9°**

66) $\mathbf{u} = 2\mathbf{i} - 4\mathbf{j} + 7\mathbf{k}, \mathbf{v} = 5\mathbf{i} + 6\mathbf{j} - 11\mathbf{k}$ **144.3°**

67) $\mathbf{u} = \langle -1, 1, 5\rangle, \mathbf{v} = \langle 7, -6, 9\rangle$ **61.45°**

أوجد إحداثيات مركز وطول نصف قطر كل من الدوائر الآتية: (مهارة سابقة)

68) $x^2 + (y-1)^2 = 9$ **المركز $(0, 1)$ ، ونصف القطر 3**

69) $(x+1)^2 + y^2 = 16$ **المركز $(-1, 0)$ ، ونصف القطر 4**

70) $x^2 + y^2 = 1$ **المركز $(0, 0)$ ، ونصف القطر 1**

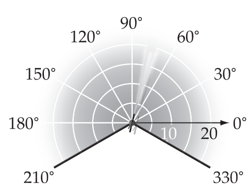
تدريب على اختبار

71) أيُّ المتجهات الآتية يمثِّل $\overrightarrow{RS}$، حيث إن نقطة البداية $R(-5, 3)$ ، ونقطة النهاية $S(2, -7)$؟ **A**

A $\langle 7, -10\rangle$ C $\langle -7, 10\rangle$

B $\langle -3, 10\rangle$ D $\langle -3, -10\rangle$

72) يستطيع رشاش ماء رشّ منطقة على شكل قطاع دائري يمكن تحديدها بالمتباينتين $0 \le r \le 20$ ، $-30° \le \theta \le 210°$ ، حيث r بالأقدام. ما المساحة التقريبية لهذه المنطقة؟ **B**



A $821\,ft^2$ C $852\,ft^2$

B $838\,ft^2$ D $866\,ft^2$

تنويع التعليم

فوق

توسع: اكتب الإحداثيات الديكارتية لكل نقطةٍ ممّا يأتي:

- $A\left(4, \frac{\pi}{2}\right)$ $A(0, 4)$
- $B(2, 270°)$ $B(0, -2)$
- $C(3, \pi)$ $C(-3, 0)$
- $D(1, 360°)$ $D(1, 0)$

6-2 الصورة القطبية والصورة الديكارتية للمعادلات

Polar and Rectangular Forms of Equations

فيما سبق:

درستُ تمثيل النقاط وبعض المعادلات القطبية.
(الدرس 1–6)

والآن:

- أحوِّلُ بين الإحداثيات القطبية والديكارتية.
- أحوِّلُ المعادلات من الصورة القطبية إلى الصورة الديكارتية والعكس.

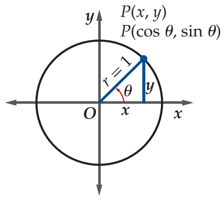
www.obeikaneducation.com

لماذا؟

يبعث مِجَس مُثبت إلى رجل آلي أمواجًا فوق صوتية على شكل دوائر كاملة، وعندما تصطدم الأمواج بجسم، فإنّ المجس يستقبل إشارة، ويقوم بحساب بُعد الجسم عن مقدمة الرجل الآلي بدلالة المسافة المتجهة r ، والزاوية المتجهة θ . ويوصل المجس هذه الإحداثيات القطبية إلى الرَّجل الآلي الّذي يحولها إلى الإحداثيات الديكارتية؛ ليتمكن من تعيينها على خريطة داخلية.

الإحداثيات القطبية والديكارتية يمكن كتابة إحداثيات النقطة $P(x, y)$ الواقعة على دائرة الوحدة، والمقابلة لزاوية θ على الصورة $P(\cos\theta, \sin\theta)$؛ لأن

$$\cos\theta = \frac{x}{r} = \frac{x}{1} = x \quad , \quad \sin\theta = \frac{y}{r} = \frac{y}{1} = y$$



فإذا كان طول نصف قطر دائرة عددًا حقيقيًّا r بدلًا من 1، فإنه يمكننا كتابة النقطة $P(x, y)$ بدلالة r, θ على النحو الآتي:

$$\cos\theta = \frac{x}{r} \quad , \quad \sin\theta = \frac{y}{r}$$

اضرب في r

$$r\cos\theta = x \quad , \quad r\sin\theta = y$$

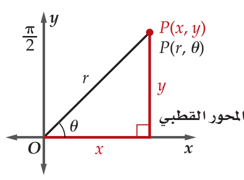
وإذا نظرنا للمستوى الديكارتي على أنه مستوى قطبي، بحيث ينطبق المحور القطبي على الجزء الموجب من المحور x، والقطب على نقطة الأصل، فإنه يصبح لدينا وسيلة لتحويل الإحداثيات القطبية إلى الإحداثيّات الديكارتيّة.

مفهوم أساسي: تحويل الإحداثيات القطبية إلى الإحداثيات الديكارتية

إذا كان للنقطة P الإحداثيات القطبية (r, θ) ، فإن الإحداثيات الديكارتية (x, y) للنقطة P هي:

$$x = r\cos\theta \quad , \quad y = r\sin\theta$$

أي أن $(x, y) = (r\cos\theta, r\sin\theta)$.



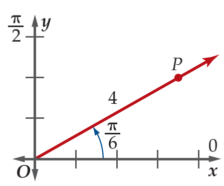
مثال 1: تحويل الإحداثيات القطبية إلى الإحداثيات الديكارتية

حوّل الإحداثيات القطبية إلى إحداثيات ديكارتية، لكلِّ نقطة مما يأتي:

a) $P\left(4, \frac{\pi}{6}\right)$

بما أن إحداثيات النقطة $(r, \theta) = \left(4, \frac{\pi}{6}\right)$ ، فإن $r = 4,\ \theta = \frac{\pi}{6}$.

$x = r\cos\theta$	صيغ التحويل	$y = r\sin\theta$
$= 4\cos\frac{\pi}{6}$	$r = 4,\ \theta = \frac{\pi}{6}$	$= 4\sin\frac{\pi}{6}$
$= 4\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$	بسِّط	$= 4\left(\frac{1}{2}\right)$
$= 2\sqrt{3}$		$= 2$



أي أن الإحداثيات الديكارتية للنقطة P هي $(2\sqrt{3}, 2)$ أو $(3.46, 2)$ تقريبًا كما في الشكل أعلاه.

6-2 ملاحظات الدرس

1 التركيز

الترابط الرأسي

ما قبل الدرس 6-2

استعمال نظام الإحداثيات القطبية؛ لتمثيل النقاط وبعض المعادلات البسيطة.

الدرس 6-2

التحويل بين الإحداثيات القطبية والديكارتية.

تحويل المعادلات من الصورة القطبية إلى الصورة الديكارتية والعكس.

ما بعد الدرس 6-2

تحويل الأعداد المركبة من الصورة القطبية إلى الصورة الديكارتية والعكس.

2 التدريس

أسئلة التعزيز

اطلب إلى الطلاب قراءة فقرة "لماذا؟".

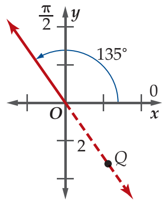
واسأل:

- إذا وُضع نظام الإحداثيات الديكارتية منطبقًا على نظام الإحداثيات القطبية، فأيُّ النقاط القطبية ستنطبق على نقطة الأصل؟ $(0, 0)$ أو $(0, 0°)$.
- أيُّ النقاط القطبية ستنطبق على النقطة الديكارتية $(4, 0)$؟ $(4, 0)$ أو $(4, 0°)$.
- أيُّ النقاط القطبية ستنطبق على النقطة الديكارتية $(0, 4)$؟ $(4, 90°)$ أو $\left(4, \frac{\pi}{2}\right)$
- أيُّ النقاط الديكارتية ستنطبق على النقطة القطبية $(4, \pi)$؟ $(-4, 0)$
- أيُّ النقاط الديكارتية ستنطبق على النقطة القطبية $(4, 270°)$؟ $(0, -4)$

مصادر الدرس 6-2

المصدر	دون المتوسط	ضمن المتوسط	فوق المتوسط
دليل المعلم	• تنويع التعليم ص (61)	• تنويع التعليم ص (61)	• تنويع التعليم ص (67)
كتاب التمارين	• ص (10)	• ص (10)	• ص (10)
مصادر المعلم للأنشطة الصفية	• تدريبات إعادة التعليم، ص (10) • تدريبات حل المسألة، ص (12)	• تدريبات حل المسألة، ص (12) • التدريبات الإثرائية، ص (13)	• تدريبات حل المسألة، ص (12) • التدريبات الإثرائية، ص (13)

$Q(-2, 135°)$ (b

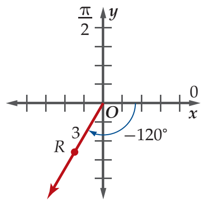


بما أن إحداثيات النقطة $(r, \theta) = (-2, 135°)$، فإن $r = -2, \theta = 135°$.

$x = r\cos\theta$	صيغ التحويل	$y = r\sin\theta$
$= -2\cos 135°$	$r = -2, \theta = 135°$	$= -2\sin 135°$
$= -2\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \sqrt{2}$	بسّط	$= -2\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = -\sqrt{2}$

أي أن الإحداثيات الديكارتية للنقطة Q هي $(\sqrt{2}, -\sqrt{2})$ أو $(1.41, -1.41)$ تقريبًا كما في الشكل أعلاه.

$V(3, -120°)$ (c



بما أن إحداثيات النقطة $(r, \theta) = (3, -120°)$، فإن $r = 3, \theta = -120°$

$x = r\cos\theta$	صيغ التحويل	$y = r\sin\theta$
$= 3(\cos -120°)$	$r = 3, \theta = -120°$	$= 3\sin(-120°)$
$= 3\left(-\frac{1}{2}\right) = -\frac{3}{2}$	بسّط	$= 3\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = -\frac{3\sqrt{3}}{2}$

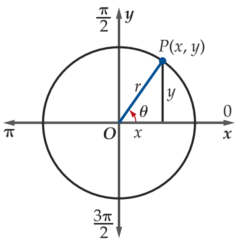
أي أن الإحداثيات الديكارتية للنقطة V هي $\left(-\frac{3}{2}, -\frac{3\sqrt{3}}{2}\right)$ أو $(-1.5, -2.6)$ تقريبًا كما في الشكل أعلاه.

تحقق من فهمك

حوّل الإحداثيات القطبية إلى إحداثيات ديكارتية، لكل نقطة مما يأتي: انظر الهامش.

1A) $R(-6, -120°)$ **1B)** $S\left(5, \frac{\pi}{3}\right)$ **1C)** $T(-3, 45°)$

ولكتابة زوج الإحداثيات الديكارتية بالصيغة القطبية، فإنك بحاجة إلى إيجاد المسافة المتجهة r من النقطة (x, y) إلى نقطة الأصل أو القطب، و قياس الزاوية المتجهة التي يصنعها r مع الجزء الموجب من المحور x أو المحور القطبيّ.



استعمل نظرية فيثاغورس؛ لإيجاد المسافة r من النقطة (x, y) إلى نقطة الأصل.

$r^2 = x^2 + y^2$ نظرية فيثاغورس

$r = \sqrt{x^2 + y^2}$ خُذ الجذر التربيعي الموجب للطرفين

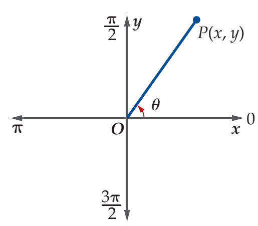
ترتبط الزاوية θ بكل من x, y من خلال دالة الظل، ولإيجاد الزاوية θ:

$\tan\theta = \frac{y}{x}$ تعريف الظل

$\theta = \mathrm{Tan}^{-1}\frac{y}{x}$ دالة معكوس الظل

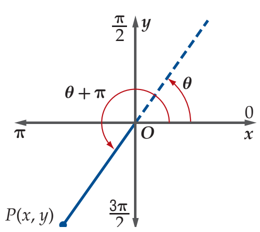
تذكّر أن الدالة العكسيّة للظل معرّفة فقط على الفترة $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ أو $(-90°, 90°)$ في نظام الإحداثيات الديكارتية.

وتُعطى قيم θ الواقعة في الربع الأول أو الرابع، أي عندما تكون $x > 0$، كما في الشكل **6.2.1**. وإذا كانت $x < 0$، فإن الزاوية تقع في الربع الثاني أو الثالث، لذا عليك إضافة π أو $180°$ (طول الدورة للدالة $y = \tan x$) إلى قياس الزاوية المعطاة بالدالة العكسيّة للظل كما في الشكل **6.2.2**.



$\theta = \mathrm{Tan}^{-1}\frac{y}{x}$ عندما $x > 0$

الشكل 6.2.1



$\theta = \mathrm{Tan}^{-1}\frac{y}{x} + \pi$ أو $\theta = \mathrm{Tan}^{-1}\frac{y}{x} + 180°$ عندما $x < 0$

الشكل 6.2.2

إرشادات للدراسة

تحويل الإحداثيات

إن العملية المتبعة لتحويل الإحداثيات الديكارتية إلى الإحداثيات القطبية هي ذاتها العملية المتبعة في إيجاد طول المتجه واتجاهه.

الإحداثيات القطبية والديكارتية

المثال 1 يُبيِّن كيفية تحويل الإحداثيات القطبية إلى إحداثيات ديكارتية.

المثال 2 يُبيِّن كيفية تحويل الإحداثيات الديكارتية إلى إحداثيات قطبية.

المثال 3 يُبيِّن كيفية التحويل بين الإحداثيات القطبية والديكارتية.

التقويم التكويني

استعمل تدريبات "تحقق من فهمك" بعد كل مثال؛ للتحقق من مدى فهم الطلاب المفاهيم.

مثال إضافي

1 حوّل الإحداثيات القطبية إلى إحداثيات ديكارتية لكل نقطة مما يأتي:

a) $D\left(2, \frac{\pi}{3}\right)$ $D(1, \sqrt{3})$ أو $D(1, 1.37)$ تقريبًا

b) $F(-5, 45°)$ $F\left(\frac{-5\sqrt{2}}{2}, \frac{-5\sqrt{2}}{2}\right)$ أو $F(-3.54, -3.54)$ تقريبًا

c) $H(4, -240°)$ $H(-2, 2\sqrt{3})$ أو $H(-2, 3.46)$ تقريبًا

إرشادات للمعلم الجديد

ضبط الوضعية ذكِّر الطلاب بأن عليهم ضبط وضعية الآلة الحاسبة في المثال 1a؛ لتكون RADIAN (راديان)، وذلك بالضغط على on ثم 5 الإعدادات ثم الاختيار. أما في المثالين Ib, Ic ، فإن عليهم ضبط الوضعية لتكون DEGREE (درجة) بنفس الطريقة.

إجابات (تحقق من فهمك):

1A) $(3, 3\sqrt{3})$ أو $(3, 5.20)$ تقريبًا

1B) $(2.5, 2.5\sqrt{3})$ أو $(2.5, 4.33)$ تقريبًا

1C) $\left(-\frac{3\sqrt{2}}{2}, -\frac{3\sqrt{2}}{2}\right)$ أو $(-2.1, -2.1)$ تقريبًا

60 الفصل 6 الإحداثيات القطبية والأعداد المركبة

مفهوم أساسي — تحويل الإحداثيات الديكارتية إلى الإحداثيات القطبية

إذا كان للنقطة P الإحداثيات الديكارتية (x, y)، فإن الإحداثيات القطبية للنقطة P هي (r, θ) حيث:

$r = \sqrt{x^2 + y^2}$ ، $\theta = \mathrm{Tan}^{-1} \frac{y}{x}$ ، عندما $x > 0$

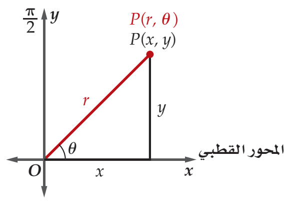
وعندما $x < 0$ فإن:

$\theta = \mathrm{Tan}^{-1} \frac{y}{x} + \pi$

أو $\theta = \mathrm{Tan}^{-1} \frac{y}{x} + 180°$.

وعندما $x = 0$ فإن: $\theta = \frac{\pi}{2}$ ، $r = y$ إذا كانت $y > 0$

أو $\theta = -\frac{\pi}{2}$ ، $r = y$ إذا كانت $y < 0$



تذكَّر أن هناك عددًا لانهائيًّا من أزواج الإحداثيات القطبية للنقطة، والتحويل من الإحداثيات الديكارتية إلى الإحداثيات القطبية يعطي أحدها.

مثال 2 — تحويل الإحداثيات الديكارتية إلى الإحداثيات القطبيّة

أوجد زوجين مختلفين كل منهما يمثّل إحداثيين قطبيين لكل نقطة معطاة بالإحداثيّات الديكارتيّة في كلٍّ مما يأتي:

a) $S(1, -\sqrt{3})$

بما أن إحداثيات النقطة $(x, y) = (1, -\sqrt{3})$ ، فإن $x = 1, y = -\sqrt{3}$.

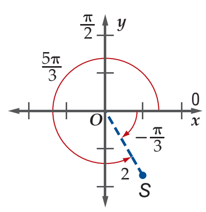
ولأن $x > 0$ ، لذا استعمل الصيغة $\theta = \mathrm{Tan}^{-1}\frac{y}{x}$ ؛ لإيجاد الزاوية θ .

$r = \sqrt{x^2 + y^2}$	صيغ التحويل	$\theta = \mathrm{Tan}^{-1}\frac{y}{x}$
$= \sqrt{1^2 + (-\sqrt{3})^2}$	$x = 1, y = -\sqrt{3}$	$= \mathrm{Tan}^{-1}\frac{-\sqrt{3}}{1}$
$= \sqrt{4} = 2$	بسّط	$= -\frac{\pi}{3}$

أي أن $\left(2, -\frac{\pi}{3}\right)$ زوج من الإحداثيات القطبية للنقطة S.

ويمكن إيجاد زوج آخر باستعمال قيمة موجبة لـ θ ، وذلك بإضافة 2π .

فيكون $\left(2, -\frac{\pi}{3} + 2\pi\right)$ أو $\left(2, \frac{5\pi}{3}\right)$ ، كما في الشكل المجاور.



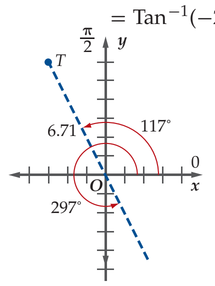
b) $T(-3, 6)$

بما أن إحداثيات النقطة $(x, y) = (-3, 6)$ ، فإن $x = -3, y = 6$.

ولأن $x < 0$ ، لذا استعمل الصيغة $\theta = \mathrm{Tan}^{-1}\frac{y}{x} + 180°$ ؛ لإيجاد الزاوية θ

$r = \sqrt{x^2 + y^2}$	صيغ التحويل	$\theta = \mathrm{Tan}^{-1}\frac{y}{x} + 180°$
$= \sqrt{(-3)^2 + 6^2}$	$y = 6, x = -3$	$= \mathrm{Tan}^{-1}\left(-\frac{6}{3}\right) + 180°$
$= \sqrt{45} \approx 6.71$	بسّط	$= \mathrm{Tan}^{-1}(-2) + 180° \approx 117°$

أي أن $(6.71, 117°)$ تقريبًا هو زوج من الإحداثيات القطبية للنقطة T ، ويمكن إيجاد زوج آخر باستعمال قيمة سالبة لـ r ، فنحصل على $(-6.71, 117° + 180°)$ أو $(-6.71, 297°)$ ، كما في الشكل المجاور.



تحقق من فهمك

أوجد زوجين مختلفين كل منهما يمثّل إحداثيين قطبيين لكل نقطة معطاة بالإحداثيّات الديكارتيّة في كلٍّ مما يأتي:

2A) $V(8, 10)$ تقريبًا $(12.8, 4.04)$ ، تقريبًا $(-12.8, 0.90)$

2B) $W(-9, -4)$ تقريبًا $(-9.85, 6.70)$ ، تقريبًا $(9.85, 3.56)$

مثال إضافي

2 أوجد زوجين مختلفين كل منهما يمثل إحداثيين قطبيين لكل نقطة معطاة بالإحداثيات الديكارتية في كلٍّ مما يأتي:

a) $E(2, -4)$ تقريبًا $E(4.47, -1.11)$ أو $E(4.47, 5.17)$

b) $G(-2, -4)$ تقريبًا $G(4.47, 4.25)$ أو $G(-4.47, 7.39)$

التعليم باستعمال التقنيات

السبورة التفاعلية حُلَّ عدة أمثلة على التحويل بين الإحداثيات الديكارتية والقطبية، ثمّ خَزِّن حلولك في ملفٍّ وأرسله إلى الطلاب؛ لاتخاذه مرجعًا إضافيًّا.

تنويع التعليم

دون ضمن

المتعلمون المتفاعلون: قسِّم الطلاب إلى مجموعات ثلاثية. واطلب إلى أحد طلاب كل مجموعة تسمية إحداثيات قطبية لنقطة ما. ثم يقوم طالب آخر بتحويل إحداثيات النقطة إلى إحداثيات ديكارتية ويُمرِّرُها إلى الطالب الثالث الذي يعيد تحويلها إلى إحداثيات قطبية. اطلب إليهم المقارنة بين الصورتين القطبيتين للنقطة. إذا لم تكونا متساويتين، فاسأل الطلاب عن الخطأ الذي أدى إلى ذلك. كرر النشاط مبتدئًا بإحداثيات ديكارتية.

في بعض ظواهر الحياة الطبيعية ، قد يكون من المفيد أن تحوّل بين الإحداثيات القطبية والإحداثيات الديكارتية.

مثال 3 من واقع الحياة التحويل بين الإحداثيات

رجل آلي: بالرجوع إلى فقرة «لماذا؟» ، افترض أن الرَّجل الآلي متجه إلى الشرق، وأن المِجَسَّ قد رَصَدَ جسمًا عند النقطة $(5, 295°)$.

a) ما الإحداثيات الديكارتية التي يحتاج الرجل الآلي إلى حسابها؟

$x = r\cos\theta$ صيغ التحويل $y = r\sin\theta$

$= 5\cos 295°$ $r = 5 , \theta = 295°$ $= 5\sin 295°$

≈ 2.11 بسّط ≈ -4.53

أي أن الإحداثيات الديكارتية لموقع الجسم هي $(2.11 , -4.53)$ تقريبًا.

b) إذا كان موقع جسم رُصد سابقًا عند النقطة التي إحداثياتها $(3 , 7)$ ، فما المسافة وقياس الزاوية بين الجسم والرجل الآلي؟

$r = \sqrt{x^2 + y^2}$ صيغ التحويل $\theta = \text{Tan}^{-1}\frac{y}{x}$

$= \sqrt{3^2 + 7^2}$ $x = 3 , y = 7$ $= \text{Tan}^{-1}\frac{7}{3}$

≈ 7.62 بسّط $\approx 66.8°$

الإحداثيات القطبية لموقع الجسم هي $(7.62, 66.8°)$ تقريبًا؛ أي أن المسافة بين الجسم والرجل الآلي 7.62، وقياس الزاوية بينهما $66.8°$

الربط مع الحياة

صممت وكالة ناسا رجلًا آليًا وزنه 3400 باوند، وطوله 12 ft، وطول ذراعه 11 ft؛ لأداء بعض المهام في الفضاء الخارجي.

المصدر: The New York Times

تحقق من فهمك

3) صيد الأسماك: يُستعمل جهاز رصد؛ لتحديد موقع وجود الأسماك تحت الماء. افترض أن قاربًا يتجه إلى الشرق، وأن جهاز الرصد قد رصد سربًا من الأسماك عند النقطة $(6, 125°)$.

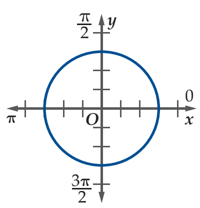
A) ما الإحداثيات الديكارتية لموقع سرب الأسماك؟ تقريبًا $(-3.44, 4.91)$

B) إذا كان موقع سرب الأسماك قد رُصد سابقًا عند النقطة التي إحداثياتها الديكارتية $(-2 , 6)$ ، فما الإحداثيات القطبية لموقع السرب؟ تقريبًا $(6.32, 108°)$

المعادلات القطبية والديكارتية قد تحتاج في دراستك المستقبلية إلى تحويل المعادلة من الصورة الديكارتية إلى الصورة القطبية والعكس؛ وذلك لتسهيل بعض الحسابات. فبعض المعادلات الديكارتية الـمعقَّدة صورتها القطبية أسهل كثيرًا. لاحظ معادلة الدائرة على الصورة الديكارتية والقطبية كما في الشكل أدناه.

المعادلة على الصورة الديكارتية

$x^2 + y^2 = 9$



المعادلة على الصورة القطبية

$r = 3$

وبشكلٍ مماثل فإن بعض المعادلات القطبية المعقَّدة صورتها الديكارتية أسهل كثيرًا،

فالمعادلة القطبية $r = \frac{6}{2\cos\theta - 3\sin\theta}$ صورتها الديكارتية هي $2x - 3y = 6$

مثال إضافي

3 رجل آلي عُد إلى فقرة "لماذا؟" في بداية الدرس ومثال 3. افترض أن الرجل الآلي متجه إلى الشرق، وأن المِجَسّ قد رصد جسمًا عند النقطة $(3, 280°)$.

a) ما الإحداثيات الديكارتية التي يحتاج الرجل الآلي إلى حسابها؟ $(0.52, -2.95)$

b) إذا كان موقع جسم رُصد سابقًا عند النقطة التي إحداثياتها الديكارتية $(4, 9)$، فما المسافة وما قياس الزاوية بين الجسم والرجل الآلي؟ تقريبًا $(9.85, 66.0°)$

إن عملية تحويل المعادلة من الصورة الديكارتية إلى الصورة القطبية عملية مباشرة؛ إذ نعوض عن x بـ $r\cos\theta$، وعن y بـ $r\sin\theta$ ، ثم نبسِّط المعادلة الناتجة باستعمال الطرق الجبرية والمتطابقات المثلثية.

مثال 4 تحويل المعادلات الديكارتية إلى المعادلات القطبية

اكتب كلَّ معادلة مما يأتي على الصورة القطبية:

a) $(x-4)^2+y^2=16$

لإيجاد الصورة القطبيّة للمعادلة، عوض عن x بـ $r\cos\theta$ وعن y بـ $r\sin\theta$. ثم بَسِّط المعادلة.

$(x-4)^2+y^2=16$	المعادلة الأصلية
$(r\cos\theta-4)^2+(r\sin\theta)^2=16$	$x=r\cos\theta , y=r\sin\theta$
$r^2\cos^2\theta-8r\cos\theta+16+r^2\sin^2\theta=16$	اضرب
$r^2\cos^2\theta-8r\cos\theta+r^2\sin^2\theta=0$	اطرح 16 من الطرفين
$r^2\cos^2\theta+r^2\sin^2\theta=8r\cos\theta$	ضع الحدود المربعة في طرف واحد
$r^2(\cos^2\theta+\sin^2\theta)=8r\cos\theta$	حلّل
$r^2(1)=8r\cos\theta$	متطابقة فيثاغورس
$r=8\cos\theta$	اقسم الطرفين على r حيث $r\neq 0$

b) $y=x^2$

$y=x^2$	المعادلة الأصلية
$r\sin\theta=(r\cos\theta)^2$	$x=r\cos\theta, y=r\sin\theta$
$r\sin\theta=r^2\cos^2\theta$	اضرب
$\frac{\sin\theta}{\cos^2\theta}=r$	اقسم الطرفين على $r\cos^2\theta$
$\frac{\sin\theta}{\cos\theta}\cdot\frac{1}{\cos\theta}=r$	$\frac{\sin\theta}{\cos^2\theta}=\frac{\sin\theta}{\cos\theta}\cdot\frac{1}{\cos\theta}$
$\tan\theta\sec\theta=r$	المتطابقات النسبية ومتطابقات المقلوب

تحقق من فهمك

اكتب كلَّ معادلة مما يأتي على الصورة القطبية:

4A) $x^2+(y-3)^2=9$ **4B)** $x^2-y^2=1$

عملية تحويل المعادلة القطبية إلى معادلة ديكارتية ليست مباشرة مثل عملية التحويل من المعادلة الديكارتية إلى المعادلة القطبية، ففي التحويل الثاني تلزمنا جميع العلاقات الآتية:

$r^2=x^2+y^2$, $\tan\theta=\frac{y}{x}$, $x=r\cos\theta$, $y=r\sin\theta$.

إرشادات للدراسة

المتطابقات المثلثية
من المفيد أن تراجع المتطابقات المثلثية التي تعلمتها سابقًا؛ لمساعدتك على تبسيط الصورة القطبية للمعادلات الديكارتيّة.

4A) $r=6\sin\theta$

4B) $r^2=\sec 2\theta$

المعادلات القطبية والديكارتية

المثال 4 يُبيِّن كيفية تحويل المعادلات من الصورة الديكارتية إلى الصورة القطبية.

المثال 5 يُبيِّن كيفية تحويل المعادلات من الصورة القطبية إلى الصورة الديكارتية.

مثال إضافي

4 اكتب كلَّ معادلة مما يأتي على الصورة القطبية:

a) $(x+2)^2+y^2=4$

$r=-4\cos\theta$

b) $x^2-y^2=4$

$r^2=4\sec 2\theta$

مثال 5 تحويل المعادلات القطبية إلى المعادلات الديكارتية

اكتب كلّ معادلة قطبيّة مما يأتي على الصورة الديكارتية.

a) $\theta = \frac{\pi}{6}$

$\theta = \frac{\pi}{6}$	المعادلة الأصلية
$\tan\theta = \frac{\sqrt{3}}{3}$	خُذ tan الطرفين
$\frac{y}{x} = \frac{\sqrt{3}}{3}$	$\tan\theta = \frac{y}{x}$
$y = \frac{\sqrt{3}}{3}x$	اضرب الطرفين في x

b) $r = 7$

$r = 7$	المعادلة الأصلية
$r^2 = 49$	ربّع الطرفين
$x^2 + y^2 = 49$	$r^2 = x^2 + y^2$

c) $r = -5\sin\theta$

$r = -5\sin\theta$	المعادلة الأصلية
$r^2 = -5r\sin\theta$	اضرب الطرفين في r
$x^2 + y^2 = -5y$	$r^2 = x^2 + y^2,\ y = r\sin\theta$
$x^2 + y^2 + 5y = 0$	أضف $5y$ إلى الطرفين

تحقق من فهمك (5A-5C) انظر الهامش.

اكتب كلّ معادلة قطبيّة مما يأتي على الصورة الديكارتية:

5A) $r = -3$ 5B) $\theta = \frac{\pi}{3}$ 5C) $r = 3\cos\theta$

إرشادات للدراسة

طريقة بديلة

النقطتان $\left(2, \frac{\pi}{6}\right)$ و $\left(4, \frac{\pi}{6}\right)$ تقعان على المستقيم $\theta = \frac{\pi}{6}$، والإحداثيات الديكارتية لهما $(\sqrt{3}, 1)$ و $(2\sqrt{3}, 2)$، فتكون معادلة المستقيم المار بهاتين النقطتين هي: $y = \frac{\sqrt{3}}{3}x$.

مثال إضافي

5 اكتب كلَّ معادلة مما يأتي على الصورة الديكارتية:

a) $\theta = \frac{\pi}{4}$ $y = x$.

b) $r = 5$ $x^2 + y^2 = 25$.

c) $r = 2\sin\theta$ $x^2 + (y-1)^2 = 1$.

إجابات (تحقق من فهمك):

5A) $x^2 + y^2 = 9$

5B) $y = \sqrt{3}x$

5C) $x^2 + y^2 - 3x = 0$

تدرب وحل المسائل

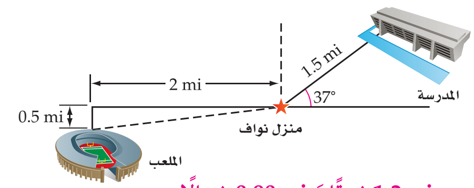
حوّل الإحداثيات القطبية إلى إحداثيات ديكارتية لكلِّ نقطة مما يأتي: (مثال 1)

1) $\left(2, \frac{\pi}{4}\right)$ $(\sqrt{2}, \sqrt{2})$
2) $\left(\frac{1}{4}, \frac{\pi}{2}\right)$ $\left(0, \frac{1}{4}\right)$
3) $(5, 240°)$ $(-2.5, -2.5\sqrt{3})$
4) $(2.5, 250°)$ $(-0.86, -2.35)$ تقريبًا
5) $\left(-2, \frac{4\pi}{3}\right)$ $(1, \sqrt{3})$
6) $(-13, -70°)$ $(-4.45, 12.22)$ تقريبًا
7) $\left(\frac{1}{2}, \frac{3\pi}{4}\right)$ $\left(-\frac{\sqrt{2}}{4}, \frac{\sqrt{2}}{4}\right)$
8) $(-2, 270°)$ $(0, 2)$
9) $(4, 210°)$ $(-2\sqrt{3}, -2)$
10) $\left(-1, -\frac{\pi}{6}\right)$ $\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}\right)$

أوجد زوجين مختلفين كل منهما يمثِّل إحداثيين قطبيين لكل نقطة معطاة بالإحداثيات الديكارتيّة في كلٍّ مما يأتي: (مثال 2) (11-22) انظر الهامش.

11) $(7, 10)$
12) $(-13, 4)$
13) $(-6, -12)$
14) $(4, -12)$
15) $(2, -3)$
16) $(0, -173)$
17) $(1, 3)$
18) $(-14, 14)$
19) $(52, -31)$
20) $(3, -4)$
21) $(1, -1)$
22) $(2, \sqrt{2})$

23) **مسافات:** إذا كانت مدرسة نواف تبعُد 1.5 mi عن منزله، وتصنع زاوية مقدارها 37° شمال الشرق كما في الشكل أدناه، فأجب عن الفرعين a, b. (مثال 3)



a) إذا سلك نواف طريقًا للشرق ثم للشمال؛ كي يصل إلى المدرسة، فكم ميلًا يتحرك في كل اتجاه؟ 1.2 mi شرقًا وَ 0.90 mi شمالًا

b) إذا كان الملعب على بُعد 2 mi غربًا، و 0.5 mi جنوبًا، ومنزل نواف يمثِّل القطب، فما إحداثيات موقع الملعب على الصورة القطبية؟ $(2.06, 194.04°)$

اكتب كلَّ معادلة مما يأتي على الصورة القطبية: (مثال 4) (24-31) انظر ملحق الإجابات.

24) $x = -2$
25) $(x + 5)^2 + y^2 = 25$
26) $y = -3$
27) $x = 5$
28) $(x - 2)^2 + y^2 = 4$
29) $x^2 + (y + 3)^2 = 9$
30) $y = \sqrt{3}x$
31) $x^2 + (y + 1)^2 = 1$

اكتب كلّ معادلة قطبيّة مما يأتي على الصورة الديكارتية: (مثال 5) (32-41) انظر ملحق الإجابات.

32) $r = 3 \sin \theta$
33) $\theta = -\frac{\pi}{3}$
34) $r = 10$
35) $r = 4 \cos \theta$
36) $\tan \theta = 4$
37) $r = 8 \csc \theta$
38) $r = -4$
39) $\cot \theta = -7$
40) $\theta = \frac{3\pi}{4}$
41) $r = \sec \theta$

42) **زلازل:** تُنمذَج حركة أمواج الزلازل بالمعادلة $r = 12.6 \sin \theta$، حيث r مقاسه بالأميال. اكتب معادلة أمواج الزلازل على الصورة الديكارتية. (مثال 5)
$x^2 + y^2 - 12.6y = 0$

اكتب كلّ معادلة قطبيّة مما يأتي على الصورة الديكارتية: (43-50) انظر ملحق الإجابات.

43) $r = \frac{1}{\cos \theta + \sin \theta}$
44) $r = 10 \csc\left(\theta + \frac{7\pi}{4}\right)$
45) $r = 3 \csc\left(\theta - \frac{\pi}{2}\right)$
46) $r = -2 \sec\left(\theta - \frac{11\pi}{6}\right)$
47) $r = 4 \sec\left(\theta - \frac{4\pi}{3}\right)$
48) $r = \frac{5 \cos \theta + 5 \sin \theta}{\cos^2 \theta - \sin^2 \theta}$
49) $r = 2 \sin\left(\theta + \frac{\pi}{3}\right)$
50) $r = 4 \cos\left(\theta + \frac{\pi}{2}\right)$

اكتب كلَّ معادلة مما يأتي على الصورة القطبية: (51-54) انظر ملحق الإجابات

51) $6x - 3y = 4$
52) $2x + 5y = 12$
53) $(x-6)^2 + (y - 8)^2 = 100$
54) $(x + 3)^2 + (y - 2)^2 = 13$

3 التدريب

التقويم التكويني

استعمل الأسئلة 42-1؛ للتأكد من فهم الطلاب، ثم استعمل الجدول أسفل هذه الصفحة؛ لتعيين الواجبات المنزلية للطلاب بحسب مستوياتهم.

تنبيه لحل الأسئلة

المستوى القطبي يحتاج الطلاب إلى ورقة المستوى القطبي في كثيرٍ من أسئلة هذا الدرس.

تنبيه!

أخطاء شائعة راقب الطلاب الذين يخطئون في التعويض عن x, y, r, θ بما يكافئها عند التحويل بين الإحداثيات الديكارتية والقطبية. واطلب إليهم كتابة صيغ التحويل بين x, y, r, θ على بطاقة والاحتفاظ بها.

إجابات:

11) $\approx(12.21, 0.96), \approx(-12.21, 4.1)$
أو $\approx(12.21, 55°), \approx(-12.21, 235°)$
12) $\approx(13.6, 2.84), \approx(-13.6, 5.98)$
أو $\approx(13.6, 163°), \approx(-13.6, 343°)$
13) $\approx(13.42, 4.25), \approx(-13.42, 1.11)$
أو $\approx(13.42, 244°), \approx(-13.42, 64°)$
14) $\approx(12.65, -1.25), \approx(-12.65, 1.89)$
أو $\approx(12.65, 288°), \approx(-12.65, 108°)$
15) $\approx(3.61, -0.98), \approx(-3.61, 2.16)$
أو $\approx(3.61, -72°), \approx(-3.61, 124°)$
16) $\left(173, \frac{3\pi}{2}\right), \left(-173, \frac{\pi}{2}\right)$
أو $\approx(173, 270°), \approx(-173, 90°)$
17) $\approx(3.16, 1.25), \approx(-3.16, 4.39)$
أو $\approx(3.16, 72°), \approx(-3.16, 252°)$
18) $\approx(19.8, 0.75\pi), \approx(-19.8, 1.75\pi)$
أو $\approx(19.8, 135°), \approx(-19.8, 315°)$
19) $\approx(60.54, 0.54), \approx(-60.54, 2.61)$
أو $\approx(60.54, 31°), \approx(-60.54, 150°)$
20) $\approx(5, -0.93), \approx(-5, 2.21)$
أو $\approx(5, 53°), \approx(-5, 127°)$
21) $\approx\left(1.41, -\frac{\pi}{4}\right), \approx\left(-1.41, \frac{3\pi}{4}\right)$
أو $\approx(1.41, -45°), \approx(-1.41, 135°)$
22) $(2.45, 0.62), (-2.45, 3.76)$
أو $\approx(2.45, 36°), \approx(-2.45, 216°)$

تنويع الواجبات المنزلية

المستوى	الأسئلة
دون المتوسط	1–42، 58، 60، 61، 63–78
ضمن المتوسط	1–63 فردي، 61، 64–78
فوق المتوسط	43–78

تمثيلات متعددة

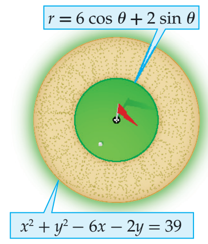
في السؤال 57 يستعمل الطلاب التمثيل البياني، والتحليل، لاستقصاء العلاقة بين الأعداد المركبة والإحداثيات القطبية.

تنبيه!

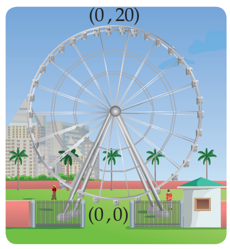
اكتشف الخطأ

في السؤال 58، اقترح على الطلاب البدء بتمثيل كلٍّ من المعادلة الأصلية، وإجابتَي باسل وتوفيق باستعمال الآلة الحاسبة البيانية، ثم كتابة المعادلة $r = \sin\theta$ في الصورة الديكارتية.

55) **جولف:** في أحد ملاعب الجولف، يحيط بثقب الهدف منطقة خضراء محاطة بمنطقة رملية، كما في الشكل أدناه. أوجد مساحة المنطقة الرملية على فرض أن الثقب يمثّل القطب لكلتا المعادلتين، وأن المسافات تُقاس بوحدة اليارد. $39\pi\ yd^2 \approx 122.52\ yd^2$



56) **عجلة دوّارة:** إذا كانت إحداثيات أدنى نقطة في عجلة دوّارة $(0, 0)$، وأعلى نقطة فيها $(0, 20)$.



a) فاكتب معادلة العجلة الدوّارة الموضحة بالشكل المجاور على الصورة الديكارتية.
$x^2 + (y - 10)^2 = 100$

b) اكتب المعادلة في الفرع a بالصيغة القطبية.
$r = 20\sin\theta$

57) **تمثيلات متعددة:** في هذه المسألة سوف تكتشف العلاقة بين الأعداد المركبة والإحداثيات القطبية. **(a-f) انظر ملحق الإجابات.**

a) **بيانيًّا:** يمكن تمثيل العدد المركب $a + bi$ في المستوى الديكارتي بالنقطة (a, b). مثِّل العدد المركب $6 + 8i$ في المستوى الديكارتي.

b) **عدديًّا:** أوجد الإحداثيات القطبية للعدد المركب باستعمال الإحداثيات الديكارتية التي أوجدتها في الفرع **a** .

c) **بيانيًّا:** عزِّز إجابتك في الفرع **b** بتمثيل الإحداثيات القطبية في المستوى القطبي.

d) **بيانيًّا:** مثِّل بيانيًّا العدد المركب $-3 + 3i$ في المستوى الديكارتي.

e) **بيانيًّا:** أوجد الإحداثيات القطبية للعدد المركب باستعمال الإحداثيات الديكارتية التي أوجدتها في الفرع **d**. ومثِّل الإحداثيات القطبية في المستوى القطبي.

f) **تحليليًّا:** أوجد العبارات الجبرية التي تبيّن كيفية كتابة العدد المركب $a + bi$ بالإحداثيات القطبية.

مسائل مهارات التفكير العليا

58) **اكتشف الخطأ:** يحاول كل من باسل وتوفيق كتابة المعادلة القطبية $r = \sin\theta$ على الصورة الديكارتية، فيعتقد توفيق أن الحل هو $x^2 + \left(y - \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}$، في حين يعتقد باسل أن الحل هو $y = \sin x$. أيهما كانت إجابته صحيحة؟ برِّر إجابتك.
انظر ملحق الإجابات.

59) **تحدٍّ:** اكتب معادلة الدائرة $r = 2a\cos\theta$ بالصورة الديكارتية، وأوجد مركزها وطول نصف قطرها.
$(x - a)^2 + y^2 = a^2$ ، المركز $(a, 0)$ ، طول نصف القطر a

60) **اكتب:** اكتب تخمينًا يبيِّن متى يكون تمثيل المعادلة على الصورة القطبيّة أسهل من تمثيلها على الصورة الديكارتية، ومتى يكون العكس صحيحًا. **انظر ملحق الإجابات.**

61) **برهان:** استعمل $x = r\cos\theta, y = r\sin\theta$ ؛ لإثبات أن $r = x\sec\theta, r = y\csc\theta$ ، حيث $\sin\theta \neq 0, \cos\theta \neq 0$.
انظر ملحق الإجابات.

62) **تحدٍّ:** اكتب المعادلة:

$$r^2(4\cos^2\theta + 3\sin^2\theta) + r(-8a\cos\theta + 6b\sin\theta) = 12 - 4a^2 - 3b^2$$

على الصورة الديكارتية. **(إرشاد:** فك الأقواس قبل تعويض قيم r^2 ، r . تمثّل المعادلة الديكارتية قطعًا مخروطيًّا). **انظر الهامش.**

مراجعة تراكمية

مَثِّل كل نقطة مما يأتي في المستوى القطبي. (الدرس 1-6)
(66-68) انظر ملحق الإجابات.

63) $A(-2, 45°)$

64) $D(1, 315°)$

65) $C\left(-1.5, -\frac{4\pi}{3}\right)$

أوجد الزاوية بين المتّجهين $\mathbf{u}, \mathbf{v}$ في كل مما يأتي: (الدرس 3-5)

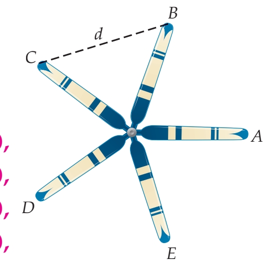
66) $\mathbf{u} = \langle 6, -4\rangle, \mathbf{v} = \langle -5, -7\rangle$ $91.8°$

67) $\mathbf{u} = \langle 2, 3\rangle, \mathbf{v} = \langle -9, 6\rangle$ $90°$

إجابات:

62)
$$r^2(4\cos^2\theta + 3\sin^2\theta) + r(-8a\cos\theta + 6b\sin\theta) = 12 - 4a^2 - 3b^2$$
$$4r^2\cos^2\theta + 3r^2\sin^2\theta - 8a\, r\cos\theta + 6br\sin\theta = 12 - 4a^2 - 3b^2$$
$$4(r\cos\theta)^2 + 3(r\sin\theta)^2 - 8a(r\cos\theta) + 6b(r\sin\theta) = 12 - 4a^2 - 3b^2$$
$$4x^2 + 3y^2 - 8ax + 6by = 12 - 4a^2 - 3b^2$$
$$4x^2 - 8ax + 4a^2 + 3y^2 + 6by + 3b^2 = 12$$
$$4(x^2 - 2ax + a^2) + 3(y^2 + 2by + b^2) = 12$$
$$4(x - a)^2 + 3(y + b)^2 = 12$$
$$\frac{(x - a)^2}{3} + \frac{(y + b)^2}{4} = 1$$

68) طائرات: تتكون مروحة طائرة من 5 ريش، المسافة بين أطرافها المتتالية متساوية. ويبلغ طول كل ريشة منها 11.5 ft . (الدرس 6-1)



$A(11.5, 3°)$, $B(11.5, 75°)$, $C(11.5, 147°)$, $D(11.5, 219°)$, $E(11.5, 291°)$

a) إذا كانت الزاوية التي تصنعها الريشة A مع المحور القطبي °3، فاكتب زوجًا يمثِّل الإحداثيات القطبية لطرف كل ريشة، بفرض أن مركز المروحة ينطبق على القطب.

b) ما المسافة d بين رأسي ريشتين متتاليتين؟ 13.5 ft

حل كلًّا من المعادلات الآتية باستعمال القانون العام. (مهارة سابقة)

69) $x^2 - 7x = -15$ $\quad \frac{7 \pm i\sqrt{11}}{2}$

70) $x^2 + 2x + 4 = 0$ $\quad -1 \pm i\sqrt{3}$

71) $12x^2 + 9x + 15 = 0$ $\quad \frac{-3 \pm i\sqrt{71}}{8}$

أوجد طول القطعة المستقيمة التي تصل بين النقطتين في كلٍّ مما يأتي، وأوجد إحداثيات نقطة منتصفها: (الدرس 5-4)

72) $(2, -15, 12), (1, -11, 15)$ $\quad$ 5.1; (1.5, −13, 13.5)

73) $(-4, 2, 8), (9, 6, 0)$ $\quad$ 15.78; (2.5, 4, 4)

74) $(7, 1, 5), (-2, -5, -11)$ $\quad$ 19.31; (2.5, −2, −3)

تدريب على اختبار

75) أيٌّ من النقاط الآتية يعد تمثيلًا آخر للنقطة $(-2, \frac{7\pi}{6})$ في المستوى القطبي؟ A

A) $(2, \frac{\pi}{6})$

B) $(-2, \frac{\pi}{6})$

C) $(2, \frac{-11\pi}{6})$

D) $(-2, \frac{11\pi}{6})$

76) إذا كان $\mathbf{n} = \langle -7, 3\rangle$, $\mathbf{m} = \langle 5, -4\rangle$، فأيٌّ مما يأتي يمثِّل $\mathbf{k}$، حيث $\mathbf{k} = \mathbf{n} - 2\mathbf{m}$؟ A

A) $\langle -17, 11\rangle$

B) $\langle -17, -5\rangle$

C) $\langle 17, -11\rangle$

D) $\langle -17, 5\rangle$

77) ما الصورة القطبية للمعادلة $x^2 + (y-2)^2 = 4$؟ C

A) $r = \sin\theta$

B) $r = 2\sin\theta$

C) $r = 4\sin\theta$

D) $r = 8\sin\theta$

78) ما حاصل الضرب الاتجاهي للمتجهين: $\mathbf{u} = \langle 6, -1, -2\rangle, \mathbf{v} = \langle -1, -4, 2\rangle$؟ C

A) $\langle -10, 10, 25\rangle$

B) $\langle -10, -10, 25\rangle$

C) $\langle -10, -10, -25\rangle$

D) $\langle -10, 10, -25\rangle$

4 التقويم

تعلم لاحق اطلب إلى كل طالب كتابة فقرة يوضح فيها كيف يساعد موضوع هذا الدرس على فهم موضوع الدرس التالي حول كتابة العدد المركب بالصورة القطبية.

التقويم التكويني

تحقق من مدى استيعاب الطلاب للمفاهيم الواردة في الدرس 6-2، بإعطائهم:

الاختبار القصير 2، ص (30)

تنويع التعليم

فوق

توسّع: اطلب إلى الطلاب إثبات أن المعادلة $r = a\cos\theta + b\sin\theta$ هي معادلة دائرة، وذلك بتحويلها إلى الصورة الديكارتية، ثم اطلب إليهم إيجاد مركزها وطول نصف قطرها.

$$r = a\cos\theta + b\sin\theta$$
$$r^2 = ra\cos\theta + rb\sin\theta$$
$$x^2 + y^2 = ax + by$$
$$x^2 - ax + y^2 - by = 0$$
$$\left(x - \frac{a}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{b}{2}\right)^2 = \frac{a^2 + b^2}{4}$$

المركز $\left(\frac{a}{2}, \frac{b}{2}\right)$ ، طول نصف القطر $\frac{\sqrt{a^2 + b^2}}{2}$

6-3 الأعداد المركبة ونظرية ديموافر
Complex Numbers and De Moivre's Theorem

فيما سبق:
درست إجراء العمليات الحسابية على الأعداد المركبة. (مهارة سابقة)

والآن:
- أحوِّلُ الأعداد المركبة من الصورة الديكارتية إلى الصورة القطبية والعكس.
- أجدُ حاصل ضرب الأعداد المركبة وقسمتها، وأجدُ جذورها وقواها في الصورة القطبية.

المفردات:
- المستوى المركب complex plane
- المحور الحقيقي real axis
- المحور التخيلي imaginary axis
- القيمة المطلقة لعدد مركب absolute value of a complex number
- الصورة القطبية polar form
- الصورة المثلثية trigonometric form
- المقياس modulus
- السعة argument
- الجذور النونية للعدد واحد nth roots of unity

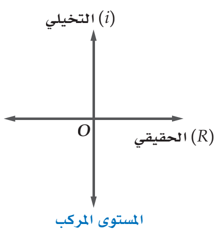
www.obeikaneducation.com

لماذا؟

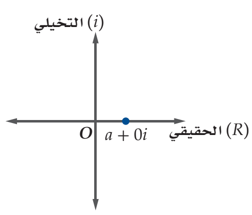
يستعمل مهندسو الكهرباء الأعداد المركبة لوصف بعض العلاقات في الكهرباء. فالكميات: فرق الجهد V، والمعاوقة Z، وشدة التيار I ترتبط بالعلاقة $V = I \cdot Z$، التي تستعمل لوصف تيار متردد. ويمكن كتابة كل متغير على صورة عدد مركب على الصورة $a + bj$، حيث j العدد التخيلي (ويستعمل المهندسون j حتى لا يختلط الرمز مع رمز شدة التيار I).

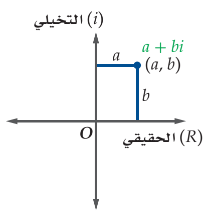
(**إرشاد:** استعملت كلمة المعاوقة بدلًا من كلمة المقاومة؛ لأن مجموعة الأعداد المستخدمة هنا هي مجموعة الأعداد المركبة، حيث تستعمل كلمة المقاومة في مجموعة الأعداد الحقيقية).

الصورة القطبية للأعداد المركبة الجزء الحقيقي للعدد المركب المُعطى على الصورة الديكارتية $a + bi$، هو a والجزء التخيلي bi. ويمكنك تمثيل العدد المركب على **المستوى المركب** بالنقطة (a, b). كما هو الحال في المستوى الإحداثي، فإننا نحتاج إلى محورين لتمثيل العدد المركب، ويُعيَّنُ الجزء الحقيقي على محور أفقي يُسمَّى **المحور الحقيقي** ويرمز له بالرمز R، في حين يُعيَّنُ الجزء التخيلي على محور رأسي يُسمَّى **المحور التخيلي** ويرمز له بالرمز i.



في العدد المركب $a + 0i$ (لاحظ أن $b = 0$). يكون الناتج عددًا حقيقيًّا يمكن تمثيله على خط الأعداد أو على المحور الحقيقي. وعندما $b \neq 0$، فإننا سنحتاج إلى المحور التخيلي لتمثيل الجزء التخيلي.



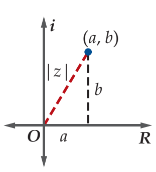


تذكَّر أن القيمة المطلقة لعدد حقيقي هي المسافة بين ذلك العدد والصفر على خط الأعداد، وبالمثل، فإن **القيمة المطلقة لعدد مركب** هي المسافة بين العدد والصفر في المستوى المركب. وعند تمثيل العدد $a + bi$ في المستوى المركب. فإنه بالإمكان حساب بُعده عن الصفر باستعمال نظرية فيثاغورس.

مفهوم أساسي — القيمة المطلقة لعدد مركب

القيمة المطلقة للعدد المركب $z = a + bi$ هي:

$$|z| = |a + bi| = \sqrt{a^2 + b^2}$$



6-3 ملاحظات الدرس

1 التركيز

الترابط الرأسي

ما قبل الدرس 6-3

إجراء العمليات الحسابية على الأعداد المركبة.

الدرس 6-3

تحويل الأعداد المركبة من الصورة الديكارتية إلى الصورة القطبية والعكس.
إيجاد حاصل ضرب الأعداد المركبة وقسمتها، وإيجاد جذورها وقواها على الصورة القطبية.

ما بعد الدرس 6-3

إثبات نظرية ديموافر وتطبيقاتها في الدراسة الجامعية.

2 التدريس

أسئلة التعزيز

اطلب إلى الطلاب قراءة فقرة "لماذا؟".

ارسم خمسة صناديق متداخلة على السبورة.

واسأل:
- استعمل شكل ڤن؛ لتوضيح العلاقة بين الأعداد المركبة، والحقيقية، والنسبيَّة، والصحيحة، والكلية. انظر الشكل أعلاه.
- هل يمكن كتابة أي عدد حقيقي على صورة عدد مركب؟ نعم، يمكن كتابة أي عدد حقيقي a على الصورة $a + 0i$.
- بما أن مجموعة الأعداد المركبة تحوي مجموعة الأعداد الحقيقية، فهل تعتقد أنه بإمكاننا جمع الأعداد المركبة وطرحها وضربها وقسمتها؟ نعم

مصادر الدرس 6-3

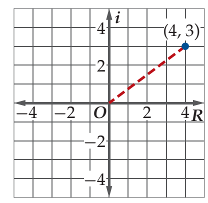
المصدر	دون المتوسط	ضمن المتوسط	فوق المتوسط
دليل المعلم	• تنويع التعليم ص (71)	• تنويع التعليم ص (71, 78)	• تنويع التعليم ص (78)
كتاب التمارين	• ص (11)	• ص (11)	• ص (11)
مصادر المعلم للأنشطة الصفية	• تدريبات إعادة التعليم، ص (14) • تدريبات حل المسألة، ص (16)	• تدريبات حل المسألة، ص (16) • التدريبات الإثرائية، ص (17)	• تدريبات حل المسألة، ص (16) • التدريبات الإثرائية، ص (17)

مثال 1 تمثيل الأعداد المركبة وإيجاد قيمها المطلقة

مَثّل كل عدد مما يأتي في المستوى المركّب، وأوجد قيمته المطلقة:

a) $z = 4 + 3i$

$(a, b) = (4, 3)$



$|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$ تعريف القيمة المطلقة

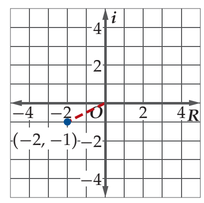
$= \sqrt{4^2 + 3^2}$ $a = 4, b = 3$

$= \sqrt{25} = 5$ بسِّط

القيمة المطلقة للعدد $4 + 3i$ تساوي 5.

b) $z = -2 - i$

$(a, b) = (-2, -1)$



$|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$ تعريف القيمة المطلقة

$= \sqrt{(-2)^2 + (-1)^2}$ $a = -2, b = -1$

$= \sqrt{5} \approx 2.24$ بسِّط

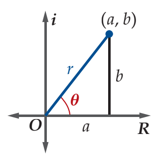
القيمة المطلقة للعدد $-2 - i$ تساوي 2.24 تقريبًا.

تحقق من فهمك (1A,1B) انظر الهامش

مَثّل كل عدد مما يأتي في المستوى المركب، وأوجد قيمته المطلقة:

1A) $5 + 2i$ **1B)** $-3 + 4i$

كما كُتبت الإحداثيات الديكارتية (x, y) على صورة إحداثيات قطبية، فإنه يمكن كتابة الإحداثيات الديكارتية (a, b) التي تمثِّل عددًا مركبًا في المستوى المركب على الصورة القطبية. وتُطبق الدوال المثلثية نفسها التي استُعملت في إيجاد قيم x, y لإيجاد قيم a, b.



$\cos\theta = \frac{a}{r}$ ، $\sin\theta = \frac{b}{r}$

$r\cos\theta = a$ ، $r\sin\theta = b$ اضرب كل طرف في r

وبتعويض التمثيلات القطبية لكل من a، b، يمكننا إيجاد **الصورة القطبية** أو **الصورة المثلثية** لعدد مركب.

$z = a + bi$ العدد المركب الأصلي

$= r\cos\theta + (r\sin\theta)i$ $b = r\sin\theta$ ، $a = r\cos\theta$

$= r(\cos\theta + i\sin\theta)$ خُذ العامل المشترك

في حالة العدد المركب، فإن r تمثِّل القيمة المطلقة أو **المقياس** للعدد المركب، ويمكن إيجادها باستعمال الإجراء نفسه الذي استعملته لإيجاد القيمة المطلقة $r = |z| = \sqrt{a^2 + b^2}$. تُسمَّى الزاوية θ **سعة** العدد المركب. وبالمثل لإيجاد θ من الإحداثيات الديكارتية (x, y)، فإنه عند استعمال الأعداد المركبة يكون $\theta = \text{Tan}^{-1}\frac{b}{a}$ عندما $a > 0$ أو $\theta = \text{Tan}^{-1}\frac{b}{a} + \pi$ عندما $a < 0$.

مفهوم أساسي الصورة القطبية لعدد مركب

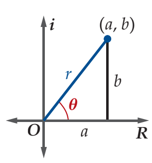
الصورة القطبية أو المثلثية للعدد المركب $z = a + bi$ هي:

$z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$ ، حيث

$r = |z| = \sqrt{a^2 + b^2}$ ، $a = r\cos\theta$ ، $b = r\sin\theta$ ،

$\theta = \text{Tan}^{-1}\frac{b}{a}$ عندما $a > 0$ ، $\theta = \text{Tan}^{-1}\frac{b}{a} + \pi$ عندما $a < 0$.

أما إذا كانت $a = 0$ ، فإن $\theta = \frac{\pi}{2}$ إذا كانت $b > 0$ ، $\theta = -\frac{\pi}{2}$ إذا كانت $b < 0$



تنبيه!

الصورة القطبية: يجب عدم الخلط بين الصورة القطبية للعدد المركب والإحداثيات القطبية للعدد المركب. فالصورة القطبية لعدد مركب هي طريقة أخرى لكتابة العدد المركب. وسوف نناقش الإحداثيات القطبية للعدد المركب لاحقًا في هذا الدرس.

إرشادات للدراسة

السعة: كما في الإحداثيات القطبية، فإن θ ليست وحيدة، مع أنها تُعطى عادةً في الفترة $-2\pi < \theta < 2\pi$.

الصورة القطبية للأعداد المركبة

المثال 1 يُبيِّن كيفية تمثيل عدد مركب في المستوى المركب، وإيجاد قيمته المطلقة.

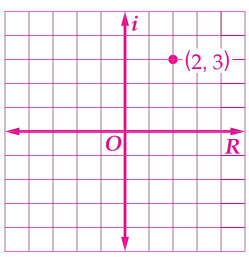
المثال 2 يُبيِّن كيفية كتابة العدد المركب على الصورة القطبية.

المثال 3 يُبيِّن كيفية تمثيل العدد المركب بيانيًّا في المستوى القطبي، ثم تحويله إلى الصورة الديكارتية.

مثال إضافي

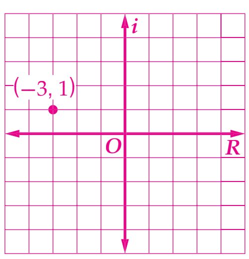
1 مَثِّل كل عدد مما يأتي في المستوى المركب، وأوجد قيمته المطلقة:

a) $z = 2 + 3i$



$\sqrt{13} \approx 3.61$

b) $z = -3 + i$



$\sqrt{10} \approx 3.16$

التقويم التكويني

استعمل تدريبات "تحقق من فهمك" بعد كل مثال؛ للتحقق من مدى فهم الطلاب المفاهيم.

التعليم باستعمال التقنيات

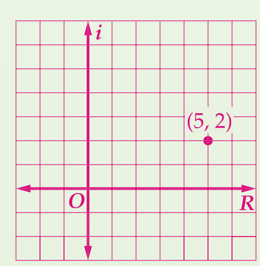
مدونة اطلب إلى الطلاب العمل في مجموعات ثنائية؛ لكتابة مدوَّنة تصف كيفية التعبير عن العدد المركب على الصورة القطبية، وتأكد من أنهم ضمَّنوا وصفهم إيجاد المقياس والسعة.

إرشادات للمعلم الجديد

مستوى آرجاند يُسمى المستوى المركب أيضًا بمستوى آرجاند، نسبةً إلى العالم روبرت آرجاند (1768 – 1822).

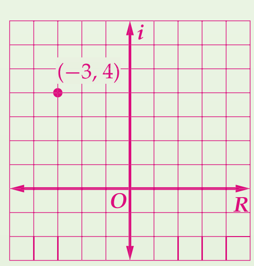
إجابة (تحقق من فهمك):

1A)



$\sqrt{29} \approx 5.39$

1B)



5

مثال 2 الأعداد المركبة بالصورة القطبية

عبّر عن كلّ عدد مركب مما يأتي بالصورة القطبية:

a) $-6+8i$

أوجد المقياس r والسعة θ.

$r=\sqrt{a^2+b^2}$	صيغ التحويل، $a<0$	$\theta=\text{Tan}^{-1}\frac{b}{a}+\pi$
$=\sqrt{(-6)^2+8^2}=10$	$a=-6,\ b=8$	$=\text{Tan}^{-1}(-\frac{8}{6})+\pi\approx 2.21$

لذا فإن الصورة القطبية للعدد $-6+8i$ هي $10(\cos 2.21+i\sin 2.21)$ تقريبًا.

b) $4+\sqrt{3}i$

$r=\sqrt{a^2+b^2}$	صيغ التحويل، $a>0$	$\theta=\text{Tan}^{-1}\frac{b}{a}$
$=\sqrt{4^2+(\sqrt{3})^2}$	$a=4,\ b=\sqrt{3}$	$=\text{Tan}^{-1}\frac{\sqrt{3}}{4}$
$=\sqrt{19}\approx 4.36$	بسّط	≈ 0.41

لذا فإن الصورة القطبية للعدد $4+\sqrt{3}i$ هي $4.36(\cos 0.41+i\sin 0.41)$ تقريبًا.

تحقق من فهمك

عبّر عن كلّ عدد مركب مما يأتي بالصورة القطبية:

2A) $9+7i$ $\quad 11.4(\cos 0.66+i\sin 0.66)$ $\qquad$ 2B) $-2-2i$ $\quad 2.83(\cos 3.93+i\sin 3.93)$

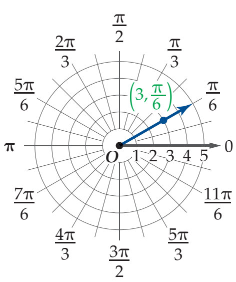
ويمكنك استعمال الصورة القطبية لعدد مركب؛ لتمثيله في المستوى القطبي باستعمال (r,θ) كإحداثيات قطبية للعدد المركب. كما يمكنك تحويل عدد مركب مكتوب على الصورة القطبية إلى الصورة الديكارتية، وذلك باستعمال قيم r، وقيم النسب المثلثية للزاوية θ المعطاة.

مثال 3 تمثيل الصورة القطبية لعدد مركب وتحويلها إلى الصورة الديكارتية

مثّل العدد $z=3\left(\cos\frac{\pi}{6}+i\sin\frac{\pi}{6}\right)$ في المستوى القطبي، ثم عبّر عنه بالصورة الديكارتية.

لاحظ أن قيمة r هي 3، وقيمة θ هي $\frac{\pi}{6}$.

عيِّن الإحداثيات القطبية $\left(3,\frac{\pi}{6}\right)$.



ولكتابة العدد على الصورة الديكارتية أوجد القيم المثلثية، ثم بسِّط.

$3\left(\cos\frac{\pi}{6}+i\sin\frac{\pi}{6}\right)$	الصورة القطبية
$=3\left[\frac{\sqrt{3}}{2}+i\left(\frac{1}{2}\right)\right]$	بإيجاد قيم الجيب، وجيب التمام
$=\frac{3\sqrt{3}}{2}+\frac{3}{2}i$	خاصية التوزيع

فتكون الصورة الديكارتية للعدد $z=3\left(\cos\frac{\pi}{6}+i\sin\frac{\pi}{6}\right)$ هي $z=\frac{3\sqrt{3}}{2}+\frac{3}{2}i$.

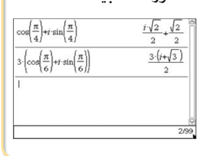
تحقق من فهمك (3A, 3B) انظر الهامش.

مثّل كل عدد مركب مما يأتي في المستوى القطبي، ثم عبّر عنه بالصورة الديكارتية:

3A) $5\left(\cos\frac{3\pi}{4}+i\sin\frac{3\pi}{4}\right)$ $\qquad$ 3B) $4\left(\cos\frac{5\pi}{3}+i\sin\frac{5\pi}{3}\right)$

إرشاد تقني

تحويل الأعداد المركبة: يمكن تحويل عدد مركب من الصورة القطبية إلى الصورة الديكارتية باستعمال الحاسبة البيانية من تطبيق الحاسبة، بفتح صفحة تطبيق الحاسبة وإدخال العبارة على الصورة القطبية، ثم اختيار enter . مع مراعاة إعدادات الآلة الحاسبة بحيث تُعطي الصورة القطبية.



مثالان إضافيان

2 عبّر عن كل عدد مركب مما يأتي على الصورة القطبية:

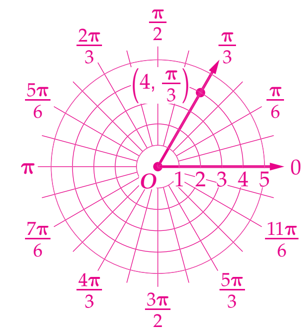
a) $-2+5i$

$5.39(\cos 1.95+i\sin 1.95)$ تقريبًا

b) $6+2i$

$6.32(\cos 0.32+i\sin 0.32)$ تقريبًا

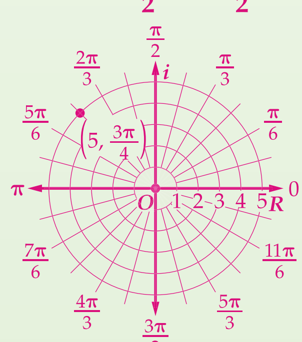
3 مثِّل العدد $z=4\left(\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}\right)$ في المستوى القطبي، ثم عبِّر عنه بالصورة الديكارتية.



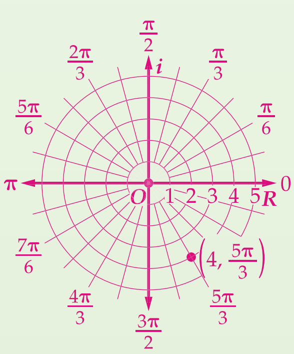
$2+2\sqrt{3}i$

إجابات:

3A) $-\frac{5\sqrt{2}}{2}+\frac{5\sqrt{2}}{2}i$



3B) $2-2\sqrt{3}i$



ضرب الأعداد المركبة وقسمتها وإيجاد قواها وجذورها تُعدّ الصورة القطبية للعدد المركب، وصيغ المجموع، والفرق لكل من دالتي الجيب وجيب التمام مفيدةً للغاية في ضرب الأعداد المركبة وقسمتها. ويمكن اشتقاق صيغة ضرب عددين مركبين على الصورة القطبية على النحو الآتي:

$z_1z_2 = r_1(\cos\theta_1 + i\sin\theta_1)\cdot r_2(\cos\theta_2 + i\sin\theta_2)$ الصورة القطبيّة للعددين المركبين z_1 ، z_2

$= r_1r_2(\cos\theta_1\cos\theta_2 + i\cos\theta_1\sin\theta_2 + i\sin\theta_1\cos\theta_2 + i^2\sin\theta_1\sin\theta_2)$ فك الأقواس

$= r_1r_2[(\cos\theta_1\cos\theta_2 - \sin\theta_1\sin\theta_2) + (i\cos\theta_1\sin\theta_2 + i\sin\theta_1\cos\theta_2)]$ جمّع الحدود التخيلية والحقيقية، واستبدل i^2 بـ -1

$= r_1r_2[(\cos\theta_1\cos\theta_2 - \sin\theta_1\sin\theta_2) + i(\cos\theta_1\sin\theta_2 + \sin\theta_1\cos\theta_2)]$ أخرج i عاملًا مشتركًا

$= r_1r_2[\cos(\theta_1+\theta_2) + i\sin(\theta_1+\theta_2)]$ متطابقتا جيب المجموع، وجيب تمام المجموع

مفهوم أساسي **ضرب الأعداد المركبة على الصورة القطبية وقسمتها**

للعددين المركبين $z_1 = r_1(\cos\theta_1 + i\sin\theta_1)$ ، $z_2 = r_2(\cos\theta_2 + i\sin\theta_2)$ ، فإن:

صيغة الضرب $z_1z_2 = r_1r_2[\cos(\theta_1+\theta_2) + i\sin(\theta_1+\theta_2)]$

صيغة القسمة $\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2}[\cos(\theta_1-\theta_2) + i\sin(\theta_1-\theta_2)]$ حيث $z_2 \neq 0$ ، $r_2 \neq 0$

سوف تبرهن صيغة القسمة في التمرين 51

لاحظ أنه عند ضرب عددين مركبين، فإنك تضرب المقاييس وتجمع السعتين، وعند القسمة فإنك تقسم المقاييس وتطرح السعتين.

مثال 4 ضرب الأعداد المركبة على الصورة القطبية

أوجد ناتج $2\left(\cos\frac{5\pi}{3} + i\sin\frac{5\pi}{3}\right)\cdot 4\left(\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6}\right)$ على الصورة القطبية، ثم عبّر عنه بالصورة الديكارتية.

$2\left(\cos\frac{5\pi}{3} + i\sin\frac{5\pi}{3}\right)\cdot 4\left(\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6}\right)$ العبارة المعطاة

$= 2(4)\left[\cos\left(\frac{5\pi}{3} + \frac{\pi}{6}\right) + i\sin\left(\frac{5\pi}{3} + \frac{\pi}{6}\right)\right]$ صيغة الضرب

$= 8\left(\cos\frac{11\pi}{6} + i\sin\frac{11\pi}{6}\right)$ بسّط

والآن أوجد الصورة الديكارتية للناتج.

$8\left(\cos\frac{11\pi}{6} + i\sin\frac{11\pi}{6}\right)$ الصورة القطبية

$= 8\left(\frac{\sqrt{3}}{2} - i\frac{1}{2}\right)$ أوجد قيم الجيب وجيب التمام

$= 4\sqrt{3} - 4i$ خاصية التوزيع

فتكون الصورة القطبية للناتج $8\left(\cos\frac{11\pi}{6} + i\sin\frac{11\pi}{6}\right)$، والصورة الديكارتية $4\sqrt{3} - 4i$.

تحقق من فهمك

أوجد الناتج على الصورة القطبية، ثم عبّر عنه بالصورة الديكارتية لكلٍّ مما يأتي:

4A) $3\left(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right)\cdot 5\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right)$ $15\left(\cos\frac{7\pi}{12} + i\sin\frac{7\pi}{12}\right)$ تقريبًا, $-3.88 + 14.49i$ تقريبًا

4B) $6\left(\cos\frac{3\pi}{4} + i\sin\frac{3\pi}{4}\right)\cdot 2\left(\cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3}\right)$ $15\left(\cos\frac{17\pi}{12} + i\sin\frac{17\pi}{12}\right)$ تقريبًا, $-3.11 - 11.59i$ تقريبًا

كما تقدم في فقرة "لماذا؟"، فإنه يمكن استعمال قسمة الأعداد المركبة للتعبير عن العلاقات في الكهرباء.

ضرب الأعداد المركبة وقسمتها وإيجاد قواها وجذورها

المثال 4 يُبيّن كيفية إيجاد حاصل ضرب الأعداد المركبة بالصورة القطبية.

المثال 5 يُبيّن كيفية إيجاد حاصل قسمة عددين مركبين بالصورة القطبية.

المثال 6 يُبيّن كيفية استعمال نظرية ديموافر؛ لإيجاد قوى الأعداد المركبة.

المثال 7 يُبيّن كيفية إيجاد جذور الأعداد المركبة.

المثال 8 يُبيّن كيفية إيجاد الجذور النونية للعدد 1.

مثال إضافي

4 أوجد ناتج $2\left(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right)\cdot 5\left(\cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3}\right)$ على الصورة القطبية، ثم عبّر عنه بالصورة الديكارتية.

$10(\cos\pi + i\sin\pi), -10$

تنويع التعليم

دون ضمن

المتعلمون المنطقيون: اطلب إلى مجموعاتٍ من الطلاب كتابة أدلة مفصَّلة لحل مسائل معينة، تشبه المثال 4. واطلب إليهم تضمينها كل التفاصيل على اعتبار أن الشخص الذي سيقرأ الدليل لديه معرفة قليلة بالموضوع، ثم اطلب إلى مجموعات أخرى التحقق من منطقية تتابع خطوات الحل في الأدلة ومنطقيتها.

مثال إضافي

5 **كهرباء** إذا كان فرق الجهد V في دائرة كهربائية يساوي $100\,V$، وكانت معاوقتها Z تساوي $5\,(\cos 37^{\circ} + j \sin 37^{\circ})\,\Omega$، فأوجد شدة التيار I في الدائرة على الصورة القطبية باستعمال المعادلة $V = I \cdot Z$.

$20\,[\cos(-37^{\circ}) + j \sin(-37^{\circ})]$ أمبير تقريبًا

مثال 5 من واقع الحياة — قسمة الأعداد المركبة على الصورة القطبية

كهرباء: إذا كان فرق الجهد V في دائرة كهربائية يساوي $150\,V$، وكانت معاوقتها Z تساوي Ω $(3\sqrt{5}\ [\cos(-0.46) + j \sin(-0.46)])$، فأوجد شدة التيار I في الدائرة على الصورة القطبية باستعمال المعادلة $V = I \cdot Z$.

اكتب العدد 150 على الصورة القطبية.

$$150 = 150\ (\cos 0 + j \sin 0) \qquad r = \sqrt{150^2 + 0^2} = 150,\ \theta = \mathrm{Tan}^{-1}\frac{0}{150} = 0$$

حُلّ $V = I \cdot Z$ بالنسبة لـ I.

$$I \cdot Z = V$$ المعادلة الأصلية

$$I = \frac{V}{Z}$$ اقسم كل طرف على Z

$$I = \frac{150\ (\cos 0 + j \sin 0)}{3\sqrt{5}\ [\cos(-0.46) + j \sin(-0.46)]}$$ $V = 150\,(\cos 0 + j \sin 0)$ ، $Z = 3\sqrt{5}\ [\cos(-0.46) + j \sin(-0.46)]$

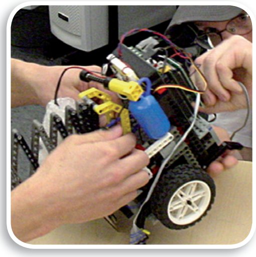
$$I = \frac{150}{3\sqrt{5}}\ \{\cos[0 - (-0.46)] + j \sin[0 - (-0.46)]\}$$ صيغة القسمة

$$I = 10\sqrt{5}\,(\cos 0.46 + j \sin 0.46)$$ بسِّط

أي أن شدة التيار تساوي $(10\sqrt{5}\,(\cos 0.46 + j \sin 0.46))$ أمبير تقريبًا.

تحقق من فهمك

5) **كهرباء:** إذا كان فرق جهد دائرة كهربائية $120\,V$، وكانت شدة التيار $(8 + 6j)$ أمبير، فأوجد معاوقتها على الصورة الديكارتية. $(9.6 - 7.2j)\,\Omega$ تقريبًا



الربط مع الحياة

مهندسو الكهرباء يطور مهندسو الكهرباء تكنولوجيا جديدة لصناعة نظام تحديد المواقع والمحولات العملاقة التي تُشغِّل مدنًا كاملة ومحركات الطائرات وأنظمة الرادار والملاحة. كما أنهم يعملون على تطوير منتجات متعددة مثل الهواتف المحمولة والسيارات والرجل الآلي.

يعود الفضل في حساب قوى الأعداد المركبة وجذورها للعالم الفرنسي ديموافر، وقبل حساب قوى الأعداد المركبة وجذورها، فإن من المفيد كتابة العدد المركب على الصورة القطبية.

بإمكاننا استعمال صيغة ضرب الأعداد المركبة لتوضيح النمط الذي اكتشفه ديموافر.

أولًا: أوجد z^2 من خلال الضرب $z \cdot z$.

$$z \cdot z = r(\cos\theta + i \sin\theta) \cdot r(\cos\theta + i \sin\theta)$$ اضرب

$$z^2 = r^2[\cos(\theta + \theta) + i \sin(\theta + \theta)]$$ صيغة الضرب

$$z^2 = r^2(\cos 2\theta + i \sin 2\theta)$$ بسِّط

والآن أوجد z^3 بحساب $z^2 \cdot z$.

$$z^2 \cdot z = r^2(\cos 2\theta + i \sin 2\theta) \cdot r(\cos\theta + i \sin\theta)$$ اضرب

$$z^3 = r^3[\cos(2\theta + \theta) + i \sin(2\theta + \theta)]$$ صيغة الضرب

$$z^3 = r^3(\cos 3\theta + i \sin 3\theta)$$ بسِّط

لاحظ أنه عند حساب القوة النونية للعدد المركب، فإنك تجد القوّة النونية لمقياس العدد، وتضرب السعة في n.

تاريخ الرياضيات

إبراهام ديموافر
(1667 م – 1754 م)
رياضي فرنسي عُرف بالنظرية المسماة باسمه، وكتابه عن الاحتمالات هو *Doctrine of Chances*. ويُعدّ ديموافر من الرياضيين الروّاد في الهندسة التحليلية والاحتمالات.

ويمكن تلخيص ذلك على النحو الآتي:

> **نـظـريـة** — **نظرية ديموافر**
>
> إذا كان $z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$ عددًا مركبًا على الصورة القطبية، وكان n عددًا صحيحًا موجبًا، فإن:
> $z^n = [r(\cos\theta + i\sin\theta)]^n = r^n(\cos n\theta + i\sin n\theta)$.

مـثـال 6 نظرية ديموافر

أوجد $(4 + 4\sqrt{3}i)^6$ بالصورة القطبية، ثم عبّر عنه بالصورة الديكارتية.

أولًا: اكتب $4 + 4\sqrt{3}i$ على الصورة القطبية.

$r = \sqrt{a^2 + b^2}$	صيغ التحويل	$\theta = \text{Tan}^{-1}\frac{b}{a}$
$= \sqrt{4^2 + (4\sqrt{3})^2}$	$a = 4, b = 4\sqrt{3}$	$= \text{Tan}^{-1}\frac{4\sqrt{3}}{4}$
$= \sqrt{16 + 48}$	بسّط	$= \text{Tan}^{-1}\sqrt{3}$
$= 8$	بسّط	$= \frac{\pi}{3}$

فتكون الصورة القطبية للعدد $4 + 4\sqrt{3}i$ هي $8\left(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right)$.

والآن استعمل نظرية ديموافر؛ لإيجاد القوة السادسة.

$$(4 + 4\sqrt{3}i)^6 = \left[8\left(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right)\right]^6 \quad \text{الصورة القطبيّة}$$

$$= 8^6\left[\cos 6\left(\frac{\pi}{3}\right) + i\sin 6\left(\frac{\pi}{3}\right)\right] \quad \text{نظرية ديموافر}$$

$$= 262144(\cos 2\pi + i\sin 2\pi) \quad \text{بسّط}$$

$$= 262144(1 + 0i) \quad \text{أوجد قيمتي الجيب وجيب التمام}$$

$$= 262144 \quad \text{بسّط}$$

أي أن $(4 + 4\sqrt{3}i)^6 = 262144$.

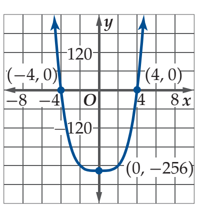
تحقق من فهمك

أوجد الناتج في كلٍّ مما يأتي، وعبّر عنه بالصورة الديكارتية:

(6A $(1 + \sqrt{3}i)^4$ $-8 - 8\sqrt{3}i$

(6B $(2\sqrt{3} - 2i)^8$ $-32768 + 32768\sqrt{3}i$

يوجد للمعادلة $x^4 = 256$ حلان في مجموعة الأعداد الحقيقية هما 4 ، -4. ويُظهر التمثيل البياني المجاور للمعادلة $y = x^4 - 256$ وجود صفرين حقيقيين عند $x = 4$ ، -4 ، بينما في مجموعة الأعداد المركبة فإن لهذه المعادلة حلين حقيقيين، وحلين مركبين.



مراجعة المفردات

النظرية الأساسية في الجبر
كل معادلة كثيرة حدود درجتها أكبر من صفر لها جذر واحد على الأقل ينتمي إلى مجموعة الأعداد المركبة.

درست سابقًا نتيجة النظرية الأساسية في الجبر، والتي تنص على وجود n صفرًا لمعادلة كثيرة الحدود من الدرجة n في مجموعة الأعداد المركبة؛ لذا يكون للمعادلة $x^4 = 256$ التي تكتب على الصورة $x^4 - 256 = 0$ أربعة حلول أو جذور مختلفة، وهي $4, -4, 4i, -4i$.
وبشكل عام، فإنه يوجد n جذر نوني مختلفٌ لأي عدد مركب لا يساوي الصفر حيث $n \geq 2$ ، بمعنى أنه لأي عدد مركب جذران تربيعيان، وثلاثة جذور تكعيبية وأربعة جذور رباعية...، وهكذا.

مثال إضافي

6 أوجد $(3 + 3\sqrt{3}i)^4$، وعبّر عنه بالصورة الديكارتية.
$-648 - 648\sqrt{3}i$

إرشادات للمعلم الجديد

نظرية ديموافر يمكن للطلاب استعمال مبدأ الاستقراء الرياضي الذي درسوه سابقًا؛ لإثبات صحة نظرية ديموافر لجميع القوى الصحيحة الموجبة n .

ولإيجاد جميع جذور عدد مركب يمكن أن تستعمل نظرية ديموافر للوصول إلى الصيغة الآتية:

مفهوم أساسي **الجذور المختلفة**

لأي عدد صحيح $n \geq 2$ ، فإن للعدد المركب $r(\cos\theta + i\sin\theta)$ ، n من الجذور النونية المختلفة، ويمكن إيجادها باستعمال الصيغة :

$$r^{\frac{1}{n}}\left(\cos\frac{\theta+2k\pi}{n} + i\sin\frac{\theta+2k\pi}{n}\right)$$

حيث $k = 0, 1, 2, \ldots, n-1$.

ويمكننا استعمال هذه الصيغة لجميع قيم k الممكنة، إلا أنه يمكننا التوقف عندما $k = n - 1$ ، وعندما يساوي k العدد n، أو يزيد عليه تبدأ الجذور بالتكرار، كما يظهر في المعادلة:

$$\frac{\theta+2\pi n}{n} = \frac{\theta}{n} + 2\pi$$ وهي مطابقة للزاوية التي تنتج عندما $k = 0$

مثال 7 جذور العدد المركب

أوجد الجذور الرباعية للعدد المركب $-4 - 4i$.

أولًا: اكتب $-4 - 4i$ على الصورة القطبية.

$$-4 - 4i = \sqrt{32}\left(\cos\frac{5\pi}{4} + i\sin\frac{5\pi}{4}\right)$$ $r = \sqrt{(-4)^2+(-4)^2} = \sqrt{32}$, $\theta = \mathrm{Tan}^{-1}\frac{-4}{-4} + \pi = \frac{5\pi}{4}$

والآن اكتب الصيغة للجذور الرباعية.

$$(\sqrt{32})^{\frac{1}{4}}\left(\cos\frac{\frac{5\pi}{4}+2k\pi}{4} + i\sin\frac{\frac{5\pi}{4}+2k\pi}{4}\right)$$ $\theta = \frac{5\pi}{4}, n = 4, r^{\frac{1}{n}} = (\sqrt{32})^{\frac{1}{4}}$

$$= \sqrt[8]{32}\left[\cos\left(\frac{5\pi}{16} + \frac{2k\pi}{4}\right) + i\sin\left(\frac{5\pi}{16} + \frac{2k\pi}{4}\right)\right]$$ بسّط

ثانيًا: لإيجاد الجذور الرباعية، عوّض $k = 0, 1, 2, 3$.

$k = 0$ $$\sqrt[8]{32}\left[\cos\left(\frac{5\pi}{16} + \frac{2(0)\pi}{4}\right) + i\sin\left(\frac{5\pi}{16} + \frac{2(0)\pi}{4}\right)\right]$$

$$= \sqrt[8]{32}\left(\cos\frac{5\pi}{16} + i\sin\frac{5\pi}{16}\right) \approx 0.86 + 1.28i$$ الجذر الأول

$k = 1$ $$\sqrt[8]{32}\left[\cos\left(\frac{5\pi}{16} + \frac{2(1)\pi}{4}\right) + i\sin\left(\frac{5\pi}{16} + \frac{2(1)\pi}{4}\right)\right]$$

$$= \sqrt[8]{32}\left(\cos\frac{13\pi}{16} + i\sin\frac{13\pi}{16}\right) \approx -1.28 + 0.86i$$ الجذر الثاني

$k = 2$ $$\sqrt[8]{32}\left[\cos\left(\frac{5\pi}{16} + \frac{2(2)\pi}{4}\right) + i\sin\left(\frac{5\pi}{16} + \frac{2(2)\pi}{4}\right)\right]$$

$$= \sqrt[8]{32}\left(\cos\frac{21\pi}{16} + i\sin\frac{21\pi}{16}\right) \approx -0.86 - 1.28i$$ الجذر الثالث

$k = 3$ $$\sqrt[8]{32}\left[\cos\left(\frac{5\pi}{16} + \frac{2(3)\pi}{4}\right) + i\sin\left(\frac{5\pi}{16} + \frac{2(3)\pi}{4}\right)\right]$$

$$= \sqrt[8]{32}\left(\cos\frac{29\pi}{16} + i\sin\frac{29\pi}{16}\right) \approx 1.28 - 0.86i$$ الجذر الرابع

الجذور الرباعية للعدد $-4 - 4i$ هي $0.86 + 1.28i, -1.28 + 0.86i, -0.86 - 1.28i, 1.28 - 0.86i$

تحقق من فهمك

7A) أوجد الجذور التكعيبية للعدد $2 + 2i$
$\approx 1.37 + 0.37i, -1 + i, \approx -0.37 - 1.37i$

7B) أوجد الجذور التكعيبية للعدد 8
$2, -1 + \sqrt{3}i, -1 - \sqrt{3}i$

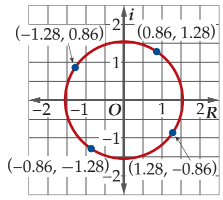
مثال إضافي

7 أوجد الجذور الخماسيَّة للعدد المركب $-2 - 2i$
$0.87 + 0.87i, -0.56 + 1.10i, -1.22 - 0.19i, -0.19 - 1.22i, 1.10 - 0.56i$

إرشادات للمعلم الجديد

معادلة الجذور المختلفة برهان معادلة الجذور المختلفة أعلى من مستوى هذا الكتاب.

لاحظ أن الجذور الأربعة التي أوجدناها في المثال 7 تقع على دائرة. فإذا نظرنا إلى الصورة القطبية لكل جذر، نجد أن لكل منها مقياسًا قيمته ($\sqrt[3]{32} \approx 1.54$)، ويمثل نصف قطر الدائرة. كما أن المسافات بين الجذور على الدائرة متساوية، وذلك نتيجة للفرق الثابت بين قيم السعة؛ إذ يساوي $\frac{2\pi}{4}$.



تحدث إحدى الحالات الخاصة عند إيجاد الجذور النونية للعدد 1، فعند كتابة 1 على الصورة القطبية، فإننا نحصل على $r = 1$. وكما ذكرنا في الفقرة السابقة، فإن مقياس الجذور هو طول نصف قطر الدائرة الناتجة عن تمثيل الجذور في المستوى المركب؛ لذا فإن **الجذور النونية للعدد واحد** تقع على دائرة الوحدة.

مثال 8 الجذور النونية للعدد واحد

أوجد الجذور الثُّمانيَّة للعدد واحد.

أولًا: اكتب 1 على الصورة القطبية.

$1 = 1 \cdot (\cos 0 + i \sin 0)$ $r = \sqrt{1^2 + 0^2} = 1,\ \theta = \text{Tan}^{-1}\frac{0}{1} = 0$

والآن اكتب الصيغة للجذور الثمانيَّة.

$1\left(\cos\frac{0 + 2k\pi}{8} + i \sin\frac{0 + 2k\pi}{8}\right)$ $\theta = 0,\ n = 8,\ r^{\frac{1}{n}} = 1^{\frac{1}{8}} = 1$

$= \cos\frac{k\pi}{4} + i \sin\frac{k\pi}{4}$ بسِّط

ثانيًا: افترض أن $k = 0$ لإيجاد الجذر الأول للعدد 1 .

$k = 0$ $\cos\frac{(0)\pi}{4} + i \sin\frac{(0)\pi}{4}$

$= \cos 0 + i \sin 0 = 1$ الجذر الأول

لاحظ أن مقياس كل جذر هو 1، ويمكن إيجاد سعة الجذر الحالية بإضافة $\frac{\pi}{4}$ إلى سعة الجذر السابق.

الجذر الثاني $\cos\frac{\pi}{4} + i \sin\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} i$

الجذر الثالث $\cos\frac{\pi}{2} + i \sin\frac{\pi}{2} = i$

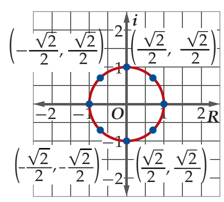
الجذر الرابع $\cos\frac{3\pi}{4} + i \sin\frac{3\pi}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} i$

الجذر الخامس $\cos \pi + i \sin \pi = -1$

الجذر السادس $\cos\frac{5\pi}{4} + i \sin\frac{5\pi}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2} i$

الجذر السابع $\cos\frac{3\pi}{2} + i \sin\frac{3\pi}{2} = -i$

الجذر الثامن $\cos\frac{7\pi}{4} + i \sin\frac{7\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2} i$



الجذور الثُّمانيَّة للعدد 1 هي $1, \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} i, i, -\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} i, -1, -\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2} i, -i, \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2} i$ كما هو موضح في الشكل أعلاه.

تحقق من فهمك

8A) أوجد الجذور التكعيبية للعدد واحد.

8B) أوجد الجذور السداسية للعدد واحد.

إرشادات للدراسة

الجذور النونية لعدد مركب
يكون للجذور المقياس نفسه وهو $r^{\frac{1}{n}}$. سعة الجذر الأول $\frac{\theta}{n}$، ثم تزداد للجذور الأخرى على التوالي بإضافة $\frac{2\pi}{n}$.

8A) $1, -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} i, -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} i$

8B) $1, \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} i, -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} i, -1, -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} i, \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} i$

مثال إضافي

8 أوجد الجذور الخماسية للعدد واحد.
$1,$
$0.3090 + 0.9511i,$
$-0.8090 + 0.5878i,$
$-0.8090 - 0.5878i,$
$0.3090 - 0.9511i$

إرشادات للمعلم الجديد

الجذور النونية للعدد واحد
التمثيل الهندسي للجذور النونية للعدد واحد، تقع دائمًا على دائرة الوحدة في المستوى المركب، حيث تمثل هذه النقاط رؤوس مضلع منتظم له n ضلعًا. لاحظ أن أحد جذور الواحد هو 1 دائمًا.

تدرب وحل المسائل

مَثِّل كل عدد مما يأتي في المستوى المركب، وأوجد قيمته المطلقة: (مثال 1) 1-6) انظر ملحق الإجابات للتمثيل البياني.

1) $z = 4 + 4i$ ≈ 5.66

2) $z = -3 + i$ ≈ 3.16

3) $z = -4 - 6i$ ≈ 7.21

4) $z = 2 - 5i$ ≈ 5.39

5) $z = -7 + 5i$ ≈ 8.60

6) $z = 8 - 2i$ ≈ 8.25

7) **متجهات:** تُعطى القوة المؤثرة على جسم بالعلاقة $z = 10 + 15i$، حيث تُقاس كل مركبة للقوة بالنيوتن (N). (مثال 1)

a) مَثِّل z كمتجه في المستوى المركب. a) انظر الهامش.

b) أوجد طول المتجه واتجاهه. طوله 18.03 N، اتجاهه محدد بالزاوية $56.31°$

عبِّر عن كل عدد مركب مما يأتي بالصورة القطبية: (مثال 2) 8-13) انظر الهامش.

8) $4 + 4i$

9) $-2 + i$

10) $4 - \sqrt{2}i$

11) $2 - 2i$

12) $4 + 5i$

13) $-1 - \sqrt{3}i$

مَثِّل كل عدد مركب مما يأتي في المستوى القطبي، ثم عبِّر عنه بالصورة الديكارتية: (مثال 3) 14-17) انظر ملحق الإجابات.

14) $4\left(\cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3}\right)$

15) $\left(\cos \frac{11\pi}{6} + i \sin \frac{11\pi}{6}\right)$

16) $2\left(\cos \frac{4\pi}{3} + i \sin \frac{4\pi}{3}\right)$

17) $\frac{3}{2}(\cos 360° + i \sin 360°)$

أوجد الناتج في كلٍّ مما يأتي على الصورة القطبية، ثم عبِّر عنه بالصورة الديكارتية: (المثالان 4، 5) 18-27) انظر ملحق الإجابات.

18) $6\left(\cos \frac{\pi}{2} + i \sin \frac{\pi}{2}\right) \cdot 4\left(\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4}\right)$

19) $5(\cos 135° + i \sin 135°) \cdot 2(\cos 45° + i \sin 45°)$

20) $3\left(\cos \frac{3\pi}{4} + i \sin \frac{3\pi}{4}\right) \div \frac{1}{2}(\cos \pi + i \sin \pi)$

21) $2(\cos 90° + i \sin 90°) \cdot 2(\cos 270° + i \sin 270°)$

22) $3\left(\cos \frac{\pi}{6} + i \sin \frac{\pi}{6}\right) \div 4\left(\cos \frac{2\pi}{3} + i \sin \frac{2\pi}{3}\right)$

23) $4\left(\cos \frac{9\pi}{4} + i \sin \frac{9\pi}{4}\right) \div 2\left(\cos \frac{3\pi}{2} + i \sin \frac{3\pi}{2}\right)$

24) $\frac{1}{2}(\cos 60° + i \sin 60°) \cdot 6(\cos 150° + i \sin 150°)$

25) $6\left(\cos \frac{3\pi}{4} + i \sin \frac{3\pi}{4}\right) \div 2\left(\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4}\right)$

26) $5(\cos 180° + i \sin 180°) \cdot 2(\cos 135° + i \sin 135°)$

27) $\frac{1}{2}\left(\cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3}\right) \div 3\left(\cos \frac{\pi}{6} + i \sin \frac{\pi}{6}\right)$

أوجد الناتج لكل مما يأتي بالصورة القطبية، ثم عبِّر عنه بالصورة الديكارتية: (مثال 6)

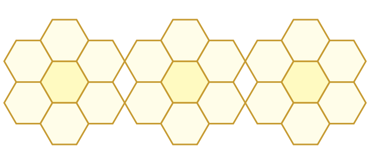
28) $(2 + 2\sqrt{3}i)^6$ 4096

29) $\left[4\left(\cos \frac{\pi}{2} + i \sin \frac{\pi}{2}\right)\right]^4$ 256

30) $(2 + 3i)^{-2}$ $-0.03 - 0.07i$

31) $\left[2\left(\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4}\right)\right]^4$ -16

32) **تصميم:** يعمل سالم في وكالة للإعلانات. ويرغب في تصميم لوحة مكونة من أشكال سداسية منتظمة كما هو مبيّن أدناه. ويستطيع تعيين رؤوس أحد هذه الأشكال السداسية بتمثيل حلول المعادلة $x^6 - 1 = 0$ في المستوى المركب. أوجد رؤوس أحد هذه الأشكال السداسية. (مثال 7) انظر الهامش.



3 التدريب

التقويم التكويني

استعمل الأسئلة 1-39؛ للتأكد من فهم الطلاب، ثم استعمل الجدول أسفل هذه الصفحة؛ لتعيين الواجبات المنزلية للطلاب بحسب مستوياتهم.

تنبيه لحل الأسئلة

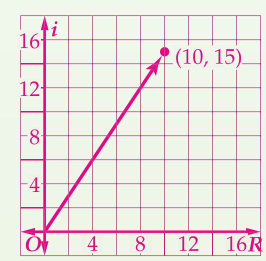
المستوى القطبي يحتاج الطلاب إلى ورقة فيها المستوى القطبي في كثير من أسئلة هذا الدرس.

تنبيه!

أخطاء شائعة عند حل السؤال 30، ذكِّر الطلاب أنه عند حل مسائل بقوى سالبة، فإننا لا نحسب القوى الموجبة، ثم نضرب النتيجة في سالب. فمثلًا: 2^{-5} لا تساوي $-(2^5)$، ولكن 2^{-5} تساوي $\frac{1}{2^5}$.

إجابات:

7a)



8) $4\sqrt{2}\left(\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4}\right)$

9) $\approx \sqrt{5}\,(\cos 2.68 + i \sin 2.68)$

10) $\approx 3\sqrt{2}(\cos(-0.34) + i\sin -(0.34))$

11) $2\sqrt{2}\left(\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) + i \sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right)$

12) $\approx \sqrt{41}\ (\cos 0.90 + i \sin 0.90)$

13) $2\left(\cos \frac{4\pi}{3} + i \sin \frac{4\pi}{3}\right)$

32) $1, \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i, -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i, -1, -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i, \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$

تنويع الواجبات المنزلية

المستوى	الأسئلة
دون المتوسط	1–37، 39–41، 48، 51–64
ضمن المتوسط	1–47 فردي، 48، 51–64
فوق المتوسط	38–64

أوجد جميع الجذور المطلوبة للعدد المركب في كل مما يأتي:
(المثالان 7, 8) **(33, 34 انظر ملحق الإجابات.**

33) الجذور السداسية للعدد i

34) الجذور الرباعية للعدد $4\sqrt{3} - 4i$

35) الجذور التربيعية للعدد $-3 - 4i$ **$-1 + 2i, 1 - 2i$**

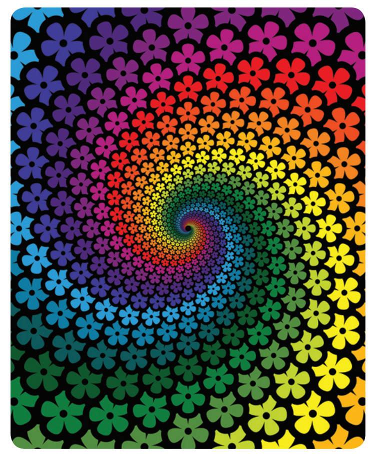
36) كهرباء: تُعطَى معاوقة أحد أجزاء دائرة كهربائية موصولة على التوالي بالعبارة $5(\cos 0.9 + j \sin 0.9)\Omega$، وتُعطَى في الجزء الآخر من الدائرة بالعبارة $8(\cos 0.4 + j \sin 0.4)\Omega$. **a-c) انظر الهامش.**

a) حَوِّل كلًّا من العبارتين السابقتين إلى الصورة الديكارتية.

b) اجمع الناتجين في الفرع a؛ لإيجاد المعاوقة الكلية في الدائرة.

c) حَوِّل المعاوقة الكلية إلى الصورة القطبية.

37) كسريات: الكسريات شكل هندسي يتكون من نمط مكرر بشكل مستمر، وتكون الكسريات ذاتية التشابه؛ أي أن الأجزاء الصغيرة للشكل لها الخصائص الهندسية نفسها للشكل الأصلي، كما في الشكل أدناه. **انظر ملحق الإجابات.**



في هذا السؤال سوف تنتج كسريات من خلال تكرار $f(z) = z^2$، حيث $z_0 = 0.8 + 0.5i$.

a) احسب $z_1, z_2, z_3, z_4, z_5, z_6$، حيث $z_1 = f(z_0)$، $z_2 = f(z_1)$، وهكذا.

b) مَثِّل كل عدد في المستوى المركب.

c) صِف النمط الناتج.

38) أوجد العدد المركب z إذا علمت أن $(-1-i)$ هو أحد جذوره الرباعية، ثم أوجد جذوره الرباعية الأخرى. **انظر الهامش.**

حُلّ كلًّا من المعادلات الآتية باستعمال صيغة الجذور المختلفة:
(39–41 انظر الهامش.

39) $x^3 = i$

40) $x^4 = 81i$

41) $x^3 + 1 = i$

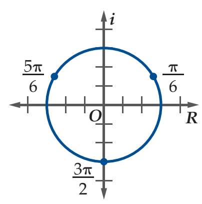
مسائل مهارات التفكير العليا

42) اكتشف الخطأ: يَحسبُ كل من أحمد وباسم قيمة $\left(-\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i\right)^5$. فيستعمل أحمد نظرية ديموافر ويحصل على الإجابة $\cos \frac{5\pi}{6} + i \sin \frac{5\pi}{6}$. ويقول باسمُ بأن أحمدَ قد أنجز جزءًا من المسألة فقط. أيهما إجابته صحيحة؟ برِّر إجابتك. **انظر الهامش.**

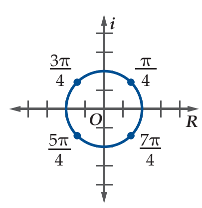
تحدٍّ: أوجد الجذور المحدّدة على كل من المنحنيين أدناه على الصورة القطبية، ثم عيِّن العدد المركب الذي له هذه الجذور.

(43, 44 انظر ملحق الإجابات.

43)



44)



تنبيه!

اكتشف الخطأ

عند حل السؤال 42، ذكِّر الطلاب بأن عليهم البدء بكتابة العدد المركب $\left(-\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i\right)$ على الصورة القطبية، ثم إكمال الحل

إجابات:

36a) $3.11+3.92j, 7.37+3.12j$

36b) $(10.48+7.04j)\Omega$

36c) $\approx 12.63(\cos 0.59 + j \sin 0.59)\Omega$

38) إجابة ممكنة: أوجد الصورة القطبية للجذر $(-1-i)$ فستكون $\sqrt{2}\left(\cos \frac{5\pi}{4} + i \sin \frac{5\pi}{4}\right)$، ثم أوجد $\left[\sqrt{2}\left(\cos \frac{5\pi}{4} + i \sin \frac{5\pi}{4}\right)\right]^4$ تحصل على العدد المركب z، ثم أوجد جذوره الأخرى، وتكون الإجابة النهائية هي:
$-4; 1+i, -1+i, -1-i, 1-i$

39) $\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i, -\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i, -i$

40) $2.77 + 1.15i, -1.15 + 2.77i,$
$\approx -2.77 - 1.15i, 1.15 - 2.77i$

41) $0.79 + 0.79i, -1.08 + 0.29i,$
$0.29 - 1.08i$

42) باسم؛ إجابة ممكنة؛ لقد قام أحمد بتحويل العدد المركب إلى الصورة القطبية فقط؛ لذا عليه استعمال نظرية ديموافر لحساب القوة الخامسة.

4 التقويم

بطاقة مكافأة اطلب إلى الطلاب إيجاد قيمة: $(1+i)^5$. $-4-4i$

التقويم التكويني

تحقق من مدى استيعاب الطلاب للمفاهيم الواردة في الدرس 3-6 بإعطائهم:
الاختبار القصير 3، ص (31)

وللتحقق من مدى استيعاب الطلاب للمفاهيم الواردة في الدروس 1-6، 2-6، 3-6 بإعطائهم:
الاختبار القصير 4، ص (31)

التقويم الختامي

اختبار منتصف الفصل، ص (32)

45) **برهان:** إذا كان $z_1 = r_1(\cos\theta_1 + i\sin\theta_1)$، $z_2 = r_2(\cos\theta_2 + i\sin\theta_2)$، حيث $r_2 \neq 0$، فأثبت أن $\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2}[\cos(\theta_1-\theta_2) + i\sin(\theta_1-\theta_2)]$. انظر ملحق الإجابات.

46) **تحدٍّ:** اكتب $\cos 3\theta$ بدلالة $\cos\theta$ مستعملاً نظرية ديموافر. إرشاد: أوجد قيمة $(\cos\theta + i\sin\theta)^3$ مرة باستعمال نظرية ديموافر، ومرة باستعمال مفكوك نظرية ذات الحدين.
$\cos 3\theta = 4\cos^3\theta - 3\cos\theta$

47) **اكتب:** وضّح خطوات إيجاد الجذور النونية للعدد المركب $z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$، حيث n عدد صحيح موجب. انظر ملحق الإجابات.

مراجعة تراكمية

مثّل كل نقطة مما يأتي في المستوى القطبي: (الدرس 1-6)
54, 55) انظر ملحق الإجابات.

48) $Q\left(4, -\frac{5\pi}{6}\right)$

49) $P(4.5, -210°)$

اكتب كل معادلة مما يأتي على الصورة القطبية: (الدرس 2-6)
56, 57) انظر ملحق الإجابات.

50) $(x-3)^2 + y^2 = 9$

51) $x^2 + y^2 = 2y$

أوجد المسافة بين كل زوج من النقاط مما يأتي: (الدرس 1-6)

52) $\left(2, \frac{\pi}{6}\right), \left(5, \frac{2\pi}{3}\right)$ $\approx \sqrt{29}$

53) $(1, -45°), (-5, 210°)$ ≈ 4.84

حوّل الإحداثيات القطبية لكل نقطة مما يأتي إلى إحداثيات ديكارتية: (الدرس 2-6)

54) $\left(5, \frac{\pi}{3}\right)$ $\left(\frac{5}{2}, \frac{5\sqrt{3}}{2}\right)$

55) $(4, 210°)$ $\left(-2\sqrt{3}, -2\right)$

تدريب على اختبار

56) أي مما يأتي يمثّل $\overrightarrow{AB}$ وطوله، إذا كان $A(3, 4, -2), B(-5, 2, 1)$؟ A

A $\langle -8, -2, 3\rangle, \sqrt{77}$

B $\langle 8, -2, 3\rangle, \sqrt{77}$

C $\langle -8, -2, 3\rangle, \sqrt{109}$

D $\langle 8, -2, 3\rangle, \sqrt{109}$

57) ما المسافة بين النقطة $\left(-3, \frac{5\pi}{3}\right)$ والنقطة $\left(6, \frac{\pi}{4}\right)$؟ C

A 3.97

B 4.97

C 5.97

D 6.97

58) أي مما يأتي يمثّل تقريبًا الصورة القطبية للعدد المركب $20 - 21i$؟ A

A $29(\cos 5.47 + i\sin 5.47)$

B $29(\cos 5.52 + i\sin 5.52)$

C $32(\cos 5.47 + i\sin 5.47)$

D $32(\cos 5.52 + i\sin 5.52)$

تنويع التعليم

ضمن فوق

أوجد الجذور التكعيبيّة للعدد -1
$-1, \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i, \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$

✓ التقويم التكويني

المفردات

يُشير رقم الصفحة بعد كل مفردة إلى الصفحة التي وردت فيها المفردة أول مرة، فإذا واجه بعض الطلاب صعوبات في حل الأسئلة 8-1، فذكرهم بأنه يمكنهم استعمال هذه الصفحات مرجعًا؛ ليتذكروا المعلومات حول هذه المفردات.

✓ التقويم الختامي

اختبار المفردات، ص (33)

الفصل 6

دليل الدراسة والمراجعة

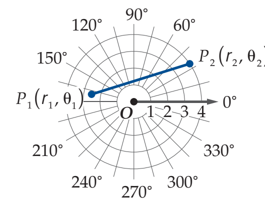
ملخص الفصل

مفاهيم أساسية

الإحداثيات القطبية (الدرس 6-1)

- يُعيِّنُ موقع النقطة (r, θ) في نظام الإحداثيات القطبية باستعمال المسافة المتجهة r والزاوية المتجهة θ .
- المسافة بين النقطتين $P_1(r_1, \theta_1)$, $P_2(r_2, \theta_2)$ في المستوى القطبي هي:

$$P_1P_2 = \sqrt{r_1^2 + r_2^2 - 2r_1r_2 \cos (\theta_2 - \theta_1)}$$



الصورة القطبية والصورة الديكارتية للمعادلات (الدرس 6-2)

- الإحداثيات الديكارتية للنقطة $P(r, \theta)$ هي $(r \cos \theta, r \sin \theta)$.
- لتحويل إحداثيات نقطة $P(x, y)$ من الإحداثيات الديكارتية إلى الإحداثيات القطبية استعمل المعادلات $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ ، $\theta = \text{Tan}^{-1} \frac{y}{x}$ ، عندما $x > 0$ ، أو $\theta = \text{Tan}^{-1} \frac{y}{x} + \pi$ عندما $x < 0$.

الأعداد المركبة ونظرية ديموافر (الدرس 6-3)

- الصورة القطبية أو المثلثية للعدد المركب $a + bi$ هي $r (\cos \theta + i \sin \theta)$.
- صيغة الضرب لعددين مركبين z_1 ، z_2 هي: $z_1z_2 = r_1r_2 [\cos (\theta_1 + \theta_2) + i \sin (\theta_1 + \theta_2)]$.
- صيغة القسمة لعددين مركبين z_1 ، z_2 هي:
$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2} [\cos (\theta_1 - \theta_2) + i \sin (\theta_1 - \theta_2)], r_2 \neq 0$$
- تنص نظرية ديموافر على أنه إذا كانت $z = r(\cos \theta + i \sin \theta)$ هي الصورة القطبية لعدد مركب، فإن: $z^n = r^n (\cos n\theta + i \sin n\theta)$ ، حيث n عدد صحيح موجب.

الجذور المختلفة:

لأي عدد صحيح $n \geq 2$، فإن للعدد المركب $r (\cos \theta + i \sin \theta)$ ، n من الجذور النونية المختلفة ويمكن إيجادها باستعمال الصيغة:

$$r^{\frac{1}{n}}\left(\cos \frac{\theta + 2k\pi}{n} + i \sin \frac{\theta + 2k\pi}{n}\right)$$

حيث $k = 0, 1, 2, \ldots, n - 1$.

المفردات

نظام الإحداثيات القطبية ص 52	المحور التخيلي ص 68
القطب ص 52	القيمة المطلقة لعدد مركب ص 68
المحور القطبي ص 52	الصورة القطبية ص 69
الإحداثيات القطبية ص 52	الصورة المثلثية ص 69
المعادلة القطبية ص 54	المقياس ص 69
التمثيل القطبي ص 54	السعة ص 69
المستوى المركب ص 68	الجذور النونية للعدد واحد ص 75
المحور الحقيقي ص 68	

اختبر مفرداتك

اختر المفردة المناسبة من القائمة أعلاه لإكمال كل جملة مما يأتي:

1) ________ هو مجموعة كل النقاط (r, θ) التي تحقق معادلة قطبية معطاة. **التمثيل القطبي**

2) المستوى الذي يحوي محورًا يمثِّل الجزء الحقيقي، وآخر يمثل الجزء التخيلي هو ________ . **المستوى المركب أو مستوى آرجاند**

3) يُحدّدُ موقع نقطة في ________ باستعمال المسافة المتجهة من نقطة ثابتة إلى النقطة نفسها، وزاوية متجهة من محور ثابت. **نظام الإحداثيات القطبية**

4) ________ هي الزاوية θ لعدد مركب مكتوب على الصورة: $r(\cos \theta + i \sin \theta)$. **السعة**

5) تُسمَّى نقطة الأصل في نظام الإحداثيات القطبية بـ ________ . **القطب**

6) تُسمَّى القيمة المطلقة لعدد مركب بـ ________ . **المقياس**

7) ________ هو اسم آخر للمستوى المركب. **مستوى آرجاند**

8) ________ هو نصف مستقيم ممتد من القطب، ويكون أفقيًّا باتجاه اليمين. **المحور القطبي**

دليل الدراسة والمراجعة

مراجعة الدروس

6-1 الإحداثيات القطبية (الصفحات 52 - 58)

مَثِّل كلّ نقطة مما يأتي في المستوى القطبي: 9-12) انظر الهامش.

9) $W(-0.5, -210°)$
10) $X\left(1.5, \frac{7\pi}{4}\right)$
11) $Y(4, -120°)$
12) $Z\left(-3, \frac{5\pi}{6}\right)$

مَثِّل كلّ معادلة من المعادلات القطبية الآتية بيانيًّا: 13-16) انظر الهامش.

13) $\theta = -60°$
14) $r = \frac{9}{2}$
15) $r = 7$
16) $\theta = \frac{11\pi}{6}$

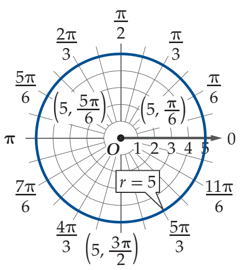
أوجد المسافة بين كل زوج من النقاط مما يأتي:

17) $\left(5, \frac{\pi}{2}\right), \left(2, -\frac{7\pi}{6}\right)$ 4.36
18) $(-3, 60°), (4, 240°)$ 1
19) $(-1, -45°), (6, 270°)$ 6.74
20) $\left(7, \frac{5\pi}{6}\right), \left(2, \frac{4\pi}{3}\right)$ 7.28

مثال 1

مَثِّل المعادلة $r = 5$ بيانيًّا في المستوى القطبي.

حلول المعادلة $r = 5$ هي الأزواج المرتبة $(5, \theta)$، حيث θ أي عدد حقيقي. ويتكون التمثيل من جميع النقاط التي تبعد 5 وحدات عن القطب، لذا فإن التمثيل هو دائرة مركزها القطب، وطول نصف قطرها 5.



6-2 الصورة القطبية والصورة الديكارتية للمعادلات (الصفحات 59 - 67)

أوجد زوجين مختلفين كل منهما يمثِّل إحداثيين قطبيين لكل نقطة معطاة بالإحداثيّات الديكارتيّة في كلٍّ مما يأتي، حيث $-2\pi \le \theta \le 2\pi$:

21) $(-1, 5)$ $(5.1, 1.77), (-5.10, 4.91)$
22) $(3, 7)$ $(7.62, 1.17), (-7.62, 4.31)$
23) $(1, 2)$ $(2.24, 1.11), (-2.24, 4.25)$

اكتب كلّ معادلة على الصورة الديكارتية، وحدّد نوع تمثيلها البياني: 24-27) انظر ملحق الإجابات.

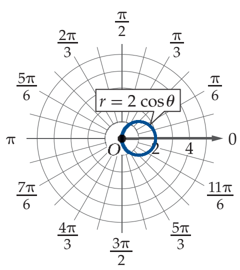
24) $r = 5$
25) $r = -4 \sin \theta$
26) $r = 6 \sec \theta$
27) $r = \frac{1}{3} \csc \theta$

مثال 2

اكتب المعادلة $r = 2 \cos \theta$ على الصورة الديكارتية، ثم حدِّد نوع تمثيلها البياني.

$r = 2 \cos \theta$	المعادلة الأصلية
$r^2 = 2r \cos \theta$	اضرب الطرفين في r
$x^2 + y^2 = 2x$	$x = r\cos\theta,\ r^2 = x^2 + y^2$
$x^2 + y^2 - 2x = 0$	اطرح $2x$ من الطرفين

أي أن الصورة القياسية للمعادلة هي: $(x-1)^2 + y^2 = 1$، وهي معادلة دائرة مركزها $(1, 0)$ وطول نصف قطرها 1.



الفصل 6 دليل الدراسة والمراجعة

مراجعة الدروس

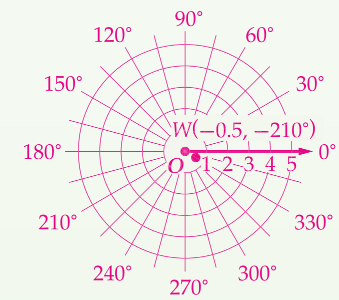
مراجعة إذا كانت الأمثلة المعطاة غير كافية لمراجعة الموضوعات التي تناولتها الأسئلة، فذكّر الطلاب بمرجع الصفحات الذي يدلُّهم على مكان مراجعة تلك الموضوعات في كتابهم المقرر.

نموذج التوقع

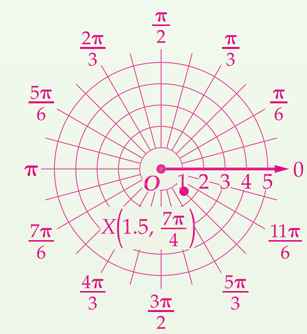
اطلب إلى الطلاب تعبئة نموذج التوقع للفصل 6 ص (27)، وناقشهم حول تغيّر إجاباتهم بعد إتمام دراسة الفصل عمّا كانت عليه عند بدايته.

إجابات:

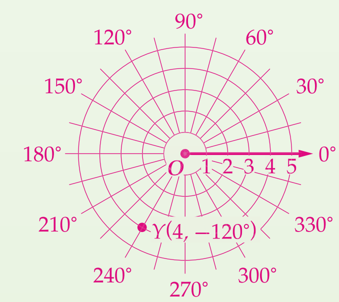
9)



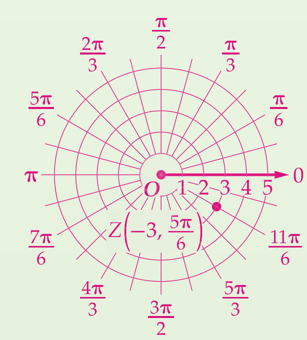
10)



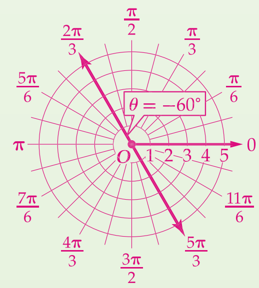
11)



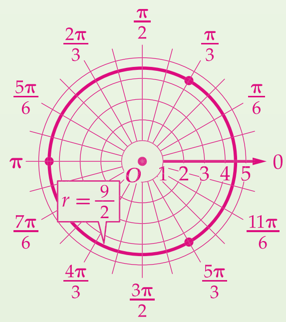
12)



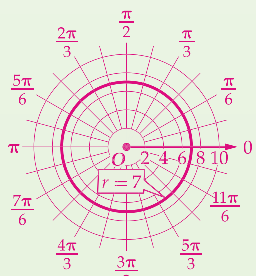
13)



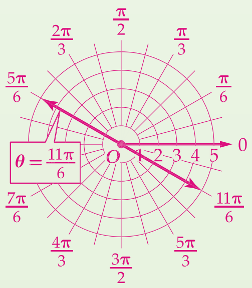
14)



15)



16)



6-3 الأعداد المركبة ونظرية ديموافر (الصفحات 78 - 68)

28-31) انظر ملحق الإجابات.

مَثِّل كل عدد مما يأتي في المستوى المركب، وأوجد قيمتهُ المطلقة:

28) $z = 3 - i$ 29) $z = 4i$

30) $z = -4 + 2i$ 31) $z = 6 - 3i$

32-35) انظر الهامش.

عبِّر عن كل عدد مركب مما يأتي بالصورة القطبية:

32) $3 + \sqrt{2}i$ 33) $-5 + 8i$

34) $-4 - \sqrt{3}i$ 35) $\sqrt{2} + \sqrt{2}i$

مَثِّل كل عدد مركب مما يأتي في المستوى القطبي، ثم عبِّر عنه بالصورة الديكارتية: 36-39) انظر ملحق الإجابات.

36) $z = 3\left(\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}\right)$

37) $z = 5\left(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right)$

38) $z = 2\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right)$

39) $z = 4\left(\cos\frac{5\pi}{6} + i\sin\frac{5\pi}{6}\right)$

أوجد الناتج في كل مما يأتي على الصورة القطبية، ثم عبِّر عنه بالصورة الديكارتية: 40-43) انظر الهامش.

40) $2\left(\cos\frac{5\pi}{6} + i\sin\frac{5\pi}{6}\right) \cdot 4\left(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right)$

41) $8(\cos 225° + i\sin 225°) \cdot \frac{1}{2}(\cos 120° + i\sin 120°)$

42) $5\left(\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}\right) \div \frac{1}{3}\left(\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6}\right)$

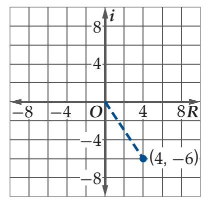
43) $6(\cos 210° + i\sin 210°) \div 3(\cos 150° + i\sin 150°)$

44) أوجد قيمة $(\sqrt{2} + 3i)^4$ بالصور القطبية، ثم اكتبه على الصورة الديكارتية.
$-23 - 119i$ تقريبًا

45) أوجد الجذور الرباعية للعدد المركب $1 + i$. انظر الهامش.

مثال 3

مَثِّل $4 - 6i$ في المستوى المركب، ثم عبِّر عنه بالصورة القطبية.



أوجد المقياس.

$r = \sqrt{a^2 + b^2}$ صيغة التحويل

$= \sqrt{4^2 + (-6)^2} = 2\sqrt{13}$ $a = 4, b = -6$

أوجد السعة.

$\theta = \text{Tan}^{-1}\frac{b}{a}$ صيغة التحويل

$= \text{Tan}^{-1}\left(-\frac{6}{4}\right)$ $a = 4, b = -6$

≈ -0.98 بسِّط

فتكون الصورة القطبية للعدد $4 - 6i$ هي:

$2\sqrt{13}\,[(\cos(-0.98) + i\sin(-0.98)]$ تقريبًا.

مثال 4

أوجد ناتج $3\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right) \cdot 5\left(\cos\frac{7\pi}{6} + i\sin\frac{7\pi}{6}\right)$ على الصورة القطبية، ثم حوِّله إلى الصورة الديكارتية.

$3\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right) \cdot 5\left(\cos\frac{7\pi}{6} + i\sin\frac{7\pi}{6}\right)$ العبارة المعطاة

$= (3 \cdot 5)\left[\cos\left(\frac{\pi}{4} + \frac{7\pi}{6}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{4} + \frac{7\pi}{6}\right)\right]$ صيغة الضرب

$= 15\left[\cos\left(\frac{17\pi}{12}\right) + i\sin\left(\frac{17\pi}{12}\right)\right]$ بسِّط

والآن أوجد الصورة الديكارتية لناتج الضرب.

$15\left[\cos\left(\frac{17\pi}{12}\right) + i\sin\left(\frac{17\pi}{12}\right)\right]$ الصورة القطبية

$= 15[-0.26 + i(-0.966)]$ أوجد قيمتي الجيب وجيب التمام

$= -3.9 - 14.5i$ خاصية التوزيع

فتكون الصورة الديكارتية لناتج الضرب $-3.9 - 14.5i$ تقريبًا.

إجابات:

32) $\approx 3.317(\cos 0.441 + i\sin 0.441)$

33) $\approx 9.434[\cos(2.1294) + i\sin(2.1294)]$

34) $\approx 4.359(\cos 3.55 + i\sin 3.55)$

35) $2\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right)$

40) $8\left[\cos\left(\frac{7\pi}{6}\right) + i\sin\left(\frac{7\pi}{6}\right)\right]$
$-4\sqrt{3} - 4i$

41) $4[\cos(345°) + i\sin(345°)]$
$\approx 3.86 - 1.04i$

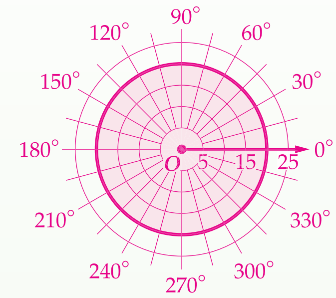
42) $15\left[\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)\right]$
$\frac{15}{2} + \frac{15\sqrt{3}}{2}i$

43) $2[\cos(60°) + i\sin(60°)]$
$1 + i\sqrt{3}$

45) $\approx 1.07 + 0.21i,$
$\approx -0.21 + 1.07i,$
$\approx -1.07 - 0.21i, \approx 0.21 - 1.07i$

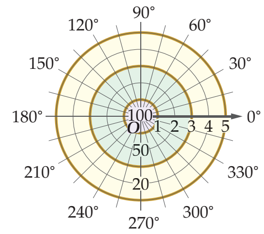
إجابات :

47a)



تطبيقات ومسائل

46) ألعاب: قُسِّمت لوحة السهام إلى 3 مناطق كما هو موضّح في الشكل أدناه، بحيث يحصل اللاعب على 100 نقطة عند إصابته المنطقة القريبة من القطب، وعلى 50 نقطة عند إصابته المنطقة المتوسطة، و 20 نقطة عند إصابته المنطقة البعيدة. (الدرس 1-6)



a) إذا أصاب اللاعب النقطة $(3.5, 165°)$ ، فما عدد النقاط التي يحصل عليها؟ **20**

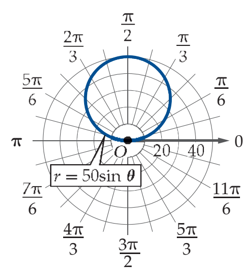
b) حدِّد موقعين، بحيث يحصل اللاعب على 50 نقطة عند إصابة أي منهما؟ **إجابة ممكنة: $(2, 180°)$ أو $(2, 0°)$**

47) حدائق: تستعمل شركة عناية بالحدائق رشاشًا قابلًا للتعديل، ويستطيع الدوران $360°$، ويروي منطقة دائرية طول نصف قطرها 20 ft . (الدرس 1-6)

a) مثِّل المنطقة التي يستطيع الرشاش ريَّها في المستوى القطبي. **انظر الهامش.**

b) أوجد مساحة المنطقة التي يستطيع الرشاش ريَّها، إذا ضُبط ليدور في الفترة $-30° \le \theta \le 210°$. **$838\ ft^2$ تقريبًا**

48) عجلة دوّارة: يمكن تمثيل مسار العجلة الدوّارة في الشكل أدناه بالمعادلة $r = 50 \sin \theta$ ، حيث r بالقدم. (الدرس 2-6)



a) عيِّن الإحداثيين القطبيين لموقع راكب إذا علمت أنه يقع عند $\theta = \frac{\pi}{12}$. (قرب إلى أقرب جزء من عشرة إذا لزم الأمر). **$\left(12.9, \frac{\pi}{12}\right)$**

b) عيِّن الإحداثيين الديكارتيين لموقع الراكب مقربًا إلى أقرب جزء من عشرة إذا لزم الأمر. **$(12.5, 3.3)$**

c) إذا وقع القطب على سطح الأرض، فما ارتفاع ذلك الراكب مقربًا إلى أقرب قدم؟ **3 ft**

49) كهرباء: تُصمَّم معظم الدوائر الكهربائية لتتحمل فرق جهدٍ قدره 220V.

للفرعين a, b استعمل المعادلة $V = I \cdot Z$ ، حيث فرق الجهد V بالفولت، والمعاوقة Z بالأوم، وشدة التيار I بالأمبير (قرب إلى أقرب جزء من عشرة). (الدرس 3-6)

a) إذا كانت شدة التيار المار بالدائرة $(2 + 5j)$ أمبير، فأوجد المعاوقة. **$(15.2 - 37.9j)\ \Omega$**

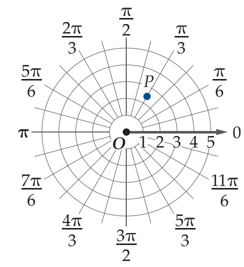
b) إذا كانت معاوقة الدائرة $(1 - 3j)\Omega$ ، فأوجد شدة التيار. **$(21.9 + 66.0j)$ أمبير**

50) تحويل جوكوسكي (Jowkoski): يُعيِّن تحويل جوكوسكي لكل عدد مركب $z = r\,(\cos\theta + i \sin\theta)$ عددًا مركبًا w يُعطى بالصيغة $w = z + \frac{1}{z}$. أوجد صورة العدد المركب $z = (\cos\frac{\pi}{3} + i \sin\frac{\pi}{3})$ وفق هذا التحويل. (الدرس 3-6) **1**

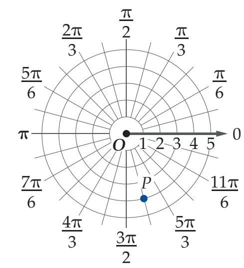
الفصل 6 اختبار الفصل

أوجد ثلاثة أزواج مختلفة يمثّل كل منها إحداثيات قطبية للنقطة P في كل من التمثيلين 2 ,1، حيث $-2\pi \leq \theta \leq 2\pi$. (1, 2 انظر الهامش.

(1



(2



مَثّل بيانيًا في المستوى القطبي كلًّا من المعادلات الآتية: (6-3 انظر ملحق الإجابات.

(3 $\theta = 30°$ (4 $r = 1$

(5 $r = 2.5$ (6 $\theta = \frac{5\pi}{3}$

(7 **رادار:** يقوم مراقب الحركة الجوية بتتبع مسار طائرة موقعها الحالي عند النقطة $(66, 115°)$ ، حيث r بالأميال.

(7b إجابة ممكنة: $(90, 303.7°)$

a) عيِّن الإحداثيين الديكارتيين للطائرة. مقرِّبًا الناتج إلى أقرب ميل. $(-28, 60)$

b) إذا وُجدت طائرة عند نقطة إحداثياتها الديكارتية $(50, -75)$، فعيِّن الإحداثيين القطبيين لها مقرِّبًا المسافة إلى أقرب ميل، والزاوية إلى أقرب جزء من عشرة إذا لزم الأمر.

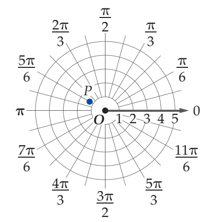
c) ما المسافة بين الطائرتين؟ قرِّب الناتج إلى أقرب ميل. 156 mi

(8 عبِّر عن المعادلة $(x-7)^2 + y^2 = 49$ ، بالصورة القطبية. انظر الهامش.

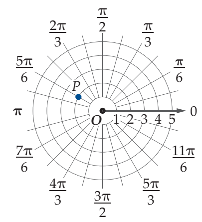
(9 **كهرباء:** إذا كان فرق الجهد V في دائرة كهربائية 135V، وكانت شدة التيار المار بها I هو $(3-4j)$ أمبير، فأوجد معاوقة الدائرة z بالإحداثيات الديكارتية مستعملًا المعادلة $V = I \cdot Z$. $(16.2 + 21.6j)\Omega$

(10 **اختيار من متعدد:** أي مما يأتي يبين تمثيل العدد المركب الذي إحداثياته الديكارتية $(-\sqrt{3}, -1)$ في المستوى القطبي؟ D

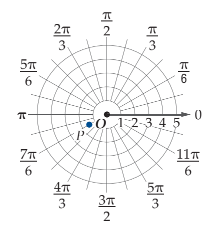
A



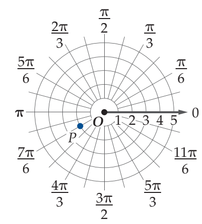
C



B



D



أوجد كل قوة مما يأتي على الصورة الديكارتية، وقرِّب إلى أقرب عدد صحيح إذا لزم الأمر:

(11 $(-1+4i)^3$ $47 - 52i$

(12 $(6+i)^4$ $1081 + 840i$

المعالجة

بناءً على نتائج اختبار الفصل، استعمل مخطط المعالجة في مراجعة المفاهيم التي لا تزال تشكِّل تحديًا للطلاب.

اختبار الفصل: نماذج متعددة ص (42–34).

إجابات:

(1 $\left(2.5, \frac{\pi}{3}\right), \left(2.5, -\frac{5\pi}{3}\right), \left(-2.5, \frac{4\pi}{3}\right)$

(2 $\left(4, \frac{19\pi}{12}\right), \left(4, -\frac{5\pi}{12}\right), \left(-4, \frac{7\pi}{12}\right)$

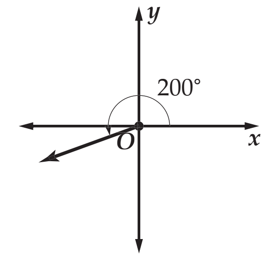
(8 $r = 14\cos\theta$

مخطط المعالجة

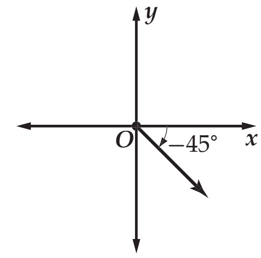
المستوى 1 ضمن المتوسط		المستوى 2 دون المتوسط	
إذا	أخطأ بعض الطلاب في 25% أو أقل تقريبًا من الأسئلة	إذا	أخطأ بعض الطلاب في 50% تقريبًا من الأسئلة
فاختر	أحد المصادر الآتية:	فاختر	المصدر الآتي:
كتاب الطالب	الدروس 3-6، 2-6، 1-6	زيارة الموقع	www.obeikaneducation.com
دليل المعلم	مشروع الفصل، ص (52)		
زيارة الموقع	www.obeikaneducation.com		

التهيئة للفصل 6 ص (51)

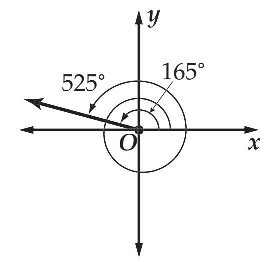
1)

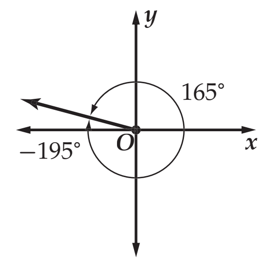


2)

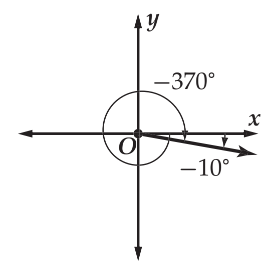


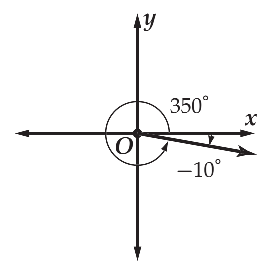
3) 525°, −195°



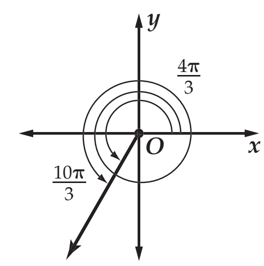


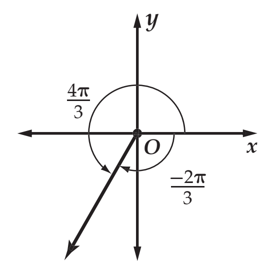
4) 350°, −370°



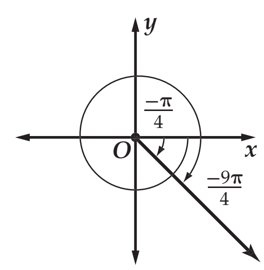


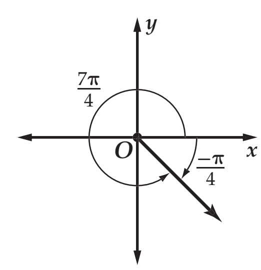
5) $\frac{10\pi}{3}, -\frac{2\pi}{3}$





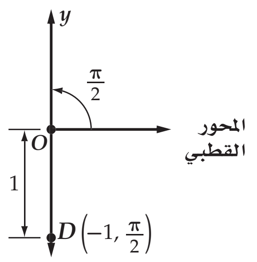
6) $\frac{7\pi}{4}, -\frac{9\pi}{4}$



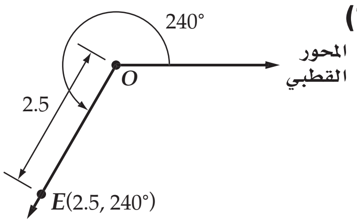


الدرس 6-1 (تحقق من فهمك) ص (53, 55)

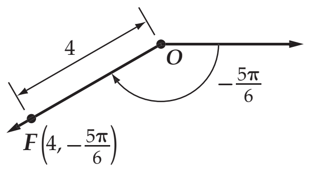
1A)



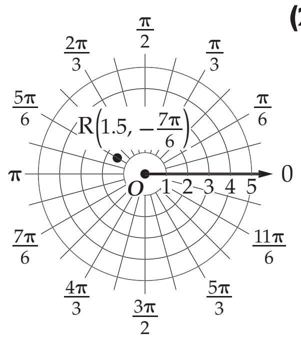
1B)



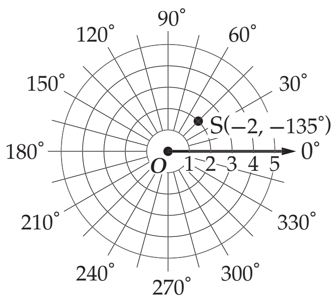
1C)



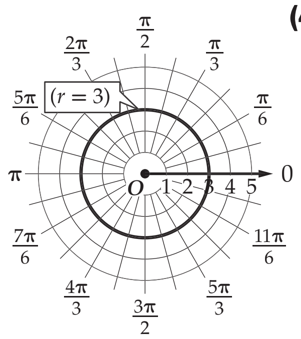
2A)



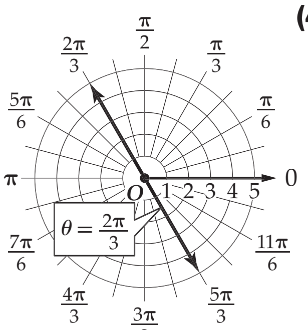
2B)



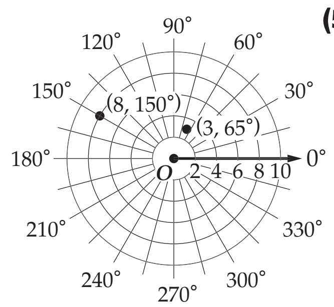
4A)



4B)

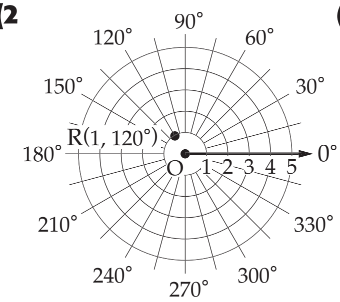


5A)

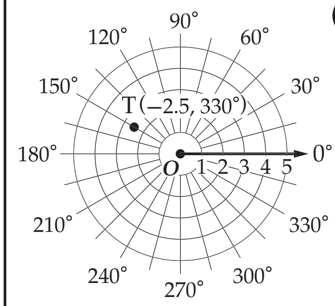


الدرس 6-1 ، ص (56-58)

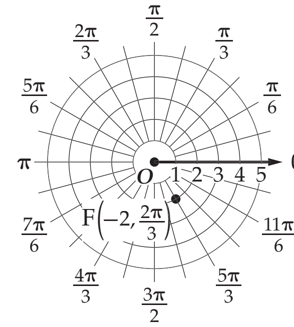
1)



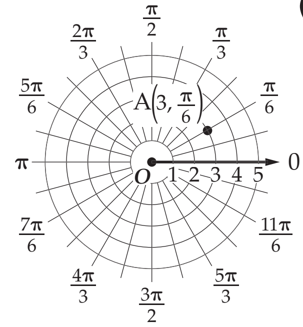
2)



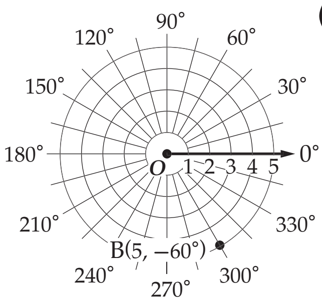
3)



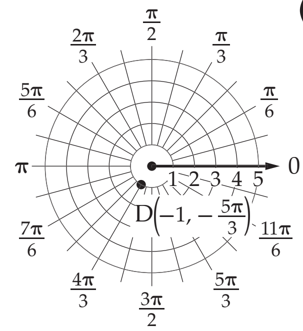
4)



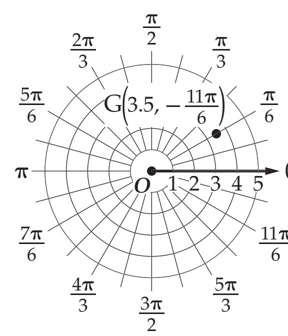
5)



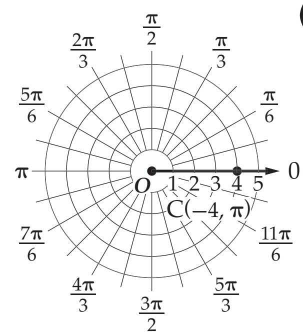
6)



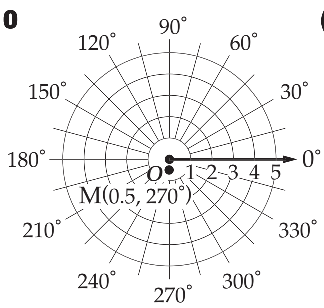
7)



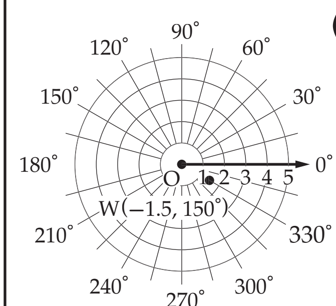
8)



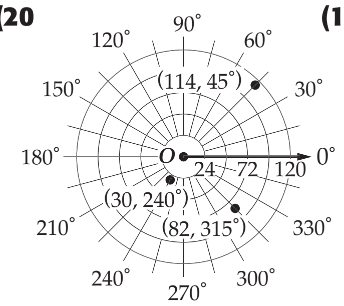
9)



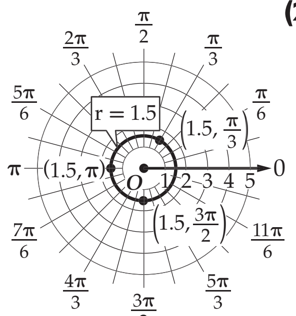
10)



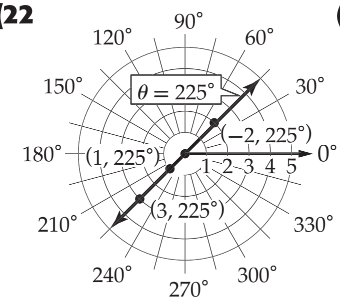
11a)



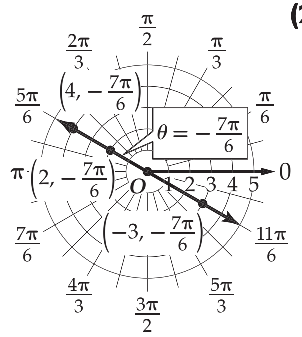
20)



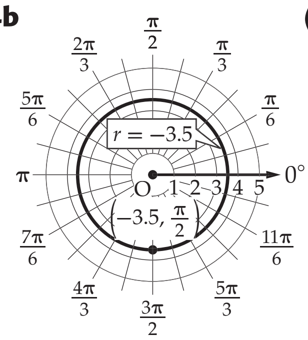
21)



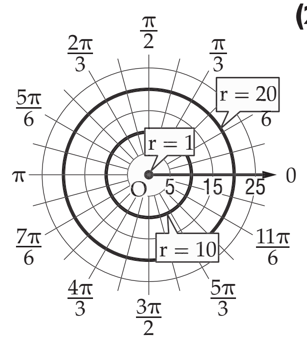
22)



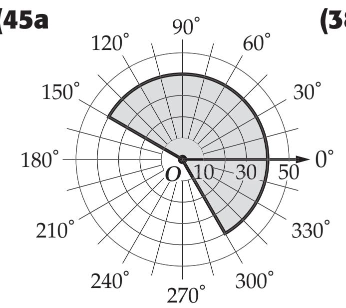
23)



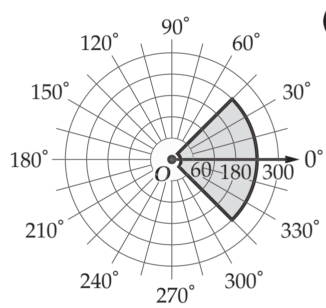
24b)



38a)

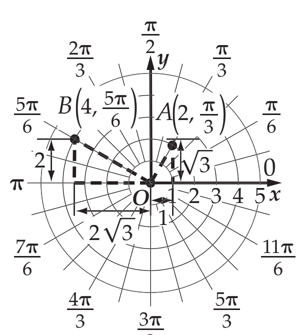


45a)



51a–c) $x = r\cos\frac{\pi}{3} = 2 \times \frac{1}{2} = 1$

$y = r\sin\frac{\pi}{3} = 2 \times \frac{\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3}$

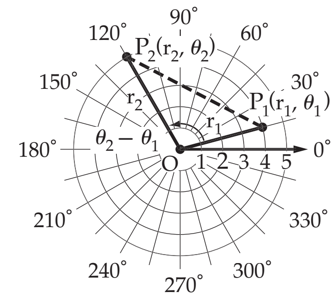


51d) يمثّل طولا الضلعين الأفقي والرأسي القيمة المطلقة للإحداثيين x, y على الترتيب.

51e) إذا كانت إحداثيات النقطة القطبية (r, θ)، فإن إحداثياتها الديكارتية هي $(r\cos\theta, r\sin\theta)$.

54) إجابة ممكنة: تحتوي صيغة المسافة على عمليتَي ضرب وجمع قيم r، وكلتا العمليتين إبدالية، والدالة $\cos\theta$ دالة زوجية. لذا $\cos(-\theta) = \cos\theta$، ومنه $\cos(\theta_1 - \theta_2) = \cos(\theta_2 - \theta_1)$.

56)



في المثلث الذي رؤوسه P_1, P_2 والقطب، ضلعان معلومان وزاوية محصورة بينهما؛ لذا وباستعمال قانون جيب التمام فإن:

$(P_1P_2)^2 = {r_1}^2 + {r_2}^2 - 2r_1r_2\cos(\theta_2 - \theta_1)$ أو

$P_1P_2 = \sqrt{{r_1}^2 + {r_2}^2 - 2r_1r_2\cos(\theta_2 - \theta_1)}$.

57) عندما $(\theta_2 - \theta_1) = \frac{\pi}{2}$، فإن $\cos\frac{\pi}{2} = 0$، وعليه فإن تبسيط قانون المسافة القطبية يعطي $\sqrt{{r_1}^2 + {r_2}^2}$، وهذه النتيجة تكافئ نظرية فيثاغورس، حيث تمثّل القطعة المستقيمة الواصلة بين النقطتين وتر المثلث القائم الذي رؤوسه هاتان النقطتان ونقطة الأصل.

58) سعيد؛ إجابة ممكنة: عيّن علي نقطة على المحور القطبي ورسم منها قطعة مستقيمة رأسية طولها 5 وحدات، بينما كان عليه تعيين نقطة تبعُد 5 وحداتٍ عن القطب على ضلع الانتهاء للزاوية.

59) في الإحداثيات القطبية، لا يؤخذ ارتفاع الطائرة في الحسبان لتحديد موقعها بشكل دقيق.

الدرس 2-6 ، ص (65−66)

24) $r = -2\sec\theta$

25) $r = -10\cos\theta$

26) $r = -3\csc\theta$

27) $r = 5\sec\theta$

28) $r = 4\cos\theta$

29) $r = -6\sin\theta$

30) $\theta = \frac{\pi}{3}$

31) $r = -2\sin\theta$

32) $x^2 + y^2 - 3y = 0$

33) $y = -\sqrt{3}x$

34) $x^2 + y^2 = 100$

35) $x^2 - 4x + y^2 = 0$

36) $y = 4x$

37) $y = 8$

38) $x^2 + y^2 = 16$

39) $x = -7y$ أو $-\frac{1}{7}x = y$

40) $y = -x$

41) $x = 1$

43) $x + y = 1$ أو $y = 1 - x$

44) $\frac{\sqrt{2}}{2}y - \frac{\sqrt{2}}{2}x = 10$ أو $y = x + 10\sqrt{2}$

45) $x = -3$

46) $\frac{\sqrt{3}}{2}x - \frac{1}{2}y = -2$ أو $y = \sqrt{3}x + 4$

47) $-\frac{1}{2}x - \frac{\sqrt{3}}{2}y = 4$ أو $y = -\frac{\sqrt{3}}{3}x - \frac{8\sqrt{3}}{3}$

48) $x - y = 5$ أو $y = x - 5$

49) $x^2 + y^2 - \sqrt{3}x - y = 0$ أو $\left(x - \frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{1}{2}\right)^2 = 1$

50) $x^2 + y^2 + 4y = 0$ أو $x^2 + (y + 2)^2 = 4$

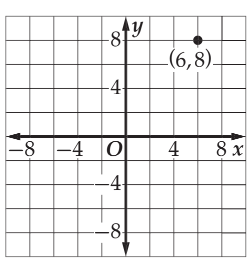
51) $r = \frac{4}{6\cos\theta - 3\sin\theta}$

52) $r = \frac{12}{2\cos\theta + 5\sin\theta}$

53) $r = 12\cos\theta + 16\sin\theta$

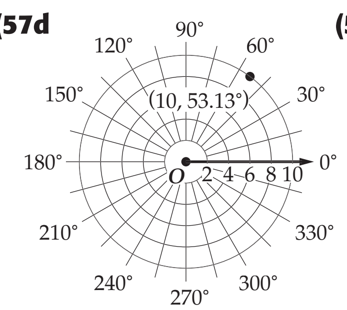
54) $r = -6\cos\theta + 4\sin$

57a)

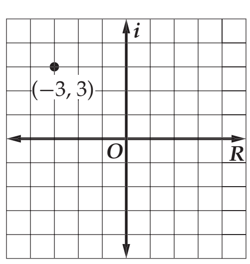


57b) $(10, 0.93)$ أو $(10, 53.13°)$

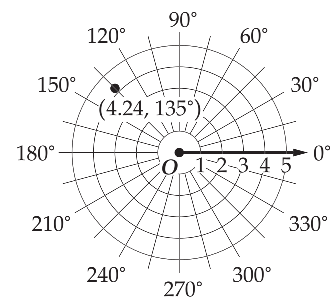
57c)



57d)



57e) $(4.24, 135°)$ أو $\left(4.24, \frac{3\pi}{4}\right)$



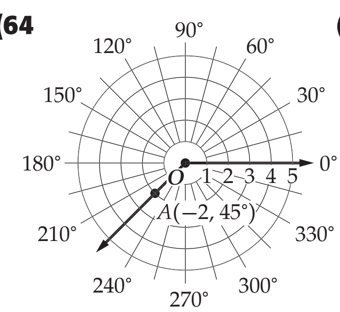
57f) $r = \sqrt{a^2 + b^2}$,
$\theta = \text{Tan}^{-1}\frac{b}{a}$, عندما a موجبة،
$\theta = \text{Tan}^{-1}\frac{b}{a} + \pi$ عندما a سالبة.

58) توفيق؛ إجابة ممكنة: استعمل توفيق التعويض الصحيح. وتمثيل معادلته يطابق المعادلة القطبية الأصلية، في حين تمثِّل إجابة باسل دالة الجيب، ولا تمثِّل الدائرة التي هي التمثيل البياني للمعادلة القطبية الأصلية.

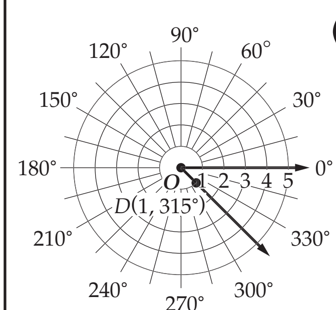
60) إجابة ممكنة: تمثيل معادلات لا تمثِّل دوال، كمعادلات الدوائر أسهل باستعمال الصورة القطبية من استعمال الصورة الديكارتية، في حين أن تمثيل معادلات تمثل دوال كالدوال الخطية أسهل باستعمال الصورة الديكارتية.

61)
$$x = r\cos\theta \qquad y = r\sin\theta$$
$$\frac{x}{\cos\theta} = r \qquad \frac{y}{\sin\theta} = r$$
$$x \cdot \frac{1}{\cos\theta} = r \qquad y \cdot \frac{1}{\sin\theta} = r$$
$$x\sec\theta = r \qquad y\csc\theta = r$$

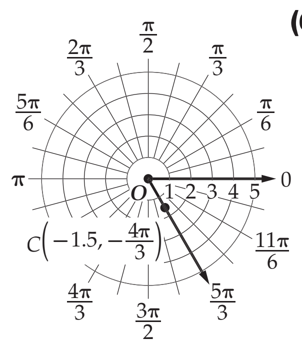
63)



64)

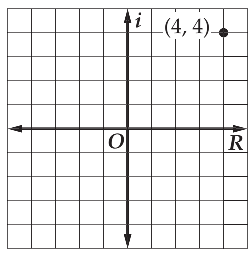


65)

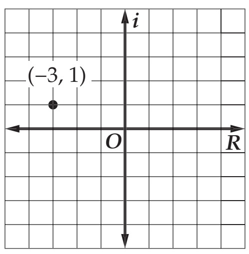


الدرس 3-6، ص (76–78)

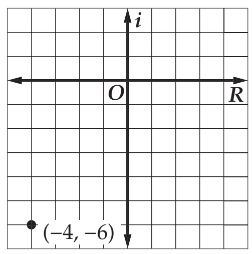
1)



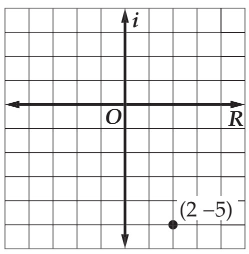
2)



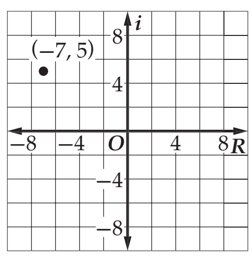
3)



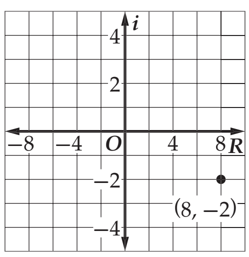
4)



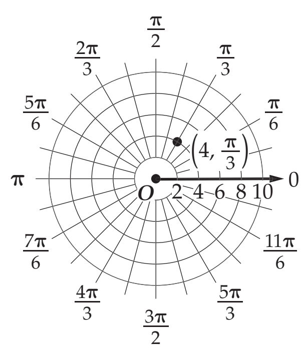
5)



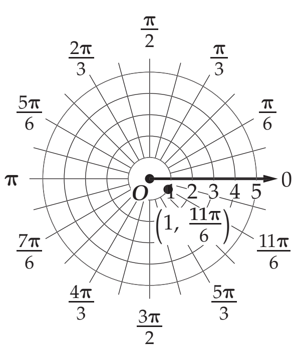
6)



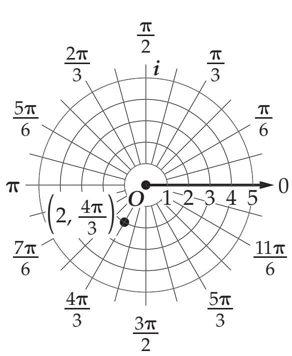
14) $2 + 2\sqrt{3}\,i$



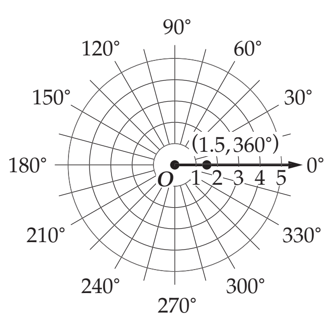
15) $\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i$



16) $-1 - \sqrt{3}i$



17) $\frac{3}{2}$



18) $24\left(\cos\frac{3\pi}{4} + i\sin\frac{3\pi}{4}\right), -12\sqrt{2} + 12\sqrt{2}i$

19) $10(\cos 180° + i\sin 180°), -10$

20) $6\left[\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right], 3\sqrt{2} - 3\sqrt{2}i$

21) $4(\cos 360° + i\sin 360°), 4$

22) $\frac{3}{4}\left[\cos\left(-\frac{\pi}{2}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right)\right], -\frac{3}{4}i$

23) $2\left(\cos\frac{3\pi}{4} + i\sin\frac{3\pi}{4}\right), -\sqrt{2} + \sqrt{2}i$

24) $3(\cos 210° + i\sin 210°), -\frac{3\sqrt{3}}{2} - \frac{3}{2}i$

25) $3\left(\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}\right), 3i$

26) $10(\cos 315° + i\sin 315°), 5\sqrt{2} - 5\sqrt{2}i$

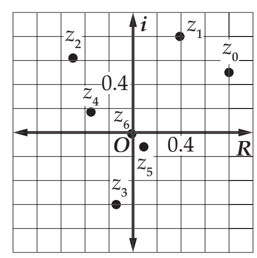
27) $\frac{1}{6}\left(\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6}\right), \frac{\sqrt{3}}{12} + \frac{1}{12}i$

33) $\approx 0.97 + 0.26\boldsymbol{i}, \approx 0.26 + 0.97\boldsymbol{i}, \approx -0.71 + 0.71\boldsymbol{i},$
$\approx -0.97 - 0.26\boldsymbol{i}, \approx -0.26 - 0.97\boldsymbol{i}, \approx 0.71 - 0.71\boldsymbol{i}$

34) $\approx 0.22 + 1.67\boldsymbol{i}, \approx -1.67 + 0.22\boldsymbol{i},$
$\approx -.22 - 1.67\boldsymbol{i}, \approx 1.67 - 0.22\boldsymbol{i}$

37a) $z_1 \approx 0.39 + 0.8i,\ z_2 \approx -0.49 + 0.62i,$
$z_3 \approx -0.14 - 0.61i,\ z_4 \approx -0.35 + 0.17i,$
$z_5 \approx 0.09 - 0.12i,\ z_6 \approx -0.0063 - 0.0216i$

37b)



37c) إجابة ممكنة: عند تطبيق $f(z) = z^2$ في كل مرة، فإن العدد المركب الناتج يقترب من نقطة الأصل وتقترب قيمته المطلقة من الصفر.

43) $3\left(\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6}\right), 3\left(\cos\frac{5\pi}{6} + i\sin\frac{5\pi}{6}\right),$
$3\left(\cos\frac{3\pi}{2} + i\sin\frac{3\pi}{2}\right), 27i$

44) $2\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right), 2\left(\cos\frac{3\pi}{4} + i\sin\frac{3\pi}{4}\right),$
$2\left(\cos\frac{5\pi}{4} + i\sin\frac{5\pi}{4}\right), 2\left(\cos\frac{7\pi}{4} + i\sin\frac{7\pi}{4}\right), -16$

45)

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1(\cos\theta_1 + i\sin\theta_1)}{r_2(\cos\theta_2 + i\sin\theta_2)}$$

$$= \frac{r_1}{r_2}\left(\frac{\cos\theta_1 + i\sin\theta_1}{\cos\theta_2 + i\sin\theta_2}\right)$$

$$= \frac{r_1}{r_2}\left(\frac{\cos\theta_1 + i\sin\theta_1}{\cos\theta_2 + i\sin\theta_2}\right)\cdot\left(\frac{\cos\theta_2 - i\sin\theta_2}{\cos\theta_2 - i\sin\theta_2}\right)$$

$$= \frac{r_1}{r_2}$$

$$\left(\frac{\cos\theta_1\cos\theta_2 - i\sin\theta_2\cos\theta_1 + i\sin\theta_1\cos\theta_2 - i^2\sin\theta_1\sin\theta_2}{\cos^2\theta_2 - i\sin\theta_2\cos\theta_2 + i\sin\theta_2\cos\theta_2 - i^2\sin^2\theta_2}\right)$$

$$= \frac{r_1}{r_2}$$

$$\left(\frac{\cos\theta_1\cos\theta_2 - i\sin\theta_2\cos\theta_1 + i\sin\theta_1\cos\theta_2 - i^2\sin\theta_1\sin\theta_2}{\cos^2\theta_2 + \sin^2\theta_2}\right)$$

$$= \frac{r_1}{r_2}(\cos\theta_1\cos\theta_2 - i\sin\theta_2\cos\theta_1 + i\sin\theta_1\cos\theta_2 + \sin\theta_1\sin\theta_2)$$

$$= \frac{r_1}{r_2}[(\cos\theta_1\cos\theta_2 + \sin\theta_1\sin\theta_2) + \boldsymbol{i}(\sin\theta_1\cos\theta_2 - \sin\theta_2\cos\theta_1)]$$

$$= \frac{r_1}{r_2}[\cos(\theta_1 - \theta_2) + i\sin(\theta_1 - \theta_2)]$$

47) 1) اكتب الصيغة العامة للجذور النونية للعدد المركب وهي:

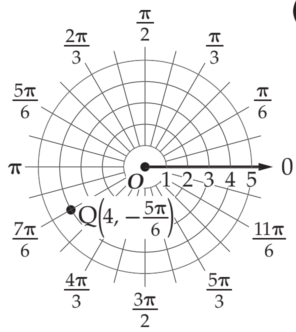
$$r^{\frac{1}{n}}\left(\cos\frac{\theta + 2k\pi}{n} + i\sin\frac{\theta + 2k\pi}{n}\right)$$

حيث $k = 0, 1, 2, \ldots, n - 1$.

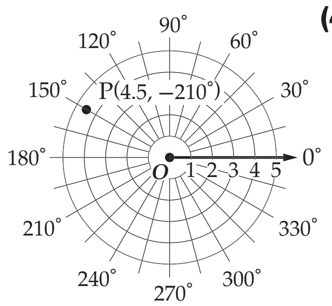
2) عوِّض عن n بالقيمة المطلوبة، إذا أردت إيجاد الجذور الرباعية $(n = 4)$ وإذا أردت إيجاد الجذور الخماسية$(n = 5)$ ، وهكذا.

3) افترض أن $k = 0$ ، وعوِّض في الصيغة العامة؛ لإيجاد الجذر الأول، ثم افترض أن $k = 1$ ، وعوِّض لإيجاد الجذر الثاني، وهكذا حتى تصل إلى $n - 1$ ، فتحصل على جميع الجذور المطلوبة.

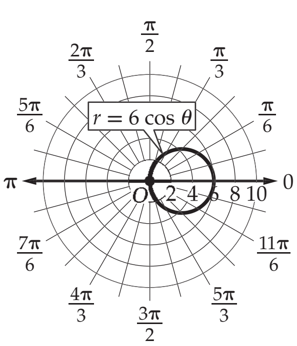
48)



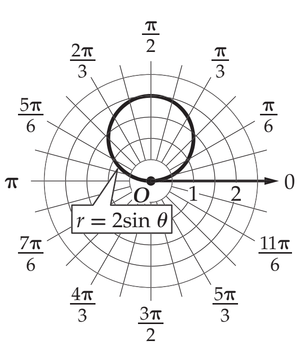
49)



50) دائرة، $r = 6\cos\theta$

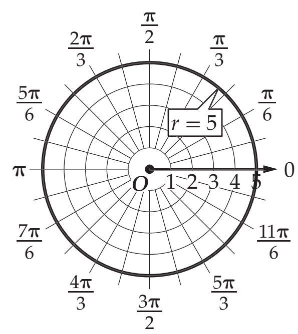


51) دائرة، $r = 2\sin\theta$

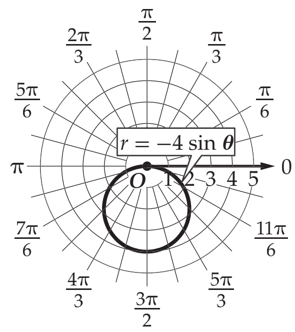


دليل الدراسة والمراجعة ، ص (80–81)

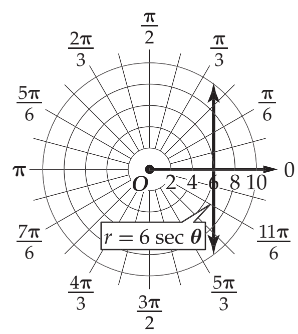
24) $x^2 + y^2 = 25$، دائرة



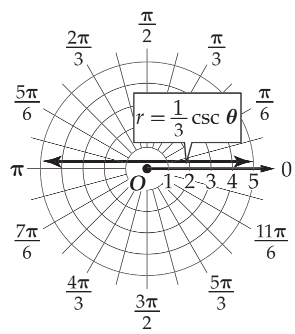
25) $x^2 + (y+2)^2 = 4$، دائرة



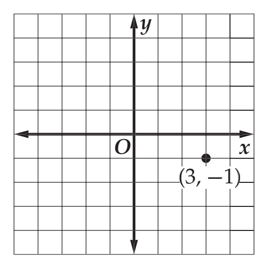
26) $x = 6$، مستقيم



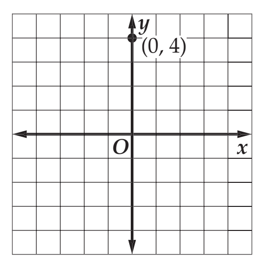
27) $y = \frac{1}{3}$، مستقيم



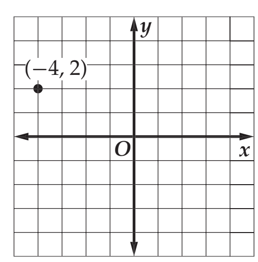
28) $\sqrt{10}$



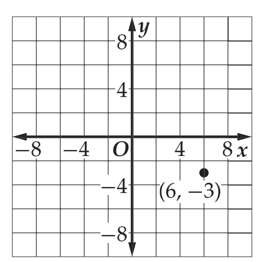
29) 4



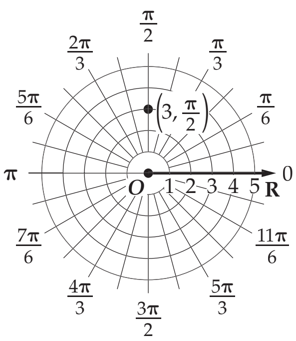
30) $2\sqrt{5}$



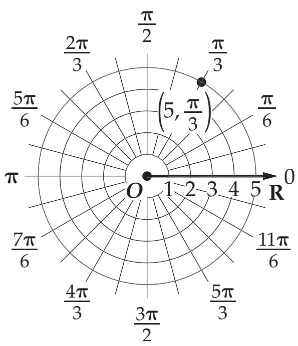
31) $3\sqrt{5}$



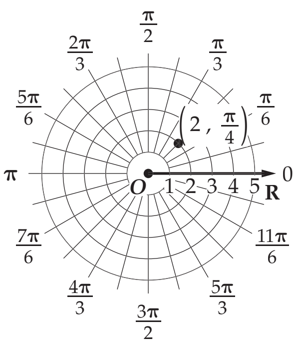
36) $3i$



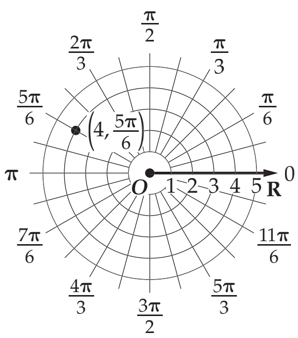
37) $2.5 + 2.5\sqrt{3}i$



38) $\sqrt{2} + \sqrt{2}i$

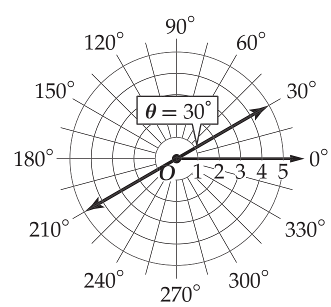


39) $-2\sqrt{3} + 2i$

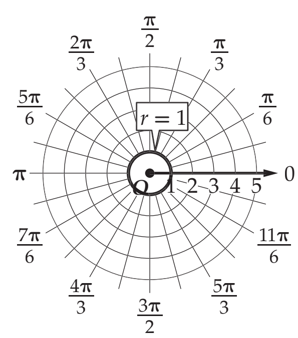


اختبار الفصل ، ص (83)

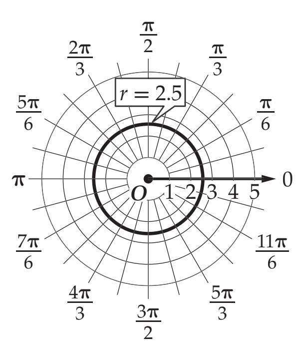
3)



4)



5)



6)