الفصل 7 ملاحظات

مشروع الفصل

إحصاءات تربوية

يستعمل الطلاب ما تعملوه حول الاحتمال والإحصاء؛ ليصمّموا دراسات مسحية عن مدرستهم، ويحلّلوا نتائجها.

- وزّع الطلاب مجموعات ثلاثية أو رباعية، بحيث تقوم كل مجموعة بتصميم سؤال لدراسة مسحية تتناول سمات يتصف بها طلاب المدرسة. ومن الموضوعات التي يمكن للدراسات المسحية تناولها (المواد المفضلة، والمواد الصعبة، والرياضة المفضلة والأنشطة خارج المدرسة، والخطط بعد التخرج من المدرسة الثانوية، ...إلخ). تأكّد من أن كل سؤال من الأسئلة غير متحيّز.
- جمِّع الأسئلة في استبانة واحدة، حيث يمكن للطلاب تطبيقها على عينة من طلاب المدرسة. اطلب إلى الطلاب التأكد من العشوائية في اختيار العينة.
- اطلب إلى كل مجموعة أن تُمثّل البيانات لنتائج الإجابات عن السؤال الذي وضعوه في الأعمدة.
- وأخيرًا، اطلب إلى كل مجموعة أن تطرح سؤالًا يتضمّن تطبيق احتمال باستعمال التوزيع ذي الحدين ، وأن تجيب عنه. فمثلًا يمكن طرح السؤال الآتي: ما احتمال أن أكثر من 3 طلاب يُفضّلون مادة الرياضيات من بين الطلاب الذين يتم اختيارهم عشوائيًّا؟

المفردات: قدّم مفردات الفصل مستعملًا الخطوات الآتية :

التعريف: التوزيع الطبيعي هو توزيع احتمالي متصل، منحناه يشبه شكل الجرس، ومتماثل حول المستقيم الرأسي المار بالمتوسط، ويتساوَى فيه المتوسط والوسيط والمنوال، يحدث التوزيع الطبيعي عادة عندما توجد أعداد كبيرة من قيم البيانات، ويكون 68% تقريبًا من البيانات ضمن انحراف معياري واحد من المتوسط، 95% من البيانات ضمن انحرافين معياريين تقريبًا من المتوسط، 99% من القيم ضمن ثلاثة انحرافات معيارية من المتوسط تقريبًا.

الفصل 7 الاحتمال والإحصاء
Probability and Statistics

فيما سبق:

درست إحصائيات العينة ومعالم المجتمع واحتمالات الحوادث المركبة.

والآن:

- أميّز المسوحات، والدراسات والتجارب.
- أكوّن التوزيعات الاحتمالية، وتمثيلاتها البيانية، وأستعملها في إيجاد الاحتمال.
- أستعمل القانون التجريبي لإيجاد الاحتمالات.
- أميّز بين العينة الإحصائية، والمجتمع الإحصائي.

لماذا ؟

التربية: يستعمل الاحتمال والإحصاء في دراسة الفرضيات التربوية واختبارها. حيث تُستعمل المسوحات، وتجرى التجارب؛ لتحديد الطرائق التعليمية التي تؤدي إلى تعلم أفضل. ويستعمل الإحصاء في تحديد الدرجات عند تمثيل درجات الفصول بيانيًا، أو عندما يريد المعلمون تقييم درجات الطلاب.

قراءة سابقة: كوّن قائمة بالأشياء التي تعرفها عن الاحتمال والإحصاء، ثم تنبأ بما ستتعلمه في هذا الفصل.

مثال : يوضّح هذا الشكل توزيعًا طبيعيًّا تقريبًا.

سؤال: اكتب مثالًا من واقع الحياة، يُتوقع أن يكون توزيع البيانات فيه قريبًا من التوزيع الطبيعي.

إجابة ممكنة: أطوال طلاب الصف الثالث الثانوي في مدينة الرياض.

قراءة سابقة

شجِّع الطلاب على الإعداد المسبق لكل درس بطريقة جيدة تتم من خلال قراءته قراءة سريعة مرة، وأخرى متأنية، وأعطهم الوقت الكافي؛ لمناقشة ما يحويه الدرس من أفكار ومفردات أساسية، واطلب إليهم كتابة استفساراتهم التي لم يتوصلوا إلى الإجابة عنها، وما صعب عليهم فهمه؛ لمناقشتها في أثناء تقديم الدرس.

تنويع التعليم

نموذج بناء المفردات، ص (47) .

يكمل الطلاب هذا النموذج بكتابة تعريف كل مفردة جديدة تظهر لهم في أثناء دراسة الفصل أو مثال عليها، ويستفيدون من ذلك في أثناء المراجعة والاستعداد لاختبار الفصل.

التهيئة للفصل 7

تشخيص الاستعداد: هناك بديلان للتأكد من المتطلبات السابقة.

البديل 1

أجب عن أسئلة الاختبار السريع الآتي:

اختبار سريع

حدِّد ما إذا كانت الحوادث الآتية مستقلة، أو غير مستقلة.

1) اختيار قصة وكتاب آخر لا يمثِّل قصة من مكتبة. مستقلة

2) اختيار رئيس، ونائب رئيس، وسكرتير، ومحاسب في نادٍ، على افتراض أنّ الشخص الواحد لا يشغل سوى منصب واحد. غير مستقلة

3) اختيار طالب ومعلم ومشرف اجتماعي للمشاركة في تنظيم الرحلات المدرسية. مستقلة

حدّد ما إذا كانت كل حالة من الحالات الآتية تتطلب تطبيق التباديل أو التوافيق في حلّها:

4) اصطفاف سبعة أشخاص في صف واحد عند المحاسب في أحد المتاجر. تباديل

5) ترتيب أحرف كلمة «مدرسة». تباديل

6) اختيار نكهتين مختلفتين لفطيرة من بين 6 نكهات. توافيق

اكتب مفكوك كل من العبارات الآتية: 7-10) انظر الهامش.

7) $(a-2)^4$

8) $(2a+b)^6$

9) $(3x-2y)^5$

10) $\left(\frac{a}{2}+2\right)^5$

البديل 2

أسئلة تهيئة إضافية على الموقع www.obeikaneducation.com

مراجعة المفردات

التباديل (Permutations):
هي تنظيم لمجموعة من العناصر، حيث يكون الترتيب فيها مهمًّا.

التوافيق (Combinations):
هي تنظيم لمجموعة من العناصر، حيث يكون الترتيب فيها غير مهم.

الحادثتان المستقلتان (Independent Events):
تكون A و B حادثتين مستقلتين، إذا كان احتمال حدوث A لا يؤثر في احتمال حدوث B.

الحادثتان غير المستقلتين (Dependent Events):
تكون A و B حادثتين غير مستقلتين، إذا كان احتمال حدوث A يغيّر بطريقة ما احتمال حدوث B.

الحادثتان المتنافيتان (Mutually Exclusive Events):
تكون A و B حادثتين متنافيتين، إذا لم يكن وقوعهما ممكنًا في الوقت نفسه.

نظرية ذات الحدين (Binomial Theorem):
إذا كان n عددًا طبيعيًّا، فإن :

$$(a+b)^n$$
$$= {}_nC_0 a^n b^0 + {}_nC_1 a^{n-1} b^1 + {}_nC_2 a^{n-2} b^2 + \ldots + {}_nC_n a^0 b^n$$
$$= \sum_{k=0}^{n} \frac{n!}{k!(n-k)!} a^{n-k} b^k$$

فضاء العينة (Sample Space):
هو مجموعة النواتج الممكنة لتجربةٍ ما.

الاحتمال (Probability):
هو النسبة التي تقيس فرصة وقوع حادثةٍ معينةٍ.

المعالجة

استعمل نتائج الاختبار السريع ومخطط المعالجة أدناه؛ لمساعدتك على تحديد مستوى المعالجة المناسب. كما تساعد العبارة "إذا ... فقم"، في المخطط على تحديد المستوى المناسب للمعالجة، واقتراح مصادر لكل مستوى.

مخطط المعالجة

المستوى 1	ضمن المتوسط
إذا	أخطأ بعض الطلاب فيما لا يزيد على 25% تقريبًا من الأسئلة،
فقم	بمراجعة المفاهيم التالية: الحادثة، الاحتمال، الحوادث المستقلة، التباديل، التوافيق، نظرية ذات الحدين.
زيارة الموقع	www.obeikaneducation.com
المستوى 2	**دون المتوسط**
إذا	أخطأ بعض الطلاب في 50% تقريبًا من الأسئلة،
فقم	بتحديد أخطائهم، ووضع أنشطة علاجية لذلك.
زيارة الموقع	www.obeikaneducation.com

تنويع التعليم

دون ضمن

قائمة اطلب إلى الطلاب عمل قائمة بالتعريفات الواردة، وكتابة مثال على كلٍّ منها في أثناء دراستهم الفصل؛ لاستعمالها وسيلة مراجعة لاختبار الفصل.

إجابات:

7) $a^4 - 8a^3 + 24a^2 - 32a + 16$

8) $64a^6 + 192a^5b + 240a^4b^2 + 160a^3b^3 + 60a^2b^4 + 12ab^5 + b^6$

9) $243x^5 - 810x^4y + 1080x^3y^2 - 720x^2y^3 + 240xy^4 - 32y^5$

10) $\frac{a^5}{32} + \frac{5a^4}{8} + 5a^3 + 20a^2 + 40a + 32$

1 التركيز

الترابط الرأسي

ما قبل الدرس 7-1

تصميم دراسة مسحية.

الدرس 7-1

تقويم الدراسات المسحية والدراسات القائمة على الملاحظة والدراسات التجريبية.

التمييز بين الارتباط والسببية.

ما بعد الدرس 7-1

استعمال نتائج الدراسة المسحية على عينة؛ للتوصل إلى استنتاجات عن المجتمع.

2 التدريس

أسئلة التعزيز

اطلب إلى الطلاب قراءة فقرة "لماذا؟".

واسأل:

- هل ستكون نتيجة الدراسة المسحية صادقة، حتى إذا لم تشمل طلاب المدرسة جميعهم؟ إجابة ممكنة: يمكن ذلك، وتعتمد على طريقة اختيار الطلاب الذين تشملهم الدراسة المسحية.
- هل ستكون نتيجة الدراسة المسحية صادقة، إذا تمت مقابلة الأشخاص الذين حضروا مباراة كرة قدم؟ في الأغلب لا؛ لأن الأفراد الذين يحضرون مباريات كرة القدم يفضلونها أكثر من الأشخاص الذين يفضلون كرة السلة.

الدراسات التجريبية والمسحية والقائمة على الملاحظة

Experiments, Surveys, and Observational Studies

فيما سبق:

درست تصميم دراسة مسحية. (مهارة سابقة)

والآن:

- أميّز الدراسات المسحية، والدراسات القائمة على الملاحظة والدراسات التجريبية.
- أميّز بين الارتباط والسببية.

المفردات:

الدراسة المسحية
survey
المجتمع
population
التعداد العام
census
العينة
sample
المتحيزة
biased
غير المتحيزة
unbiased
الدراسة القائمة على الملاحظة
observational study
المجموعة التجريبية
treatment group
المجموعة الضابطة
control group
الارتباط
correlation
السببية
causation

www.obeikaneducation.com

لماذا؟

يرغب الطلاب في تشكيل فريق لكرة السلة في مدرستهم، وكي يجدوا دعمًا لمشروعهم، فقد نفّذوا دراسة مسحية شملت الطلاب وأولياء الأمور؛ لمعرفة الموافقين منهم والمعارضين.

الدراسات التجريبية والمسحية تُستعمل **الدراسات المسحية** في جمع البيانات، وإذا شملت عملية جمع البيانات جميع الطلاب في مدرسة ما، نقول: إن الدراسة شملت **المجتمع**، وفي هذه الحالة تُسمّى هذه العملية **تعدادًا عامًّا**. أمّا إذا تم اختيار عدد محدود من طلاب المدرسة مثل 100طالب، فتكون الدراسة المسحية قد اعتمدت على **العينة**.

وتكون العينة **متحيزة** عندما يتم تفضيل بعض أقسام المجتمع على باقي الأقسام، فمثلًا: إذا شملت الدراسة المسحية الواردة في فقرة "لماذا؟" رأي لاعبي كرة السلة وأولياء أمورهم فقط، تكون العينة متحيزة. وتكون العينة **غير متحيزة** إذا تم اختيارها عشوائيًّا، أي إذا كان لكل شخص في المجتمع الفرصة نفسها لأن يكون ضمن عينة الدراسة، فإذا أُرسلت استبانة في دراسة مسحية لـ 100 طالب تم اختيارهم عشوائيًّا عندها تكون العينة غير متحيزة.

مثال 1 من واقع الحياة — العينات المتحيزة وغير المتحيزة

دراسات مسحية: حدِّد ما إذا كانت كل دراسة مسحية فيما يأتي تتبنى عينة متحيزة، أو غير متحيزة، وفسّر إجابتك:

a) سؤال كل عاشر شخص يخرج من قاعة الندوات عن عدد مرات حضوره ندوات ثقافية؛ لتحديد مدى دعم سكان المدينة للندوات الثقافية.

متحيزة؛ لأن الأشخاص الذين تم سؤالهم قد يختلفون عن سكان المدينة، حيث إنهم ممن يحضرون الندوات الثقافية.

b) استطلاع آراء أفراد في سوق الماشية؛ لمعرفة ما إذا كان سكان المدينة يحبون تربية الماشية أو لا .

متحيزة؛ لأن المجموعة التي تم مسح رأيها لا تُمثّل بالضرورة رأي أهل المدينة؛ لأنهم غالبًا ممن يحبون تربية الماشية.

c) يحتوي صندوق على أسماء طلاب المدرسة جميعهم، سُحب من الصندوق 100 اسم عشوائيًّا، وسُئل أصحابها عن رأيهم في مقصف المدرسة.

غير متحيزة؛ لأن لكل شخص في مجتمع الدراسة الفرصة نفسها لأن يكون ضمن عينة الدراسة الذين استُطلِعت آراؤهم.

تحقق من فهمك

حدِّد ما إذا كانت كل دراسة مسحية فيما يأتي تتبنى عينة متحيزة، أو غير متحيزة، وفسّر إجابتك:

1A) سؤال كل لاعب في فريق كرة السلة عن الرياضة التي يحب مشاهدتها على التلفاز.

1A) متحيزة؛ لأن الرياضة المفضلة للاعبي كرة السلة في الغالب هي كرة السلة.

1B) الذهاب إلى ملعب كرة القدم وسؤال 100 شخص اختيروا عشوائيًّا عن رياضتهم المفضلة.

1B) متحيزة؛ لأن كرة القدم ستكون رياضتهم المفضلة.

لتجنُّب التحيّز في الدراسات المسحية المعتمدة على العينات لا بدّ من تحقّق أمرين هما: أن تكون العينة العشوائية مناسبة، وذلك بأن تكون غير متحيزة وحجمها كبير نسبيًّا، وألا تكون الأسئلة المطروحة متحيزة.

مصادر الدرس 1 – 7

المصدر	دون المتوسط	ضمن المتوسط	فوق المتوسط
دليل المعلم	• تنويع التعليم ص (88)	• تنويع التعليم ص (88, 90)	• تنويع التعليم ص (90)
كتاب التمارين	• ص (12)	• ص (12)	• ص (12)
مصادر المعلم للأنشطة الصفية	• تدريبات إعادة التعليم، ص (6) • تدريبات حل المسألة، ص (8)	• تدريبات حل المسألة، ص (8) • التدريبات الإثرائية، ص (9)	• تدريبات حل المسألة، ص (8) • التدريبات الإثرائية، ص (9)

الدراسات التجريبية والمسحية والقائمة على الملاحظة

المثالان 1, 2 يبينان كيفية المقارنة بين العينتين المتحيزة وغير المتحيزة، وكذلك بين الأسئلة المتحيزة وغير المتحيزة.

المثالان 3, 4 يبينان كيفية المقارنة بين الدراسات المسحية، والتجريبية، والقائمة على الملاحظة.

التقويم التكويني

استعمل تدريبات "تحقق من فهمك" بعد كل مثال؛ للتحقق من مدى فهم الطلاب المفاهيم.

مثالان اضافيان

1 **دراسات مسحية:** حدِّد ما إذا كانت كل دراسة مسحية فيما يأتي تتبنَّى عينة متحيزة، أو غير متحيزة، وفسِّر إجابتك:

a) استطلاع رأي مشاهِدِي الكرة الطائرة لمعرفة أكثر الألعاب شعبية. متحيزة؛ لأن اللعبة الشعبية الأكثر احتمالًا من وجهة نظرهم ستكون الكرة الطائرة.

b) الاتصال بكل عاشر شخص في قائمة المشاركين في شراء صحيفة محددة، للاستفسار عن نوع الخدمة المقدّمة. غير متحيزة؛ لا يوجد ما يوحي بأنها متحيزة.

c) الاتصال من خلال الإنترنت؛ لمعرفة نسبة الأشخاص الذين يلجؤون إلى وكلاء السفر. متحيزة؛ لأن الأشخاص الذين تشملهم الدراسة المسحية أقل إمكانية لأن يلجؤوا إلى وكلاء السفر.

2 **رياضة:** أي الأسئلة الآتية، يُحدّد الرياضة المفضلة بالنسبة للطلاب دون تحيز؟

a) هل تُعدّ لعبة كرة القدم ممتعة؟
هذا سؤال متحيز لصالح كرة القدم.

b) ما أفضل لعبة رياضية تحب مشاهدتها؟
هذا سؤال غير متحيز؛ حيث إنه يعطي الإجابة التي يبحث عنها دون تحيّز.

c) هل تحب مشاهدة مباراة التنس؟
هذا سؤال متحيز لصالح لعبة التنس.

إرشادات للدراسة

العينة المتحيزة
تعدّ العينة متحيزة إذا وفقط إذا كانت غير عشوائية.

2A) هذا سؤال متحيز؛ لأنه ذكر مادة محدّدة، ولم يذكر غيرها.

2B) سؤال متحيز ؛ لأنه حدِّد مادتين للاختيار بينهما.

2C) سؤال غير متحيز؛ لأنه يعطي الإجابة التي يبحث عنها من دون تحيز.

إرشادات للدراسة

المعالجة الشكلية
المعالجة الشكلية هي المعالجة التي يخضع لها أفراد المجموعة الضابطة، والتي ليس لها أي تأثير في نتائج الدراسة، والهدف الأساسي منها هو التأكد من عدم معرفة الأفراد لأي المجموعتين التجريبية أو الضابطة ينتمون، لضبط محاولة تأثير بعضهم في نتائج الدراسة، وذلك ببذل المزيد من الجهد مثلًا أو العكس.

مثال 2 من واقع الحياة — تصميم الدراسات المسحية

دراسات مسحية في المدرسة: يريد خالد أن يُحدّد أفضل الأماكن للرحلة المدرسية. ما الأسئلة التي تعطيه الإجابة التي يبحث عنها دون تحيُّز؟

a) هل تحب الذهاب إلى مركز الملك عبدالعزيز التاريخي؟
هذا سؤال متحيز لصالح مكان محدد.

b) هل تحب الذهاب إلى حديقة الحيوان، أم إلى متنزَّه سلام؟
هذا سؤال متحيز؛ لأنه يحدد بديلين بالاسم.

c) أين تفضل أن تذهب في الرحلة؟
هذا سؤال غير متحيز؛ لأنه يعطي الإجابة التي يبحث عنها دون تحيّز.

تحقق من فهمك

أي مما يأتي يُحدّد أفضل مادة بالنسبة إلى الطلاب دون تحيُّز؟

2A) هل تفضل المادة التي خرجت من حصتها الآن؟

2B) أيهما تفضل أكثر: العلوم أو الرياضيات؟

2C) ما مادتك المفضلة؟

في **الدراسة القائمة على الملاحظة**، تتم ملاحظة الأفراد دون أي محاولة للتأثير في النتائج. وفي **الدراسة التجريبية**، يتم إجراء معالجة خاصة على الأشخاص أو الحيوانات أو الأشياء قيد الدراسة، وتجرى ملاحظة استجاباتهم.

دراسة قائمة على الملاحظة
- من 100 شخص، اختر 50 شخصًا خضعوا المعالجة.
- اجمع البيانات، وحلّلها، وفسّرها.

دراسة تجريبية
- من 100 شخص، اختر من بينهم 50 شخصًا عشوائيًّا وأخضعهم للمعالجة المقصودة بالتجريب، بينما لا تخضع الآخرين لأي معالجة أو لمعالجة شكلية.
- اجمع البيانات، وحلّلها، وفسّرها.

في الدراسة التجريبية، يُسمّى الأشخاص أو الحيوانات أو الأشياء التي تخضع للمعالجة **المجموعة التجريبية**. أمّا الأشخاص أو الحيوانات أو الأشياء الذين لا يخضعون للمعالجة أو يخضعون لمعالجة شكلية، فيسمون **المجموعة الضابطة**. وتعطى المعالجة الشكلية لكي لا يعرف أفراد المجموعات لأي المجموعتين ينتمون، وتصبح الدراسة التجريبية عندها غير متحيزة.

مثال 3 من واقع الحياة — الدراسات التجريبية والدراسات القائمة على الملاحظة

حدِّد ما إذا كان كل موقف ممّا يأتي يمثِّل دراسة تجريبية، أو دراسة قائمة على الملاحظة. وفي حالة الدراسة التجريبية اذكر كلًّا من المجموعة الضابطة والمجموعة التجريبية، ثم بيِّن ما إذا كانت الدراسة التجريبية متحيزة أم لا.

a) اختر 200 طالب نصفهم خضع لأنشطة إضافية في مادة معينة، وقارن بين درجاتهم في تلك المادة.
هذه دراسة قائمة على الملاحظة.

b) اختر 200 طالب واقسمهم عشوائيًّا إلى نصفين، وأخضع إحدى المجموعتين إلى برنامج تدريبي معيّن، أمّا الأخرى فلا تخضعها لأي برنامج تدريبي.
هذه دراسة تجريبية؛ لأنه تم تقسيم المجموعتين عشوائيًّا، وإحداهما خضعت للبرنامج التدريبي وهي المجموعة التجريبية، والأخرى لم تخضع لأي برنامج تدريبي وهي المجموعة الضابطة، وهي دراسة متحيزة؛ لأن كل طالب يعرف المجموعة التي ينتمي إليها.

تحقق من فهمك

حدّد ما إذا كان الموقف الآتي يمثِّل دراسة تجريبية، أو دراسة قائمة على الملاحظة، وفي حالة الدراسة التجريبية اذكر كلًّا من المجموعة الضابطة والمجموعة التجريبية، ثم بيِّن ما إذا كانت الدراسة التجريبية متحيزةً أم لا.

3) اختر 80 طالبًا جامعيًّا نصفهم درس الإحصاء في المدرسة الثانوية، وقارن نتائج المجموعتين في مساق للإحصاء تم تدريسه في الجامعة. دراسة قائمة على الملاحظة

المحتوى الرياضي

الدراسة المسحية والتعداد السكاني

بما أن التعداد السكاني يتناول جميع أفراد المجتمع السكاني، فإن نتائجه تكون صحيحة، ولكن الدراسة المسحية التي تعتمد على جزء من المجتمع فقط، تكون نتائجها دائمًا تتضمّن بعضًا من النتائج غير المؤكّدة.

التعليم باستعمال التقنيات

صفحة على الإنترنت اطلب إلى الطلاب تصميم دراسة مسحية، وإرسالها إلى صفحة الإنترنت الخاصة بالمدرسة، ثم اطلب إليهم تفحّص العينة التي أجابت عن الدراسة المسحية متناولين مصادر التحيّز المحتملة في هذه العينة.

كيف تعرف متى تُستعمل الدراسات المسحية أو الدراسات التجريبية أو الدراسات القائمة على الملاحظة؟ تستعمل الدراسات المسحية عند الرغبة في جمع بيانات، أو آراء أفراد المجتمع حول موضوع معين، بينما تُستعمل الدراسات القائمة على الملاحظة عند الرغبة في دراسة أثر معالجة سابقة تعرض لها أفراد من المجتمع دون أي تأثير عليهم من الباحث، وتستعمل الدراسات التجريبية عند الرغبة في اختبار طريقة جديدة، أو في دراسة نتائج معالجة مقصودة يؤثر الباحث بها في مجموعة من الأفراد يتم تعيينهم عشوائيًا.

مثال 4 الدراسات المسحية والتجريبية والقائمة على الملاحظة

حدِّد ما إذا كانت كل من الحالات الآتية تتطلب دراسة مسحية، أو دراسة قائمة على الملاحظة، أو دراسة تجريبية، وفسّر إجابتك:

a) **تريد أن تختبر طريقة معالجة لمرض ما.**

يستدعي ذلك إجراء دراسة تجريبيّة يكون المستهدفون فيها مرضى يشكّلون المجموعة التجريبية، وتخضع هذه المجموعة للعلاج، بينما يخضع أفراد المجموعة الضابطة الآخرون وهم مرضى كذلك لعلاج شكلي.

b) **تريد أن تجمع آراءً حول القواعد المعتمَدة في انتخاب رئيس الصف.**

يستدعي هذا دراسة مسحية للآراء، حيث من الأفضل أن تختار أشخاصًا من الصف بصورة عشوائية؛ لتحصل على عينة غير متحيزة.

c) **تريد أن تعرف ما إذا كان التدخين لمدة 10 سنوات يؤثّر في سعة الرئة أو لا.**

يستدعي هذا إجراء دراسة قائمة على الملاحظة تقارن فيها سعة رئة المدخنين لمدة 10 سنوات، مع سعة الرئة لعدد مساوٍ لهم من غير المدخنين.

تحقق من فهمك دراسة مسحية؛ حيث من الأفضل أن يتم اختيار عينة عشوائية من المدرسة الثانوية، لتحصل على عينة غير متحيزة.

حدّد ما إذا كانت الحالة الآتية تتطلب دراسة مسحية، أو دراسة قائمة على الملاحظة، أو دراسة تجريبية، فسّر إجابتك.

4) تريد استطلاع آراء طلاب مدرسة ثانوية حول وسيلة المواصلات المدرسية باستعمال مقياس متدرج من 1 (لا أوافق مطلقًا) إلى 5 (أوافق بشدة).

التمييز بين الارتباط والسببية إن أي علاقة تظهر بين نتائج التجربة والمعالجة لا تعني بالضرورة أن المعالجة هي السبب في النتيجة.

فعندما يوجد **ارتباط** بين ظاهرتين، فإن كلًّا من الظاهرتين تؤثر في الأخرى فإن معرفتك بقيم الظاهرة الأولى يمكّنك من التنبؤ بقيم الظاهرة الثانية، والعكس صحيح، فمثلًا: هناك ارتباط بين كتل الأشخاص وأطوالهم، فكلما زاد طول الشخص زادت كتلته بشكل عام، فإذا عرفت طول شخص يمكنك التنبؤ بكتلته. وعندما يوجد **سببية**، فإن وقوع ظاهرة معينة يكون سببًا مباشرًا في وقوع الظاهرة الأخرى لذا فإن السببية تتضمن الترتيب الزمني، فوقوع الظاهرة الأولى أولًا يكون سببًا في وقوع الظاهرة الثانية لاحقًا كنتيجة لذلك، فمثلًا: دوران الأرض حول محورها هو السبب الوحيد في تعاقب الليل والنهار. وبينما يكون من السهل ملاحظة الارتباط بين ظاهرتين، فإنه من الصعب البرهنة على وجود سببية بين الظاهرتين.

إرشادات للدراسة

السببية

إذا لم يوجد أي سبب آخر يعطي النتيجة فإنك تفترض السببية.

مثال 5 الارتباط والسببية

بيّن ما إذا كانت العبارات الآتية تُظهر ارتباطًا، أو سببية، ثم فسّر إجابتك:

a) **أظهرت الدراسات أن الطلاب يكونون أقل نشاطًا بعد تناول الغداء .**

العبارة تظهر ارتباطًا فقط، ولا تظهر سببية؛ لأن تناول الغداء ليس سببًا مباشرًا ولا كافيًا وحده لقلة النشاط لدى الطلاب، فهناك عوامل أخرى تشترك معه، مثل نوعية وكمية الغداء.

b) **إذا رَفعتُ أثقالًا، أستطيع الالتحاق بفريق كرة القدم .**

العبارة تظهر ارتباطًا؛ لأن رفع الاثقال وحده ليس سببًا مباشرًا للالتحاق بفريق كرة القدم، فقد تكون هناك متطلبات أخرى تشترك معه، مثل: المهارة واللياقة وغيرها.

c) **عندما ترى الشمس يكون النهار قد طلع.**

العبارة الواردة تظهر سببية؛ لأنه ليس هناك عوامل أخرى مع الشمس يلزم وجودها لتسبب طلوع النهار.

تحقق من فهمك ارتباط؛ حيث إن الدراسة قد تساعد على الحصول على تقدير ممتاز، ولكنها لا تضمن ذلك.

بيّن ما إذا كانت العبارة الآتية تُظهر ارتباطًا، أو سببية، ثم فسّر إجابتك.

5) عندما أدرس أحصل على تقدير ممتاز.

تنويع التعليم

دون ضمن

المتعلمون اللغويون اطلب إلى الطلاب العمل في مجموعات صغيرة لتصميم سؤال لدراسة مسحية، ثم اطلب إليهم أن تتدرب كل مجموعة على طرح هذا السؤال، بحيث يظهر التحيّز في نغمة الصوت وتعبيرات الوجه. ثم اطلب إليهم طرح هذا السؤال على مجموعتين من الطلاب، بحيث يظهر التحيّز في طرح السؤال على إحدى المجموعتين، ولا يظهر هذا التحيّز عند طرحه على المجموعة الثانية. اطلب إلى المجموعة التي قامت بتصميم السؤال أن يدرسوا ما إذا كانت نسبة الإجابات أعلى في المجموعة التي كان طرح السؤال عليها متحيِّزًا.

التمييز بين الارتباط والسببية

المثال 5 يبيّن كيفية المقارنة بين الارتباط والسببية.

مثالان إضافيان

3 **دراسة تجريبية؛** حدّد ما إذا كانت كلٌّ من الحالتين الآتيتين تتطلب دراسة تجريبية، أو دراسة قائمة على الملاحظة، وفي حالة الدراسة التجريبية، حدّد المجموعة التجريبية، والمجموعة الضابطة، ثم بيّن ما إذا كان هناك تحيز أو لا:

a) اختر 100 طالب، ووزّعهم في مجموعتين متساويتين عشوائيًّا؛ الأولى تسير إلى المدرسة مشيًا على الأقدام، والأخرى لا تفعل ذلك. دراسة تجريبية، المجموعة التجريبية هي التي تسير إلى المدرسة مشيًا على الأقدام، والضابطة هي التي لا تسير، والدراسة التجريبية متحيزة؛ حيث إن كل طالب يعرف المجموعة التي ينتمي إليها.

b) اختر 100 طالب، نصفهم يعمل بعد المدرسة، وقارن نتائج تحصيلهم الدراسي. دراسة قائمة على الملاحظة.

4 حدّد ما إذا كانت كلٌّ من الحالات الآتية تتطلب دراسة مسحية، أو دراسة قائمة على الملاحظة، أو دراسة تجريبية، وفسِّر إجابتك:

a) تريد أن تعرف ما إذا كان الذين يركضون تكون عضلاتهم قوية أم لا. دراسة قائمة على الملاحظة، مقارنة عضلات الذين يركضون هرولة، مع عدد مماثل لهم ممن لا يقومون بذلك.

b) تريد أن تعرف أكثر المعلمين شعبية في مدرستك. دراسة مسحية، ومن الأفضل أن تقابل الطلاب بصورة عشوائية للحصول على عينة غير متحيزة.

c) تريد اختبار تطعيم ضد أحد الأمراض. دراسة تجريبية، الذين يخضعون للتطعيم هم المجموعة التجريبية، أمّا الذين لا يخضعون ويأخذون تطعيمًا حياديًّا (شكليًّا)، فهم المجموعة الضابطة.

تدرب وحل المسائل

حدّد ما إذا كانت كلُّ دراسة مسحية فيما يأتي تتبنّى عينة متحيزة، أو غير متحيزة، وفسّر إجابتك: (مثال 1) **1-3) انظر الهامش.**

1) استطلاع رأي كل شخص ثالث يخرج من مطعم للمشويات؛ لمعرفة الوجبة المفضلة للناس.

2) الاستفسار من طلاب صف معين من المتميزين في مادة العلوم عن أفضل المواد لديهم.

3) الاستفسار من الطالب الذي ترتيبه 20 من كل 20 طالبًا يخرجون من مدرستك، عن الطالب الذي سيصوتون له في انتخابات المجلس الطلابي.

4) **دراسة مسحية:** بيِّن ما إذا كانت الدراسة المسحية الآتية تتبنى عينة متحيزة أو غير متحيزة، فسّر إجابتك.
استطلاع آراء طلاب في كلية الطب؛ لمعرفة المهنة المستقبلية المفضلة لدى الشباب.
متحيزة؛ لأن مهنتهم المستقبلية الأكثر تفضيلًا بالنسبة لهم ستكون الطب.

حدّد سؤال الدراسة المسحية الذي تحصل منه على الإجابة المطلوبة بشكل أفضل. (مثال 2)

5) يريد زاهر أن يحدد فريق كرة القدم الأكثر شعبية في المملكة. b
a) ما اسم فريق كرة القدم الذي تفضله في مدينة الرياض؟
b) ما اسم فريق كرة القدم الذي تفضله في المملكة؟
c) ما مدى تقديرك لفرق كرة القدم في المملكة؟

6) يريد سليمان أن يحدد الرغبة في تكوين أول نادٍ للشطرنج في المدرسة. c
a) في أي يوم ترغب في أن تتأخر في المدرسة؟
b) هل تحب الشطرنج؟
c) هل تحب أن تنضم إلى نادي الشطرنج في المدرسة؟

7) يريد هاني أن يتعرف إلى الطالب المثالي في المدرسة. a
a) من ترى أنه الطالب المثالي في المدرسة؟
b) هل تُفضّل الطالب الذي لا يبادر بالمساعدة، أم الذي يبادر بها؟
c) إذا طُلِب إليك إبداء الرأي، فهل تفعل؟

حدّد ما إذا كان كل موقف من المواقف الآتية يمثِّل دراسة تجريبية، أو دراسة قائمة على الملاحظة، وفي حالة الدراسة التجريبية، اذكر كلًّا من المجموعة الضابطة والمجموعة التجريبية، ثم بيِّن ما إذا كانت الدراسة التجريبية متحيزة أم لا: (مثال 3)

8) قبل الاختبار، قام المعلم باختيار شعبتين من الصف نفسه بشكل عشوائي، وقام بمراجعة المادة لطلاب إحداهما، بينما لم يراجع المادة لطلاب الشعبة الأخرى. ثم قام بمقارنة نتائج الاختبار لهما.
انظر الهامش.

9) وجد عادل 100 شخص، نصفهم متطوعون في مأوى للمحرومين الفقراء، وقارن بين متوسطي الدخل السنوي لأفراد المجموعتين.
دراسة قائمة على الملاحظة.

10) اختر 300 شخص، واقسِّمهم عشوائيًا إلى مجموعتين: إحداهما تقرأ القرآن لمدة ساعة قبل النوم، والأخرى لا تفعل شيئًا، ثم قارن بين كيفية نوم كل من المجموعتين. انظر هامش الصفحة التالية.

11) اختر 250 شخصًا نصفهم في الفِرق الرياضية، وقارن بين كمية الوقت الذي يمضونه في حل الواجبات. دراسة قائمة على الملاحظة.

12) اختر 100 طالب نصفهم في نادي اللغة الإنجليزية، وقارن بين درجاتهم في اللغة الإنجليزية. دراسة قائمة على الملاحظة.

13-17) انظر هامش الصفحة التالية.

حدّد ما إذا كانت كل من الحالات الآتية تتطلب دراسة مسحية، أو دراسة قائمة على الملاحظة، أو دراسة تجريبية، وفسّر إجابتك: (مثال 4)

13) تريد اختبار علاج لمعالجة الصلع عند الرجال.

14) تريد استطلاع آراء أشخاص حول سياسة جديدة لشركة.

15) تريد معرفة ما إذا كان عدد سنوات الركض يؤثّر في حركة الركبة أو لا.

16) تريد معرفة ما إذا كانت المشروبات الغازية تؤثّر في جدار المعدة أو لا.

17) تريد اختبار معالجة معيّنة تبعد الحيوانات عن البساتين التي تحوي غزلانًا.

بيّن ما إذا كانت كل من العبارات الآتية تظهر ارتباطًا، أو سببية، وفسّر إجابتك: (مثال 5) **18-23) انظر هامش الصفحة التالية.**

18) عندما أمارس الرياضة، أكون في وضع نفسي أفضل.

19) عندما يكون الجو باردًا وممطرًا بغزارة، لا نذهب إلى المدرسة.

20) عندما يكون الطقس حارًّا في فصل الصيف، يكثر بيع المشروبات الباردة.

21) كثرة القراءة تجعلك أكثر ذكاءً.

22) دلَّت الأبحاث على أن من يتقن أكثر من لغة، يكون أقل إمكانية للإصابة بالمرض.

23) النوم بحذائك يؤدي إلى شعورك بالصداع.

24) **استبانات:** توزّع شركة استبانات على العاملين الذين تركوا العمل في الشركة، وكان أحد أسئلة الاستبانة هو كيف يرى العامل خبرته التي اكتسبها في الشركة؟ هل هذه دراسة مسحية متحيزة؟ فسّر السبب. إجابة ممكنة: نعم متحيزة؛ معظم العاملين الذين يتركون عملهم في الشركة، هم غير راضين عنها، وإلا لم يتركوها.

تنويع الواجبات المنزلية

دون ضمن فوق

المستوى	الأسئلة
دون دون المتوسط	1–23، 24، 25، 27–42
ضمن ضمن المتوسط	1–27 فردي، 28–42
فوق فوق المتوسط	18–42

مثال اضافي

5 بيّن ما إذا كانت العبارات الآتية تظهر ارتباطًا، أو سببية، وفسّر إجابتك.

a) عندما يحدث كسوف الشمس يكون القمر واقعًا على استقامة واحدة بين الأرض والشمس.
سببية؛ لأن وقوع القمر بين الأرض والشمس هو السبب الوحيد لحدوث كسوف الشمس.

b) فئران المختبر التي تُمْنَع من النوم، يكون معدل كتلها أقل.
ارتباط؛ مع أن قلة النوم قد تُقلّل من الكتلة، ولكن هذا غير مضمون.

c) الأشخاص الذين يسكنون المدن يشربون عددًا أكبر من زجاجات الماء.
ارتباط؛ يوجد أكثر من عامل لهذه النتيجة.

3 التدريب

التقويم التكويني

استعمل الأسئلة 1-23 ؛ للتأكد من فهم الطلاب، ثم استعمل الجدول المجاور في هذه الصفحة؛ لتعيين الواجبات المنزلية للطلاب بحسب مستوياتهم.

إجابات:

1) متحيزة ؛ لأن الوجبة الأكثر تفضيلًا من وجهة نظرهم ستكون المشويات.

2) متحيزة؛ لأن الأشخاص المستهدَفين يميلون إلى العلوم أكثر من غيرهم.

3) غير متحيزة؛ لأن لكل شخص في المجتمع الفرصة نفسها ليكون في العينة.

8) دراسة تجريبية: لأن المعلم اختار شُعبتين بشكل عشوائي. المجموعة التجريبية هي الشعبة التي قام المعلم بمراجعة المادة لطلابها. والمجموعة الضابطة هي الشعبة الأخرى، وهذه دراسة متحيزة؛ لأن كل طالب يعرف المجموعة التي ينتمي إليها.

تنبيه!

اكتشف الخطأ ذكّر الطلاب في السؤال 25 بأنه في الدراسة التجريبية غير المتحيزة، لا يجوز لأي شخص أن يعرف ما إذا كان في المجموعة الضابطة أو في المجموعة التجريبية.

4 التقويم

بطاقة مكافأة اطلب إلى كل طالب أن يكتب مخطّطًا لدراسة تجريبية من اختياره، يعرّف فيها كلًّا من المجموعة التجريبية، والمجموعة الضابطة.

إجابات:

10) دراسة تجريبية؛ لأنه تم تقسيم الأشخاص إلى مجموعتين عشوائيًّا. تتضمّن المجموعة التجريبية من يقرأ القرآن الكريم قبل النوم، وتتضمّن المجموعة الضابطة من لا يفعل ذلك، وهذه دراسة متحيزة؛ لأن كل مشارك يعرف المجموعة التي ينتمي إليها.

13) دراسة تجريبية: المستهدَفون أشخاص لديهم صلع. والمجموعة التجريبية تتلقّى معالجة، بينما المجموعة الضابطة تتلقّى معالجة شكلية.

14) مسحية، من الأفضل أن تستطلع آراء أشخاص يختارون بصورة عشوائية.

15) دراسة قائمة على الملاحظة.

16) دراسة قائمة على الملاحظة.

17) دراسة تجريبية: الفئة المُستهدفة بساتين فيها غزلان. والمجموعة التجريبية بساتين تتلقّى معالجة معينة تبعد الحيوانات عنها، وبقية البساتين هي المجموعة الضابطة وتتلقّى معالجة شكلية.

18) ارتباط، مع أن ممارسة الرياضة تجعل الإنسان في نفسية أفضل، إلا أن أحدًا منهما لا يتسبّب بالضرورة في الآخر.

19) العبارة تظهر سببية؛ لأن نزول المطر بغزارة سبب كافٍ لوحده؛ لعدم ذهاب الطلاب إلى المدرسة؛ على الرغم من أن الغياب يمكن أن تسببه عوامل أخرى مثل المرض.

20) العبارة تظهر سببية؛ لأن الحرّ في الصيف (ارتفاع درجة الحرارة) هو سبب مباشر في زيادة مبيعات المشروبات الباردة، فجسم الإنسان بحاجة إلى سوائل أكثر لتعويض ما يفقده.

21) ارتباط، مع أن الاثنين يرتبطان كلٌّ منهما بالآخر، لكن كثرة القراءة قد لا تؤثر في الذكاء.

22) ارتباط، حيث إن للدراسة علاقة بين الاثنين، لكن أحدهما قد لا يسبب الآخر.

23) ارتباط، مع أنه ربما توجد علاقة بين الاثنين، إلا أن أحدهما قد لا يُسبّب الآخر.

تنويع التعليم

ضمن فوق

توسّع كلّف الطلاب بتقصّي طرائق الحصول على عينات عشوائية. يمكن استعمال جداول الأرقام العشوائية الموجودة في ملحق معظم كتب الإحصاء في الحصول على عينة عشوائية لقائمة من الأعداد. اطلب إلى كل طالب اختيار عينة من الأرقام العشوائية يتألّف كل منها من رقمين، واطلب إليه اختيار عينة عشوائية من هذه الأعداد مستفيدًا من جداول الأرقام العشوائية بحيث يبدأ كل طالب من موقع معين في الجدول، وماراًّ من خلال أحد أعمدة الجدول أو أحد صفوفها. هذا ويمكن استعمال الأرقام العشوائية التي يمكن توليدها باستعمال الآلة الحاسبة، أو أي من برامج الجداول الإلكترونية، مثل برنامج الإكسل.

مسائل مهارات التفكير العليا

25) اكتشف الخطأ: طُلب إلى كل من سامي وهشام أن يصمم دراسة تجريبية غير متحيزة. هل وفّق أي منهما في ذلك؟ فسّر إجابتك.

سامي

- خذ مجموعة من 20 شخصًا بطريقة عشوائية.
- اطلب إلى نصفهم عشوائيًّا الالتزام بحمية تعتمد على الفواكه بالكامل لمدة 3 أسابيع.
- قارن بين أوزانهم بعد الأسابيع الثلاثة.

هشام

- خذ 20 لاعبًا لكرة القدم.
- اطلب إلى نصفهم عشوائيًّا أن يقفزوا 500 قفزة إلى أعلى في اليوم.
- قارن عدد مرات القفز إلى أعلى التي تستطيع كل مجموعة تنفيذها بعد الأسابيع الثلاثة.

26) تحدَّ: كيف تظهر الدراسة المسحية عبر الهاتف تحيّزًا للعينة؟
إجابة ممكنة: الدراسات المسحية بالهاتف تكون عادة متحيزة؛ لأن الذين لم تُدرج أسماؤهم لن يتم الاتصال بهم، وكذلك الذين ليس لديهم هواتف.

27) اكتب: قارن من خلال ذكر أوجه الشبه وأوجه الاختلاف بين العينة العشوائية في اختيار الأفراد من المجتمع، وبيّن الاختيار العشوائي لأفراد المجموعة الضابطة في الدراسة التجريبية. **انظر ملحق الإجابات.**

28a, 28c) انظر ملحق الإجابات.

28) مسألة مفتوحة: اذكر مثالًا من واقع الحياة لكل دراسة ممّا يأتي، وحدِّد عدد أفراد العينة، وكيفية اختيارها.

a) مسحية
b) قائمة على الملاحظة
c) تجريبية

28b) إجابة ممكنة: **ألاحظ 20 طالبًا نصفهم لديه غرفة للدراسة، وأقارن درجاتهم في نهاية الفصل.**

29) تبرير: كيف يحدث التحيّز في الدراسة التجريبية؟ وكيف يؤثّر في النتيجة؟ أعطِ مثالًا على ذلك. **انظر ملحق الإجابات.**

مراجعة تراكمية

إذا كان $\mathbf{u} = \langle 2, -3 \rangle$ ، $\mathbf{v} = \langle 1, 6 \rangle$، فأوجد كلًّا مما يأتي: (الدرس 2-5)

30) $2\mathbf{u}$ $\langle 4, -6 \rangle$

31) $\mathbf{v} + \mathbf{u}$ $\langle 3, 3 \rangle$

32) $2\mathbf{u} - \mathbf{v}$ $\langle 3, -12 \rangle$

أوجد الصورة الإحداثية، وطول $\overline{AB}$ المعطاة نقطتا بدايته ونهايته في كلٍّ مما يأتي: (الدرس 4-5)

33) $A(2, 2, 7), B(1, 3, -4)$ $\langle -1, 1, -11 \rangle, \sqrt{123}$

34) $A(4, 5, 10), B(7, 1, 8)$ $\langle 3, -4, -2 \rangle, \sqrt{29}$

حوّل الإحداثيات القطبية إلى إحداثيات ديكارتية لكلِّ نقطة مما يأتي: (الدرس 2-6)

35) $(3, 90°)$ $(0, 3)$

36) $(2, 210°)$ $(-\sqrt{3}, -1)$

37) $\left(\frac{1}{2}, \frac{\pi}{4}\right)$ $\left(\frac{\sqrt{2}}{4}, \frac{\sqrt{2}}{4}\right)$

عبِّر عن كل عدد مركب مما يأتي بالصورة القطبية: (الدرس 3-6)

38) $6 + 8i$ $\approx 10(\cos 0.93 + i \sin 0.93)$

39) $-1 - i$ $\sqrt{2}\left(\cos \frac{5\pi}{4} + i \sin \frac{5\pi}{4}\right)$

تدريب على اختبار

حدِّد ما إذا كانت كل حالة من الحالات الآتية تمثِّل دراسة تجريبية أو دراسة قائمة على الملاحظة، وإذا كانت دراسة تجريبية، فحدِّد المجموعة التجريبية والمجموعة الضابطة، ثم بيّن ما إذا كانت متحيزة أو لا.

40) اختر 220 شخصًا عشوائيًّا، وقسمهم عشوائيًّا إلى مجموعتين. إحداهما تقوم بالتدريبات الرياضية مدة ساعةً واحدة يوميًّا، والأخرى لا تقوم بهذه التدريبات، ثم قارن بين كتلة الجسم لكل من المجموعتين. **انظر ملحق الإجابات.**

41) اختر 200 طالب، نصفهم يمارس كرة القدم، وقارن فترة النوم بين المجموعتين. **دراسة قائمة على الملاحظة**

42) اختر 100 طالب جامعي، نصفهم لديه وظيفة بدوام جزئي، وقارن معدلاتهم التراكمية. **دراسة قائمة على الملاحظة**

معمل الحاسبة البيانية:

تقويم البيانات المنشورة

Evaluating Published Data

يمكنك استعمال الحاسبة البيانية TI-nspire، مع تطبيق القوائم وجداول البيانات لتقويم البيانات التي يمكن الحصول عليها في الواقع.

يبين الجدول أدناه عدد السيارات التي باعها معرض للسيارات خلال الفترة 2009–1985، وقد قام المعرض بتمثيل هذه البيانات بالأعمدة البيانية كما في الشكل المجاور؛ وعرضها في إحدى الصحف، وذلك لدعم المقولة بأن مبيعات المعرض تزداد بشكل كبير جدًّا. هل هذا صحيح؟

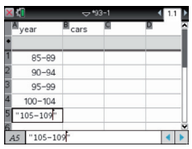
السنوات	1985–1989	1990–1994	1995–1999	2000–2004	2005–2009
عدد السيارات المبيعة	316	451	561	704	823

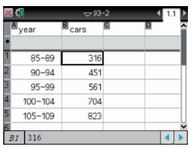
نشاط

تقويم التمثيل البياني للبيانات .

الخطوة 1 أدخل البيانات في صفحة من تطبيق القوائم وجداول البيانات.

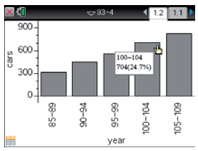
- اضغط (on) ومنها اختر .
- اكتب عنوان البيانات (years) في أعلى العمود (A) وَ (cars) في أعلى العمود (B) .
- لإدخال فئات السنوات في كل خلية بالضغط على (ctrl) ثم اختيار " ، فمثلًا لإدخال الفئة الأولى من السنوات في الخلية A_1 اكتب "89-85" ثم اضغط (enter) ، وكرّر ذلك لبقية فئات السنوات.
- استعمل الأسهم لإظهار الخلية B_1، ثم أدخل البيانات لكل فئة من السنوات.





الخطوة 2 مثِّل البيانات التي تم إدخالها بالأعمدة.

- اضغط (menu) ثم اختر 3:البيانات ومنها 8:التمثيل البياني المختصر
- اختر years في القائمة X: year ، وَ cars في قائمة موجزة cars ، وَ صفحة جديدة من عرض في صفحة جديدة لإظهار التمثيل البياني على صفحة جديدة، ثم اضغط موافق .
- لمشاهدة المعلومات عن أي عمود في التمثيل البياني، قم بالإشارة إلى ذلك العمود فتظهر معلوماته كما هو موضح في الشكل المجاور.



حلّل النتائج

2) إجابة ممكنة: تمثيل الصحيفة؛ لأنه مضلِّل، حيث بدأ التدريج على المحور الرأسي من العدد 250 وليس من الصفر، ولذلك تظهر المبيعات في السنوات 94–90، وكأنها أكثر من ضعف المبيعات في السنوات 89–85، وهي في الحقيقة ليست كذلك.

قارن تمثيلك البياني بتمثيل الصحيفة.

1) هل يعرض التمثيلان البيانات نفسها؟ نعم

2) أي التمثيلين يُظهر أن مبيعات المعرض تزداد بشكل أكبر؟ ولماذا؟

3) لماذا اختار المعرِض أن يعرض بياناته بهذه الطريقة؟ هل هي مقبولة؟ ولماذا؟

3) إجابة ممكنة: يريد المعرض أن يُظهر أنّ الزيادة في المبيعات متسارعة بشكل كبير، وهذا ليس مقبولًا؛ لأن البيانات يجب أن تعرض بصورة واضحة.

من المحسوس إلى المجرد

اسأل

- ما نسبة الزيادة في المبيعات من فئة السنوات الأولى إلى الفئة الأخيرة ؟ 160% تقريبًا
- كيف أظهر التمثيل البياني الذي أعده المعرض تشوّهًا في البيانات؟

جَعَل الزيادة تُقدّر كأنها 350% ، حيث يظهر طول العمود الممثل للمبيعات في السنوات 2009–2005 مساويًا 4.5 أمثال طول العمود الممثل للمبيعات في السنوات 1989–1985 ، وكأن المبيعات أصبحت تقريبًا 4.5 أمثال المبيعات في السنوات 1989–1985 .

1 التركيز

الهدف: استعمال تطبيق القوائم وجداول البيانات في الحاسبة البيانية TI-nspire، لتقويم بيانات منشورة.

المواد

- الحاسبة البيانية TI-nspire.

إرشادات التدريس

إذا ظهرت صفحة من تطبيق القوائم وجداول البيانات قديمة عند بداية التطبيق، فيجب على الطالب حفظ القديمة أوّلًا، ثم فتح قائمة جديدة من خلال الضغط على المفتاحين: (on) ، ثم 1 مستند جديد ثم فتح صفحة قوائم وجداول بيانات جديدة.

2 التدريس

العمل في مجموعات متعاونة

وزّع الطلاب مجموعات ثنائية ذوي قدرات متفاوتة، واطلب إلى كل مجموعة إكمال النشاط.

- تحتوي الزاوية العليا في اليسار من صفحة القوائم وجداول البيانات على العنوان الذي يُدخله الطلاب.
- الرمز ["] الذي يسبق المدخلة يدل على أن المدخلة نص، ولذلك يجب ألا تُدخل بيانات عددية يسبقها هذا الرمز .

تدريب اطلب إلى الطلاب حل التمارين 3-1

3 التقويم

التقويم التكويني

استعمل التمرينين 2 , 1؛ لتقويم مدى فهم الطلاب تمثيل البيانات بالأعمدة.

1 التركيز

الترابط الرأسي

ما قبل الدرس 7-2

إيجاد مقاييس النزعة المركزية والتشتت.

الدرس 7-2

استعمال مقاييس النزعة المركزية، ومقاييس التشتت؛ لمقارنة مجموعات من البيانات.

ما بعد الدرس 7-2

مقارنة إحصائيات العينة ومعالم المجتمع .

2 التدريس

أسئلة التعزيز

اطلب إلى الطلاب قراءة فقرة "لماذا؟".

و اسأل:

- لماذا يكون من المفيد، وضع البيانات في قائمة عند دراستها؟ إجابة ممكنة: عندما تكون البيانات مرتّبة يكون من السهل معرفة كل من: أصغر قيمة، والوسيط، والمنوال، وأكبر قيمة .
- ما الملاحظات التي يمكنك معرفتها عن الأوقات التي وصل فيها أمجد إلى خط النهاية في المسابقات التي شارك فيها (باستعمال الحساب الذهني فقط)؟ إجابة ممكنة: القيمتان العظمى والصغرى هما : (7:29 , 6:48) ، والمدى 41 ثانية.

مقاييس النزعة المركزية

المثال 1 يبيّن كيفية تحديد مقياس النزعة المركزية الأنسب لتمثيل مجموعة بيانات.

7-2 التحليل الإحصائي
Statistical Analysis

7:20	6:59	7:29	6:49	7:03	6:51
6:48	6:52	6:50	7:01	6:49	6:57
6:53	7:07	6:54	6:56	7:09	7:02

لماذا ؟

شارك أمجد في 18 سباقًا جبليًّا للدراجات خلال العام الماضي، ويُمثّل الجدول المجاور الزمن بالدقائق والثواني الذي استغرقه للوصول إلى خط النهاية في كل منها. أي من مقاييس النزعة المركزية يفضل أن يستعمله أمجد لوصف هذه الأزمنة؟

إن إيجاد أحد مقاييس النزعة المركزية لوصف البيانات وتلخيصها، والوصول إلى الاستنتاجات المتعلقة بالدراسة يُسَمى **التحليل الإحصائي** لها.

التحليل الإحصائي البيانات الموجودة في الجدول أعلاه تشتمل على **متغير**؛ لذا تُسمى **بيانات في متغير واحد**. ولوصف مثل هذه البيانات، يُستعمل أحد **مقاييس النزعة المركزية**، الذي يشير إلى متوسط البيانات أو منتصفها (مركزها)، وأبرز هذه المقاييس هو المتوسط الحسابي والوسيط والمنوال.

وعند اختيار مقياس لوصف البيانات يمكن استعمال الجدول أدناه:

مفهوم أساسي — **مقاييس النزعة المركزية**

المقياس	التعريف	أكثر فائدةً عندما
المتوسط الحسابي	مجموع القيم مقسومًا على عددها	لا توجد في البيانات قيم متطرفة.
الوسيط	العدد الذي يشغل موقع المنتصف عند ترتيب القيم تنازليًا أو تصاعديًا في مجموعة بيانات عددها فرديٌّ، أو هو المتوسط للعددين الموجودين في المنتصف، في مجموعة بيانات عددها زوجي ومرتبة ترتيبًا تصاعديًا أو تنازليًا.	توجد في البيانات قيم متطرفة، ولا توجد فجوات كبيرة في منتصف البيانات.
المنوال	القيمة الأكثر تكرارًا أو شيوعًا بين القيم.	تحوي البيانات قيمًا متكررة.

مثال 1 من واقع الحياة — **مقاييس النزعة المركزية**

a) زمن السباق: إشارة إلى البيانات في سباق الدراجات أعلاه، أيّ مقاييس النزعة المركزية يصف البيانات بصورة أفضل؟ ولماذا؟

بما أن البيانات تنتشر ولا يظهر فيها قيم متطرفة، يكون المتوسط هو الأفضل.

17	15	17	16
15	16	16	12
18	18	18	14
1	48	16	40

b) أيّ من مقاييس النزعة المركزية يناسب البيانات في الجدول المجاور؟ ولماذا؟

بما أنه توجد قيم متطرفة ولا يوجد فجوات كبيرة في منتصف البيانات، فإن الوسيط أفضل من غيره لتمثيل البيانات.

تحقق من فهمك المنوال؛ حيث إن الغالبية العظمى من القيم متساوية.

1) تمنح مؤسسة جائزة كبرى قيمتها 20000 ريال، و30 جائزة أخرى قيمة كل منها 500 ريال، أي مقاييس النزعة المركزية يلائم البيانات بصورة أفضل؟ ولماذا؟

يوجد نوعان من المقاييس يمكن استعمالهما لمجموعة من البيانات، هما **المَعْلَمة** وهو مقياس يصف خاصية في المجتمع. و**الإحصائي** وهو مقياس يصف خاصية في العينة. فمتوسط دخل الفرد في المملكة هو مثال على المَعْلَمة، أما دخل الفرد في مدينتك التي تسكنها، فهو مثال على الإحصائي. ويتم تحديد مجتمع الدراسة في ضوء الهدف من الدراسة، فإذا أراد باحث مثلًا تعرف مدى رضا معلِّمي الرياضيات عن المناهج الجديدة في المملكة، فإن مجتمع الدراسة يكون جميع معلِّمي الرياضيات الذين يُدرِّسون المناهج الجديدة في المملكة، ولصعوبة إجراء الدراسة على جميع المعلمين، فإنه يتم اختيار مجموعة صغيرة والتي تمثل عينة الدراسة.

فيما سبق:
درست مقاييس النزعة المركزية ومقاييس التشتت. (مهارة سابقة)

والآن:
- أختار مقياس النزعة المركزية الأنسب لتمثيل البيانات.
- أجد هامش خطأ المعاينة وأستعمله.
- أستعمل مقاييس التشتت لمقارنة مجموعات من البيانات.

المفردات:
التحليل الإحصائي
statistical analysis
المتغير
variable
بيانات في متغير واحد
univariate data
مقاييس النزعة المركزية
measure of central tendency
المَعْلَمة
parameter
الإحصائي
Statistic
هامش خطأ المعاينة
margin of sampling error
مقياس التشتت
measure of variation
التباين
variance
الانحراف المعياري
standard deviation

www.obeikaneducation.com

إرشادات للدراسة
القيمة المتطرفة
هي واحدة من البيانات أكبر أو أصغر كثيرًا من بقية البيانات.

مصادر الدرس 7-2

المصدر	دون المتوسط	ضمن المتوسط	فوق المتوسط
دليل المعلم	• تنويع التعليم ص (93)	• تنويع التعليم ص (93, 96)	• تنويع التعليم ص (93, 96)
كتاب التمارين	• ص (13)	• ص (13)	• ص (13)
مصادر المعلم للأنشطة الصفية	• تدريبات إعادة التعليم، ص (10) • تدريبات حل المسألة، ص (12)	• تدريبات حل المسألة، ص (12) • التدريبات الإثرائية، ص (13)	• تدريبات حل المسألة، ص (12) • التدريبات الإثرائية، ص (13)

وعند سحب عينة من مجتمع فهنالك خطورة من وجود خطأ في المعاينة ناتج عن إجراء الدراسة على عينة من المجتمع وليس على المجتمع بأكمله يسمى **هامش خطأ المعاينة**. وكلما زاد حجم العينة قلّ هامش خطأ المعاينة، ويُحَدِّد هامش خطأ المعاينة الفترة التي تدل على مدى اختلاف استجابة العينة عن المجتمع، وهذا يعني أنه يصف المدى الذي تقع فيه نسبة المجتمع فيما إذا أجريت الدراسة على المجتمع بأكمله.

مفهوم أساسي — **هامش خطأ المعاينة**

عند سحب عينة حجمها n من مجتمع كلي، فإنه يمكن تقريب هامش خطأ المعاينة بالقيمة $\pm \frac{1}{\sqrt{n}}$

مثال 2 — **هامش خطأ المعاينة**

في دراسة مسحية عشوائية شملت 2148 شخصًا، أفاد 58% منهم أن كرة القدم هي لعبتهم المفضّلة.

a) ما هامش خطأ المعاينة؟

$\text{هامش خطأ المعاينة} \approx \pm\frac{1}{\sqrt{n}}$ — قانون هامش خطأ المعاينة

$\approx \pm \frac{1}{\sqrt{2148}}$ — $n = 2148$

$\approx \pm 0.0216$ — بسّط

إذن هامش الخطأ للمعاينة $\pm 2.16\%$ تقريبًا.

b) ما الفترة الممكنة التي تتضمّن نسبة المجتمع الذين أفادوا أن كرة القدم هي لعبتهم المفضلة؟

$58\% + 2.16\% = 60.16\%$ $\quad$ $58\% - 2.16\% = 55.84\%$

الفترة الممكنة التي تتضمن نسبة المجتمع الذين أفادوا بأن كرة القدم هي لعبتهم المفضلة تقع بين 55.84% و 60.16% أي تقع في الفترة (55.84% , 60.16%).

تحقق من فهمك

في دراسة مسحية عشوائية شملت 3247 شخصًا، قال 41% منهم: إنهم مرتاحون للنهضة العلمية.

2A) ما هامش خطأ المعاينة؟ $\pm 1.75\%$

2B) ما الفترة الممكنة التي تتضمن نسبة أفراد المجتمع المرتاحين للنهضة العلمية؟ بين 39.25% و 42.75%

إرشادات للدراسة

كتابة هامش خطأ المعاينة
نكتب هامش خطأ المعاينة عادة على صورة نسبة مئوية.

مقاييس التشتت تصف **مقاييس التشتت** مقدار تباعد البيانات أو تقاربها، ومن أشهر مقاييس التشتت **التباين**، و**الانحراف المعياري**. ويصف هذان المقياسان مدى بعد مجموعة البيانات عن المتوسط أو قربها منه.

يُمثّل الرمز $\bar{x}$ المتوسط للعينة ويُقرأ «x بار»، ويمثّل الرمز μ المتوسط للمجتمع ويُقرأ «ميو». ويحسب كل من المتوسط للعينة والمتوسط للمجتمع بالطريقة ذاتها، أمّا طريقة حساب الانحراف المعياري لكل من بيانات العينة وبيانات المجتمع، فتختلف، وفيما يأتي توضيح لطريقة حساب كل من الانحراف المعياري للعينة (ويُرمز له بالرمز s، والانحراف المعياري للمجتمع (ويرمز له بالرمز σ ويقرأ «سيجما»).

إرشادات للدراسة

مقاييس التشتت
درست سابقًا مقاييس التشتت (المدى، الربيعات، المدى الربيعي، الانحراف المتوسط.

مفهوم أساسي — **قانونا الانحراف المعياري**

العينة

$$s = \sqrt{\frac{\sum_{k=1}^{n}(x_k - \bar{x})^2}{n-1}}$$

حيث n عدد قيم العينة، وَ $\bar{x}$ المتوسط الحسابي للعينة وَ x_k قيم العينة.

المجتمع

$$\sigma = \sqrt{\frac{\sum_{k=1}^{n}(x_k - \mu)^2}{n}}$$

حيث n عدد قيم المجتمع، وَ $\bar{x}$ المتوسط الحسابي للمجتمع وَ x_k قيم المجتمع.

هامش خطأ المعاينة

المثال 2 يبيّن كيفية إيجاد هامش خطأ المعاينة في الدراسة المسحية.

التقويم التكويني

استعمل تدريبات "تحقق من فهمك" بعد كل مثال؛ للتحقق من مدى فهم الطلاب المفاهيم.

مثالان إضافيان

1 **رواتب:** يعمل 3 موظفين في شركة براتب سنوي مقداره 200000 ريال لكلٍّ منهم، ويعمل 10 آخرين براتب سنوي مقداره 70000 ريال لكلٍّ منهم، بينما يعمل 60 موظفًا في الشركة براتب سنوي مقداره 40000 ريال لكلٍّ منهم.

a) أيّ مقاييس النزعة المركزية يلائم البيانات بصورة أفضل؟ ولماذا؟ المنوال؛ حيث إن الغالبية العظمى من البيانات متساوية.

b) أي مقاييس النزعة المركزية يناسب البيانات الآتية؟ ولماذا؟ 37, 33, 40, 31, 33, 38, 35

المتوسط؛ لا توجد قيم متطرفة.

2 في دراسة مسحية عشوائية شملت 1710 شباب، أفاد 76% منهم أنهم يحبون الرياضة.

a) ما هامش خطأ المعاينة؟ $\approx \pm 0.0242$

b) ما الفترة الممكنة التي تتضمن نسبة أفراد المجتمع الذين يحبون الرياضة؟ بين 73.58% , 78.42%؛ أي في الفترة (73.58% , 78.42%)

تنويع التعليم

دون ضمن فوق

المتعلمون المتفاعلون اطلب إلى الطلاب البحث في مجلة، أو صحيفة، أو في الإنترنت عن دراسة مسحية، ثم مقارنة هامش خطأ المعاينة المذكور في الدراسة بالنتائج التي يحسبونها وفق الطريقة التي تعلموها في هذا الدرس.

مقاييس التشتت

المثال 3 يبيّن كيفية حساب الانحراف المعياري لمجموعتين من البيانات والمقارنة بينهما .

مثال إضافي

3 **طقس:** كانت درجات الحرارة الفهرنهايتية في مدينة ما خلال أول 10 أيام من العام الماضي كما يأتي:

58, 68, 71, 73, 84, 89, 71, 73, 63, 56

وفي هذا العام كانت:

52, 37, 50, 54, 55, 60, 63, 56, 58, 48

a) بيِّن ما إذا كانت هذه البيانات تمثِّل عينةً أم مجتمعًا، ثم أوجد الانحراف المعياري لدرجات الحرارة التي قِيسَت في العام الماضي. 10.4 تقريبًا

b) استعمل الحاسبة لإيجاد الانحراف المعياري لدرجات الحرارة لأيام هذا العام. 7.3 تقريبًا

c) قارن الانحراف المعياري في كلا العامين. وماذا تستنتج؟
الانحراف المعياري في العام الماضي أكبر من الانحراف المعياري في هذا العام، وهذا يعني أنه يوجد تباعد أكبر في درجات حرارة أول عشرة أيام من العام الماضي.

المحتوى الرياضي

وضّح للطلاب أن الانحراف المعياري لمجموعة بيانات هو عدد يصف مدى بعد مفردات المجموعة بعضها عن بعض، كما يخبرك عن مدى بُعد أو قُرب قيم البيانات عن متوسطها.

مثال 3 من واقع الحياة

الانحراف المعياري

درجات اختبار: حصل طلاب المعلم صالح في اختبارين متتاليين على المتوسط نفسه في اختبار الرياضيات وهو 75. إذا علمت أن درجات الاختبارين كما يأتي:

الاختبار A	الاختبار B
85, 80, 75, 75, 70, 75, 75, 65, 75, 75, 75, 80, 75, 75, 70, 80, 70, 75, 75, 75, 75, 75, 75	100, 100, 90, 10, 100, 95, 10, 95, 100, 100, 85, 15, 95, 20, 95, 90, 100, 100, 90, 10, 100, 100, 25

a) بيِّن ما إذا كانت هذه البيانات تمثل عينة أم مجتمعًا، ثم أوجد الانحراف المعياري لدرجات الاختبار A.

الخطوة 1 بما أن المتوسط 75 للاختبار كاملًا ، فهو يمثل متوسط المجتمع. ومن هنا فإن:
$\mu = 75$.

الخطوة 2 أوجد الانحراف المعياري.

قانون الانحراف المعياري

$$\sigma = \sqrt{\frac{\sum_{k=1}^{n}(x_k - \mu)^2}{n}}$$

$$= \sqrt{\frac{(85-75)^2 + (80-75)^2 + \ldots + (75-75)^2 + (75-75)^2}{23}}$$

$$\approx 3.9$$

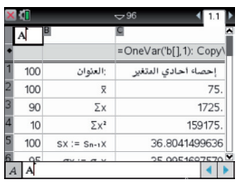
المتوسط لدرجات الاختبار A يساوي 75، والانحراف المعياري يساوي تقريبًا 3.9

b) استعمل الحاسبة البيانية؛ لإيجاد الانحراف المعياري للاختبار B.

اضغط (on) ثم (⊞) وأدخل القيم (الدرجات) في العمود A.

ولمشاهدة الإحصائيات اضغط (menu) ثم اختر 4:الإحصاء ثم 1: الحسابات الإحصائية ثم 1:احصاء أحادي المتغير ...

ثم اضغط موافق موافق موافق



المتوسط لدرجات الاختبار B يساوي 75
والانحراف المعياري يساوي تقريبًا 36

c) قارن الانحراف المعياري في كلا الاختبارين. وماذا تستنتج؟

الانحراف المعياري للاختبار B أكبر كثيرًا من الانحراف المعياري للاختبار A؛ لذا فدرجات الطلاب في الاختبار A أكثر تجانسًا، أي أن درجات بعضهم قريبة من بعضٍ، مقارنةً بالاختبار B الذي يبيِّن درجات عالية جدًّا، ودرجات لآخرين دون المتوسط كثيرًا.

تحقق من فهمك

3A احسب المتوسط والانحراف المعياري للمجتمع للبيانات المحدّدة في الجدول المجاور. $\mu = 30.6, \sigma = 2.74$

31	33	33	34	28
31	36	34	29	33
36	28	32	29	30
28	28	29	33	29
29	27	28	31	26

3B ضع 70 مكان 30 في الجدول المجاور. ماذا تتوقع أن يحدث لكلٍّ من المتوسط والانحراف المعياري؟ أعد الحسابات للتحقّق.

3C اختير (5) طلاب عشوائيًّا من فصل دراسي، وقيست أطوالهم فكانت:175 سم، 170 سم، 168 سم، 167سم، 170 سم. بيِّن ما إذا كانت هذه البيانات تمثِّل عينة أم مجتمعًا، ثم أوجد الانحراف المعياري لأطوال هؤلاء الطلاب. 3.8 تقريبًا

الربط مع الحياة

يستعمل المعلمون الأنواع المختلفة من الأسئلة الموضوعية والمقالية لتقدير درجات طلابهم.

إرشادات للدراسة

المتوسط للمجتمع
عندما يكون المتوسط للمجتمع μ معلومًا، يمكنه أن يحلّ مكان المتوسط للعينة $\bar{x}$.

إرشادات للدراسة

المتوسط والانحراف المعياري للعينة
إذا قارن المعلم صالح درجات طلابه بدرجات طلاب آخرين في اختبار وطني مثلًا، فإن درجات طلابه تُعدُّ عينةً من درجات كل الطلاب الذين تقدموا للاختبار، وعليه أن يحسب $\bar{x}$ ، s في هذه الحالة.

3B إجابة ممكنة: يجب أن يزداد المتوسط قليلًا تبعًا لذلك، أما الانحراف المعياري فيزداد بشكل كبير.
$\mu = 32.2$
$\sigma = 8.19$

التعليم باستعمال التقنيات

السبورة التفاعلية

استعمل الجداول الإلكترونية، أو أية برمجية مناسبة؛ لحساب مقاييس إحصائية متعددة لبيانات تم جمعها من خلال دراسة مسحية. واستمر في عرض هذه المعلومات على السبورة التفاعلية في أثناء تدريسك، بحيث يتم التوصّل إلى معنى كل مقياس وكيفية تفسيرها .

إجابات :

1) المتوسط؛ لأنه لا توجد قيم متطرّفة.
2) الوسيط؛ لأنه توجد قيمة متطرفة.
3) الوسيط؛ لأنه توجد قيمة واحدة متطرفة، ولا توجد فجوات كبيرة في منتصف البيانات.
4) المتوسط؛ لأنه لا توجد قيم متطرّفة .
5) الوسيط؛ لأنه توجد قيمة واحدة متطرفة أكبر كثيرًا من بقية القيم وهي 66 .

تدرب وحل المسائل

أي مقاييس النزعة المركزية يصف بصورة أفضل البيانات الآتية؟ ولماذا؟ (مثال 1) **1-5) انظر هامش الصفحة السابقة.**

1) 833, 796, 781, 776, 758

2) 37.2, 36.8, 40.4, 19.2

3) 65, 70, 17, 60, 55, 65, 63, 58, 60, 69

4) 53, 61, 46, 59, 61, 55, 49

5) تغذية: يوضح الجدول أدناه عدد السعرات لكل طبق خضار.

الخضار	السعرات	الخضار	السعرات	الخضار	السعرات
زهرة	10	بركلي	25	باذنجان	14
بندورة	17	ملفوف	17	فاصوليا	30
حبوب	66	جزر	28	فلفل	20
كوسا	17	سبانخ	9	خس	9

6) طقس: يبيّن الجدول أدناه، درجات الحرارة في أثناء النهار ولمدة أسبوع بالدرجات الفهرنهايتية: **المتوسط؛ لا توجد قيم متطرفة في البيانات.**

اليوم	درجة الحرارة
السبت	64°F
الأحد	73°F
الإثنين	69°F
الثلاثاء	70°F
الأربعاء	71°F
الخميس	75°F
الجمعة	74°F

7) ألعاب أولمبية: في دراسة مسحية عشوائية شملت 5824 شخصًا، أفاد 29% منهم أنهم سيشاهدون الألعاب الأولمبية على التلفاز. (مثال 2) **انظر الهامش**

a) ما هامش خطأ المعاينة ؟

b) ما الفترة الممكنة التي تتضمن نسبة المجتمع الذين سوف يشاهدون الألعاب الأولمبية على التلفاز ؟

8) رياضة: في دراسة مسحية عشوائية شارك فيها 5669 شخصًا، وجد أن 31% منهم يشاهدون مباراة واحدة على الأقل في كرة القدم شهريًّا. **انظر الهامش.**

a) ما هامش خطأ المعاينة ؟

b) ما الفترة الممكنة التي تتضمن نسبة المجتمع الذين يشاهدون مباراة واحدة على الأقل في كرة القدم شهريًّا؟

9) تمارين رياضية: في دراسة مسحية شملت 4213 شخصًا اختيروا بطريقة عشوائية، أفاد 78% منهم أنهم يمارسون الرياضة لمدة ساعة أسبوعيًّا على الأقل.

a) ما هامش خطأ المعاينة؟ **$\approx \pm 1.54\%$**

b) ما الفترة الممكنة التي تحتوي على نسبة المجتمع الذين يمارسون الرياضة ساعة واحدة على الأقل أسبوعيًّا؟
بين 76.5% و 79.5% أي في الفترة (76.5% , 79.5%)

10) قيادة: تُحدّد عادة السرعات القصوى على الطرقات تفاديًا للحوادث.

a) فيما يأتي السرعات القصوى (mi/h) للطرقات جميعها في إحدى الدول بين مدنها وقراها. بيِّن ما إذا كانت هذه البيانات تمثِّل عينة أم مجتمعًا، ثم أوجد الانحراف المعياري للسرعات في الجدول أدناه. (مثال 3) **3.5 تقريبًا**

السرعات القصوى للطرقات جميعها (mi/h)									
70	70	65	65	75	70	70	75	65	70

b) إذا كان الانحراف المعياري للسرعات القصوى (mi/h) للطرقات جميعها في دولة أخرى (24) . قارن الانحراف المعياري للسرعات في كلا الدولتين. وماذا تستنتج؟
انظر الهامش.

11) تدريب: في أثناء التمرين سجَّل سلطان الأزمنة التي ركض فيها مسافة 40 m. بيِّن ما إذا كانت هذه البيانات تمثِّل عينة أم مجتمعًا، ثم أوجد الانحراف المعياري للبيانات في الجدول أدناه.
0.09 تقريبًا

أزمنة قطع المسافة 40 m ركضًا بالثواني									
4.8	4.9	4.8	4.7	5.0	4.9	4.8	4.9	4.8	5.0

12) اختبارات: فيما يأتي درجات صف مكوّن من 10 طلاب في اختبار من 25 درجة.

درجات 10 طلاب في اختبار من 25 درجة									
20	17	21	22	20	21	20	21	21	23

a) قارن بين المتوسط والوسيط للدرجات. **انظر الهامش.**

b) أوجد الانحراف المعياري للبيانات، وقرّبه إلى أقرب جزء من مئة. **1.05**

c) على افتراض أن الدرجة 20 كانت خطأً، وتم تعديلها إلى 25، كيف يتأثّر كلٌّ من المتوسط والوسيط بهذا التغيير؟ **انظر الهامش**

تنويع الواجبات المنزلية

دون ضمن فوق

المستوى	الأسئلة
دون دون المتوسط	1–9، 12–14، 16–29
ضمن ضمن المتوسط	1–13 فردي، 16–29
فوق فوق المتوسط	10–29

3 التدريب

التقويم التكويني

استعمل الأسئلة 1-9 ؛ للتأكد من فهم الطلاب، ثم استعمل الجدول أسفل هذه الصفحة؛ لتعيين الواجبات المنزلية للطلاب بحسب مستوياتهم.

إجابات :

7a) $\approx \pm 1.31\%$

7b) $0.29 + 0.0131 = 0.3031 \approx 30.3\%$
$0.29 - 0.0131 = 0.2769 \approx 27.7\%$
الفترة الممكنة التي تتضمن نسبة المجتمع الذين أفادوا بأنهم سيشاهدون الألعاب الأولمبية على التلفاز تقع بين 27.7% و 30.3%

8a) $\approx \pm 1.33\%$

8b) $0.31 + 0.0133 = 0.3233 \approx 32.3\%$
$0.31 - 0.0133 = 0.2967 \approx 29.7\%$
الفترة الممكنة التي تتضمن نسبة المجتمع الذين أفادوا أنهم يشاهدون مباراة واحدة على الأقل في كرة القدم شهريًّا تقع بين 29.7% و 32.3%

10b) الانحراف المعياري للدولة الثانية أكبر كثيرًا من الانحراف المعياري للدولة الأولى؛ لذا فالسرعات القُصوى في الدولة الأولى أكثر تجانسًا؛ أي أن السرعات القُصوى قريبة بعضها من بعض، مقارنة بالسرعات القُصوى في الدولة الثانية التي تتضمن سرعات قصوى كبيرة جدًّا، وأخرى صغيرة جدًّا.

12a) المتوسط = 20.6، الوسيط = 21. والقيمتان قريبتان إحداهما من الأخرى.

12c) المتوسط الجديد = 20.8
الوسيط الجديد = 21
يرتفع المتوسط قليلًا، والوسيط يبقى كما هو.

إرشادات للمعلم الجديد

اختيار الآلة الحاسبة

لكلٍّ من الآلة الحاسبة العلمية أو البيانية مفاتيح وتطبيقات تُستعمل لحساب المتوسط، والوسيط، والانحراف المعياري، وتكلفة الآلة الحاسبة العلمية أقل من تكلفة الآلة الحاسبة البيانية؛ لذا اترك للطلاب حرية الاختيار بين الآلتين في هذا الدرس.

4 التقويم

تعلّم سابق اطلب إلى الطلاب أن يكتبوا فقرة توضح كيف ساعدهم ما تعلموه عن الدراسات التجريبية والمسحية والقائمة على الملاحظة في الدرس 1-7 على التحليل الإحصائي.

التقويم التكويني

تحقق من فهم الطلاب الدرسين 7-2, 7-1 بإعطائهم:

الاختبار القصير 1، ص (49)

إجابات:

14) إجابة ممكنة :

كتل طلاب الصف الثالث الثانوي (بالكيلو جرام)			
69	112	61	55
91	108	66	62
81	79	83	51
58	86	92	77

لا يوجد منوال، الوسيط = 78، والمتوسط 76.9375، والانحراف المعياري 18 تقريبًا.

16) إجابة ممكنة: عند حذف القيمة المتطرفة الكبيرة، ستكون بقية القيم قريبة بعضها من بعض؛ لذا سينقص الانحراف المعياري، والمتوسط لبقية القيم سينقص أيضًا؛ لأن القيمة المتطرفة الكبيرة هي التي تؤدي إلى ارتفاع قيمة المتوسط.

17) إجابة ممكنة: سيزداد الوسيط كذلك بمقدار 10 ، فمثلًا إذا كان الوسيط لمجموعة بيانات يساوي 18، وزِيدَت كل مفردة بمقدار 10، فإن الوسيط يزداد بمقدار 10 ليصبح 28. ويزداد المتوسط أيضًا بمقدار 10؛ لأن البيانات جميعها زادت بالمقدار نفسه، فمثلًا المتوسط لمجموعة الأعداد 2, 2, 2, 2, 2 هو 2 ، إذا زيدت كل مفردة بمقدار 10 ، فإنها تصبح 12, 12, 12, 12, 12 ، ويصبح المتوسط للمجموعة الجديدة يساوي 12. أمّا الانحراف المعياري، فإنه لا يتأثر مع زيادة كل مفردة بالقيمة نفسها؛ حيث إن مقدار التباعد في القيم يبقى نفسه، فزيادة كل مفردة بمقدار ثابت لا تؤثّر في تباعد القيم الجديدة.

20) متحيزة؛ لأن لاعِبِي كرة السلة في الغالب يكونون أطول من المعدل العام لأطوال طلاب المدرسة، لذلك لا تُمثّل أطوال لاعِبِي كرة السلة أطوال الطلاب.

13) **مدارس:** يوضّح الجدول أدناه عدد الطلاب لكل معلم في مدارس إحدى المناطق التعليمية:

عدد الطلاب لكل معلم				
27	22	26	26	25
24	25	28	22	24
24	26	24	22	20
27	23	22	29	23
24	24	26	29	28
28	29	25	25	23

13a) المتوسط؛ لا توجد قيم متطرفة في البيانات.

a) ما مقياس النزعة المركزية الأنسب لهذه البيانات؟ ولماذا؟

b) بيِّن ما إذا كانت هذه البيانات تمثِّل عينة أم مجتمعًا، ثم أوجد الانحراف المعياري للبيانات، علمًا بأن المتوسط الحسابي لها يساوي 25، وقرِّبه إلى أقرب جزء من مئة. 2.35

مسائل مهارات التفكير العليا

14) **مسألة مفتوحة:** اجمع بيانات في متغيّر واحد، ثم صف مقاييس النزعة المركزية ومقاييس التشتت المناسبة لهذه البيانات. انظر الهامش.

15) **تحدٍّ:** إذا أيَّد 67% من المستهدفين موضوع دراسة مسحية، وكانت الفترة الممكنة التي تتضمن نسبة أفراد المجتمع المؤيدة هي 64.8%-69.2%، فكم شخصًا تناولت الدراسة المسحية رأيهم؟ 2066

16) **تبرير:** حذفت قيمة متطرفة كبيرة من مجموعة بيانات، كيف يؤثّر ذلك في المتوسط والانحراف المعياري لمجموعة البيانات؟ وضّح ذلك. انظر الهامش.

17) **تبرير:** إذا زيدت كل قيمة في مجموعة بيانات بمقدار 10، فكيف يؤثّر ذلك في المتوسط والوسيط والانحراف المعياري؟ فسّر إجابتك. انظر الهامش.

18) **اكتب:** قارن بذكر أوجه الشبه وأوجه الاختلاف بين المتوسط والوسيط لمجموعة بيانات في متغيّر واحد. إجابة ممكنة : مع أن كلًّا من المتوسط والوسيط يمثِّل مركز البيانات، فإن الوسيط هو القيمة التي تقع في منتصف البيانات، بينما يتأثر المتوسط بالقيم جميعها.

مراجعة تراكمية

حدِّد إذا كانت كل دراسة مسحية مما يأتي تتبنى عينة متحيزة أو غير متحيزة، وفسّر إجابتك. (الدرس 1-7)

19) قام باحث بإرسال استبانة إلى كل شخص تنتهي بطاقة الأحوال الخاصة به برقم معيّن. غير متحيزة ؛ لأن لكل شخص في المجتمع الفرصة نفسها ليكون في العينة.

20) إيجاد أطوال أعضاء فريق كرة السلة لتحديد المتوسط الحسابي لأطوال طلاب المدرسة. انظر الهامش.

أوجد الضرب الداخلي للمتجهين $\mathbf{u}, \mathbf{v}$ في كل مما يأتي، ثم حدِّد ما إذا كانا متعامدين أو لا. (الدرس 5-5)

21) $\mathbf{u} = \langle 1, 3, 5 \rangle, \mathbf{v} = \langle -8, 1, 1 \rangle$ 0، متعامدان

22) $\mathbf{u} = \langle -2, 4, 6 \rangle, \mathbf{v} = \langle 2, 3, 4 \rangle$ 32، غير متعامدين

23) $\mathbf{u} = \langle 3, 4, 5 \rangle, \mathbf{v} = \langle -1, -3, -5 \rangle$ −40، غير متعامدين

24) $\mathbf{u} = 8\mathbf{i} - 8\mathbf{j} + 3\mathbf{k}, \mathbf{v} = 2\mathbf{i} + 4\mathbf{j} + 6\mathbf{k}$ 2، غير متعامدين

أوجد زوجين مختلفين كل منهما يمثِّل إحداثيين قطبيين لكل نقطة معطاة بالإحداثيّات الديكارتيّة في كلٍّ مما يأتي: (الدرس 6-2)

25) (6, 11) (12.53, 1.07), (−12.53, 4.21)

26) (−9, 2) (9.22, 2.92), (−9.22, 6.06)

27) (3, 1) (3.16, 0.32), (−3.16, 3.46)

تدريب على اختبار

28) **إحصاء:** في مجموعة من تسعة أعداد مختلفة، أي ممّا يأتي لا يؤثّر في الوسيط؟ D

A مضاعفة كل عدد
B زيادة كل عدد بمقدار 10
C زيادة القيمة الصغرى فقط
D زيادة القيمة الكبرى فقط

29) **درجات اختبار:** كانت درجات 5 طلاب اختيروا عشوائيًّا في فصل دراسي كما يلي 55, 45, 30, 50, 70. بيِّن ما إذا كانت هذه البيانات تمثِّل عينة أم مجتمعًا، ثم احسب الانحراف المعياري لدرجاتهم إلى أقرب عدد صحيح. B

A 40
B 15
C 14
D 13

تنويع التعليم

ضمن فوق

توسّع اطلب إلى بعض الطلاب حساب المدى والانحراف المعياري لمجموعات مختلفة كبيرة من البيانات. واسألهم أن يقارنوا القيم، ويبحثوا في مدى إمكانية إعطاء تعميم حول علاقة المدى بالانحراف المعياري . لمجموعات البيانات الكبيرة "المدى يعادل تقريبًا من أربع إلى ست مرات الانحراف المعياري"، وهذا يُعطي قاعدة سريعة لتقدير الانحراف المعياري من معرفة المدى دون المرور بحسابات معقّدة.

الاحتمال المشروط
Conditional Probability

فيما سبق:
درست مفهوم الاحتمال وكيفية حسابه. (مهارة سابقة)

والآن:
- أجد احتمال وقوع حادثة إذا عُلم أن حادثة أخرى قد وقعت.
- أستعمل الجداول التوافقية لإيجاد احتمالات مشروطة.

المفردات:
الاحتمال المشروط
conditional probability
الجدول التوافقي
contingency table
التكرار النسبي
relative frequency

www.obeikaneducation.com

لماذا؟
يختبر هيثم دواءً يقي من بعض الأمراض. وتوجد مجموعتان من الأشخاص إحداهما تجريبية تمّ إعطاء الدواء الحقيقي لأفرادها، بينما تمّ إعطاء دواء شكلي (غير فعّال) للمجموعة الأخرى (المجموعة الضابطة). وبعد الحصول على النتائج، يريد هيثم أن يجد احتمال بقاء المستهدفين أصحاء نتيجة الدواء.
وهذا المثال يُفسّر مفهوم الاحتمال المشروط.

الاحتمال المشروط يُسمّى احتمال وقوع الحادثة B بشرط وقوع الحادثة A، **احتمالًا مشروطًا**. ويرمز له بالرمز $P(B \mid A)$، ويقرأ احتمال وقوع الحادثة B بشرط وقوع الحادثة A.

مفهوم أساسي الاحتمال المشروط

إذا كانت A , B حادثتين غير مستقلتين، فإن الاحتمال المشروط لوقوع الحادثة B، إذا عُلِم أن الحادثة A قد وقعت يعرّف على النحو:

$$P(B \mid A) = \frac{P(A \text{ و } B)}{P(A)}, \quad P(A) \neq 0$$

مثال 1 الاحتمال المشروط

ألقت عبير مكعب أرقام مرةً واحدةً. ما احتمال ظهور العدد 3، علمًا بأن العدد الظاهر فردي؟

توجد 6 نواتج ممكنة من إلقاء مكعب الأرقام مرةً واحدةً.

لتكن A الحادثة التي يكون فيها العدد الظاهر عددًا فرديًا.
ولتكن B الحادثة التي يظهر فيها العدد 3.

$P(A) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$ — 3 نواتج ذات عدد فردي من بين 6 نواتج

$P(A \cap B) = \frac{1}{6}$ — واحد من النواتج الستة فردي ويُمثّل العدد 3

$P(B \mid A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$ — احتمال وقوع الحادثة B علمًا بأن الحادثة A قد وقعت

$= \frac{1}{6} \div \frac{1}{2} = \frac{1}{3}$ — $P(A) = \frac{1}{2}$, $P(A \cap B) = \frac{1}{6}$

احتمال ظهور العدد 3 علمًا بأن العدد الظاهر فردي هو $\frac{1}{3}$.

تحقق من فهمك

1) يحتوي كيس على 52 بطاقة مقسمة إلى أربع مجموعات لكل منها لون من الألوان الآتية: الأحمر والأخضر والأزرق والأصفر، ورقّمت بطاقات كل لون بالأعداد من 1 إلى 13. إذا سحبت نوال بطاقة، فما احتمال أن تحمل هذه البطاقة العدد 13 علمًا بأن ما سحبته كان العدد 11 أو 12 أو 13؟ $\frac{1}{3}$

مصادر الدرس 7-3

المصدر	دون المتوسط	ضمن المتوسط	فوق المتوسط
دليل المعلم	• تنويع التعليم ص (98)	• تنويع التعليم ص (98, 100)	• تنويع التعليم ص (100)
كتاب التمارين	• ص (14)	• ص (14)	• ص (14)
مصادر المعلم للأنشطة الصفية	• تدريبات إعادة التعليم، ص (14) • تدريبات حل المسألة، ص (16)	• تدريبات حل المسألة، ص (16) • التدريبات الإثرائية، ص (17)	• تدريبات حل المسألة، ص (16) • التدريبات الإثرائية، ص (17)

1 التركيز

الترابط الرأسي

ما قبل الدرس 7-3
حساب الاحتمالات.
الدرس 7-3
إيجاد احتمال وقوع حادثة، إذا عُلِم أن حادثة أخرى قد وقعت.
استعمال الجداول التوافقية لإيجاد احتمالات مشروطة.
ما بعد الدرس 7-3
استعمال القانون التجريبي لإيجاد الاحتمالات.

2 التدريس

أسئلة التعزيز
اطلب إلى الطلاب قراءة فقرة "لماذا؟".
واسأل:
- لماذا سُمِّيت المجموعة التجريبية بهذا الاسم؟ لأنه يتم تجريب (تطبيق) المعالجة الحقيقية (دواء، أسلوب تدريسي، ... إلخ) عليها.
- ما أهمية وجود المجموعة الضابطة؟ لمقارنة نتائج الاختبارات عليها بنتائج الاختبارات على المجموعة التجريبية؛ وذلك لمعرفة أثر المعالجة الحقيقية.

الاحتمال المشروط
المثال 1 يبيّن كيفية إيجاد الاحتمال المشروط.

مثال إضافي

1 يحتوي كيس على 52 بطاقة، نصفها لونها أحمر، والنصف الآخر لونه أخضر، إذا كان نصف البطاقات الحمراء تحمل الرقم 1، والنصف الآخر يحمل الرقم 2، وكذلك الحال بالنسبة للبطاقات الخضراء، وسحب جميل بطاقة، فما احتمال أن تحمل الرقم 2، علمًا بأنها حمراء؟ $\frac{1}{2}$

التقويم التكويني

استعمل تدريبات "تحقق من فهمك" بعد كل مثال؛ للتحقق من مدى فهم الطلاب المفاهيم.

الجداول التوافقية

المثالان 2, 3 يبيّنان كيفية استعمال الجداول التوافقية في إيجاد الاحتمالات المشروطة.

مثالان إضافيان

2 جامعات: أُجريت دراسة وسُجِّلت نتائجها في الجدول التالي. أوجد احتمال أن يخطط أحد المشمولين بالدراسة للالتحاق بالجامعة بعد الثانوية العامة علمًا بأنها أنثى.

الالتحاق بالجامعة	العدد	
	ذكور	إناث
نعم	342	376
لا	151	138

0.73 تقريبًا

3 مثال على اختبار:

استعمل البيانات في المثال 3، وأوجد احتمال ألا يكون الطالب ضمن المنتخب الوطني، مع العلم بأنه في السنة الرابعة. D

A 16.6% **C** 50.4%

B 19.8% **D** 83.4%

الجداول التوافقية **الجداول التوافقية** هي جداول تكرارية ذات بعدين، يتم فيها تسجيل بيانات ضمن خلايا، حيث إن كل خلية من خلايا الجدول تُمثّل تكرارًا يسمى **تكرارًا نسبيًّا**، إذ يكون منسوبًا إلى مجموع التكرارات في الجدول، أو منسوبًا إلى مجموع التكرارات في الصف الذي تقع فيه الخلية، أو منسوبًا إلى مجموع التكرارات في العمود الذي تقع فيه الخلية، ويمكن استعمال الجداول التوافقية في إيجاد الاحتمال المشروط.

مثال 2 من واقع الحياة — الجداول التوافقية

مشي: أوجد احتمال أن يكون شخص اختير عشوائيًّا معافى، علمًا بأنه يمارس المشي.

الحالة	عدد الأشخاص	
	يمارس المشي (w)	لا يمارس المشي (Nw)
مريض(S)	1600	1200
معافى(H)	800	400

عدد الأشخاص الكلي في الدراسة 400 + 1200 + 800 + 1600 ويساوي 4000 شخص، ويراد إيجاد احتمال H علمًا بأن W قد وقع.

$$P(H \mid W) = \frac{P(H \text{ و } W)}{P(W)}$$ قانون الاحتمال المشروط

$$= \frac{800}{4000} \div \frac{2400}{4000}$$ $P(H \text{ و } W) = \frac{800}{4000}$, $P(W) = \frac{1600+800}{4000}$

$$= \frac{800}{2400} = \frac{1}{3}$$ بسّط

احتمال أن يكون الشخص معافى، بشرط أنه يمارس المشي هو $\frac{1}{3}$.

إرشادات للدراسة

حل مختصر

يمكن اختصار الحل في المثال 2 باستعمال الجداول التوافقية وفضاء العينة المختصر على النحو الآتي: احتمال أن يكون الشخص معافى بشرط أنه يمارس المشي هو

$$P(H \mid W) = \frac{800}{2400} = \frac{1}{3}$$

تحقق من فهمك

2) أوجد احتمال أن يكون شخص اختير عشوائيًّا معافى، علمًا بأنه لا يمارس المشي. $\frac{1}{4}$

يمكن استعمال الجداول التوافقية لتمثيل أي عدد من الحالات الممكنة.

مثال 3 على اختبار

يوضّح الجدول أدناه عدد الطلاب الجامعيين الذين يمارسون الرياضة بشكل منتظم، إذا اختير طالب عشوائيًّا، فأوجد احتمال أن يكون الطالب ممن هم ضمن المنتخب الوطني، علمًا بأنه في السنة الثالثة.

الرياضيون الجامعيون	سنة أولى	سنة ثانية	سنة ثالثة	سنة رابعة
ضمن المنتخب الوطني(B)	7	22	36	51
ليس ضمن المنتخب الوطني(A)	269	262	276	257

A 11.5% تقريبًا

B 16.6% تقريبًا

C 13.0% تقريبًا

D 19.8% تقريبًا

إرشادات للدراسة

كتابة الاحتمال

تذكر أن الاحتمال يُعبَّر عنه بكسر اعتيادي أو بكسر عشري أو بنسبة مئوية.

اقرأ فقرة الاختبار

تريد معرفة احتمال أن يكون الطالب ممن هم ضمن المنتخب الوطني (B) علمًا بأنه في السنة الثالثة (T). مجموع الطلاب هو 1180 طالبًا.

حُلّ فقرة الاختبار

$$P(B \mid T) = \frac{P(B \cap T)}{P(T)}$$ قانون الاحتمال المشروط

$$= \frac{36}{1180} \div \frac{312}{1180}$$ $P(B \cap T) = \frac{36}{1180}$, $P(T) = \frac{36+276}{1180}$

$$\approx 0.115\,\% \approx 11.5\%$$

الجواب الصحيح A.

تحقق من فهمك

3) أوجد احتمال أن يكون الطالب ممن هم ضمن المنتخب الوطني، علمًا بأنه في السنة الأولى. B

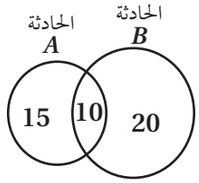
A 2.6% تقريبًا **B** 2.5% تقريبًا **C** 8.4% تقريبًا **D** 7.7% تقريبًا

تنويع التعليم

دون ضمن

إذا كنت ترى أن بعض الطلاب سيستفيدون من استعمال المنظمات البيانية،

فاستعمل أشكال (ڤن) لمساعدتك على حساب الاحتمالات المشروطة من الجداول التوافقية. ولإيجاد $P(B \mid A)$، ارسم الدائرتين المتقاطعتين اللتين تُمثّلان الحادثتين A , B . ثم اكتب العدد الذي يُمثّل منطقة التقاطع إضافة إلى الأعداد في كل من الحادثتين A , B، واللتين تقعان خارج منطقة التقاطع. عندها يكون الاحتمال المطلوب $P(B \mid A)$ مساويًا العدد الذي يُمثّل التقاطع بين A , B مقسومًا على مجموع العددين المكتوبين داخل الدائرة التي تمثّل الحادثة A، فمثلًا في الشكل المجاور:



$$P(B \mid A) = \frac{10}{25}$$

تدرب وحل المسائل

يحتوي كيس على 8 كرات زرقاء، و 6 كرات حمراء، و 10 كرات صفراء، و 6 كرات بيضاء، و 5 كرات خضراء. إذا سُحبت كرة واحدة عشوائيًّا، فأوجد الاحتمال في كل حالة مما يأتي: (مثال 1)

1) أن تكون الكرة خضراء، إذا عُلم أنها ليست زرقاء. $\frac{5}{27}$

2) أن تكون حمراء، إذا عُلم أنها ليست خضراء. $\frac{1}{5}$

3) أن تكون صفراء، إذا عُلم أنها ليست حمراء وليست زرقاء. $\frac{10}{21}$

4) أن تكون خضراء أو بيضاء، إذا عُلم أنها ليست حمراء. $\frac{11}{29}$

5) أن تكون زرقاء، إذا عُلم أنها بيضاء. 0

6) **قطاعات دائرية:** رقّمت قطاعات دائرية متطابقة في قرص من 1 إلى 8، إذا أُدير مؤشر القرص، فما احتمال أن يستقر المؤشر عند العدد 8 إذا عُلِم أنه استقر عند عدد زوجي؟ $\frac{1}{4}$ أو 25 %

7) **فحص القيادة:** يوضّح الجدول أدناه أداء مجموعة من الأشخاص في فحص القيادة، علمًا بأن بعضهم أخذ حصصًا تدريبية تحضيرًا للفحص، والبعض الآخر لم يأخذ. إذا اختير أحد الأشخاص عشوائيًّا، فأوجد احتمال كل مما يأتي: (مثال 2)

	أخذ حصصًا	لم يأخذ حصصًا
ناجح	64	48
راسب	18	32

a) الشخص ناجح علمًا بأنه أخذ حصصًا. $\frac{32}{41}$

b) الشخص راسب علمًا بأنه لم يأخذ حصصًا. $\frac{2}{5}$

c) لم يأخذ حصصًا، علمًا بأنه ناجح. $\frac{3}{7}$

8) **دروس التقوية:** سجّلت مدرسة أعداد طلاب الصفين الثاني المتوسط والثالث المتوسط المشتركين وغير المشتركين في دروس التقوية. إذا اختير أحد الطلاب عشوائيًّا، فأوجد احتمال كل ممّا يأتي:

	مشارك	غير مشارك
الثاني المتوسط	156	242
الثالث المتوسط	312	108

a) الطالب مشارك في التقوية علمًا بأنه في الصف الثاني المتوسط. $\frac{78}{199}$

b) الطالب غير مشارك في التقوية علمًا بأنه في الصف الثالث المتوسط. $\frac{9}{35}$

c) الطالب في الصف الثاني المتوسط علمًا بأنه غير مشارك. $\frac{121}{175}$

9) **اختيار من متعدد:** يُبيّن الجدول أدناه أعداد الطلاب الذين حضروا مباراة كرة قدم، والذين تغيَّبوا عنها من السنوات الجامعية الأولى والثانية والثالثة والرابعة. إذا اختير أحد الطلاب عشوائيًّا، فأوجد احتمال أن يكون قد حضر المباراة علمًا بأنه من السنة الثالثة. C (مثال 3)

	أولى	ثانية	ثالثة	رابعة
الحضور	48	90	224	254
الغياب	182	141	36	8

A 48.6% تقريبًا

B 77.6% تقريبًا

C 86.2% تقريبًا

D 91.6% تقريبًا

10) **اختيار من متعدد:** يقارن عادل وإبراهيم وسعود مجموعة أمثال شعبية جمعوها. وتم تمثيل ذلك وفق الجدول المجاور. إذا اختير مثل مما جمعوه عشوائيًّا، فأوجد احتمال أن يكون المثل اجتماعيًّا، علمًا بأنه ليس مما جمعه عادل. D

	فكاهي	اجتماعي	خليط
عادل	521	316	44
إبراهيم	119	145	302
سعود	244	4	182

A 35.9% تقريبًا

B 24.8% تقريبًا

C 17.2% تقريبًا

D 15% تقريبًا

إذا ألقيت أربع قطع نقد متمايزة مرةً واحدة، فأجب عمّا يأتي:

11) ما احتمال ظهور شعارين، علمًا بوجود كتابة على قطعة واحدة على الأقل؟ $\frac{2}{5}$

12) ما احتمال ظهور 3 كتابات علمًا بوجود شعار واحد على الأقل؟ $\frac{4}{15}$

13) ما احتمال عدم ظهور أي شعار علمًا بأنه توجد كتابة واحدة على الأقل؟ $\frac{1}{15}$

14) ما احتمال عدم ظهور أي كتابة علمًا بأنه يوجد 3 شعارات على الأقل؟ $\frac{1}{5}$

التعليم باستعمال التقنيات

السبورة التفاعلية

ارسم مخطّط الرسم الشجري على السبورة التفاعلية؛ لتوضّح للطلاب كيفية إيجاد الاحتمال المشروط. واحفظ عملك وأرسل المخطط إلى الطلاب؛ ليكون مرجعًا لهم.

المحتوى الرياضي

الاحتمال المشروط إذا تغيّر احتمال الحادثة B عند وقوع الحادثة A، فلا بد من استعمال الاحتمال المشروط مع الحادثة B. إن وقوع الحادثة A يُنظر إليه وكأنه قلّص فضاء العينة إلى الحادثة B.

3 التدريب

التقويم التكويني

استعمل الأسئلة 9-1 للتأكد من فهم الطلاب، ثم استعمل الجدول أسفل هذه الصفحة؛ لتعيين الواجبات المنزلية للطلاب بحسب مستوياتهم.

تنويع الواجبات المنزلية

دون ضمن فوق

المستوى	الأسئلة
دون دون المتوسط	9–1 ، 15–13 ، 26–18
ضمن ضمن المتوسط	15–1 فردي، 26–18
فوق فوق المتوسط	27–9

4 التقويم

بطاقة مكافأة ضع جدولًا توافقيًّا على السبورة، يتم من خلاله مقارنة الذين يرتدون أثوابًا بيضاء بالذين يرتدون أثوابًا ذوات ألوان أخرى، مع خاصية أخرى مثل الرياضة المدرسية التي يشاركون فيها، أو النادي العلمي الذي ينتمون إليه. واطلب إليهم كتابة احتمالات مشروطة معتمدين على هذا الجدول التوافقي.

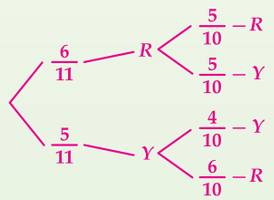
إرشادات للمعلم الجديد

تبرير ذكّر الطلاب أن استعمال خاصية الإبدال وخاصية التجميع والبحث عن أزواج من الأعداد، يجعل العمليات الحسابية أسهل.

إجابات:

18) إجابة ممكنة: عندما تكون الحادثتان A و B مستقلتين، فإن احتمال حدوث إحداهما لا يؤثّر في حدوث الأخرى. فمثلًا: إلقاء حجر النرد لا يؤثّر في سحب بطاقة. فاحتمال سحب البطاقة التي تحمل الرقم 3 من بين بطاقات مرقمة علمًا بأن الرقم 3 ظهر على حجر النرد يكافئ احتمال سحب الرقم 3 من البطاقات فقط. أي أن $P(A \mid B) = P(A)$. وعندما تكون الحادثتان غير مستقلتين يطبق الاحتمال المشروط. فمثلًا: احتمال سحب البطاقة التي تحمل الرقم 3 دون إرجاع يؤثّر في احتمال سحب بطاقة أخرى، حيث يقل فضاء العينة.

19) إجابة ممكنة: صندوق به 11 كرة، منها 6 حمراء وَ 5 صفراء. سحب كرتان على التوالي دون إرجاع، استعمل الرسم الشجري لبيان الاحتمالات جميعها.



لاحظ أن المرحلة الثانية تمثّل الاحتمال المشروط فمثلًا احتمال أن تكون الكرة الثانية حمراء علمًا بأن الأولى حمراء هو $\frac{5}{10}$

21) إجابة ممكنة :

الصف	هندسة	طب
سنة أولى	6	9
سنة ثانية	8	5

احتمال أن يكون من كلية الطب علمًا بأنه في السنة الجامعية الأولى يساوي $\frac{3}{5}$

15) بطاقات: يحتوي صندوق على 52 بطاقة مقسَّمة إلى أربع مجموعات لكل منها لون من الألوان الآتية: الأحمر، والأسود، والأخضر، والأزرق، ورُقِّمت بطاقات كل لون من 1 إلى 13. إذا سُحبت بطاقة واحدة عشوائيًّا، فما احتمال أن تحمل البطاقة الرقم 9 علمًا بأنها حمراء اللون؟ $\frac{1}{13}$

16) يبين الجدول أدناه أعداد الألعاب الإلكترونية الموجودة لدى شخص. إذا اختيرت لعبة عشوائيًّا فأوجد كلًّا من الاحتمالين الآتيين:

اللعبة	العدد
كرة قدم	5
كرة سلة	2
مصارعة	6
سباق سيارات	4
أخرى	3

a) أن تكون من ألعاب المصارعة علمًا بأنها ليست من ألعاب كرة القدم. $\frac{2}{5}$

b) أن تكون من ألعاب سباق السيارات علمًا بأنها ليست من ألعاب كرة السلة وليست من ألعاب المصارعة. $\frac{1}{3}$

مسائل مهارات التفكير العليا

17) تحدٍّ: ألقي مكعب مرقم من 1 إلى 6 خمس مرات متتالية. ما احتمال ظهور الرقم 2 في الرميات الخمس علمًا بأن الرقم 2 ظهر في الرميات الثلاث الأولى؟ **0.25%**

18) اكتب: فسّر الاختلاف بين الاحتمال المشروط لحوادث غير مستقلة، والاحتمال المشروط لحوادث مستقلة. أعطِ مثالًا لكل نوع. **انظر الهامش.**

19) تبرير: إذا مُثِّل احتمال حادثة مركبة من حادثتين بالرسم الشجري (شجرة الاحتمال)، فأي فروع الرسم الشجري يمثّل الاحتمال المشروط. أعط مثالًا لموقف يمكن تمثيله بشجرة احتمال ثم مثّله. **انظر الهامش.**

20) تبرير: إذا رُميت قطعة نقد بشكل حر 21 مرة متتالية، فما احتمال أن تظهر الصورة في الرمية 21، إذا علمت أن الصورة ظهرت في الرميات العشرين الأولى؟ وضّح تبريرك.
إجابة ممكنة: 50%؛ ليس للرميات السابقة تأثير في الرمية 21، فهي حوادث مستقلة.

21) مسألة مفتوحة: كوِّن جدولًا توافقيًّا، واحسب احتمالًا مشروطًا يرتبط بالجدول. **انظر الهامش.**

مراجعة تراكمية

22) استعمل مسطرة ومنقلة، لرسم متجه يمثّل $\mathbf{v} = 20\,\text{km/h}$، باتجاه 60° مع الأفقي. **(الدرس 1-5)** **انظر الهامش.**

23) ثقافة مالية: يوضّح الجدول أدناه دخل 12 شركة في الأسبوع الأول من شهر محرم عام 1433هـ بالريال. **(الدرس 2-7)**

الدخل لكل شركة بالريال		
25778	25698	25200
23858	25580	27828
29173	22861	32903
27870	27124	23995

a) أوجد كلًّا من المتوسط الحسابي والوسيط.
المتوسط 26489 ريالًا، والوسيط 25738 ريالًا

b) بيِّن ما إذا كانت هذه البيانات تمثل عينة أم مجتمعًا، ثم أوجد الانحراف المعياري للبيانات وقرّبه إلى أقرب جزءٍ من مئة.
2736.46 ريالًا

c) لنفترض أن تقريرًا عن الشركات المذكورة ذكر أن القيمة 22861 ريالًا كانت خطأً، وهي في الحقيقة 24861. فكيف يتأثّر كل من المتوسط والوسيط بهذا التعديل؟
يزداد المتوسط ليصل إلى 26655.67 ويبقى الوسيط كما هو.

حدّد ما إذا كانت كل دراسة مسحية مما يأتي، تتبنى عينة متحيزة، أو غير متحيزة. وفسّر إجابتك. **(الدرس 1-7)**
انظر الهامش.

24) دراسة مسحية تتناول موظفي مطعم، لتقرر أكثر الأطباق شعبية.

25) دراسة مسحية تتناول رأي مرتادي مكاتب البريد، لمعرفة أكثر ألوان السيارات شيوعًا. **غير متحيزة؛ لأن لكل شخص في مجتمع الدراسة فرصة متساوية لأن يكون ضمن عينة الدراسة التي استطلعت آراؤهم.**

تدريب على اختبار

26) إذا كانت A , B حادثتين في فضاء العينة لتجربة عشوائية ما، بحيث كان $P(A) = 0.2,\ P(B) = 0.5,\ P(A \cup B) = 0.4$، فما قيمة $P(A \mid B)$؟ **A**

A 0.6
B 0.7
C 0.8
D 0.9

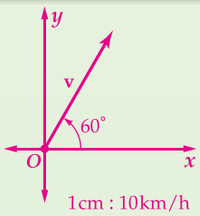
27) سحبت كرة بشكل عشوائي من كيس يحتوي على كرتين حمراوين و3 زرقاء دون إرجاع وكانت زرقاء. ما احتمال سحب كرة زرقاء ثانية؟ $\frac{1}{2}$

تنويع التعليم

ضمن فوق

توسّع يمكن إيجاد احتمال وقوع الحادثتين A , B معًا بضرب احتمال كل منهما، إذا كانتا مستقلتين. ولكن إذا لم تكونا مستقلتين فلا بد من استعمال الاحتمال المشروط لأحدهما، حيث إن $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B \mid A)$. استعمل هذا القانون لإيجاد احتمال سحب بطاقتين دون إرجاع الأولى تحمل الرقم 5، والثانية تحمل الرقم 6، من 52 بطاقة مقسمة إلى أربع مجموعات، لكل منها لون من الألوان الآتية: الأحمر، الأسود، الأخضر، الأزرق، ورقّمت بطاقات كل لون من 1 إلى 13.. $\frac{4}{52} \times \frac{4}{51} = \frac{4}{663} \approx 0.006$

22) إجابة ممكنة :



24) متحيزة ؛ لأن الأشخاص الذين تم مسح رأيهم قد يظنون أن الأطباق التي يقدمها المطعم هي الأكثر شعبية.

حدد ما إذا كانت كل دراسة مسحية فيما يأتي تتبنى عينة متحيزة أو غير متحيزة، وفسّر إجابتك. (الدرس 1-7) **انظر الهامش.**

1) يتم اختيار كل ثاني شخص يخرج من مجمع تجاري يبيع بالجملة؛ لمعرفة عدد الأطفال في الأُسَر في تلك المدينة.

2) يتم اختيار كل عاشر موظف يخرج من شركة؛ لمعرفة رأي الموظفين في عملهم.

3) سؤال كل خامس طالب يدخل المدرسة عن مواصفات المعلم المثالي.

4) **اختيار من متعدد:** حدّد أيًّا من العبارات الآتية توضح السببية: (الدرس 1-7) D

A إذا تدرّبت كل يوم، فستصبح لاعبًا محترفًا في كرة السلة.

B إذا قرأت كتابك المقرر، فستنجح في الاختبار.

C إذا تقدّمت لعشر وظائف مختلفة، فستتلقى عرضًا من واحدة على الأقل.

D إذا وقفت بالخارج تحت المطر من دون مظلة، فستبتل.

حدد ما إذا كانت كل من الحالتين الآتيتين تمثّل دراسة تجريبية أو دراسة قائمة على الملاحظة. وإذا كانت دراسة تجريبية، فحدد المجموعة التجريبية والمجموعة الضابطة. (الدرس 1-7)

5) اختر 250 طالبًا في المرحلة المتوسطة نصفهم من المدارس الأهلية، وقارن بين عاداتهم الدراسية. **دراسة قائمة على الملاحظة**

6) خَصِّص لنصف الموظفين الذين اختيروا بطريقة عشوائية ساعة لتناول الغداء، وقارن اتجاهاتهم نحو العمل مع بقية زملائهم. **انظر الهامش.**

7) أي مقاييس النزعة المركزية تصف بصورة أفضل البيانات الآتية؟ ولماذا؟ (الدرس 2-7) **انظر الهامش.**

عدد سنوات الخبرة						
2	1	4	2	3	2	2
1	2	4	3	1	3	2
4	1	3	2	3	2	3
0	1	1	1	4	3	2
3	2	2	2	1	2	1

8) يحاول باحث أن يحدد أثر إضاءة نوع جديد من المصابيح الكهربائية على أزهار للزينة المنزلية، حيث قام بتعريض مجموعة من الأزهار لإضاءة المصابيح الجديدة، ومجموعة أخرى لإضاءة المصابيح العادية. ويبيّن الجدول أدناه أعداد الأزهار التي عاشت أو ماتت في المجموعتين.

	إضاءة جديدة	إضاءة عادية
عاشت	24	17
ماتت	6	13

إذا اختيرت زهرة منها عشوائيًّا، فما احتمال: (الدرس 3-7)

a) أن تكون من الأزهار التي تعرضت لإضاءة المصابيح الجديدة علمًا بأنها عاشت؟ $\frac{24}{41}$

b) أن تكون من الأزهار التي عاشت علمًا بأنها تعرضت لإضاءة المصابيح العادية؟ $\frac{17}{30}$

إذا ألقي مكعب مرقّم من 1 إلى 6 مرة واحدة، فما احتمال كل مما يأتي: (الدرس 3-7)

9) ظهور عدد فردي علمًا بأن العدد الظاهر أكبر من 3. $\frac{1}{3}$

10) ظهور العدد 4 علمًا بأن العدد الظاهر كان زوجيًّا. $\frac{1}{3}$

11) **اختيار من متعدد:** في القرص ذي المؤشر الدوار المقسم إلى (16) قطاعًا متطابقًا، ومرقمة بالأعداد 16–1، ما احتمال استقرار المؤشر على عدد فردي، إذا علم أنه استقر على عدد أكبر من 3؟ (الدرس 3-7) D

A $\frac{13}{16}$

B $\frac{8}{16}$

C $\frac{8}{13}$

D $\frac{6}{13}$

الدروس من 1-7 إلى 3-7

التقويم التكويني

استعمل اختبار منتصف الفصل؛ للتحقق من مدى فهم الطلاب. وللأسئلة التي لم يجيبوا عنها بشكل صحيح، اطلب إلى الطلاب مراجعة الدروس المشار إليها بعد كل سؤال.

التقويم الختامي

اختبار منتصف الفصل، ص (51)

إجابات:

1) متحيزة؛ لأن الذين تم استطلاع آرائهم يكون لديهم أطفال أكثر من غيرهم في العادة.

2) غير متحيزة؛ لأن مجتمع الدراسة هو الموظفون في الشركة، ولكل موظف الفرصة نفسها لأن يكون في العينة.

3) غير متحيزة؛ طلاب المدرسة جميعهم يشكلّون المجتمع، وكل طالب له الفرصة نفسها لأن يكون في العينة.

6) دراسة تجريبية: المجموعة التجريبية هي النصف الذي حصل على ساعة لتناول الغداء. والمجموعة الضابطة هي النصف الآخر من الموظفين.

7) المتوسط، لا يوجد قيم متطرّفة في البيانات.

مخطط المعالجة

المستوى 1	ضمن المتوسط	المستوى 2	دون المتوسط
إذا	أخطأ بعض الطلاب في 25% تقريبًا من الأسئلة	إذا	أخطأ بعض الطلاب في 50% تقريبًا من الأسئلة
فاختر	أحد المصدرين الآتيين:	فاختر	المصدر الآتي:
كتاب الطالب	الدروس 7-3 ,7-2 ,7-1	زيارة الموقع	www.obeikaneducation.com
دليل المعلم	مشروع الفصل، ص (86)		

1 التركيز

الترابط الرأسي

ما قبل الدرس 7-4

إيجاد احتمال وقوع حادثة إذا عُلم أن حادثة أخرى قد وقعت.

الدرس 7-4

إيجاد الاحتمالات باستعمال التباديل والتوافيق.

إيجاد الاحتمالات باستعمال المتغيرات العشوائية.

تكوين تمثيلات بيانية للتوزيعات الاحتمالية واستعمالها.

ما بعد الدرس 7-4

تكوين تمثيل بياني للتوزيع ذي الحدين واستعماله.

2 التدريس

أسئلة التعزيز

اطلب إلى الطلاب قراءة فقرة "لماذا؟".

واسأل:

- بكم طريقة يمكنك اختيار 3 أشخاص من بين 8 أشخاص؟ 56
- بكم طريقة يمكنك اختيار 4 أشخاص من بين 18 شخصًا؟ 3060

الاحتمال

المثال 1 يبيّن كيفية استعمال التوافيق في إيجاد الاحتمالات.

7-4 الاحتمال والتوزيعات الاحتمالية

Probability and Probability Distributions

فيما سبق:
درست إيجاد احتمال وقوع حادثة إذا علم أن حادثة أخرى قد وقعت. (الدرس 3–7)

والآن:
- أجد الاحتمالات باستعمال التباديل والتوافيق.
- أجد الاحتمالات باستعمال المتغيرات العشوائية.
- أمثّل بيانيًا التوزيعات الاحتمالية وأستعملها.

المفردات:

النجاح
success

الفشل
failure

المتغير العشوائي
random variable

المتغير العشوائي المنفصل
discrete random variable

التوزيع الاحتمالي
probability distribution

التوزيع الاحتمالي المنفصل
discrete probability distribution

الاحتمال النظري
theoretical probability

الاحتمال التجريبي
experimental probability

القيمة المتوقعة
expected value

www.obeikaneducation.com

تنبيه!

احتمال النجاح والفشل
لاحظ أن الحرف الصغير s يدل على عدد مرات النجاح في وقوع حادثة، بينما الحرف الكبير S يدل على حادثة النجاح، وكذلك الأمر بالنسبة للحرفين f و F.

لماذا؟

افترض أن شركة لديها 4 شواغر، وتشترط لتعيين الموظفين لديها اجتيازهم لمقابلة شخصية. إذا تقدم للشركة 8 أشخاص من المنطقة A، و 10 أشخاص من المنطقة B، وتمت مقابلة المتقدمين، واختير 4 منهم بشكل عشوائي، فما احتمال أن يفوز بالوظائف 3 أشخاص من المنطقة A وشخص واحد من المنطقة B؟

الاحتمال تسمى النسبة التي تقيس فرصة وقوع حادثة معيَّنة احتمالًا. ووقوع الشيء المرغوب فيه يُسمّى **نجاحًا**، وعدم وقوعه يُسمّى **فشلًا**. ومجموعة النواتج الممكنة تُسمّى فضاء العينة. وكلما اقترب احتمال وقوع حادثة من 1، كانت فرصة أو إمكانية وقوعها أكبر.

مفهوم أساسي **احتمال النجاح والفشل**

إذا كان عدد مرات نجاح وقوع حادثة S من المرات، وعدد مرات فشل وقوع الحادثة نفسها f من المرات، فإن احتمال النجاح يُكتب على النحو $P(S)$، كما يُكتب احتمال الفشل على النحو $P(F)$. ويُعطى كل من احتمال النجاح واحتمال الفشل بالصيغتين الآتيتين:

$$P(S) = \frac{s}{s+f} \quad , \quad P(F) = \frac{f}{s+f}$$

لاحظ أن الصيغة: $P(S) = \frac{s}{s+f}$ لا تختلف في مضمونها عن الصيغة: $P(\text{الحادثة}) = \frac{\text{عدد النواتج في الحادثة}}{\text{عدد النواتج الممكنة}}$

مثال 1 **الاحتمال باستعمال التوافيق**

رشّحت مدرسة 12 طالبًا من الصف الثاني الثانوي، و 16 طالبًا من الصف الأول الثانوي للتنافس على 6 جوائز؛ نظرًا لتفوقهم الدراسي. إذا تمت مقابلة المرشحين في اليوم الأول، واختير 6 منهم بشكل عشوائي، فما احتمال أن يفوز بالجوائز 3 طلاب من الصف الأول الثانوي و 3 طلاب من الصف الثاني الثانوي؟

الخطوة 1 حدّد عدد مرات النجاح s

عدد طرق اختيار 3 طلاب من الصف الثاني هو $_{12}C_3$

عدد طرق اختيار 3 طلاب من الصف الأول هو $_{16}C_3$

استعمل التوافيق، ومبدأ العد الأساسي لإيجاد عدد النجاحات s.

$$_{12}C_3 \cdot {}_{16}C_3 = \frac{12!}{9!\,3!} \cdot \frac{16!}{13!\,3!} = 123200$$

الخطوة 2 حدّد عدد النواتج الممكنة (عدد عناصر فضاء العينة)، $s+f$.

$$s+f = {}_{28}C_6 = \frac{28!}{22!\,6!} = 376740$$

الخطوة 3 أوجد الاحتمال

$P(\text{فوز 3 من الأول و3 من الثاني}) = \frac{s}{s+f}$ احتمال النجاح

$= \frac{123200}{376740}$ $s = 123200,\ s+f = 376740$

≈ 0.327016 استعمل الآلة الحاسبة

احتمال فوز 3 طلاب من الصف الأول و3 من الصف الثاني هو تقريبًا 0.33 أو 33%.

مصادر الدرس 7-4

المصدر	دون المتوسط	ضمن المتوسط	فوق المتوسط
دليل المعلم	• تنويع التعليم ص (103)	• تنويع التعليم ص (103)	• تنويع التعليم ص (103, 106)
كتاب التمارين	• ص (15)	• ص (15)	• ص (15)
مصادر المعلم للأنشطة الصفية	• تدريبات إعادة التعليم، ص (18) • تدريبات حل المسألة، ص (20)	• تدريبات حل المسألة، ص (20) • التدريبات الإثرائية، ص (21)	• تدريبات حل المسألة، ص (20) • التدريبات الإثرائية، ص (21)

تحقق من فهمك

1) في المثال 1 إذا كان عدد الذين رُشِّحوا من الصف الثاني الثانوي 3، ومن الصف الأول الثانوي 11، وكان عدد الجوائز 4، واختير 4 طلاب من الذين رُشِّحوا بطريقة عشوائية، فما احتمال أن يفوز طالبان من الصف الثاني وطالبان من الصف الأول؟ **16.5% تقريبًا**

مثال 2 من واقع الحياة — الاحتمال باستعمال التباديل

لدى صالح 6 أصدقاء تبدأ أسماؤهم بالأحرف A , B , C , D , E , F، ويتوقع من كل منهم اتصالًا هاتفيًا للاتفاق على موعد رحلة ينوون القيام بها. ما احتمال أن يتصل A أولًا ثم B ثانيًا، ويتصل كل من D, E , F أخيرًا.

الخطوة 1 حدِّد عدد مرات النجاح s.

عدد طرق اتصال A أولًا ثم B ثانيًا هو 1

عدد طرق اتصال كل من D , E , F في الأخير هو $_3P_3$

استعمل التباديل ومبدأ العد الأساسي لإيجاد s.

$$s = 1 \cdot {}_3P_3 = 1 \cdot 3! = 6$$

الخطوة 2 أوجد عدد النواتج الممكنة (عدد عناصر فضاء العينة)، $s + f$.

$s + f = {}_6P_6 = 6! = 720$ ، وتمثل عدد الترتيبات الممكنة لاتصالات الأصدقاء الستة.

الخطوة 3 أوجد الاحتمال.

$$P(S) = \frac{s}{s+f}$$ احتمال النجاح

$$= \frac{6}{720}$$ $s = 6 , s+f = 720$

$$\approx 0.0083$$ استعمل الآلة الحاسبة

الاحتمال المطلوب هو تقريبًا 0.008 أو 0.8% تقريبًا.

تحقق من فهمك

2) سباق: اشترك صلاح، وعبد اللّه، وسليم في سباق 400 m مع خمسة رياضيين آخرين. ما احتمال أن ينهي هؤلاء الثلاثة السباق في المراكز الثلاثة الأولى؟ $\frac{1}{56}$ **أو 2% تقريبًا**

المتغير العشوائي والتوزيع الاحتمالي يُسمى المتغير الذي يأخذ مجموعة قيم لها احتمالات معلومة **متغيرًا عشوائيًا**. والمتغير العشوائي الذي له عدد محدود من القيم يُسمى **متغيرًا عشوائيًا منفصلاً**.

التوزيع الاحتمالي هو دالة تربط بين كل قيمة من قيم المتغير العشوائي، مع احتمال وقوعها، ويعبر عنه بجدول أو معادلة، أو تمثيل بياني. ويجب أن يحقق التوزيع الاحتمالي الشرطين الآتيين:

- احتمال كل قيمة من قيم X محصور بين 0 و 1، أي أن $0 \le P(X) \le 1$.
- مجموع كل احتمالات قيم X يساوي 1، أي أن $\sum P(X) = 1$.

والتوزيع الاحتمالي المنفصل هو توزيع احتمالي متغيره العشوائي منفصل.

فعند رمي قطعتي نقد متمايزتين مرَّةً واحدة، فإن فضاء العينة هو {TT, TL, LT, LL} ، حيث يُمثّل L الوجه الذي يحمل الشعار، و T الوجه الذي يحمل الكتابة، إذا كان X متغيرًا عشوائيًا يدل على عدد مرات ظهور الشعار، فإن X يأخذ القيم 0, 1, 2 . ويمكنك حساب الاحتمال النظري لعدم الحصول على شعار، أو الحصول على شعار واحد، أو الحصول على شعارين، ثم تكوين جدول يمثّل التوزيع الاحتمالي، كما يمكنك تمثيله بيانيًا كما يأتي:

مراجعة المفردات

التباديل والتوافيق
عند اختيار مجموعة من الأشخاص أو الأشياء بترتيب معيّن، فإن الاختيار يُسمّى تبديلًا، وعندما لا نهتم بعملية ترتيب الأشخاص أو الأشياء، فإن الاختيار يُسمّى توفيقًا.

إرشادات للدراسة

البيانات المنفصلة والبيانات المتصلة
تكون البيانات منفصلة إذا أمكن عدّ البيانات مثل عدد الأرانب في مزرعة. وتكون البيانات متصلة إذا كانت تأخذ أي قيمة في فترة من الأعداد الحقيقية، فمثلاً أطوال جميع أفراد العينة تمثل بيانات متصلة.

الاحتمال باستعمال التباديل

المثال 2 يبيّن كيفية استعمال التباديل في إيجاد الاحتمالات.

التقويم التكويني

استعمل تدريبات "تحقق من فهمك" بعد كل مثال؛ للتحقق من مدى فهم الطلاب للمفاهيم.

مثالان إضافيان

1 لدى بثينة 26 كتابًا، منها 16 قصة والبقية كتب أخرى، إذا أخذت معها في رحلة 8 كتب اختارتها بصورة عشوائية، فما احتمال أن يكون بين هذه الكتب 4 قصص، و4 كتب أخرى ؟

0.24464 تقريبًا أو 24.5%

2 اختارت عائشة التي تدرس في الجامعة المساقات الآتية : (لغة إنجليزية، لغة عربية، علوم، فقه، أصول الدين). إذا حدّد البرنامج عشوائيًّا ترتيب هذه المساقات، وكان لهذه المساقات الفرصة نفسها لتكون في أي وقت من اليوم، فما احتمال أن يكون أول درسين لعائشة هما اللغة العربية، وأصول الدين مهما كان ترتيب هذين المساقين؟ $\frac{1}{10}$

تنويع التعليم

دون ضمن فوق

المتعلمون الاجتماعيون لقد نشأ علم الاحتمال في بداياته من المقامرة. ومع أن هذه الفكرة غير مقبولة في التربية الإسلامية، إلّا أن استعمال هذا العلم في الوقت الحاضر، هو في مجالات كثيرة وذات فائدة، مثل مجال الطب ومجال الأرصاد الجوية.

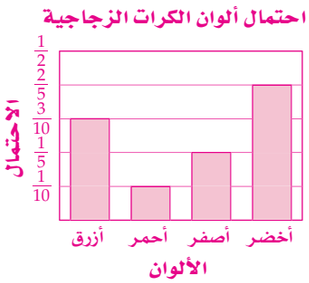
الاحتمال

المثال 3 يبيّن كيفية استعمال التمثيل البياني أو الجدول لتوضيح التوزيع الاحتمالي.

مثال إضافي

3 يحتوي كيس على 10 كرات زجاجية، منها 3 زرقاء، وواحدة حمراء، وكرتان صفراوان، و 4 كرات خضراء. إذا سحبت كرة عشوائيًّا، فأجب عما يأتي:

a) مثِّل بالأعمدة هذا التوزيع الاحتمالي:



b) استعمل التمثيل البياني؛ لتُحدّد أي ناتج يكون له أكبر إمكانية للوقوع. وما احتماله؟ الأخضر، $\frac{2}{5}$

c) ما احتمال سحب كرة حمراء أو زرقاء؟ $\frac{2}{5}$

التعليم باستعمال التقنيات

السبورة التفاعلية

حدِّد طالبين ليحلا مثالًا على التوزيعات الاحتمالية أمام طلاب الفصل، اطلب إلى أحدهما أن يكوّن تمثيلًا بالأعمدة للتوزيع الاحتمالي، واطلب إلى الآخر أن يبيّن كيفية إيجاد احتمالات قيم المتغير العشوائي على التمثيل بالأعمدة.

قراءة الرياضيات

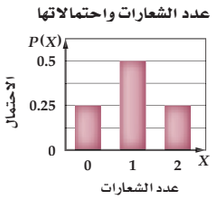
احتمالات المتغيرات العشوائية

يقرأ الرمز $P(1)$ احتمال أن يكون المتغير العشوائي X مساويًا لـ 1.

$P(0)=\frac{1}{4}$ ، $P(1)=\frac{1}{2}$ ، $P(2)=\frac{1}{4}$

يُبيّن الجدول أدناه والتمثيل بالأعمدة المجاور التوزيع الاحتمالي للمتغير X.

عدد الشعارات X	0	1	2
الاحتمال $P(X)$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$



مثال 3 التوزيع الاحتمالي المنفصل

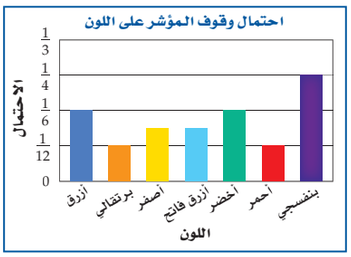
إرشادات للدراسة

البيانات الوصفية

يمكننا أن نتعامل مع البيانات الوصفية بوصفها متغيرات عشوائية منفصلة.

يوضّح القرص ذو المؤشر الدوّار توزيعًا احتماليًّا، حيث يمكن أن يتوقّف المؤشر على أيٍّ من القطاعات الملونة، وقد كتب على كل قطاع احتمال ظهوره (لاحظ أن مجموع الاحتمالات يساوي 1).

a) مثِّل بالأعمدة هذا التوزيع الاحتمالي:



b) استعمل التمثيل بالأعمدة؛ لتحدّد اللون الأكبر إمكانية لوقوف المؤشر عنده، ثم أوجد احتماله.

أكثر الألوان إمكانية لوقوف المؤشر عنده هو اللون البنفسجي، واحتماله يساوي $\frac{1}{4}$.

c) أوجد (أخضر أو أزرق) P.

احتمال التوقّف عند اللون الأزرق أو الأخضر هو $\frac{1}{6}+\frac{1}{6}=\frac{1}{3}$.

تنبيه!

احتمال الحوادث المتنافية

تذكر أنه إذا كانت A و B حادثتين متنافيتين، فإن $P(A \text{ أو } B)=P(A)+P(B)$.

تحقق من فهمك

يوضح الجدول أدناه توزيعًا احتماليًّا، حيث أُلقي مكعبان مرقمان من 1 إلى 6 مرة واحدة، وسُجّل مجموع العددين الظاهرين على الوجهين العلويين واحتمال كلٍّ منها.

المجموع	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
الاحتمال	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{18}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{18}$	$\frac{1}{36}$

3A) مثِّل بالأعمدة هذا التوزيع الاحتمالي. انظر الهامش.

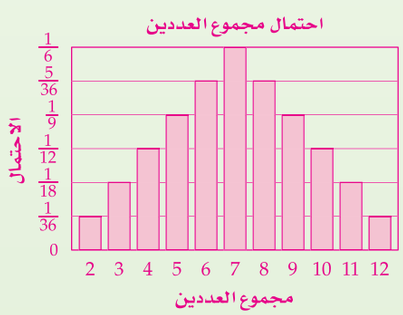
3B) استعمل التمثيل بالأعمدة؛ لتحدد الناتج الأكثر إمكانية للوقوع؟ ثم أوجد احتماله. 7, $\frac{1}{6}$

3C) أوجد P (11 أو 5). $\frac{1}{6}$

إن الاحتمالات التي تمت دراستها هنا هي **احتمالات نظرية**؛ لأنها مبنية على افتراضات يتوقّع الحصول عليها، بينما **الاحتمالات التجريبية** يتم تقديرها من عدد من التجارب. **والقيمة المتوقعة أو التوقع** $E(X)$ هي المتوسط الموزون للقيم في التوزيع الاحتمالي المنفصل؛ أي أن القيمة المتوقعة $E(x)$ هي مجموع حواصل ضرب قيم المتغير العشوائي X في احتمال كل منها $P(X)$، ويمكن إيجادها باستعمال القانون $E(X)=\sum_{i=1}^{i=n} Xi.P(Xi)$، وتنتج هذه القيمة من خلال اعتماد الاحتمال النظري كوزن للمتغير العشوائي. ويخبرك بما يمكن حدوثه على المدى البعيد، وذلك بعد محاولات كثيرة.

إجابة (تحقق من فهمك):

3A)



إرشادات للدراسة

قانون الأعداد الكبيرة

ينص قانون الأعداد الكبيرة على أنه كلما ازداد عدد مرات إجراء التجربة، اقتربت قيمة معدل القيم الناتجة من القيمة المتوقعة.

مـثال 4 القيمة المتوقّعة

أوجد القيمة المتوقّعة عند رمي مكعب مرقم من 1 إلى 6 مرة واحدة.

القيمة المتوقعة $E(X)$ هي مجموع حواصل ضرب قيم المتغير العشوائي X في احتمال كلٍّ منها $P(X)$.

$$E(X) = 1\left(\frac{1}{6}\right) + 2\left(\frac{1}{6}\right) + 3\left(\frac{1}{6}\right) + 4\left(\frac{1}{6}\right) + 5\left(\frac{1}{6}\right) + 6\left(\frac{1}{6}\right)$$ عوّض في قانون المتوسط الموزون

$$= \frac{1}{6} + \frac{2}{6} + \frac{3}{6} + \frac{4}{6} + \frac{5}{6} + \frac{6}{6}$$ اضرب

$$= \frac{21}{6} = 3.5$$ اجمع

تحقق من فهمك

4) أوجد القيمة المتوقّعة عند رمي مكعبين مرقمين مرة واحدة، وتسجيل مجموع العددين الظاهرين على الوجهين العلويين. $2 \times \frac{1}{36} + 3 \times \frac{2}{36} + 4 \times \frac{3}{36} + \ldots + 12 \times \frac{1}{36} = 7$

تدرب وحل المسائل

1) صندوق فيه 10 كرات، منها 6 حمراء، إذا سحبت منه كرتان معًا عشوائيًا، فما احتمال أن تكون الكرتان حمراوين؟ (مثال 1) $\frac{1}{3}$

2) فن: اختار مسؤول متحف للفنون 4 لوحات بشكل عشوائي من بين 20 لوحة؛ لعرضها في أحد المعارض. ما احتمال أن تكون 3 منها لفنان واحد يشارك بـ 8 لوحات في المتحف؟ (مثال 1) 13.9% تقريبًا

3) دخل 8 لاعبين A,B,C,D,E,F,G,H في مباراة، إذا اختيرت أسماء اللاعبين عشوائيًا، فما احتمال أن يكون أول 4 لاعبين مختارين هم A,C,E,G على الترتيب؟ (مثال 2) $\frac{1}{1680}$ أو 0.06% تقريبًا

4) مختبر: دخلت طالبات صف وعددهن 26 إلى مختبر المدرسة. إذا اختارت المعلمة أسماء الطالبات عشوائيًا لتشكل مجموعات للعمل، فما احتمال أن تكون أول ثلاث طالبات ذُكرت أسماؤهن جميلة، وآمنة، وخديجة على الترتيب؟ (مثال 2) $\frac{1}{15600}$

5) أُلقي مكعبان مرقمان من 1 إلى 6، وسجل العدد الأكبر بين العددين الظاهرين على الوجهين العلويين إذا اختلفا، وأحدهما إذا تساويا. (مثال 3)

a) مثّل بالأعمدة هذا التوزيع الاحتمالي. انظر الهامش.

b) ما الناتج الأقل إمكانية للوقوع؟ وما احتماله؟ $1, \frac{1}{36}$

c) أوجد $P(2 \text{ أو } 1)$؟ $\frac{1}{9}$

6) أخبار: أجرى موقع إلكتروني مسحًا للمصادر التي يحصل منها الناس على الأخبار بشكل رئيس. والجدول المجاور يبيّن نتائج هذا المسح. (مثال 3)

المصدر	الاحتمال
التلفاز	0.35
المذياع	0.31
الأصدقاء	0.02
الصحف	0.11
الإنترنت	0.19
مصادر أخرى	0.02

a) بيّن أن هذه البيانات تمثّل توزيعًا احتماليًّا. انظر الهامش.

b) إذا اختير أحد الذين شملهم هذا المسح عشوائيًّا، فما احتمال أن يكون مصدر أخباره الرئيس الصحف أو الإنترنت؟ 30% أو 0.3

c) مثّل البيانات بالأعمدة. انظر الهامش.

7) أوجد القيمة المتوقعة عند سحب قصاصة ورق عشوائيًّا من بين 5 قصاصات كتب على كل منها أحد الأرقام 5–1 دون تكرار. 3

8) جوائز: باع أحد النوادي 500 تذكرة دخول لحضور إحدى مبارياته ثمن الواحدة 10 ريالات ، وأجري سحب عشوائي على أرقام التذاكر خُصصت فيه ثلاث جوائز للأرقام الرابحة، بحيث تربح تذكرة واحدة الجائزة الأولى وقيمتها 1000 ريال، وتربح تذكرتان الجائزة الثانية وقيمتها 100 ريال، وتربح 5 تذاكر الجائزة الثالثة وقيمتها 50 ريالًا. إذا اشترى شخص تذكرة، فما القيمة المتوقعة للربح في هذا الموقف؟ (مثال 4) 2.9

تنويع الوجبات المنزلية

دون ضمن فوق

المستوى	الأسئلة
دون دون المتوسط	5–1، 10–8، 25–12
ضمن ضمن المتوسط	13–1 فردي، 25–15
فوق فوق المتوسط	25–8

القيمة المتوقعة

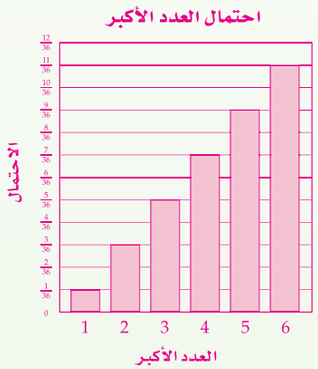
المثال 4 يبيِّن كيفية إيجاد القيمة المتوقّعة لتوزيع احتمالي.

مثال إضافي

4 قطعة خشبية على شكل هرم ثلاثي منتظم أوجهه الأربعة متطابقة ومرقّمة بالأعداد 1, 2, 3, 4. أوجد القيمة المتوقَّعة عند إلقاء الهرم مرة واحدة. $\frac{5}{2}$ أو 2.5

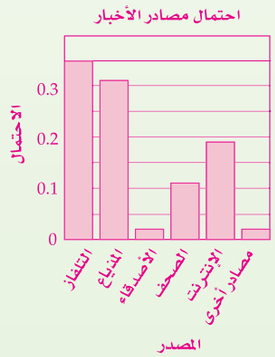
إجابات:

5a)



6a) احتمال كل قيمة من قيم المتغير العشوائي أكبر من أو يساوي 0 وأصغر من أو يساوي 1، ومجموعها يساوي 1؛ $0.35 + 0.31 + 0.02 + 0.11 + 0.19 + 0.02 = 1$

6c)



3 التدريب

التقويم التكويني

استعمل الأسئلة 8-1 للتأكد من فهم الطلاب.

ثم استعمل الجدول أسفل هذه الصفحة؛ لتعيين الواجبات المنزلية للطلاب بحسب مستوياتهم.

4 التقويم

تعلم لاحق اسأل الطلاب كيف يعتقدون أن الدرس الحالي في التوزيعات الاحتمالية، سيساعدهم على دراسة التوزيع الطبيعي في الدرس الآتي.

التقويم التكويني

تحقق من فهم الطلاب الدرسين 4-7, 7-3 بإعطائهم:

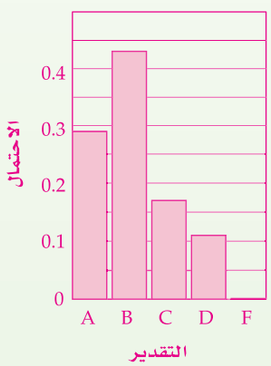
الاختبار القصير 2، ص (49)

إجابات:

13a) احتمال كل قيمة من قيم المتغير العشوائي أكبر من أو يساوي 0 وأصغر من أو يساوي 1 ومجموعها يساوي 1 ؛

$0.29 + 0.43 + 0.17 + 0.11 + 0 = 1$

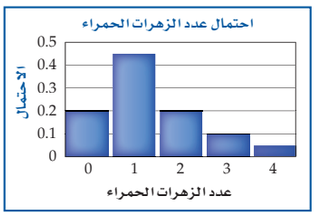
13c)



15a) احتمال كل قيمة من قيم المتغير العشوائي أكبر من أو يساوي 0 وأصغر من أو يساوي 1 ومجموعها يساوي 1 ؛

$0.05 + 0.05 + 0.15 + 0.10 + 0.30 + 0.15 + 0.20 = 1$

9) أزهار: يوضّح التمثيل البياني أدناه التوزيع الاحتمالي لعدد الأزهار الحمراء عند زراعة 4 بذور.



a) أوجد $P(0)$. $\frac{1}{5}$ أو 20%

b) ما احتمال أن تكون زهرتان على الأقل حمراوين؟ 35%

10) تبرُّعات: قام طلاب الصف الثالث المتوسط في مدرسة بجمع بعض الأطعمة في طرود للتبرع بها للأسر الفقيرة. ولقد أحصى الطلاب أنواع المواد المقدمة كما في الجدول أدناه.

التبرع بالأطعمة	
النوع	عدد الطرود
وجبات طعام	36
أرز	22
سكر	12
قمح	45

a) أوجد احتمال أن يحتوي طرد اختير عشوائيًّا على القمح. $\frac{9}{23}$ أو 39.1% تقريبًا

b) أوجد احتمال أن يحتوي طرد اختير عشوائيًّا على وجبة طعام أو أرز. $\frac{58}{115}$ أو 50.4% تقريبًا

11) جوائز: تنافس 50 متسابقًا منهم جاسم وجلال وعلي في سحب عشوائي على أربع جوائز. ما احتمال أن يربح اثنان من الأسماء الثلاثة؟ $\frac{69}{4900}$ أو 1.4% تقريبًا

12) ألعاب رياضية: اختار معلم التربية الرياضية 5 طلاب عشوائيًّا من بين الطلاب البالغ عددهم 124 طالبًا ليساعدوه على تطبيق بعض الألعاب. ما احتمال أن يختار واحدًا على الأقل من بين عشرة أقارب له يجلسون مع الطلاب؟ 34.8% تقريبًا

13) درجات: أُجري اختبار في الرياضيات لطلاب الصف الثالث الثانوي، والجدول أدناه يُبين نتائج هذا الاختبار.

نتائج اختبار الرياضيات	
التقدير	الاحتمال
A	0.29
B	0.43
C	0.17
D	0.11
F	0

a) بيّن أن هذه البيانات تمثّل توزيعًا احتماليًّا. انظر الهامش.

b) إذا اختير طالب عشوائيًّا، فما احتمال ألا يقل تقديره عن B؟ 0.72

c) مثّل البيانات بالأعمدة. انظر الهامش.

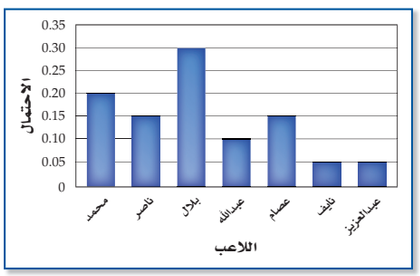
14) كرات زجاجية: لدى زيد 35 كرة زجاجية؛ 8 منها سوداء، و 12 حمراء، و 9 خضراء، والبقية بيضاء. فإذا سحب كرتين معًا عشوائيًّا.

a) مثّل بالأعمدة هذا التوزيع الاحتمالي؟ انظر ملحق الإجابات

b) ما الناتج ذو الإمكانية الأقل للوقوع؟ كرتان من اللون الأبيض

c) أوجد (إحداهما سوداء والأخرى خضراء) P. 12% تقريبًا

15) مسابقات: يُبيّن التمثيل بالأعمدة احتمال أن يربح كل طالب جائزة.



a) بيّن أن هذه البيات تمثّل توزيعًا احتماليًّا؟ انظر الهامش.

b) أوجد (ربح محمد أو بلال) P. 50%

تنويع التعليم

فوق

توسّع اكتب الأعداد 4, 4, 3, 2, 2, 1, 1, 1 على 8 قطع ورقية، واخلطها وضعها في كيس ورقي، واطلب إلى الطلاب تكوين توزيع احتمالي للعدد الناتج من سحب قطعة ورق من الكيس عشوائيًّا باستعمال الاحتمال التجريبي وتكرار التجربة 50 مرة. اجعلهم يتبادلون الأدوار في السحب مع الإرجاع، واطلب إليهم أن يقارنوا الاحتمال التجريبي مع الاحتمال النظري.

الاحتمالات النظرية هي $P(4) = \frac{1}{4}$ ، $P(3) = \frac{1}{8}$ ، $P(2) = \frac{1}{4}$ ، $P(1) = \frac{3}{8}$.

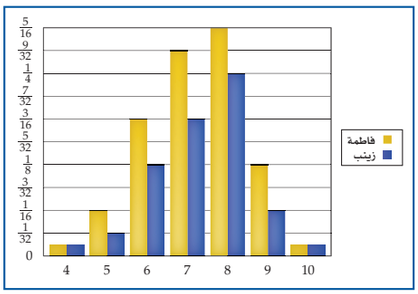
16) أمطار: التوزيع الاحتمالي أدناه يوضّح عدد الأيام الممطرة في السنة في إحدى الدول. أوجد القيمة المتوقّعة لعدد الأيام الممطرة. انظر الهامش.

عدد الأيام الممطرة في السنة									
عدد الأيام	0	1	2	3	4	5	6	7	8
الاحتمال	0.1	0.1	0.15	0.15	0.25	0.1	0.08	0.05	0.02

17) بطاقات: رُقِّمت مجموعة بطاقات على النحو الآتي: 3 بطاقات تم ترقيم كل منها بالرقم 8، وبطاقتان تمّ ترقيم كل منهما بالعدد 10، و 4 بطاقات تمّ ترقيم كل منها بالرقم 6، و3 بطاقات تمّ ترقيم كل منها بالرقم 5، وبطاقتان تمّ ترقيم كل منها بالرقم 2، وبطاقة تمّ ترقيمها بالرقم 3. إذا سُحبت من هذه البطاقات واحدة عشوائيًّا، فما القيمة المتوقعة لهذه البطاقة؟ 9

مسائل مهارات التفكير العليا

18) اكتشف الخطأ: كوَّنت كلٌّ من فاطمة، وزينب توزيعًا احتماليًّا باستعمال التمثيل بالأعمدة لمجموع العددين الناتجين عن دوران مؤشر القرص المجاور مرتين. أيهما يعدُّ تمثيلها صحيحًا؟ فسرِّ إجابتك. انظر الهامش.

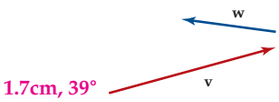


19) تبرير: حدّد ما إذا كانت العبارة الآتية صحيحة دائمًا، أو صحيحة أحيانًا، أو غير صحيحة أبدًا: «يُبنى الاحتمال النظري على نتائج التجارب». برِّر إجابتك. إجابة ممكنة: غير صحيحة أبدًا؛ يبنى الاحتمال التجريبي على التجارب، بينما يُبنى الاحتمال النظري على ما يُتوقَّع الحصول عليه.

20) مسألة مفتوحة: كوِّن توزيعًا احتماليًّا منفصلًا فيه 5 نواتج مع تحديد احتمال كل منها. انظر الهامش.

مراجعة تراكمية

21) أوجد محصلة المتجهين أدناه مستعملًا قاعدة المثلث، أو متوازي الأضلاع. ثمّ حدّد اتجاهه بالنسبة للأفقي. (الدرس 1-5)



22) اكتب المعادلة $r = 12\cos\theta$ على الصورة الديكارتية. (الدرس 2-6)
$x^2 + y^2 - 12x = 0$

23) يحتوي صندوق على 3 كرات بيضاء و 4 كرات حمراء. سُحبت كرتان على التوالي دون إرجاع. ما احتمال أن تكون الثانية بيضاء إذا كانت الأولى حمراء؟ (الدرس 3-7) $\frac{1}{2}$

تدريب على اختبار

24) يحتوي صندوق على 4 كرات حمراء و 6 كرات صفراء، و 4 كرات خضراء، وكرتين زرقاوين. سُحبت 3 كرات معًا عشوائيًّا. إذا كان X متغيرًا عشوائيًّا يدل على عدد الكرات الزرقاء المسحوبة، فما هي جميع القيم الممكنة لـ X؟ B

A 1, 2

B 0, 1, 2

C 1, 2, 3

D 0, 1, 2, 3

25) ما القيمة المتوقَّعة للتوزيع الاحتمالي المبيَّن في الجدول أدناه؟ D

x	1	2	3
p(x)	0.1	0.8	0.1

A 0.1

B 0.16

C 0.56

D 2

تنبيه!

اكتشف الخطأ اسأل الطلاب في السؤال 18، ما النواتج التي يكون المجموع في كل منها 5, 6, 7, 8, 9, 10 ؟

إجابات:

16) $E(x) = (0 \cdot 0.1) + (1 \cdot 0.1) + (2 \cdot 0.15) + (3 \cdot 0.15) + (4 \cdot 0.25) + (5 \cdot 0.1) + (6 \cdot 0.08) + (7 \cdot 0.05) + (8 \cdot 0.02)$
$= 0 + 0.1 + 0.3 + 0.45 + 1 + 0.5 + 0.48 + 0.35 + 0.16$
$= 3.34$ أيام ممطرة

18) إجابة ممكنة: فاطمة؛ زينب لم تأخذ في الحسبان كل الاحتمالات، فمثلًا عند حساب أن يكون المجموع 5 فقد أخذت في الحسبان وقوف المؤشر على الرقم 3 ثم 2، ولم تأخذ بعين الاعتبار وقوفه على 2 ثم 3 .

20) إجابة ممكنة : القرص الدوار المكوّن من 5 مناطق متطابقة مظلَّلة بالألوان وهي الأحمر، والأزرق، والأصفر، والأخضر، والبني.

اللون	البني	الأخضر	الأصفر	الأزرق	الأحمر
الاحتمال	0.2	0.2	0.2	0.2	0.2

7-5 ملاحظات الدرس

1 التركيز

الترابط الرأسي

ما قبل الدرس 7-5

تحليل التوزيعات الاحتمالية.

الدرس 7-5

تحديد ما إذا كانت مجموعة بيانات تبدو موزَّعة توزيعًا طبيعيًّا أو ملتوية.
استعمال القانون التجريبي لإيجاد الاحتمالات.

ما بعد الدرس 7-5

إيجاد الاحتمالات لتجارب ذات الحدين.

2 التدريس

أسئلة التعزيز

اطلب إلى الطلاب قراءة فقرة "لماذا؟".

و اسأل:

- ما نسبة الطلاب الذين تزيد درجاتهم على 80 درجة؟ تتنوع الإجابات.
- ما نسبة الطلاب الذين تقع درجاتهم بين 80–60؟ تتنوع الإجابات.

التوزيعات الطبيعية والملتوية

المثال 1 يبيّن كيفية استعمال التمثيل بالأعمدة لتحديد ما إذا كانت البيانات ملتوية أو موزّعة توزيعًا طبيعيًّا.

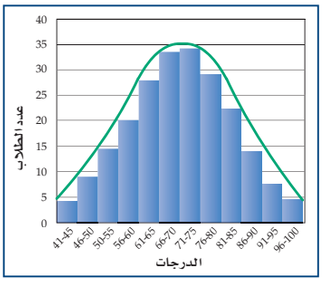
7-5 التوزيع الطبيعي
The Normal Distribution

فيما سبق:
درست التوزيعات الاحتمالية. (الدرس 4–7)

والآن:
- أحدّد ما إذا كانت مجموعة بيانات تبدو موزَّعة طبيعيًّا أو ملتوية .
- أستعمل القانون التجريبي لأجد الاحتمالات.

المفردات:
التوزيع الاحتمالي المتصل
continuous probability distribution
التوزيع الطبيعي
normal distribution
التوزيع الملتوي
skewed distribution

www.obeikaneducation.com

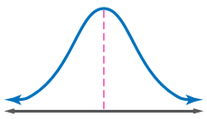


لماذا؟

مثّل المعلم عبدالعزيز درجات طلاب مدرسته في مادة الرياضيات بيانيًّا كما هو مبيّن في الشكل المجاور. لاحظ أن هناك تجمعًا لدرجات الطلاب في المنتصف، كما أن شكل التمثيل البياني لتوزيع الدرجات يشبه الجرس تقريبًا. إن مثل هذا التوزيع يسمى توزيعًا طبيعيًّا.

التوزيعات الطبيعية والملتوية في **التوزيع الاحتمالي المتصل** والذي هو توزيع احتمالي متغيره العشوائي متصل، يمكن للنواتج أن تأخذ أي قيمة في فترة من الأعداد الحقيقية، ومثال ذلك أطوال أشخاص وأوزانهم، ومستوى الدهنيات عند الأشخاص البالغين. وأفضل مثال على التوزيعات الاحتمالية المتصلة هو **التوزيع الطبيعي**.

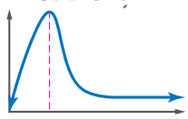
مفهوم أساسي خصائص التوزيع الطبيعي



- التمثيل البياني له منحنى يشبه الجرس، ومتماثل حول المستقيم الرأسي المار بالمتوسط.
- يتساوى فيه المتوسط والوسيط والمنوال.
- المنحنى متصل.
- يقترب المنحنى من المحور x في جزأيه الموجب والسالب، ولكنه لا يمسه.

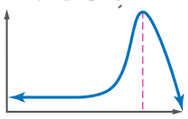
على الرغم من أن التوزيع الطبيعي متصل، فإن التوزيعات المنفصلة أيضًا يمكن أن يكون لها شكل التوزيع الطبيعي. ويمكن للتوزيعات أن تظهر بأشكال أخرى تُسمّى **توزيعات ملتوية**.

التواء موجب (ملتوٍ إلى اليمين)



معظم البيانات تتركز في اليسار وقليل منها في اليمين.

التواء سالب (ملتوٍ إلى اليسار)



معظم البيانات تتركز في اليمين وقليل منها في اليسار.

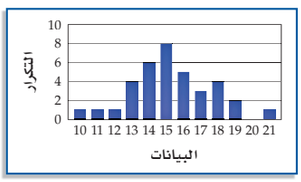
مثال 1 تصنيف بيانات التوزيع

حدِّد ما إذا كانت البيانات في الجدول التكراري أدناه تظهر التواءً موجبًا، أو التواءً سالبًا، أو موزَّعة توزيعًا طبيعيًّا:

a)

البيانات	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	21
التكرار	1	1	1	4	6	8	5	3	4	2	1

استعمل الجدول التكراري أعلاه؛ لتمثيل البيانات بالأعمدة. وبما أن التمثيل عالٍ في الوسط، ويبدو كأنه إلى حد ما متماثل حول المتوسط، فإن البيانات تُعتبر موزَّعة توزيعًا طبيعيًّا.



مصادر الدرس 7-5

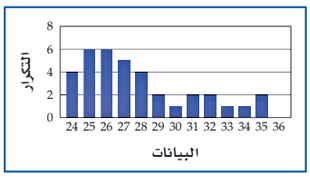
المصدر	دون المتوسط	ضمن المتوسط	فوق المتوسط
دليل المعلم	• تنويع التعليم ص (110)	• تنويع التعليم ص (110)	• تنويع التعليم ص (112)
كتاب التمارين	• ص (16)	• ص (16)	• ص (16)
مصادر المعلم للأنشطة الصفية	• تدريبات إعادة التعليم، ص (22) • تدريبات حل المسألة، ص (24)	• تدريبات حل المسألة، ص (24) • التدريبات الإثرائية، ص (25)	• تدريبات حل المسألة، ص (24) • التدريبات الإثرائية، ص (25)

حدِّد ما إذا كانت البيانات في الجدول التكراري أدناه تظهر التواءً موجبًا، أو التواءً سالبًا، أو موزَّعة توزيعًا طبيعيًّا:

b)

البيانات	24	25	26	27	28	29	30	31	32	33	34	35
التكرار	4	6	6	5	4	2	1	2	2	1	1	2

استعمل الجدول التكراري أعلاه؛ لتمثيل البيانات بالأعمدة. وبما أن التمثيل عالٍ في جهة اليسار ومنخفض في كل من الوسط وعلى اليمين، فإن التوزيع يبدو كأنه ملتوٍ إلى اليمين (التواء موجب).



تحقق من فهمك التواءً موجبًا

1) حدِّد ما إذا كانت البيانات في الجدول المجاور تُظهر التواءً موجبًا، أو التواءً سالبًا، أو موزَّعة توزيعًا طبيعيًّا.

قياس الحذاء	38	39	40	41	42	43	44	45
التكرار	6	8	9	7	4	2	3	1

القانون التجريبي إن المساحة بين قيمتين من البيانات تمثِّل نسبة البيانات التي تقع بين هاتين القيمتين. ويمكن أن يستعمل القانون التجريبي لوصف المساحات تحت المنحنى الطبيعي، والتي تقع ضمن انحراف أو انحرافين أو ثلاثة انحرافات معيارية من المتوسط.

مفهوم أساسي القانون التجريبي

يتصف التوزيع الطبيعي الذي متوسطه μ وانحرافه المعياري σ بالخصائص الآتية:

- يقع 68% تقريبًا من البيانات ضمن الفترة $(\mu - \sigma, \mu + \sigma)$.

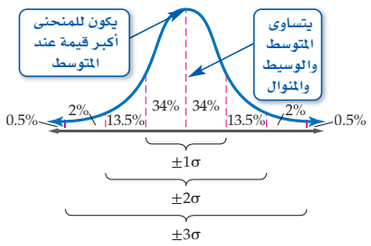
وهذا يعني أن 68% من البيانات لا يتجاوز بعدها عن المتوسط قيمة الانحراف المعياري.

- يقع 95% تقريبًا من البيانات ضمن الفترة $(\mu - 2\sigma, \mu + 2\sigma)$.

وهذا يعني أن الغالبية العظمى من البيانات (95%) لا يتجاوز بعدها عن المتوسط ضعف قيمة الانحراف المعياري.

- يقع 99% تقريبًا من البيانات ضمن الفترة $(\mu - 3\sigma, \mu + 3\sigma)$.

وهذا يعني أن جميع البيانات تقريبًا (99%) لا يتجاوز بعدها عن المتوسط ثلاثة أمثال الانحراف المعياري.



مثال 2 التوزيع الطبيعي

المتوسط لتوزيع طبيعي 34، وانحرافه المعياري 5. أوجد احتمال أن تزيد قيمة لـ X ثم اختيارها عشوائيًّا في هذا التوزيع عن 24، (أي أوجد $P(X > 24)$).

$\mu = 34, \sigma = 5$

الخطوة 1 أوجد القيم $\mu \pm \sigma, \mu \pm 2\sigma, \mu \pm 3\sigma$ (وهي المتوسط مضافًا إليه أو مطروحًا منه المضاعفات الثلاثة الأولى للانحراف المعياري).

$\mu \pm \sigma = 34 \pm 5 = 29, 39$

$\mu \pm 2\sigma = 34 \pm 10 = 24, 44$

$\mu \pm 3\sigma = 34 \pm 15 = 19, 49$

إرشادات للدراسة

«منفصل، مقابل «متصل»

يأخذ التوزيع الاحتمالي المنفصل عددًا محدودًا من القيم، وغالبًا ما تكون أعدادًا صحيحة. أما التوزيع الاحتمالي المتصل، فيأخذ عددًا غير محدد من القيم تنتمي إلى فترة متصلة. وفي حالة التوزيع الاحتمالي المتصل يكون احتمال أن يأخذ المتغير العشوائي قيمة واحدة فقط مساويًا للصفر.

إرشادات للدراسة

التوزيع الطبيعي

في الحالات جميعها يجب أن يكون عدد البيانات كبيرًا ليكون التوزيع طبيعيًا تقريبًا.

التقويم التكويني

استعمل تدريبات "تحقق من فهمك" بعد كل مثال؛ للتحقق من مدى فهم الطلاب للمفاهيم.

مثال إضافي

1 حدّد ما إذا كانت البيانات في كل ممّا يأتي تظهر التواءً موجبًا، أو التواءً سالبًا، أو موزَّعة توزيعًا طبيعيًّا:

a) 31, 37, 35, 36, 34, 36, 32, 36, 34, 35, 33, 33, 33, 32, 34, 34, 35, 34

موزَّعة توزيعًا طبيعيًّا

b) 14, 15, 11, 13, 13, 14, 15, 14, 12, 13, 14, 15

التواءً سالبًا

القانون التجريبي

المثالان 2, 3 يبيِّنان كيفية استعمال القانون التجريبي لإيجاد الاحتمالات لقيم متغيّر عشوائي في التوزيع الطبيعي.

مثال إضافي

2 تتوزَّع مجموعة بيانات توزيعًا طبيعيًّا بمتوسط 66 ، وانحراف معياري 11. أوجد احتمال اختيار قيمة لـ X عشوائيًّا من هذا التوزيع، بحيث تكون أقل من 44، أي أوجد $p(X<44)$. 2.5%

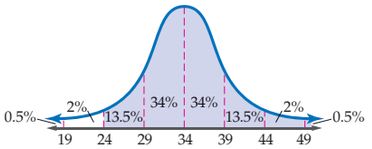
التعليم باستعمال التقنيات

رسائل فورية كلّف الطلاب أن يعملوا في مجموعات ثنائية، ويرسل كل شخص إلى زميله سؤالًا حول التوزيع الطبيعي (مثال: ما نسبة القيم التي تكون ضمن انحرافين معياريين فوق المتوسط الحسابي؟). ويجب أن يجيب زميله على السؤال، ثم يتحقّق كل منهما من الإجابة.

المحتوى الرياضي

التوزيعات الطبيعية يكون لأشكال التوزيعات الطبيعية للمتغيرات العشوائية جميعها الشكل نفسه.

الخطوة 2 ارسم منحنى التوزيع الطبيعي، وحدِّد عليه المتوسط $\mu = 34$ والقيم السابقة.



الخطوة 3 ظلل المنطقة التي تمثل الاحتمال المطلوب.

الخطوة 4 احسب الاحتمال المطلوب:

$$P(X > 24) = (13.5 + 34 + 34 + 13.5 + 2 + 0.5)\% = 97.5\%$$

إذن: $P(X > 24) \approx 97.5\%$

تحقق من فهمك

2) أوجد احتمال أن تكون قيمة تم اختيارها عشوائيًّا في التوزيع الوارد في المثال **2** أقل من 49. **99.5% تقريبًا**

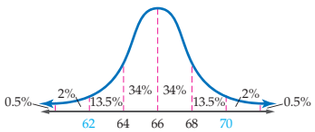
تُمَثِّل العينة التي يكون توزيعها توزيعًا طبيعيًّا بمنحنى طبيعي، وكأنها مجتمعًا.

مثال 3 من واقع الحياة — عينة موزَّعة توزيعًا طبيعيًّا

أطوال: توزّع أطوال **1800** يافع توزيعًا طبيعيًّا بمتوسط **66 in**، وانحراف معياري يساوي **2 in**.

a) ما العدد التقريبي لليافعين الذين تتراوح أطوالهم بين 62 in و 70 in ؟

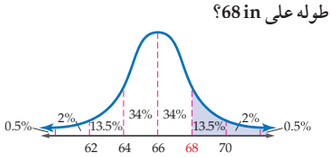
ارسم منحنى التوزيع الطبيعي.



تبعد كل من 62 , 70 عن المتوسط الحسابي انحرافين معياريين؛ لذا فإن 95% من البيانات واقعة بين الطولين 62 , 70.

ولأن $95\% \times 1800 = 1710$، لذا يوجد 1710 يافعين تقريبًا تقع أطوالهم بين 62 in و 70 in.

b) ما احتمال أن يتم اختيار أحد اليافعين عشوائيًّا، بحيث يزيد طوله على 68 in؟



من الشكل المجاور، القيمة الأكبر من 68 تبعد أكثر من انحراف معياري واحد عن المتوسط الحسابي، وتتوزّع الأطوال على النحو الآتي: 13.5% بين انحراف معياري واحد وانحرافين معياريين، 2% بين انحرافين معياريين وثلاثة انحرافات معيارية، 0.5% فوق 3 انحرافات معيارية.

لذا فاحتمال اختيار يافع يكون طوله أكبر من 68 in

$$(13.5 + 2 + 0.5)\% = 16\%$$

إذن الاحتمال المطلوب يساوي 16% تقريبًا

تحقق من فهمك

درجات: إذا علمت أن كتل **100** موظف في شركة تتوزّع توزيعًا طبيعيًّا بمتوسط حسابي مقداره **70** كيلوجرامًا، وانحراف معياري **10** كيلوجرامات، فاعتمد على ذلك في الإجابة عن السؤالين الآتيين :

3A) ما العدد التقريبي للموظفين الذين تقع كتلهم بين 60, 80 كيلوجرامًا؟ **68 موظفًا تقريبًا**

3B) ما احتمال أن يتمّ اختيار موظف بصورة عشوائية، وتكون كتلته أقل من 90 كيلوجرامًا؟ **97.5% تقريبًا**

مثال أضافي

3 **تغليف:** عَدَّ الطلاب قطع الحلوى في 100 علبة صغيرة، فوجدوا أن عدد قطع الحلوى لكل علبة يتوزّع توزيعًا طبيعيًّا بمتوسط حسابي 23 لكل علبة، وانحراف معياري يساوي قطعة واحدة.

a) ما عدد العلب التي تحتوي على عدد من قطع الحلوى بين 22, 24؟ 68 علبة تقريبًا

b) ما احتمال أن تحتوي علبة اختيرت عشوائيًّا على 25 قطعة فأكثر؟ 2.5% تقريبًا

3 التدريب

التقويم التكويني

استعمل الأسئلة 1-10 للتأكد من فهم الطلاب، ثم استعمل الجدول أسفل الصفحة التالية؛ لتعيين الواجبات المنزلية للطلاب بحسب مستوياتهم.

إرشادات للمعلم الجديد

التواء المنحنى وضّح للطلاب أن التوزيع الموجب الالتواء يمتد منحناه إلى اليمين، وأما التوزيع السالب الالتواء، فإن منحناه يمتد إلى اليسار.

تنويع التعليم

دون ضمن

إذا احتاج الطلاب إلى مساعدة لرسم المنحنى الطبيعي،

فبين لهم بيِّن للطلاب أن اتجاه التقعّر للمنحنى يتحوّل من أسفل إلى أعلى عند النقطتين اللتين تبعدان انحرافًا معياريًّا واحدًا عن المتوسط الحسابي. كما أن رسم المنحنى الطبيعي لكل مسألة يساعد الطلاب على إتقان الرسم.

تدرب وحل المسائل

1) درجات: يوضّح الجدول أدناه نتائج أحد الاختبارات (النهاية العظمى للاختبار 40). حدّد ما إذا كانت البيانات تظهر التواءً موجبًا، أو التواءً سالبًا، أو موزّعة توزيعًا طبيعيًّا. (مثال 1) **التواءً موجبًا**

فئات الدرجات	عدد الطلاب
13–15	12
16–18	27
19–21	29
22–24	19
25–27	8
28–31	1
32–35	1

2) حدد ما إذا كانت البيانات في الجدول أدناه تُظهر التواءً موجبًا، أو التواءً سالبًا، أو موزعة توزيعًا طبيعيًّا: **التواءً موجبًا**

عدد زوار المتنزهات	
عدد الزوار بالآلاف	عدد المتنزهات
3–4	10
5–6	2
7–8	2
9–10	1
11–12	1
13 فأكثر	4

3) تتوزّع مجموعة بيانات توزيعًا طبيعيًّا بمتوسط حسابي 161، وانحراف معياري 12، أوجد أن يتم اختيار قيمة لـ X عشوائيًّا من هذا التوزيع، بحيث تكون أقل من 149، أي أوجد $P(X < 149)$. (مثال 2) **16% تقريبًا**

إذا توزّعت البيانات في الأسئلة 7-4 توزيعًا طبيعيًّا، وكان المتوسط الحسابي والانحراف المعياري لكل منها هو موضّح، فأوجد الاحتمال المطلوب.

4) $\mu = 74, \sigma = 6, P(X > 86)$ **2.5% تقريبًا**

5) $\mu = 13, \sigma = 0.4, P(X < 12.6)$ **16% تقريبًا**

6) $\mu = 63, \sigma = 4, P(59 < X < 71)$ **81.5% تقريبًا**

7) $\mu = 91, \sigma = 6, P(73 < X < 103)$ **97% تقريبًا**

8) مدارس: أعطى عمران اختبارًا قصيرًا لطلبته البالغ عددهم (50) طالبًا، وكانت الدرجات موزّعة توزيعًا طبيعيًّا بمتوسط حسابي 21، وانحراف معياري 2. (مثال 3) انظر الهامش.

a) ما العدد التقريبي للطلاب الذين تقع درجاتهم بين 23 ,19؟

b) ما احتمال أن تقع درجة أحد الطلاب بين 17 و25 ؟

9) بطاريات السيارة: إذا حُدِّد عمْرُ بطارية السيارة بالمسافة التي تقطعها باستعمال هذه البطارية، وعلمت أن عمر أحد أنواع بطاريات السيارات يتوزّع توزيعًا طبيعيًّا بمتوسط حسابي 100000 km، وانحراف معياري 10000 km. وتنتج إحدى الشركات 20000 بطارية في الشهر، فأجب عما يأتي:

a) ما العدد التقريبي للبطاريات التي يتراوح عمرها بين 90000 km – 110000 km؟ **13600**

b) ما العدد التقريبي للبطاريات التي يزيد عمرها على 120000 km؟ **500**

c) ما العدد التقريبي للبطاريات التي يقلُّ عمرها عن 90000 km؟ **3200**

d) ما احتمال أن تشتري بطارية عشوائيًّا، ويتراوح عمرها بين 80000 km – 110000 km؟ **81.5% تقريبًا**

10) صحة: يتوزّع مستوى الدهنيات (الكولسترول) في فئة الشباب الذكور في إحدى الدول توزيعًا طبيعيًّا بمتوسط حسابي 158.3، وانحراف معياري 6.6

a) ما احتمال أن تقل نسبة الكولسترول عند الشباب الذكور عن 151.7؟ **16% تقريبًا**

b) كم شخصًا تقريبًا من بين 900 شخص شملتهم الدراسة يتراوح مستوى الكولسترول عندهم بين 145.1 – 171.5؟ **855**

11) طعام: تتوزّع مدة صلاحية نوع معين من البطاطس توزيعًا طبيعيًّا بمتوسط حسابي 180 يومًا، وانحراف معياري 30 يومًا. **68% تقريبًا**

a) ما احتمال أن تقع مدة صلاحية المنتج بين 150 يومًا، 210 أيام؟ **34% تقريبًا**

b) ما احتمال أن تقع مدة صلاحية المنتج بين 180 يومًا، 210 أيام؟

c) ما احتمال أن تقل مدة صلاحية المنتج عن 90 يومًا؟ **0.5% تقريبًا**

d) ما احتمال أن تزيد مدة صلاحية المنتج على 210 أيام؟ **16% تقريبًا**

12) طول: تتوزّع أطوال 880 طالبًا في إحدى الجامعات توزيعًا طبيعيًّا بمتوسط حسابي مقداره 67 in، وانحرافٍ معياري مقداره 2.5 in

a) كم طالبًا تقريبًا يزيد طوله على 72 in؟ **22 طالبًا تقريبًا**

b) ما احتمال أن تقع أطوال الطلاب بين 59.5 in و 69.5 in؟ **83.5% تقريبًا**

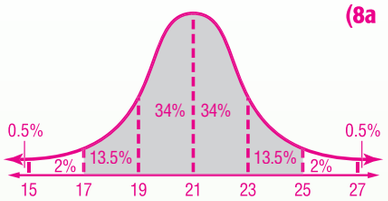
13) صناعة: تُستعمل آلة لتعبئة عبوات بالمياه المعدنية، وتختلف كمية الماء اختلافًا ضئيلًا بين العبوات. إذا كان حجم الماء في 120 عبوة يتبع توزيعًا طبيعيًّا بمتوسط حسابي 1.1 L، وانحراف معياري 0.02 L، فأجب عما يأتي:

a) كم عبوة تقريبًا يكون حجم الماء فيها أقل من 1.06 L؟ **3 عبوات تقريبًا**

b) ما احتمال أن يكون حجم الماء في العبوات بين 1.08 L و 1.14 L؟ **81.5% تقريبًا**

إجابات:

8a)



توزيع درجات الطلاب

تبعد كل من 19, 23 انحرافًا معياريًّا واحدًا عن المتوسط الحسابي؛ لذلك
$34\% + 34\% = 68\%$ من البيانات تقع بين الدرجتين 19, 23
ولأن $50 \times 68\% = 34$ ، لذا يوجد 34 طالبًا تقريبًا تقع درجاتهم بين 19, 23

b) تبعد كل من 17, 25 عن المتوسط انحرافين معياريين؛ لذلك
$13.5\% + 34\% + 34\% + 13.5\% = 95\%$
إذن 95% من البيانات تقع بين الدرجتين 17, 25،
إذن الاحتمال المطلوب يساوي 95% تقريبًا.

تنويع الواجبات المنزلية

دون ضمن فوق

المستوى	الأسئلة
دون دون المتوسط	10–1، 25–16
ضمن ضمن المتوسط	11–1 فردي ، 14–12 ، 25–16
فوق فوق المتوسط	25–7

تنبيه!

اكتشف الخطأ ذكّر الطلاب في السؤال 14 أن 68% من أي توزيع طبيعي يقع ضمن انحراف معياري واحد من المتوسط .

4 التقويم

بطاقة مكافأة اطلب إلى الطلاب رسم مخطّط لتوزيعات طبيعية، وتوزيعات ملتوية إلى اليسار، وأخرى ملتوية إلى اليمين.

التقويم التكويني

تحقق من فهم الطلاب الدرس 5-7 بإعطائهم:

الاختبار القصير 3، ص (50)

إجابات:

16) إجابة ممكنة: عندما تشمل البيانات أطوال طلاب المرحلة الابتدائية جميعهم إضافة إلى أطوال الهيئة التدريسية والإدارية في المدرسة، فإن معظم الحالات تكون متركزة في الجهة اليسرى (الطلاب)، بينما تكون أطوال فئة الهيئة التدريسية والإدارية إلى الجهة اليمنى، وبذلك فإن هذا التوزيع يكون ملتويًا التواءً موجبًا. وفي صف يكون تحصيل الطلاب فيه عاليًا، فإن معظم البيانات لتحصيل الطلاب تتركز في الجهة اليمنى من التوزيع، ويوجد عدد قليل من البيانات في الجهة اليسرى. عند ذلك يكون التوزيع سالب الالتواء. وعندما تشمل البيانات معدلات الطلاب في جميع أنحاء المملكة مثلًا، فإن معظم الحالات تكون متمركزة في الوسط، مع وجود بعض الحالات إلى اليمين وبعضها إلى اليسار، عند ذلك يكون التوزيع طبيعيًا.

17) إجابة ممكنة: صحيح، فبحسب القانون التجريبي، فإن 68% من البيانات لا يتجاوز بعدها عن المتوسط قيمة الانحراف المعياري.

19) إجابة ممكنة: يُعد إلقاء مكعب الأرقام (1–6) مثالًا على التوزيع الاحتمالي المنفصل، وفي مثل هذا التوزيع يوجد عدد محدود من الإمكانات، أما التوزيع الاحتمالي المتصل، فيمكن أن يُمثّله أعمار 400 بطارية، حيث يمكن للعمر أن يأخذ أي قيمة في الفترة التي يُشكّلها مجال التوزيع.

مسائل مهارات التفكير العليا

14) **اكتشف الخطأ:** تتوزّع أطوال أقطار نوع من الأشجار توزيعًا طبيعيًّا بمتوسط مقداره 11.5 cm، وانحراف معياري مقداره 2.5 cm ومدى من 3.6 cm إلى 19.8 cm، وقد حاولت كل من مريم وأمينة إيجاد مدى 68% من البيانات التي تقع في وسط التوزيع. أيهما كانت إجابتها صحيحة؟ فسّر إجابتك.

أمينة؛ وزّعت مريم المدى على الفترات بالتساوي

مريم	أمينة
مدى البيانات 16.2 cm، 68% من المدى يساوي تقريبًا 11 cm، ويتوزّع هذا المدى بالتساوي حول المتوسط 11.5 cm، أي أن مدى 68% سيكون من 6 cm إلى 17 cm	تمتد النسبة 68% من $\mu - \sigma$ إلى $\mu + \sigma$ أي أن مدى 68% سيكون من 9 cm إلى 14 cm

15) **تحدٍّ:** في مستودع للأدوات الكهربائية عدد من المسجلات التي تعمل على البطارية. إذا كانت أعمار البطاريات تتوزّع توزيعًا طبيعيًّا بمتوسط حسابي 8.0 h، وانحراف معياري 0.7 h، فما العدد التقريبي للمسجلات في المستودع إذا علمت أن هناك 8 مسجّلات يزيد عمر بطارياتها على 10.1 h؟ 1600

16) **اكتب:** اشرح الفرق بين التوزيعات الموجبة الالتواء، والتوزيعات السالبة الالتواء، والتوزيعات الطبيعية لمجموعة بيانات. أعطِ مثالًا على كل منها. انظر الهامش.

17) **تبرير:** بحسب القانون التجريبي، فإن معظم البيانات في التوزيع الطبيعي تقع ضمن الفترة $(\mu - \sigma, \mu + \sigma)$. هل هذا صحيح أم خاطئ؟ برّر إجابتك. انظر الهامش.

18) **مسألة مفتوحة:** أوجد بيانات واقعية تبدو كأنها تتوزّع توزيعًا طبيعيًّا، أعطِ خصائص هذا التوزيع فيما يتعلق بالمتوسط الحسابي، والانحراف المعياري. ومثّل البيانات بيانيًّا. انظر ملحق الإجابات.

19) **مسألة مفتوحة:** أعطِ مثالًا على توزيع احتمالي منفصل، وآخر متصل. وصف الفرق بينهما. انظر الهامش.

مراجعة تراكمية

20) **طلاب:** رُشّح 3 طلاب من الصف الأول الثانوي، و11 طالبًا من الصف الثاني الثانوي لتوزيع بعض الطرود على الفقراء. إذا اختير من بينهم 4 طلاب عشوائيًّا، فما احتمال أن تتضمّن العينة طالبين من الصف الأول الثانوي، وطالبين من الصف الثاني الثانوي؟ (الدرس 4-7) 16.5% تقريبًا

21) يبيّن الجدول أدناه أعداد الطلاب الذين شاركوا في المسابقات الثقافية، والذين لم يشاركوا من الصفوف: الأول والثاني والثالث الثالث الثانوي في مدرسة ما. إذا اختير أحد الطلاب عشوائيًّا، فأوجد احتمال أن يكون قد شارك في المسابقات الثقافية علمًا بأنه من الصف الثالث الثانوي؟ (الدرس 3-7) $\frac{3}{14}$

	الأول الثانوي	الثاني الثانوي	الثالث الثانوي
المشاركون	7	9	6
غير المشاركين	23	20	22

22) **جسور:** جسر لعبور المشاة فوق مسطح مائي على شكل قطع مكافئ فتحته إلى أسفل، أوجد معادلة الجسر، مفترضًا أن نقطة الأصل على سطح الماء تحت رأس القطع. (مهارة سابقة)

$x^2 = -2158\ (y - 325)$ تقريبًا

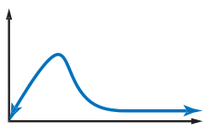
تدريب على اختبار

23) يتوزّع عمر 10000 مصباح كهربائي توزيعًا طبيعيًّا بمتوسط حسابي 300 يوم، وانحراف معياري 40 يومًا. كم مصباحًا يقع عمره بين 260 يومًا، 340 يومًا؟ D

A 2500 C 5000

B 3400 D 6800

24) ما الوصف الأفضل للتوزيع الاحتمالي الممثّل أدناه؟ D



A توزيع سالب الالتواء C توزيع طبيعي

B توزيع متماثل D توزيع موجب الالتواء

25) **صناعة:** تتوزّع قياسات أقطار مجموعة من الأقراص المدمجة التي تصنعها إحدى الشركات توزيعًا طبيعيًّا بانحراف معياري مقداره 1 mm، وبمتوسط حسابي 120 mm.

a) ما احتمال أن يزيد طول قطر قرص اختير عشوائيًّا على 120 mm؟ 50% تقريبًا

b) إذا كانت الشركة تصنع 1000 قرص في الساعة، فما العدد التقريبي للأقراص المصنوعة في الساعة الواحدة، والتي يتراوح قطر كل منها بين 119 mm, 122 mm؟ 815

تنويع التعليم

فوق

توسّع اكتب القانون $Z = \frac{X - \mu}{\sigma}$ على السبورة، ووضّح للطلاب: أن المتوسط الحسابي للمجتمع هو μ، وأن الانحراف المعياري للمجتمع هو σ، وأن X هي قيمة لمتغيّر يتبع التوزيع الطبيعي، أمّا Z فتُمثّل متغيّرًا طبيعيًّا معياريًّا. كلّف الطلاب أن يجدوا قيمتي Z المقابلتين لِقيمتَي x (0.32s, 0.38s) واللتين تمثّلان زمني ردة الفعل لموقف ما، علمًا بأن أزمنة ردة الفعل في هذا الموقف تتوزّع توزيعًا طبيعيًّا بمتوسط: $\mu = 0.35\text{ s}$، وانحراف معياري $\sigma = 0.05\text{ s}$. $-0.6, +0.6$

ثم استعمل الآلة الحاسبة البيانية TI-nspire؛ لإيجاد المساحة تحت المنحنى الطبيعي، والمرتبطة بأي زوج من قيم z، وذلك باتباع الخطوات التالية:

- اضغط (on) ثم اضغط
- اضغط
- اختر normcdf( ) فتظهر على الشاشة normcdf( )
- أدخل البيانات داخل القوسين بحسب الترتيب (μ, σ , أكبر قيمة لِـ z, أقل قيمة لِـ z)
- اضغط (enter) فتظهر النتيجة

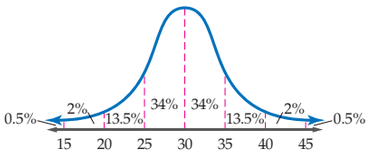
واطلب إليهم إيجاد نسبة الذين تقع زمن ردة الفعل لديهم في الفترة (0.38 , 0.32). 45% تقريبًا

عند معرفة المتوسط والانحراف المعياري لتوزيع طبيعي، تستنتج أن 68%, 95%, 99% من البيانات ستكون ضمن انحراف معياري واحد، أو انحرافين معياريين أو ثلاثة انحرافات معيارية عن المتوسط على الترتيب، وهذا ما يُسمّى القانون التجريبي. ويمكنك استعمال القانون التجريبي لتجد المئينات. والمئين n يقابل القيمة التي يقل عنها أو يساويها $n\%$ من قيم البيانات.

نشاط

في اختبار للرياضيات لطلاب الصف الثالث الثانوي وُجد أن درجات الطلاب تتوزّع توزيعًا طبيعيًّا بمتوسط 30، وانحراف معياري 5

الخطوة 1 ارسم منحنى التوزيع الطبيعي لدرجات الطلاب المشابه للشكل المجاور، و عيّن عليه المتوسط وأيضًا المتوسط مضافًا إليه أو مطروحًا منه مضاعفات الانحراف المعياري كما هو موضح في الشكل.



الخطوة 2 الدرجة 30 هي المتوسط، وبالرجوع إلى الشكل يمكن أن ترى أن 50% من الدرجات أقل من الدرجة 30 أو تساويها؛ لذا يمكنك القول: إن الدرجة 30 تقابل المئين 50.

ما المئين الذي يقابل الدرجة 35؟ **الدرجة 35 تُمثّل المئين 84.**

الخطوة 3 ما المئين الذي يقابل الدرجة 40؟ **الدرجة 40 تمثّل المئين 79.5.**

الخطوة 4 ما الدرجة التي تقابل المئين 99.5؟ **45**

تمارين: **1, 2)** انظر الهامش.

في كلٍّ من السؤالين التاليين، ارسم منحنى التوزيع الطبيعي، ثم أجب عن المطلوب.

1) إذا كانت درجات الطلاب في اختبار مادة الفيزياء موزّعة توزيعًا طبيعيًّا بمتوسط 15، وانحراف معياري 2، فأوجد المئينات التي تقابل الدرجات 13, 15, 21.

2) إذا كانت درجات الطلاب في اختبار مادة الكيمياء موزّعة توزيعًا طبيعيًّا بمتوسط 40، وانحراف معياري 4، فأوجد الدرجات التي تقابل المئينات 99.5, 50, 84.

1 التركيز

الهدف استعمال القانون التجريبي للربط بين المئينات والتوزيع الطبيعي.

إرشادات التدريس

ذكّر الطلاب بأنهم تعلموا في الدرس 7-5 أن 0.5% من التوزيع الطبيعي أكبر من 3 انحرافات معيارية فوق المتوسط. أو أصغر من 3 انحرافات معيارية تحت المتوسط.

2 التدريس

العمل في مجموعات تعاونية

اطلب إلى الطلاب العمل في مجموعات ثنائية متفاوتة القدرات، واطلب إلى كل مجموعة إكمال النشاط.

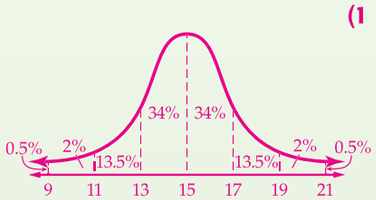
واسأل:

- ما المئين الذي يقابل الوسيط في التوزيع الطبيعي؟ الخمسون
- ماذا يمكنك القول عن المئين الذي يقابل الدرجة 37؟ يقع بين المئين 84 والمئين 97.

تدريب اطلب إلى الطلاب حل التمرينين 1, 2.

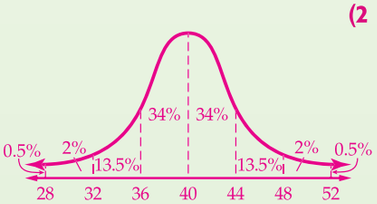
إجابات:

1)



الدرجة 21 تقابل المئين 99.5، والدرجة 15 تقابل المئين 50، والدرجة 13 تقابل المئين 16

2)



الدرجة 52 تقابل المئين 99.5، والدرجة 40 تقابل المئين 50، والدرجة 44 تقابل المئين 84

من المحسوس إلى المجرد

يمكنك بسهولة إيجاد المئين الذي يقابل درجة معينة لمتغير عشوائي يتبع التوزيع الطبيعي وبالعكس، وضِّح السبب.

إجابة ممكنة: لأن النسب المئوية للمساحات تحت المنحنى الطبيعي المقابلة للمتوسط وأيضًا المتوسط مضافًا إليه أو مطروحًا منه مضاعفات الانحراف المعياري محددة، مما يسهل إيجاد المئين الذي يقابل درجة معينة وبالعكس.

توسّع المفهوم

هل يمكن أن يكون المئين 50 هو المتوسط لتوزيعات غير طبيعية؟

يمكن أن يتساوى المتوسط والوسيط لتوزيع غير طبيعي، ولكن المئين 50 هو الوسيط لجميع التوزيعات الطبيعية وغير الطبيعية.

3 التقويم

التقويم التكويني

استعمل التمرين 1 لتقويم الطلاب فيما إذا كانوا قادرين على تحديد المئينات المرتبطة بالدرجات المعطاة أم لا.

7-6 ملاحظات الدرس

1 التركيز

الترابط الرأسي

ما قبل الدرس 7-6

استعمال نظرية ذات الحدين.

الدرس 7-6

إيجاد احتمالات تجارب ذات الحدين.
إيجاد احتمالات باستعمال توزيع ذات الحدين ومفكوكه.

ما بعد الدرس 7-6

إيجاد احتمالات حوادث معينة في فضاء محدود.

2 التدريس

أسئلة التعزيز

اطلب إلى الطلاب قراءة فقرة "لماذا؟".

واسأل:

- ما احتمال ألا يحصل سلمان على نقطة عند لعبه إرسال؟ 64%
- هل يمثِّل النجاح مرتين متتاليتين حادثتين مستقلتين؟ نعم
- إذا كانت نجاحات الإرسال مستقلة، فما احتمال ألا يحصل سلمان على أي نقطة في إرسالين متتاليين؟ 0.4096

7-6 التوزيعات ذات الحدين
Binomial Distributions

فيما سبق:
درست استعمال نظرية ذات الحدين. (مهارة سابقة)

والآن:
- أميِّز تجربة ذات الحدين.
- أجد الاحتمالات باستعمال التوزيع ذي الحدين ومفكوكه.

المفردات:
تجربة ذات الحدين
binomial experiment

التوزيع ذو الحدين
binomial distribution

www.obeikaneducation.com

لماذا؟

في لعبة الكرة الطائرة تبين أن اللاعب سلمان ينجح في لعب الإرسال الساحق الذي لا يصده الخصم في 36% من محاولاته، وبذلك يحصل فريقه على نقطة في كل مرة ينجح فيها.

التوزيع ذو الحدين كثير من التجارب الاحتمالية يكون لها نتيجتان فقط؛ نجاح أو فشل أو يمكن جعلها كذلك. فمثلًا في مسائل الاختيار من متعدد التي لها 5 إجابات، يمكن تصنيف نتائج الإجابة عن كل فقرة إلى صح، أو خطأ، ويمكن تصنيف نتائج دواء طبي على أنه فعّال أو غير فعّال.

مفهوم أساسي تجربة ذات الحدين

تجربة ذات الحدين هي تجربة احتمالية تحقق الشروط الآتية:

- يُعاد إجراء التجربة لعدد محدد(n) من المحاولات المستقلة (المرات) .
- كل محاولة لها فقط نتيجتان متوقعتان؛ نجاح S ، أو فشل F .
- $P(S)$ "ويرمز له بالحرف p" هو نفسه في كل محاولة. واحتمال الفشل $P(F)$ "ويرمز له بالحرف q" هو نفسه في كل محاولة ويساوي $p - 1$.

ويُمثِّل المتغير العشوائي X عدد مرات النجاح في n من المحاولات.

مثال 1 تمييز التجربة ذات الحدين

حدّد ما إذا كانت كل تجربة مما يأتي ذات حدين، أو يمكن جعلها كذلك. وإذا كانت تجربة ذات حدين، فاكتب قيم n, p, q ، وقيم المتغير العشوائي الممكنة، وإذا لم تكن كذلك فبيِّن السبب.

a) تُبيّن نتيجة لمسح إحصائي داخل إحدى المدارس أن 68% من الطلاب يمتلكون حاسبة بيانية. إذا تم اختيار 6 طلاب عشوائيًّا، وسؤالهم عمَّا إذا كانوا يمتلكون هذه الآلة؛ وكان المتغير العشوائي X يُمثِّل عدد الطلاب الذين يملكون الحاسبة البيانية، فإن:

هذه التجربة تحقق شروط تجربة ذات الحدين وهي:

- كل طالب تم اختياره يُمثِّل محاولة، وعملية اختيار الطلاب الستة تتكون من محاولات مستقلة.
- للتجربة نتيجتان متوقعتان: الطالب يملك الحاسبة البيانية S، أو لا يملكها F .
- احتمال النجاح نفسه لكل طالب تم اختياره $P(S) = 0.68$.

وفي هذه التجربة $n = 6, p = P(S) = 0.68$. احتمال الفشل $q = 1 - p$ ، أي أن:
$q = 1 - 0.68 = 0.32$. ويُمثِّل X عدد الطلاب الذين يملكون حاسبة بيانية من الّذين تم اختيارهم، أي أن:
$X = 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6$

b) يحتوي صندوق على 52 بطاقة، وخُصّص لكل 13 بطاقة أحد الألوان الآتية: الأحمر، الأسود، الأخضر، الأبيض. سحبت منه 5 بطاقات الواحدة تلو الأخرى دون إرجاع. وكان المتغير العشوائي X يدل على عدد البطاقات المسحوبة ذات اللون الأخضر.

في هذه التجربة، كل بطاقة يتم سحبها تُمثِّل محاولة، وبما أنه يتم الاحتفاظ بالبطاقة التي تم اختيارها (السحب دون إرجاع)، فإن المحاولات غير مستقلة، واحتمال النجاح في كل محاولة يختلف عن الأخرى؛ لذا فإن هذه التجربة ليست ذات حدين.

مصادر الدرس 7-6

المصدر	دون المتوسط	ضمن المتوسط	فوق المتوسط
دليل المعلم	• تنويع التعليم ص (115)	• تنويع التعليم ص (115)	• تنويع التعليم ص (117)
كتاب التمارين	• ص (17)	• ص (17)	• ص (17)
مصادر المعلم للأنشطة الصفية	• تدريبات إعادة التعليم، ص (26) • تدريبات حل المسألة، ص (28)	• تدريبات حل المسألة، ص (28) • التدريبات الإثرائية، ص (29)	• تدريبات حل المسألة، ص (28) • التدريبات الإثرائية، ص (29)

تحقق من فهمك

حدّد ما إذا كانت كل تجربة مما يأتي ذات حدين، أو يمكن جعلها كذلك. وإذا كانت تجربة ذات حدين، فاكتب قيم n, p, q ، وقيم المتغير العشوائي الممكنة، وإذا لم تكن كذلك فبيّن السبب.

1A أظهرت نتيجة لمسح إحصائي في إحدى المدارس ذات الزي الموحّد أن 61% يحبون الزي الجديد، وأن 24% لا يحبونه. إذا تم اختيار 20 طالبًا بشكل عشوائي، وسؤالهم عمّا إذا كانوا يحبون الزي الجديد. وكان المتغير العشوائي X يدل على عدد الطلاب الذين يحبون الزي الجديد.

1B أجاب خالد عن اختبار مكوّن من 20 فقرة من نوع «الاختيار من متعدد» لكل فقرة منها أربع إجابات، واحدة فقط صحيحة (دون معرفة علمية بموضوع الاختبار). وكان المتغير العشوائي X يدل على عدد الإجابات الصحيحة.

1A ليست ذات حدين
$P(S) = 61\%$,
$P(F) = 1 - 61\% = 39\%$،
في حين أن 24% لا يحبون الزي الموحد، وهذا لا يساوي 39% ، وهذا يعني أنه ليس لكل محاولة نتيجتان فقط.

1B تجربة ذات حدين
$n = 20, p = \frac{1}{4}, q = \frac{3}{4}$,
$X = 0, 1, 2, \ldots 20$

يُسمى توزيع النتائج المتوقَّعة لتجربة ذات حدين والاحتمالات المرتبطة بها **توزيع ذات الحدين**. ويمكن حساب الاحتمالات في هذا التوزيع باستعمال الصيغة ${}_nC_X p^X q^{n-X}$ التي تمثل حدًّا في مفكوك $(p+q)^n$.

مفهوم أساسي — صيغة احتمال ذات الحدين

احتمال النجاح في X مرة من n من المحاولات المستقلة في تجربة ذات الحدين هو:

$$P(X) = {}_nC_X\, p^X q^{n-X} = \frac{n!}{(n-X)!X!} p^X q^{n-X}$$

حيث p احتمال النجاح، وq احتمال الفشل في المحاولة الواحدة.

مثال 2 من واقع الحياة — التوزيع ذو الحدين

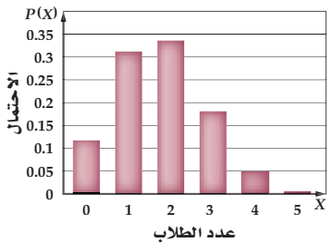
اختبار: في اختبار نهائي، أكد 35% من الطلاب أنهم أجابوا بشكل اعتيادي. إذا اختير 5 طلاب عشوائيًّا، وتم سؤالهم عما إذا أدوا الاختبار بشكل اعتيادي. وكان المتغير العشوائي X يدل على عدد الطلاب الذين أجابوا بنعم عن السؤال، فكوِّن جدولًا للتوزيع ذي الحدين، ومثّله بالأعمدة، ثم أوجد احتمال أن يجيب 3 طلاب على الأقل عن السؤال بنعم.

هذه تجربة ذات حدين فيها: $n = 5, p = 0.35, q = 1 - 0.35 = 0.65$. استعمل الحاسبة البيانية TI-nspire؛ لحساب احتمال كل قيمة ممكنة من قيم X مستعملًا صيغة احتمال ذات الحدين.

$$P(0) = {}_5C_0 \cdot 0.35^0 \cdot 0.65^5 \approx 0.116$$
$$P(1) = {}_5C_1 \cdot 0.35^1 \cdot 0.65^4 \approx 0.312$$
$$P(2) = {}_5C_2 \cdot 0.35^2 \cdot 0.65^3 \approx 0.336$$
$$P(3) = {}_5C_3 \cdot 0.35^3 \cdot 0.65^2 \approx 0.181$$
$$P(4) = {}_5C_4 \cdot 0.35^4 \cdot 0.65^1 \approx 0.049$$
$$P(5) = {}_5C_5 \cdot 0.35^5 \cdot 0.65^0 \approx 0.005$$

وفيما يأتي جدول التوزيع ذي الحدين للمتغير X ، وتمثيله بالأعمدة.

عدد الذين أدُّوا الاختبار بشكل اعتيادي



X	P(X)
0	0.116
1	0.312
2	0.336
3	0.181
4	0.049
5	0.005

إرشاد تقني

حساب احتمال ذات الحدين

لإيجاد كل احتمال لذات الحدين على الحاسبة البيانية:
استعمل الأمر binomPdf(n, p, x) من قائمة تطبيق الحاسبة .

مثال: لإيجاد p (1)
اكتب binomPdf (5, 0.35, 1)
ثم اضغط Enter
فتحصل على 0.312386
كما يمكن إيجادها باستعمال الآلة الحاسبة العلمية كما يأتي:
اضغط على المفاتيح الآتية من اليسار إلى اليمين:

5 SHIFT ÷ 1 × 0.35 $x^{\blacksquare}$ 1 ▶ × (1 − 0.35) $x^{\blacksquare}$ (5 − 1) =

فتظهر الشاشة 0.31238593375

تنويع التعليم

دون ضمن

المتعلمون الحركيون اطلب إلى الطلبة العمل في مجموعات ثلاثية أو رباعية، واطلب إليهم توقع عدد مرات ظهور الكتابة عند رمي قطعة نقد 50 مرة، ثم اطلب إليهم رمي القطة 50 مرة وإيجاد عدد مرات ظهور الكتابة فعلًا، ومقارنة النتائج في الحالتين.

التقويم التكويني

استعمل تدريبات "تحقق من فهمك" بعد كل مثال؛ للتحقق من مدى فهم الطلاب للمفاهيم.

التوزيع ذو الحدين

المثال 1 يُبيّن كيفية تمييز التجربة ذات الحدين.

المثال 2 يُبيّن كيفية تكوين جدول توزيع ذات الحدين.

مثال إضافي

1 حدّد ما إذا كانت كل تجربة مما يأتي ذات حدين، أو يمكن جعلها كذلك، وإذا كانت تجربة ذات حدين، فاكتب قيم n, p, q . وقيم المتغير العشوائي الممكنة. وإذا لم تكن كذلك فبيّن السبب.

a) أُجري مسح إحصائي في إحدى المناطق التعليمية في المملكة، فتبيَّن أنّ 95% من المعلمين يحبون مهنتهم، وأن 5% لا يحبونها، إذا تم اختيار 50 معلمًا عشوائيًّا، وكان المتغير العشوائي X يدل على عدد المعلمين الذين يحبون مهنتهم.

التجربة ذات حدين فيها:
$n = 50, p = 0.95, q = 0.5,$
$X = 0, 1, 2, 3, \ldots, 50$

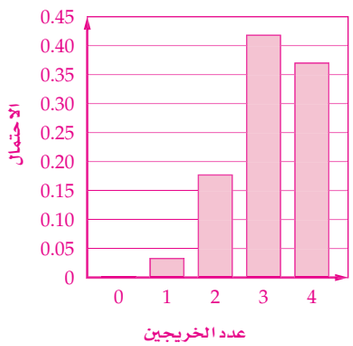
b) يحتوي صندوق على 10 رقاقات إلكترونية زرقاء اللون و 5 رقاقات حمراء اللون، إذا تم سحب 3 رقاقات عشوائيًّا الواحدة تلو الأخرى دون إرجاع، وكان المتغير العشوائي X يدل على عدد الرقاقات الزرقاء المسحوبة.

الحوادث غير مستقلة؛ لأن احتمال سحب رقاقة زرقاء يختلف بعد كل سحب، وعليه فإن التجربة ليست ذات حدين.

مثال إضافي

2 **كليات:** في دراسة حديثة أُجريت على خريجي إحدى الكليات، تبيّن أن 78% من الخريجين يخططون لتلقي التدريب العملي بعد التخرج. تم اختيار 4 خرّيجين عشوائيًّا وسؤالهم عما إذا كانوا يرغبون في تلقي التدريب العملي بعد تخرجهم. إذا كان المتغير العشوائي X يدل على عدد الخرجين الذين أجابوا بنعم عن السؤال، فكوّن التوزيع ذا الحدين ومثّله بيانيًّا، ثم أوجد احتمال أن ثلاثة منهم على الأقل أجابوا بنعم عن السؤال.

X	$P(X)$
0	0.002
1	0.033
2	0.177
3	0.418
4	0.370



$P(x \geq 3) = 0.788$

التوزيع ذو الحدين

المثال 3 يُبيّن كيفية إيجاد المتوسط، والتباين، والانحراف المعياري للمتغير العشوائي X في التوزيع ذي الحدين.

المثال 4 يبيّن كيفية تقريب توزيع ذي حدين إلى توزيع طبيعي.

إرشادات للدراسة

اختيار الاحتمالات
أحيانًا يكون من الأسهل أن تجد احتمال الفشل وتطرح هذه النتيجة من 1 لتجد احتمال النجاح، لأنهما احتمالان متتامان.

لإيجاد احتمال أن 3 طلاب على الأقل أجابوا بنعم، أوجد $P(3) + P(4) + P(5)$.

$P(X \geq 3) = P(3) + P(4) + P(5)$ احتمال 3 طلاب على الأقل

$= 0.181 + 0.049 + 0.005$ $P(3) = 0.181,\ P(4) = 0.049,\ P(5) = 0.005$

$= 0.235 = 23.5\%$ بسّط

تحقق من فهمك

2) **كليات:** يدرس في إحدى الكليات 48% من الطلاب لغة عالمية خلال سنة التخرج. إذا اختير 7 خريجين عشوائيًّا، وتم سؤالهم عمّا إذا درسوا لغة عالمية في سنتهم الأخيرة. وكان المتغير العشوائي X يدل على عدد الطلاب الذين أجابوا بنعم، فكوّن التوزيع ذا الحدين، ومثّله بالأعمدة، ثم أوجد احتمال أن يجيب أقل من 4 طلاب بنعم. انظر الهامش.

تستعمل الصيغ الآتية؛ لإيجاد المتوسط والتباين والانحراف المعياري للتوزيع ذي الحدين.

مفهوم أساسي المتوسط والتباين والانحراف المعياري للتوزيع ذي الحدين

يحسب المتوسط والتباين والانحراف المعياري لمتغير عشوائي X في التوزيع ذي الحدين بالصيغ الآتية:

المتوسط $\mu = np$

التباين $\sigma^2 = npq$

الانحراف المعياري $\sigma = \sqrt{\sigma^2} = \sqrt{npq}$

مـثال 3 المتوسط والتباين والانحراف المعياري للتوزيع ذي الحدين

اختبار: **بالرجوع إلى تجربة ذات الحدين في المثال 2 . أوجد المتوسط والتباين والانحراف المعياري للمتغير العشوائي X، ثُمَّ فسّر معنى المتوسط في سياق الموقف.**

استعمل صيغ المتوسط والتباين والانحراف المعياري للتوزيع ذي الحدين. في هذه التجربة ذات الحدين $n = 5,\ p = 0.35,\ q = 0.65$.

$\mu = np$

$= 5(0.35) = 1.75$

$\sigma^2 = npq$

$= 5(0.35)(0.65) = 1.1375$

$\sigma = \sqrt{\sigma^2}$

$= \sqrt{1.1375} \approx 1.0665$

متوسط التوزيع يساوي 1.8 تقريبًا، ويعني أن خريجَين تقريبًا من أصل 5 أجابوا بنعم. كل من التباين والانحراف المعياري يساوي 1.1 تقريبًا.

تحقق من فهمك

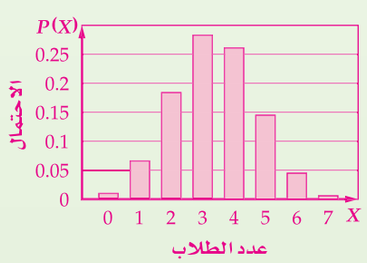
3) **كليات:** أوجد المتوسط والتباين والانحراف المعياري للمتغير العشوائي X في تحقق من فهمك 2، وفسّر معنى المتوسط في سياق الموقف.

3) $\mu = 3.36,\ \sigma^2 = 1.747,\ \sigma \approx 1.322,$ تقريبًا 3 طلبة من بين 7 يدرسون لغة عالمية في سنة التخرج.

إجابة (تحقق من فهمك):

2)

X	$P(X)$
0	0.010
1	0.066
2	0.184
3	0.283
4	0.261
5	0.145
6	0.045
7	0.006



$P(X < 4) = 0.543 = 54.3\%$

عندما يزداد عدد المحاولات في تجربة ذات الحدين، يمكن استعمال التوزيع الطبيعي لتقريب التوزيع ذي الحدين.

مفهوم أساسي تقريب التوزيع ذي الحدين إلى التوزيع الطبيعي

في التوزيع ذي الحدين عندما تُمثّل n عدد المحاولات، واحتمال النجاح p، واحتمال الفشل q، ويكون $np \geq 5, nq \geq 5$، يمكن تقريب التوزيع ذي الحدين إلى توزيع طبيعي بمتوسط $\mu = np$، وانحراف معياري $\sigma = \sqrt{npq}$.

إرشادات للدراسة

التقريب إلى التوزيع الطبيعي

يُستعمل التقريب إلى التوزيع الطبيعي؛ لأنه مع زيادة n يصبح استعمال التوزيع ذي الحدين لإيجاد الاحتمال عملية معقّدة وصعبة.

مثال 4 تقريب التوزيع ذي الحدين إلى توزيع طبيعي

أشارت دراسة سابقة إلى أن 64% من الخريجين يرون أن سنوات الجامعة كانت ممتعة. وقد نفّذ بلال دراسة مسحية على 300 من هؤلاء الخريجين اختارهم عشوائيًّا. ما احتمال أن يوافق 200 خريج منهم على الأقل على ما جاء في الدراسة الإحصائية السابقة؟

في الدراسة المسحية التي نفّذها بلال، عدد الخريجين الذين يرون أن سنوات الجامعة كانت ممتعة يتبع التوزيع ذا الحدين، حيث:

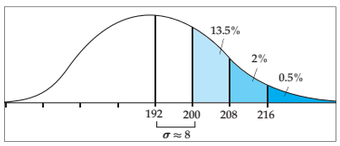
$$n = 300, p = 0.64, q = 0.36$$

وحيث إن:

$$np = 300\,(0.64) = 192 > 5$$

$$nq = 300\,(0.36) = 108 > 5$$

يمكنك استعمال التوزيع الطبيعي لتقريب الاحتمال على النحو الآتي:



المتوسط للتوزيع الطبيعي: $\mu = np$

$n = 300, p = 0.64$: $= 300(0.64) = 192$

الانحراف المعياري للتوزيع الطبيعي: $\sigma = \sqrt{npq}$

$n = 300, p = 0.64, q = 0.36$: $= \sqrt{300(0.64)(0.36)}$

استعمل الآلة الحاسبة: ≈ 8.31

العدد 200 أكبر من المتوسط بمقدار انحراف معياري واحد تقريبًا كما هو مبين في الرسم أعلاه؛ لذا يكون احتمال أن يوافق 200 خريج منهم على الأقل يساوي 16% تقريبًا.

تحقق من فهمك

4) أشارت دراسة سابقة إلى أن 32% من أولياء الأمور المستطلعة آراؤهم يرون أنه يجب تقليل عدد أيام الإجازة الصيفية للطلاب في نهاية العام الدراسي. غير أن آية ترى أن النسبة أقل من ذلك، ولذلك قامت بإجراء دراسة مسحية شملت 250 من أولياء الأمور اختارتهم بطريقة عشوائية ممن استهدفتهم الدراسة السابقة. ما احتمال ألّا يرى أكثر من 65 من أولياء الأمور وجوبَ تقليلِ عدد أيام الإجازة الصيفية؟ انظر ملحق الإجابات.

مثالان إضافيان

3 كليات: بالرجوع إلى تجربة ذات الحدين في المثال الإضافي 2. أوجد المتوسط، والتباين والانحراف المعياري للمتغير العشوائي X، ثم فسّر معنى المتوسط في سياق الموقف.

المتوسط = 3.12، التباين = 0.686، والانحراف المعياري = 0.828، بمعدل 3 خريجين من أصل 4 يخططون لتلقي التدريب العملي بعد التخرج.

4 في الدراسة المسحية في المثال 4، ما احتمال أن يوافق 175 من المستهدفين على الأكثر ؟

2.5% تقريبًا

المحتوى الرياضي

التوزيع ذو الحدين يُسمّى التوزيع ذو الحدين التوزيع ذا المعلمتين، وهما عدد المحاولات (n)، واحتمال النجاح في المرة الواحدة (p). وتتحدّد الاحتمالات تمامًا عند معرفة هاتين المعلمتين.

التعليم باستعمال التقنيات

البحث في شبكة الإنترنت اطلب إلى الطلاب البحث في المواقع عن التوزيعات ذات الحدين وأمثلة عليها.

تنويع التعليم

فوق

توسّع قسّم الطلاب إلى مجموعات ثنائية أو ثلاثية، على أن يقوم طالب من كل مجموعة بكتابة سؤال مسح إحصائي من اهتمامات المجموعة. كلِّف كل مجموعة بمناقشة كيفية تحقيق السؤال لشروط تجربة ذات الحدين، وكتابة نتائج المسح، ثم تحديد كل من n, p, q وتكوين التوزيع ذي الحدين وتمثيله بيانيًّا بالأعمدة.

3 التدريب

التقويم التكويني

استعمل الأسئلة **1-8** للتأكد من فهم الطلاب.

ثم استعمل الجدول أسفل هذه الصفحة؛ لتعيين الواجبات المنزلية للطلاب بحسب مستوياتهم.

إجابات :

1) تجربة ذات حدين؛ $n = 10$، $P = \frac{1}{6}$ لكل رمية، $q = \frac{5}{6}$ ، قيم المتغير العشوائي 0-10 .

2) تجربة ذات حدين؛ $n = 20$، $p = \frac{1}{2}$ ، $q = \frac{1}{2}$ ، قيم المتغير العشوائي 0-20 .

3) ليست تجربة ذات حدين؛ إجابة ممكنة؛ لأنه يوجد أكثر من نتيجتين متوقعتين؛ لأن العمر قد يكون أي عدد ضمن المعقول.

4) ليست تجربة ذات حدين؛ إجابة ممكنة: بما أنك تسحب كرات دون إرجاع، فإن الاحتمالات تختلف في كل سحب لنقص عدد الكرات.

تدرب وحل المسائل

حدّد ما إذا كانت كل تجربة مما يأتي ذات حدين، أو يمكن جعلها ذات حدين. وإن كانت كذلك، فاكتب قيم n, p, q ، ثم اكتب كل قيم المتغير العشوائي الممكنة. وإذا لم تكن تجربة ذات حدين، فبيّن السبب. (مثال 1) **1-4) انظر الهامش.**

1) تم ترقيم أوجه مكعب بالأرقام من 1 إلى 6، ثم أُلقي المكعب 10 مرات، والمتغير العشوائي X يدل على عدد مرات ظهور الرقم 5 .

2) أُلقيت قطعة نقد 20 مرة، والمتغير العشوائي X يدل على عدد مرات ظهور الكتابة.

3) سألت 15 شخصًا عن أعمارهم، والمتغير العشوائي X يدل على أعمار هؤلاء الأشخاص.

4) صندوق به 52 كرة، منها 13 كرة حمراء، و13 كرة زرقاء، و13 كرة بيضاء، و13 كرة صفراء. سحبت 10 كرات على التوالي دون إرجاع. والمتغير العشوائي X يدل على عدد الكرات البيضاء المسحوبة.

كوّن التوزيع ذا الحدين لكلِّ متغير عشوائي مما يأتي، ومثّله بالأعمدة، ثم أوجد المتوسط، وفسّر معناه في سياق الموقف، ثم أوجد التباين، والانحراف المعياري. (المثالان 2, 3) **5-7) انظر ملحق الإجابات.**

5) إذا كان 89 % من طلاب المرحلة الثانوية في إحدى المدارس يتابعون مباريات منتخبهم الوطني، وتم اختيار 5 طلاب عشوائيًّا من هذه المدرسة، وسؤالهم عما إذا كانوا يتابعون مباريات منتخبهم الوطني.

6) بيّنت دراسة أن 26 % من موظفي إحدى الشركات يستعملون الإنترنت في عملهم. إذا تم اختيار 10 موظفين من هذه الشركة عشوائيًّا، وسؤالهم عما إذا كانوا يستعملون الإنترنت في عملهم.

7) أفادت دراسة إحصائية أن 65 % من طلاب الجامعات الذين يمتلكون سيارات يستعملون أحزمة الأمان في أثناء قيادة سياراتهم. إذا تم اختيار 8 طلاب عشوائيًّا ممن يمتلكون سيارات، وسؤالهم إن كانوا يستعملون أحزمة أمان في أثناء قيادة سياراتهم.

8) أعمال صيفية: تبيَّن في دراسة سابقة أن 90% من طلاب الصفوف العليا في مدرسة ثانوية يحصلون على أعمال صيفية، لكن مندرًا قدّر أن النسبة أقل من ذلك؛ لذا قام بدراسة مسحية شملت 400 طالب من الصفوف العليا تم اختيارهم عشوائيًّا. ما احتمال ألا يكون أكثر من 348 من الطلاب المستهدفين حصلوا على عمل صيفي؟ (مثال 4) **2.5% تقريبًا**

9) رخصة قيادة: اعتمادًا على إحدى الدراسات المسحية السابقة، إذا علمت أن 85% من طلاب إحدى الجامعات لديهم رخص قيادة سيارة، فما احتمال أن يكون 6 طلاب على الأقل من بين 10 تم اختيارهم عشوائيًّا لديهم رخص قيادة سيارة؟ **0.99013 أو 99% تقريبًا**

10) كرة قدم: كسب فريق لكرة القدم 75.7% من مبارياته. أوجد احتمال أن يكسب 7 مباريات على الأقل من بين مبارياته العشر القادمة. **0.792 أو 79.2% تقريبًا**

11) رياضيون: وفق بعض الدراسات الحديثة، إذا علمت أن 80% من طلاب المدارس الثانوية يمارسون رياضة واحدة على الأقل في مدرستهم، إذا اختير 6 طلاب عشوائيًّا، وكان المتغير العشوائي X يدل على عدد الذين يمارسون رياضة على الأقل.

a) فأوجد الاحتمالات المرتبطة بعدد الطلاب الذي يمارسون رياضة واحدة على الأقل. **انظر ملحق الإجابات.**

b) ما احتمال ألا يزيد عدد الذين يمارسون الرياضة عن طالبين؟ **1.7% تقريبًا**

12) غسيل سيارات: يقوم بعض الأشخاص بغسيل السيارات لزبائن بعض المجمعات التجارية مقابل أجر معين. وقد أفادت دراسة مسحية أن 65% من الزبائن يدفعون أكثر من الحد الأدنى لأجرة غسيل سياراتهم. ما احتمال أن يدفع أربعة على الأقل من خمسة زبائن مبلغًا أكثر من الحد الأدنى للأجر. **42.8% تقريبًا**

13) حوافز دعائية: تضع شركة للعصائر حوافز بحيث إن 30% من علب العصير تربح علبة مجانية، وقد اشترت سعاد 10 علب. مثّل بالأعمدة البيانية التوزيع الاحتمالي للتوزيع ذي الحدين إذا كان المتغير العشوائي يدل على عدد علب العصير الرابحة. **انظر ملحق الإجابات.**

14) برامج دينية: بناءً على دراسة مسحية سابقة، إذا علمت أن 70% من الأشخاص تحت سن العشرين يتابعون برنامجًا دينيًّا على الأقل في التلفاز. إذا استطلع خليل رأي 200 شخص تحت سن 20 سنة، فما احتمال أن 146 شخصًا منهم على الأقل يتابعون برنامجًا دينيًّا على الأقل؟ **16% تقريبًا**

إذا علمت أن نسبة النجاح في توزيع ذي حدين 60%، ويوجد 18 محاولة، فأجب.

15) ما احتمال ألا توجد أي محاولة ناجحة؟ **0.0000069% تقريبًا**

16) ما احتمال أن توجد 12 محاولة فاشلة؟ **0.0145 أو 1.45% تقريبًا**

تنويع الوجبات المنزلية

دون ضمن فوق

المستوى	الأسئلة
دون دون المتوسط	1–8، 10–19، 25–33
ضمن ضمن المتوسط	1–25 فردي، 25–33
فوق فوق المتوسط	15–33

17) تنس طاولة: كسب لاعب 85% من مبارياته التي لعبها خلال مسيرته الرياضية. أوجد الاحتمالات الآتية:

a) أن يكسب 3 مباريات من بين 5 مباريات قادمة. **13.8% تقريبًا**

b) أن يكسب مباراتين على الأقل من بين المباريات الخمس القادمة. **99.8% تقريبًا**

c) أن يخسر مباراة واحدة على الأقل في مبارياته الخمس القادمة. **55.6% تقريبًا**

لكل من التوزيعات ذات الحدين الآتية، يدلّ الرمز n على عدد المحاولات، ويدلّ الرمز p على احتمال نجاح كل محاولة. أوجد احتمال الحصول على X من النجاحات. 18-23) انظر الهامش.

18) $n = 8, p = 0.3, X \geq 2$

19) $n = 10, p = 0.2, X > 2$

20) $n = 6, p = 0.6, X \leq 4$

21) $n = 9, p = 0.25, X \leq 5$

22) $n = 10, p = 0.75, X \geq 8$

23) $n = 12, p = 0.1, X < 3$

مسائل مهارات التفكير العليا

25, 26) انظر الهامش.

24) تحدٍّ: في تقريب التوزيع ذي الحدين إلى التوزيع الطبيعي، إذا علمت أن احتمال وجود $66 - 60$ نجاحًا يساوي 34%، وكان $\bar{x} = 60$ ، واحتمال النجاح 36%، فكم كان عدد المحاولات؟ **تقريبًا 156**

25) تبرير: حدّد ما إذا كانت العبارة الآتية صحيحة دائمًا، أو صحيحة أحيانًا، أو غير صحيحة أبدًا. وبرّر إجابتك. «من الأفضل أن تجد احتمال الفشل وتطرحه من 1 لتجد احتمال النجاح».

26) مسألة مفتوحة: صف حالة من أنشطة المدرسة أو المجتمع ينطبق عليها التوزيع ذو الحدين، وحدّد عدد المحاولات المستقلة (n) ، وكلًّا من: احتمال النجاح واحتمال الفشل في المحاولة الواحدة.

27) اكتب: فسّر العلاقة بين التجربة ذات الحدين والتوزيع ذي الحدين. **التوزيع ذو الحدين يوضح احتمالات أعداد مرات النجاح لتجربة ذات الحدين في n من المحاولات.**

مراجعة تراكمية

حدّد ما إذا كانت المعادلة في كلٍّ ممايأتي تمثّل دائرة، أو قطعًا مكافئًا، أو قطعًا ناقصًا، أو قطعًا زائدًا، دون كتابتها على الصورة القياسية. وبرّر إجابتك: (مهارة سابقة)

28) $x^2 + 4y^2 = 100$ **قطع ناقص**

29) $5y^2 - 10x = 0$ **قطع مكافئ**

30) $x^2 + y^2 - 3x + 4y - 16 = 0$ **دائرة**

31) سرعة: وضع نظام لمراقبة سرعة السيارات وتسجيلها في شارع قريب من إحدى المدارس، إذا توزّعت هذه السرعات توزيعًا طبيعيًّا بمتوسط 37 mi/h، وانحراف معياري 4 mi/h، فكم سيارة كانت تسير بسرعة تقل عن 33 mi/h في عينة حجمها 425 سيارة؟ **68** (الدرس 7-5)

32) دراسة جامعيَّة: أوضح استطلاع في إحدى المدارس الثانوية أن 88% من الطلاب يريدون إكمال دراستهم الجامعية. وقد قام نواف باستطلاع آراء 150 طالبًا تم اختيارهم عشوائيًّا. ما احتمال أن يكون في العينة 132 طالبًا على الأقل يرغبون في استكمال دراستهم الجامعية؟ **50%** (الدرس 7-5)

تدريب على اختبار

33) اختبار: تقدّمت سمر لاختبار من عشرة أسئلة من نوع الاختيار من متعدد لكل منها أربعة بدائل، لكنها أجابت عن الأسئلة من خلال التخمين (دون معرفة علمية بالموضوع)، ما احتمال أن تحصل على:

a) 7 أسئلة صحيحة الإجابة؟ **0.003**

b) 9 أسئلة صحيحة الإجابة؟ **0.00003**

c) 0 سؤال صحيح الإجابة؟ **0.056**

d) 3 أسئلة صحيحة الإجابة؟ **0.25**

34) إذا كان احتمال نجاح عملية جراحية 90% ، فما احتمال نجاح عملية واحدة على الأقل إذا أُجريت العملية ثلاث مرات؟ **D**

A) 0.001

B) 0.1

C) 0.9

D) 0.999

4 التقويم

فهم الرياضيات اطلب إلى كل طالب أن يجد احتمال وجود ثلاثة أولاد ذكور عند عائلة إذا علم أن لدى هذه العائلة 4 أطفال.

التقويم التكويني

تحقق من فهم الطلاب الدرس 7-6 بإعطائهم:

الاختبار القصير 4، ص (50)

تنبيه!

تجنّب الأخطاء شجّع الطلاب على التفكير في معقولية حلولهم. أكد على حقيقة أن معظم البيانات تتمركز عادةً حول المتوسط.

إجابات:

18) 0.744 أو 74.4% تقريبًا

19) 0.322 أو 32.2% تقريبًا

20) 0.767 أو 76.7% تقريبًا

21) 0.99 أو 99% تقريبًا

22) 0.526 أو 52.6% تقريبًا

23) 0.889 أو 88.9% تقريبًا

25) في بعض الأحيان، إذا كانت الحادثة تتألف من عدد كبير من العناصر مقارنة بالحادثة المتممة، فإننا نقوم بإيجاد احتمال الحادثة المتممة، ونطرح الناتج من الواحد الصحيح، فمثلاً: عندما يكون فضاء العينة مكوّنًا من الأعداد 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 ، وأردنا إيجاد احتمال الحصول على الأعداد 3, 4, 5, 6, 7 فإنه بدلًا من إيجاد الاحتمال لكل من الأعداد 3 – 7 وجمع هذه الاحتمالات، يكون من الأفضل إيجاد الاحتمال لكل من الأعداد الثلاثة 0, 1 , 2 ، وطرح الناتج من العدد 1.

26) إجابة ممكنة: إذا عُلم أن نسبة القطع المعيبة في مصنع 3%، واشترى تاجر 500 قطعة اختيرت عشوائيًّا، فإنه يستطيع أن يجد احتمال وجود 10 قطع معيبة من بينها، حيث $n = 500, p = 3\%, q = 97\%$

التقويم التكويني

المفردات

يشير رقم الصفحة بعد كل مفردة إلى الصفحة التي وردت فيها المفردة لأول مرة. إذا واجه الطلاب صعوبات في حل الأسئلة 5-1، فذكِّرهم باستعمال هذه الصفحات مرجعًا؛ ليتذكروا المعلومات حول هذه المفردات.

التقويم الختامي

اختبار المفردات للفصل 7 ، ص (52)

ملخص الفصل

مفاهيم أساسية

العينة والمجتمع (الدرسان 2-7, 1-7)

- تكون العينة متحيزة إذا صُمّمت لصالح نواتج معينة .
- تكون العينة غير متحيزة إذا كانت عشوائية.

الارتباط والسببية

- عندما يوجد ارتباط بين ظاهرتين فإن كلًّا منهما تؤثر في الأخرى، وعندما يوجد سببية، فإن وقوع ظاهرة معينة يكون سببًا مباشرًا في وقوع الظاهرة الأخرى.

هامش خطأ المعاينة

- عند سحب عينة حجمها n من مجتمع، فإنه يمكن تقريب هامش خطأ المعاينة بالقيمة $\pm \frac{1}{\sqrt{n}}$.

الانحراف المعياري	
المجتمع	العينة
$\sqrt{\frac{\sum_{k=1}^{n}(x_k-\mu)^2}{n}}$	$\sqrt{\frac{\sum_{k=1}^{n}(x_k-\bar{x})^2}{n-1}}$

الاحتمال المشروط (الدرس 3-7)

- الاحتمال المشروط: هو احتمال وقوع حادثة معينة إذا عُلم وقوع حادثة أخرى.
- الجداول التوافقية : هي جداول تكرارية ذات بعدين، يتم فيها تسجيل بيانات ضمن خلايا، حيث إن كل خلية من خلايا الجدول تُمثّل تكرارًا يسمى تكرارًا نسبيًّا، إذ يكون منسوبًا إلى مجموع التكرارات في الجدول، أو منسوبًا إلى مجموع التكرارات في الصف الذي تقع فيه الخلية، أو منسوبًا إلى مجموع التكرارات في العمود الذي تقع فيه الخلية، ويمكن استعمال الجداول التوافقية في إيجاد الاحتمال المشروط .

التوزيعات الاحتمالية (الدروس 6-7, 5-7, 4-7)

المفهوم	الوصف
منفصل	عدد محدّد من النواتج الممكنة
متصل	عدد غير محدّد من النواتج الممكنة
طبيعي	منحنيات متماثلة
ملتوي	منحنيات غير متماثلة
تجربة ذات الحدين	تجربة احتمالية يكون لها نتيجتان فقط

المفردات

الدراسة المسحية ص 86
المجتمع ص 86
تعداد عام ص 86
العينة ص 86
المتحيزة ص 86
غير المتحيزة ص 86
الدراسة القائمة على الملاحظة ص 87
الدراسة التجريبية ص 87
المجموعة التجريبية ص 87
المجموعة الضابطة ص 87
الارتباط ص 88
السببية ص 88
التحليل الإحصائي ص 92
المتغير ص 92
بيانات في متغير واحد ص 92
مقياس النزعة المركزية ص 92
المَعْلَمة ص 92
الإحصائي ص 92
هامش خطأ المعاينة ص 93
مقاييس التشتت ص 93
التباين ص 93
الانحراف المعياري ص 93
الاحتمال المشروط ص 97
الجدول التوافقي ص 98
التكرار النسبي ص 98
النجاح ص 102
الفشل ص 102
المتغير العشوائي ص 103
المتغير العشوائي المنفصل ص 103
التوزيع الاحتمالي ص 103
التوزيع الاحتمالي المنفصل ص 103
الاحتمال النظري ص 104
الاحتمال التجريبي ص 104
القيمة المتوقعة ص 104
التوزيع الاحتمالي المتصل ص 108
التوزيع الطبيعي ص 108
التوزيع الملتوي ص 108
تجربة ذات حدين ص 114
التوزيع ذو الحدين ص 115

اختبر مفرداتك

اختر المفردة المناسبة لكل عبارة مما يأتي من القائمة أعلاه:

1) التوزيع الاحتمالي لمتغير عشوائي معين هو دالة تربط فضاء العينة باحتمالات نواتج فضاء العينة .
2) عندما توجد علاقة بين حادثتين، فإنه يوجد ارتباط بينهما.
3) الدراسة المسحية تكون متحيزة إذا صُمّمت لصالح نواتج معينة.
4) إذا أُعطيت مجموعة معالجة شكلية لا أثر لها في النتيجة، فإن هذه المجموعة تُسمّى المجموعة الضابطة .
5) يُحدّد هامش خطأ المعاينة الفترة التي تبين الفرق في الاستجابة بين العينة والمجتمع .

الفصل 7 دليل الدراسة والمراجعة

7-1 الدراسات التجريبية والمسحية والقائمة على الملاحظة (الصفحات 90 - 86)

حدِّد ما إذا كانت كل دراسة مسحية فيما يأتي تتبنى عينة متحيزة أو غير متحيزة، ثم فسّر إجابتك:

6) يتم اختيار كل عاشر متسوِّق يخرج من مجمع تجاري؛ لمعرفة إن كان مرتاحًا أو مطمئنًا لشرائه من المجمع. انظر الهامش.

7) يتم اختيار كل عاشر طالب يخرج من المدرسة؛ لمعرفة أحب المواد الدراسية إليه في المدرسة. انظر الهامش.

8) يطلب أحد مطاعم الوجبات السريعة إلى زبائنه أن يكملوا استبانة حول أفضل مطعم للوجبات السريعة. انظر الهامش.

حدِّد ما إذا كانت كل حالة تحتاج إلى دراسة مسحية أو دراسة قائمة على الملاحظة أو دراسة تجريبية.

9) اختر 100 طالب نصفهم يعمل جزئيًّا بعد الدراسة، وقارن بين الأوساط لدرجاتهم. دراسة قائمة على الملاحظة

10) اختر 100 شخص، وقسّمهم إلى نصفين عشوائيًّا، ودع إحدى المجموعتين تتناول وجبات قليلة الدسم، بينما تتناول الأخرى وجبات اعتيادية. وقارن النتائج؛ لمعرفة أثر الوجبات القليلة الدسم على صحة الجسم. دراسة تجريبية

مثال 1

اختار صاحب وكالة للسيارات 100 زبون عشوائيًّا قاموا بإجراء الصيانة الدورية لسياراتهم في الوكالة حديثًا، وطرح سؤالًا عليهم حول نوعية الخدمة التي تُقدّمها الوكالة. هل يُمثّل الزبائن الذين تم اختيارهم عينة متحيزة أم غير متحيزة؟ فسّر إجابتك.

غير متحيزة ؛ لأنّ لكل شخص من زبائن الوكالة الفرصة نفسها لأن يكون من بين العينة.

مثال 2

وزّع معلم الرياضيات طلابه مجموعتين عشوائيًّا، وطبّق عليهم اختبارًا، حيث طلب من المجموعة الأولى أداء تمارين رياضية قبل الاختبار، بينما أعطى المجموعة الثانية الاختبار دون أن يطلب منهم تأدية أي تمارين رياضية، وقارن نتائجهم في الاختبار. هل هذه الدراسة دراسة مسحية أم دراسة قائمة على الملاحظة أم دراسة تجريبية؟ وإذا كانت تجريبية، فاذكر كلًّا من المجموعتين الضابطة والتجريبية، ثم بيِّن ما إذا كانت الدراسة متحيزة أم لا.

دراسة تجريبية: المجموعة التجريبية هي الأولى، والضابطة هي الثانية، والدراسة التجريبية متحيزة؛ لأن كل طالب يعرف المجموعة التي ينتمي اليها.

7-2 التحليل الإحصائي (الصفحات 96 - 92)

11) **فصول السنة:** في دراسة مسحية عشوائية شملت 3446 شخصًا، ذكر 34% منهم أن الربيع هو أفضل فصول السنة لديهم. ما هامش الخطأ في المعاينة؟ $\pm 1.7\%$ تقريبًا

12) **سباحة:** في أثناء تمرين السباحة، قاس خالد الأزمنة التي استغرقها في كل مرة لقطع مسافة 400 m، وسجل النتائج الممثلة في الجدول أدناه. أوجد الانحراف المعياري للأزمنة التي حققها.

6.37 ثوانٍ

الزمن بالثواني					
307	312	308	320	311	301
302	304	308	309	315	313
306	314	316	313	313	311
309	306	310	319	326	329
309	314	318	315	318	320

مثال 3

قال 12% من عينة حجمها 2645 شخصًا: إن كرة القدم هي الأكثر تفضيلًا لديهم. ما هامش خطأ المعاينة ؟

هامش خطأ المعاينة $= \pm \frac{1}{\sqrt{n}}$

$= \pm \frac{1}{\sqrt{2645}}$

$\approx \pm 0.019$

هامش خطأ المعاينة $\pm 1.9\%$ تقريبًا.

مراجعة الدروس

مراجعة إذا كانت الأمثلة المعطاة غير كافية لمراجعة المواضيع التي تناولتها الأسئلة، فذكِّر الطلاب بمرجع الصفحات الذي يدلهم أين يراجعون تلك المواضيع في كتابهم المقرر.

نموذج التوقع

اطلب إلى الطلاب تعبئة نموذج التوقع للفصل 7 ص (46)، وناقشهم حول تغيّر إجاباتهم بعد إتمام دراسة الفصل عمّا كانت عليه عند بدايته.

إجابات :

6) غير متحيزة؛ لكل متسوِّق في المجتمع الفرصة نفسها لأن يكون في العينة.

7) غير متحيزة؛ لكل طالب في المدرسة الفرصة نفسها ليكون في العينة.

8) متحيزة؛ لأن زبائن المطعم الذين تُقدَّم لهم الاستبانة غالبًا يفضلون هذا المطعم.

الفصل 7 دليل الدراسة والمراجعة

7-3 الاحتمال المشروط (الصفحات 100 - 97)

13) كرة طائرة: يحصل طارق على نقطة في 65% من مرات قيامه بضربة الإرسال، ما احتمال ألا يحصل على نقطة في ضربة الإرسال الثانية علمًا بأنه حصل على نقطة في ضربة الإرسال الأولى؟ 35%

14) في الجدول أدناه إذا اختير طالب عشوائيًّا فأجب عما يأتي:

	يلبس نظارات	لا يلبس نظارات
الأول الثانوي	6	15
الثاني الثانوي	5	22

a) ما احتمال أن يكون الطالب من الأول الثانوي علمًا بأنه يلبس نظارات؟ $\frac{6}{11}$

b) ما احتمال أن يكون من الذين لا يلبسون النظارات علمًا بأنه من الثاني الثانوي؟ $\frac{22}{27}$

مثال 4

دراسة: أوجد احتمال أن يأخذ طالب اختير عشوائيًّا حصة إضافية علمًا بأنه طالب جديد.

	يأخذ حصصًا إضافية (E)	لا يأخذ حصصًا إضافية (X)
طالب جديد (N)	126	84
طالب قديم (O)	98	72

$P(E \mid N) = \frac{P(E \cap N)}{P(N)}$ قانون الاحتمال المشروط

$= \frac{126}{380} \div \frac{210}{380}$ $P(E \cap N) = \frac{126}{380}$, $P(N) = \frac{210}{380}$

$= \frac{126}{210} = \frac{3}{5}$ بسّط

7-4 الاحتمال والتوزيعات الاحتمالية (الصفحات 107 - 102)

قرعة الألعاب: خلط يوسف بطاقات الألعاب جميعها في صندوق، حيث تشكّلت البطاقات من 12 بطاقة لكرة القدم، 8 بطاقات لكرة الطائرة، 5 بطاقات لكرة السلة وجميعها متماثلة. إذا تم اختيار 3 بطاقات بصورة عشوائية، فأوجد احتمال كل من:

15) P(3 بطاقات للكرة الطائرة) $\frac{14}{575}$

16) P(3 بطاقات لكرة القدم) $\frac{11}{115}$

17) P(بطاقة لكرة السلة وبطاقتان للكرة الطائرة) $\frac{7}{115}$

18) P(بطاقتان لكرة السلة وبطاقة لكرة القدم) $\frac{6}{115}$

19) بطاقات: مجموعة بطاقات مرقّمة مكوّنة من 3 بطاقات عليها الرقم 9، 4 عليها العدد 10، 5 عليها الرقم 6، 4 عليها الرقم 5، وبطاقتين على كلٍّ منهما الرقم 2، وبطاقة عليها الرقم 3. إذا سحبت بطاقة عشوائيًّا من مجموعة البطاقات، فما القيمة المتوقّعة لهذه البطاقة؟ 6.5 تقريبًا

مثال 5

لدى حمزة 5 كتب في حقيبته، هي الرياضيات والكيمياء واللغة الإنجليزية واللغة العربية والتاريخ. إذا قام بترتيبها على رفّ في صف واحد عشوائيًّا، فما احتمال أن تأتي كتب اللغة الإنجليزية واللغة العربية والرياضيات في أقصى اليسار ؟

الخطوة 1 حدّد عدد النجاحات.

${}_3P_3$ مكان الكتب الثلاثة إلى اليسار

${}_2P_2$ أمكنة الكتابين الآخرين

استعمل التباديل ومبدأ العد الأساسي لإيجاد s .

$s = {}_3P_3 \cdot {}_2P_2 = 3! \cdot 2! = 12$

الخطوة 2 أوجد عدد عناصر فضاء العينة $s + f$.

${}_5P_5 = 5! = 120$ $s + f = 120$

وتمثل عدد الترتيبات الممكنة للكتب الخمسة على الرف.

الخطوة 3 أوجد الاحتمال.

$P(S) = \frac{s}{s+f} = \frac{12}{120} = 0.1$ احتمال النجاح

احتمال وضع كتب اللغة الإنجليزية واللغة العربية والرياضيات في أقصى اليسار يساوي 0.1 أو 10%.

122 الفصل 7 الاحتمال والإحصاء

7-5 التوزيع الطبيعي (الصفحات 112 - 108)

في كلٍّ من السؤالين الآتيين توزيع طبيعي بمتوسط وانحراف معياري. أوجد الاحتمال المطلوب في كل منهما.

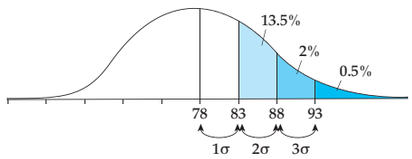
20) $\mu = 121, \sigma = 9, P(X > 103)$ **97.5%**

21) $\mu = 181, \sigma = 12, P(X > 169)$ **84%**

22) زمن الركض: أزمنة الركض لمسافة 40 m لفريق كرة القدم المدرسي تتوزَّع توزيعًا طبيعيًّا بمتوسط 4.7 s، وانحراف معياري 0.15 s . ما نسبة اللاعبين الذين يقل زمن قطعهم المسافة عن 4.4 s؟ **2.5%**

مثال 6

تتوزّع مجموعة من البيانات توزيعًا طبيعيًّا بمتوسط 78، وانحراف معياري 5 . أوجد احتمال أن تزيد قيمة لـ X اختيرت عشوائيًّا عن 83 .



بما أن $\mu + \sigma = 78 + 5 = 83$؛ لذا فإن الاحتمال المطلوب يكون مساويًا $13.5\% + 2\% + 0.5\% = 16\%$

7-6 التوزيعات ذات الحدين (الصفحات 119 - 114)

23) أشخاص مشهورون: في إحدى الدراسات تَبيّن أن 63% من الشباب يفضلون أداء أحد الرياضيين المشهورين. إذا اختير 5 من الشباب عشوائيًّا، وتم سؤالهم عما إذا كانوا يفضلون أداء هذا الرياضي أو لا.

a) إذا مثَّل المتغير العشوائي X عدد الشباب الذين يفضِّلون أداء هذا الرياضي، فكوِّن جدول التوزيع الاحتمالي لذات الحدين للمتغير X، ومثِّله بالأعمدة. **انظر الهامش.**

b) أوجد احتمال أن يكون أكثر من 2 من الشباب يفضِّلون أداء هذا الرياضي. **73.3%**

24) ساعات: أشارت دراسة مسحية للبالغين أن ما نسبته 74% من البالغين يلبسون ساعة يد. وقد قام بكر باستطلاع رأي 200 شخص من البالغين عشوائيًّا. ما احتمال أن يكون 160 شخصًا على الأقل ممن شملهم الاستطلاع يلبسون ساعة يد؟ **2.5%**

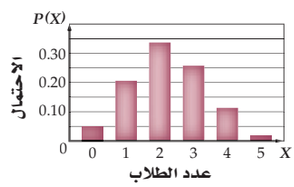
مثال 7

رسم هندسي: أُجريت دراسة في إحدى المدارس، فَتبيّن أن 45% من الطلاب يستطيعون رسم مخروط. إذا تم اختيار 5 منهم بشكل عشوائي، ومثَّل المتغير العشوائي X عدد الطلاب الذين لديهم مقدرة على رسم مخروط، فأجب عمّا يأتي:

a) كوّن جدول التوزيع الاحتمالي لذات الحدين للمتغير X، ومثِّله بالأعمدة.

في هذه المسألة $n = 5, p = 0.45, q = 1 - 0.45 = 0.55$.

X	0	1	2	3	4	5
P(X)	0.050	0.206	0.337	0.276	0.113	0.018



b) أوجد المتوسط والانحراف المعياري والتباين للتوزيع.

$\mu = np = 5(0.45) = 2.25$

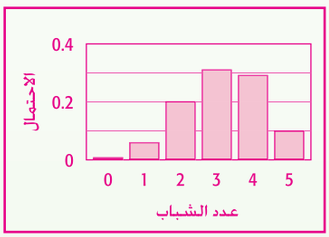
$\sigma^2 = npq = 5(0.45)(0.55) = 1.2375$

$\sigma = \sqrt{\sigma^2} = \sqrt{1.2375} \approx 1.1124$

إجابة:

23a)

X	P(X)
0	0.007
1	0.059
2	0.201
3	0.342
4	0.291
5	0.099



إجابات:

25b) هذه دراسة تجريبية؛ لأنه تم اختيار المجموعتين عشوائيًّا، وإحدى المجموعتين (التجريبية) خضعت لدورة تدريبية في اللغة الإنجليزية، والأخرى (الضابطة) لم تخضع لأي دورة تدريبية، وهي دراسة تجريبية متحيزة؛ لأن كل موظف يعرف المجموعة التي ينتمي إليها.

28)

X	0	1	2	3
$P(X)$	0.125	0.375	0.375	0.125

تطبيقات ومسائل

25) حدِّد ما إذا كان كل موقف مما يأتي يمثِّل دراسة تجريبيّة، أو دراسة قائمة على الملاحظة، وفي حالة الدراسة التجريبية، اذكر كلًّا من المجموعة الضابطة والمجموعة التجريبيّة، ثم بيّن إن وجد تحيز أو لا: (الدرس 1-7)

a) اختر 100 طالب نصفهم يأتي إلى المدرسة مبكرًا، وقارن بين تحصيلهم في مادة معينة. **هذه دراسة قائمة على الملاحظة**

b) اختر 100 موظف، واقسمهم نصفين، وأخضع إحدى المجموعتين إلى دورة في اللغة الإنجليزية، أما الأخرى فلا تخضعها لأي دورة تدريبية. **انظر الهامش.**

26) اختير 10 طلاب بصورة عشوائية من الصف الثالث الثانوي، وقيست أطوالهم بالسنتمترات فكانت كما يلي:

170, 165, 155, 168, 177, 180, 168, 167, 160, 161

بيِّن ما إذا كانت هذه البيانات تمثِّل عينة أم مجتمعًا، ثم اوجد الانحراف المعياري لهذه الأطوال. (الدرس 2-7)
7.55 تقريبًا

27) سجِّلت أعداد الطلاب ذوي العيون الزرقاء أو غير الزرقاء في أحد المعاهد.

	سنة أولى	سنة ثانية
عيون زرقاء	5	10
عيون ليست زرقاء	95	80

إذا اختير أحد الطلاب عشوائيًّا، فأوجد احتمال أن تكون عيونه زرقاء علمًا بأنه في السنة الثانية. (الدرس 3-7) $\frac{1}{9}$

28) رُميت 3 قطع نقد مرة واحدة. إذا كان المتغير العشوائي X يدل على عدد مرات ظهور الشعار، فاكتب جدول التوزيع الاحتمالي للمتغير العشوائي X، ثم مثِّله بالأعمدة. (الدرس 4-7) **انظر الهامش.**

29) سكة حديد: إذا كانت الفترات الزمنية للانتظار التي يقضيها 16000 مسافر في إحدى محطات سكك الحديد موزَّعة توزيعًا طبيعيًّا بمتوسط 72 min، وانحراف معياري 15 min، فأوجد نسبة المسافرين الّذين ينتظرون أكثر من 42 min. (الدرس 5-7)
97.5% تقريبًا

30) إجازات: في دراسة مسحية سابقة وجد أن ما نسبته 70% من العاملين يأخذون إجازاتهم السنوية في الصيف، لكن محسنًا يعتقد أن هذا الرقم مبالغ فيه، فقام باستطلاع رأي 650 عاملًا عشوائيًّا. ما احتمال ألا يأخذ أكثر من 420 عاملًا إجازاتهم في الصيف؟ (الدرس 6-7) **0.5% تقريبًا**

الفصل 7 اختبار الفصل

حدّد ما إذا كانت العبارات الآتية تصف ارتباطًا أو سببية، ثم فسّر إجابتك:

1) عندما يرى محمود البرق، فإنه يسمع الرعد بعد ذلك.

2) عندما يركض نايف عند مدخل المدرسة، فإنه يكون متأخرًا عن المدرسة.

حدّد ما إذا كانت كل دراسة مسحية فيما يأتي تتبنى عينة متحيزة أو غير متحيزة، ثم فسّر إجابتك: 3, 4) انظر الهامش.

3) استطلع صاحب مخزن يبيع من خلال الشبكة العنكبوتية زبائنه عن أهمية وجود الإنترنت في المنزل.

4) يختار معلم 5 أسماء لطلاب يدرسهم؛ لإلقاء كلمة الصباح بعد أن يقوم بوضع الأسماء جميعها في سلة ويخلطها .

أي مقاييس النزعة المركزية يصف كلًّا من البيانات الآتية بصورة أفضل؟ ولماذا؟

5)

درجات اختبار				
3	3	3	4	4
4	4	5	5	4
4	3	3	3	3
4	4	3	3	3
3	4	3	5	4

المتوسط؛ لأن البيانات لا تتضمّن قيمًا متطرفة.

6)

الطول بالبوصة				
64	61	62	64	61
83	66	61	65	63
61	65	62	63	84
61	63	66	62	61

الوسيط؛ لأن البيانات تتضمن قيمًا متطرفة، ولا توجد فجوات كثيرة في المنتصف

فيما يأتي المتوسط والانحراف المعياري لمجموعة من البيانات تتوزّع توزيعًا طبيعيًا، أوجد الاحتمال المطلوب في كل منها:

7) $\mu = 54, \sigma = 5, P(X > 44)$ 97.5%

8) $\mu = 35, \sigma = 2.4, P(X < 37.4)$ 84%

يحتوي كيس على 10 كرات زجاجية زرقاء، و8 كرات حمراء، و 12 خضراء، وجميعها متماثلة، سحبت كرتان واحدة تلو الأخرى، أوجد الاحتمال لكل من:

9) الكرة الثانية حمراء، علمًا بأن الكرة الأولى زرقاء دون إرجاع. $\frac{8}{29}$

10) الكرة الثانية زرقاء، علمًا بأن الكرة الأولى خضراء مع الإرجاع. $\frac{1}{3}$

11) **اختبارات:** أعطى المعلم أيمن طلابه الفرصة لإعادة أحد الاختبارات، كما عقد درس مراجعة اختياري يوم الخميس قبل إعادة الاختبار لمن يرغب. بعض الطلاب تحسَّن أداؤهم، والبعض الآخر لم يتحسن، والجدول أدناه يبين ذلك. إذا اختير طالب عشوائيًا، فأوجد:

	تحسن	لم يتحسن
حضر المراجعة	12	3
لم يحضر المراجعة	4	6

a) احتمال أن يكون قد تحسّن علمًا بأنه حضر المراجعة. $\frac{12}{15}$ أو 80%

b) احتمال أنه لم يحضر المراجعة علمًا بأنه لم يتحسّن. $\frac{6}{9} \approx 67\%$

12) **اختيار من متعدد:** شارك 10 طلاب من الصف الأول الثانوي، وَ 12 طالبًا من الصف الثاني الثانوي في السحب على 5 جوائز. إذا كان السحب عشوائيًا، فما احتمال أن يكون الرابحون 3 من الصف الأول الثانوي، وطالبين من الصف الثاني الثانوي؟ D

A 0.46% تقريبًا

B 0.25% تقريبًا

C 70% تقريبًا

D 30% تقريبًا

13)

X	0	1	2
$P(X)$	0.1	0.6	0.3

13) سُحبت كرتان معًا من صندوق يحتوي على 3 كرات زرقاء، وكرتين حمراوين. إذا كان المتغير العشوائي X يدل على عدد الكرات الزرقاء المسحوبة، فكوِّن جدول التوزيع الاحتمالي للمتغير العشوائي X.

14) **طقس:** أخبر الراصد الجوي أن احتمال سقوط المطر في كل يوم من الأيام السبعة القادمة 40% . أوجد احتمال أن يسقط المطر في يومين من هذه الأيام على الأقل. 84.1% تقريبًا

15) **حديقة:** يخطط يعقوب لزرع 24 شجرة أزهار، إذا علمت أن البذور التي أحضرها لأزهار من اللونين الأبيض والأزرق، وأنها لم تزهر بعد، ولكنه يعلم أن احتمال الحصول على زهرة زرقاء 75% ، فما احتمال حصوله على 20 زهرة زرقاء على الأقل؟ 0.24665تقريبًا أو 24.7%

المعالجة:

بناءً على نتائج اختبار الفصل، استعمل مخطط المعالجة في مراجعة المفاهيم التي لا تزال تشكل تحدِّيًا للطلاب.

اختبار الفصل: نماذج متعددة، ص (61–53)

إجابات:

1) ارتباط: على الرغم من أن البرق يسبق الرعد دائمًا، ولكن هذا لا يعني أن البرق هو الذي يسبب الرعد.

2) ارتباط: مع وجود علاقة بين الحدثين، إلا أن نايفًا قد يركض لسبب آخر.

3) متحيزة؛ لأن الناس الذين تم استطلاع آرائهم يرون أهمية كبرى لوجود الإنترنت، فهم يشترون من خلاله.

4) غير متحيزة؛ كل فرد في المجتمع له الفرصة نفسها ليكون في العينة.

مخطط المعالجة

المستوى 1	ضمن المتوسط	المستوى 2	دون المتوسط
إذا	أخطأ بعض الطلاب في 25% أو أقل تقريبًا من الأسئلة،	إذا	أخطأ بعض الطلاب في 50% تقريبًا من الأسئلة،
فاختر	أحد المصادر الآتية:	فاختر	المصدر الآتي:
كتاب الطالب	الدروس 7-1, 7-2, 7-3, 7-4, 7-5 , 7-6		
دليل المعلم	مشروع الفصل، ص (86)		
زيارة الموقع	www.obeikaneducation.com	زيارة الموقع	www.obeikaneducation.com

الدرس 1-7، ص (92)

25) إجابة ممكنة: ليس أيّ منهما، كلا التجربتين متحيّزتان؛ لأن الموجودين في المجموعة التجريبية يعلمون ذلك.

27) إجابة ممكنة: العينة العشوائية؛ تُسحب العينات العشوائية من المجتمع للحصول على عينة ممثّلة للمجتمع، وبغرض تجنّب التحيّز، يتم استعمال الإختيار العشوائي؛ لتحديد الأفراد في كل من المجموعتين التجريبية والضابطة، بحيث يكون لكل منهم الفرصة ذاتها ليكون ضمن أي من المجموعتين. كما يتم التأكد أن كل فرد لا يعرف إلى أي مجموعة ينتمي.

28a) إجابة ممكنة: دراسة مسحية تتناول استطلاع رأي 50 طالبًا في الصف الأول الثانوي حول الطريقة التي سيقررون بناءً عليها مسار التعليم الثانوي المفضل لهم.
العينة: سجّل طلاب المدرسة جميعهم في قائمة، واسحب عشوائيًّا 50 طالبًا .
موضوع الدراسة المسحية: طريقة تحديد الطالب خياره في مسار التعليم الثانوي الذي يرغب فيه على مقياس من 1 إلى 5 ، حيث يدل الرمز 1 على المعارضة بشدة، والرمز 5 على الموافقة بشدة.

28c) إجابة ممكنة: اختر عينة من 20 شخصًا عشوائيًّا مصابين بالرشح. أعطِ نصفهم علاجًا، وأعطِ النصف الآخر علاجًا شكليًّا، وقارن بين النتائج بعد 3 أسابيع . المجموعة التجريبية هي مجموعة الأشخاص الذين أُعطوا العلاج المقصود، والمجموعة الضابطة هم الذين أُعطوا علاجًا محايدًا (شكليًّا).

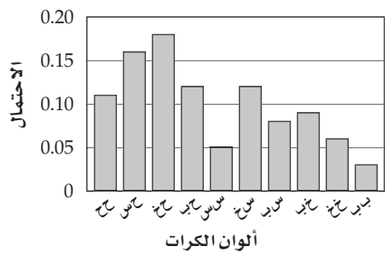
29) إجابة ممكنة: يمكن أن يحدث التحيّز في الدراسة التجريبية عندما يعلم الأفراد في المجموعة التجريبية أنها هي المجموعة التي ينتمون إليها. فمثلًا إذا علم أفراد مجموعة تجريبية أنهم يتعرّضون لعلاج بقصد زيادة مستوى الطاقة لديهم، فقد يحاولون التأثير في نتائج الدراسة، وإثبات أن العلاج فاعل أو غير فاعل، وكذلك إذا علم أفراد المجموعة الضابطة أنهم يأخذون علاجًا غير فاعل، فلن تكون لديهم الدافعية لاستكمال التجربة.

40) دراسة تجريبية: وضع الأشخاص في مجموعات عشوائية. تتضمن المجموعة التجريبية التي تقوم بالتدريبات الرياضية لمدة ساعة واحدة يوميًّا، وتتضمن المجموعة الضابطة من لايفعل ذلك.
الدراسة التجريبية متحيزة؛ لأن أفراد المجموعة التجريبية يعلمون أنهم يخضعون لدراسة. وأفراد المجموعة الضابطة أنهم لا يتدربون أسوة بأفراد المجموعة التجريبية.

الدرس 4-7، ص (108)

14a)

أحمر / أحمر	11%
أحمر / أسود	16%
أحمر / أخضر	18%
أحمر / أبيض	12%
أسود / أسود	5%
أسود / أخضر	12%
أسود / أبيض	8%
أخضر / أبيض	9%
أخضر / أخضر	6%
أبيض / أبيض	3%

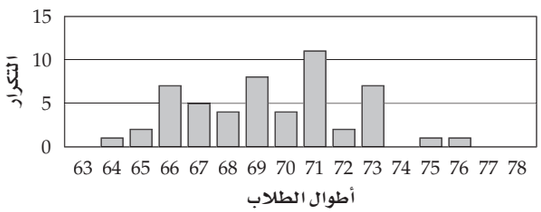


الدرس 5-7، ص (114)

18)

أطوال الطلاب بالبوصات							
70	65	71	69	66	71	72	73
70	69	73	66	72	69	68	71
70	67	73	71	71	67	69	65
71	68	68	73	66	69	66	67
66	73	64	67	71	71	73	67
73	75	71	71	76	69	69	66
68	71	69	66	70			

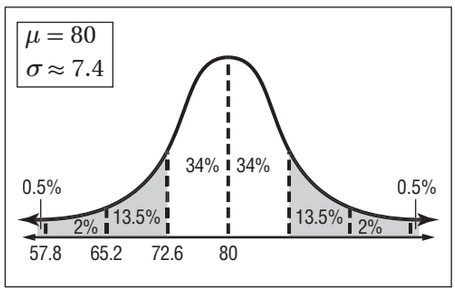
المتوسط للبيانات 69.47 in، الانحراف المعياري 2.73 in



الدرس 6-7 ، تحقق من فهمك 4، ص (120 - 119)

تحقق من فهمك 4

4)



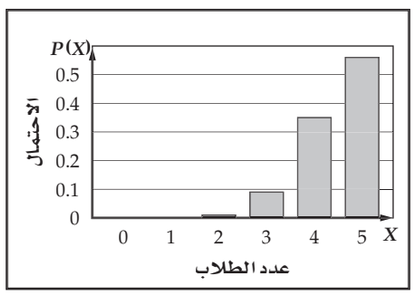
الدراسة التي قامت بها آية تعد تجربة ذات حدين فيها:
$n = 250, p = 0.32, q = 1\text{-}0.32 = 0.68$

وحيث إن:
$np = 250\ (0.32) = 80 > 5$
$nq = 250\ (0.68) = 170 > 5$

فإنه يمكننا استعمال التوزيع الطبيعي لتقريب الاحتمال على النحو الآتي:
$\mu = np = 80$
$\sigma = \sqrt{npq} = \sqrt{250 \times 0.32 \times 0.68} \approx 7.4$

العدد 65 أصغر من المتوسط بمقدار انحرافين معياريين تقريبًا؛ لذا يكون احتمال أن يرى أكثر من 65 من أولياء الأمور وجوب تقليل عدد أيام الإجازة الصيفية يساوي تقريبًا
$(13.5 + 34 + 50)\% = 97.5\%$ ،
وعليه فإن احتمال المتممة وهي ألا يرى أكثر من 65 من أولياء الأمور وجوب تقليل عدد أيام الإجازة الصيفية يساوي تقريبًا:
$1 - 97.5\% = 2.5\%$.

5)

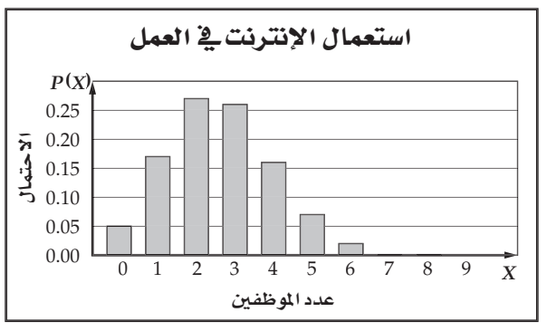


X	$P(X)$
0	0.00
1	0.00
2	0.01
3	0.09
4	0.35
5	0.56

$\mu \approx 4.45$؛ إجابة ممكنة: من بين 5 طلاب من طلاب المرحلة الثانوية 4 منهم تقريبًا يتابعون مباريات منتخبهم الوطني،
$\sigma^2 \approx 0.49$، $\sigma \approx 0.70$

6)

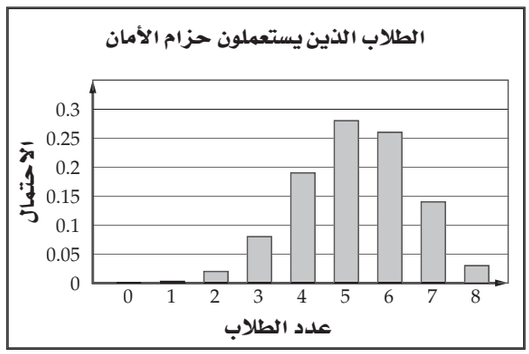
X	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$P(X)$	0.05	0.17	0.27	0.26	0.16	0.07	0.02	0.00	0.00	0.00	0.00



$\mu \approx 2.60$؛ إجابة ممكنة: من بين 10 موظفين 3 منهم تقريبًا يستعملون الإنترنت في العمل $\sigma^2 \approx 1.92$ ، $\sigma \approx 1.39$

7)

X	0	1	2	3	4	5	6	7	8
P(X)	0.00	0.003	0.02	0.08	0.19	0.28	0.26	0.14	0.03



$\mu \approx 5.20$؛ إجابة ممكنة: من بين 8 طلاب من طلاب الجامعات الّذين يملكون سيارات خاصة 5 منهم تقريبًا يستعملون حزام الأمان في أثناء قيادة سياراتهم، $\sigma^2 \approx 1.82$، $\sigma \approx 1.35$

11a)

عدد الطلاب	الاحتمال
0	00.0064%
1	00.15%
2	01.5%
3	08.2%
4	24.6%
5	39.3%
6	26.2%

13)