مشروع الفصل

الأفعوانية

يستعمل الطلاب ما تعلموه عن النهايات والاشتقاق؛ لوصف سرعة وموقع عربة الأفعوانية المتغيرين.

- اطلب إلى الطلاب جمع معلومات حول حدود الارتفاعات والسرعات التي تبلغها الأفعوانيات.
- اطلب إليهم مناقشة عدة طرائق؛ لاختبار معدلات سرعة عربة الأفعوانية في فترات زمنية مختلفة.
- اطلب إليهم العمل معًا في مجموعات واستعمال المعلومات التي جمعوها خلال البحث لتعريف دالة تُمثِّل سرعة العربة واستعمال هذه الدالة؛ في إيجاد معدلات سرعة العربة في ثلاث نقاط مختلفة خلال حركتها.
- اطلب إلى كل مجموعة تلخيص ما توصلت إليه، وعرضه أمام الفصل.

المفردات: قدِّم مفردات الفصل مستعملًا الخطوات الآتية :

التعريف: معدل التغير اللحظي للدالة f عند النقطة $(x, f(x))$ هو ميل المماس m عند النقطة $(x, f(x))$ ، ويعطى بالصيغة $m = \lim\limits_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$ ، بشرط أن تكون النهاية موجودة.

مثال: أوجد معدل التغير اللحظي للدالة $f(x) = 5$ عند النقطة $(1, 5)$

$$m = \lim_{h \to 0} \frac{f(1+h) - f(1)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{5-5}{h} = 0$$

سؤال: أوجد معدل التغير اللحظي للدالة $f(x) = x$ عند النقطة $(2, 2)$

معدل التغير اللحظي للدالة عند $(2, 2)$ يساوي 1

الفصل 8 النهايات والاشتقاق
Limits and Differentiation

فيما سبق:

درستُ النهايات ومُعدلات التغير.

والآن:

- أحسبُ نهايات دوال كثيرات الحدود والدوال النسبية.
- أجدُ مُعدلات التغيّر اللحظية.
- أجدُ مشتقات دوال كثيرات الحدود، وأحسب قيمها.
- أجد المساحة تحت منحنى دالة باستعمال التكامل المحدد.
- أجد الدالة الأصلية، وأستعمل النظرية الأساسية في التفاضل والتكامل في إيجاد التكامل المحدد.

لماذا؟

الأفعوانية: يُعد الاشتقاق وسيلة فاعلة ومهمة عند دراسة مُعدلات التغيّر غير الثابتة ، فإذا ركبت الأفعوانية يومًا ، فإن سرعتك وتسارعك يتغيران باستمرار مع الزمن بالاعتماد على موقعك، وستدرس في هذا الفصل مسائل تحتوي مواقف مشابهة.

قراءة سابقة: استعمل أسئلة اختبار منتصف الفصل؛ لتساعدك على توقع محتوى النصف الأول من الفصل.

قراءة سابقة

شجِّع الطلاب على الإعداد المسبق لكل درس بطريقة جيدة تتم من خلال قراءته قراءة سريعة مرة، وأخرى متأنية، وأعطهم الوقت الكافي؛ لمناقشة ما يحتويه الدرس من أفكار ومفردات أساسية، واطلب إليهم كتابة استفساراتهم التي لم يتوصلوا إلى الإجابة عنها، وما صعب عليهم فهمه؛ لمناقشتها في أثناء تقديم الدرس.

تنويع التعليم

نموذج بناء المفردات، ص (66).

يكمل الطلاب هذا النموذج بكتابة تعريف كل مفردة جديدة تظهر لهم في أثناء دراسة الفصل أو مثال عليها، ويستفيدون من ذلك في أثناء المراجعة والاستعداد لاختبار الفصل.

التهيئة للفصل 8

تشخيص الاستعداد: هناك بديلان للتأكد من المتطلبات السابقة.

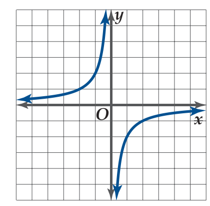
البديل 1

أجب عن أسئلة الاختبار السريع الآتي:

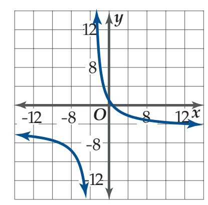
اختبار سريع

استعمل التمثيل البياني لوصف سلوك طرفي التمثيل البياني لكل دالة مما يأتي: **(1–2** انظر ملحق الإجابات.

1) $q(x) = -\frac{2}{x}$



2) $m(x) = \frac{7-10x}{2x+7}$



3) **صناعة:** يمكن تقدير معدل التكلفة بالريال لإنتاج x قطعة من منتج ما باستعمال الدالة $A(x) = \frac{1700}{x} + 1200$. صف سلوك الدالة باستعمال التمثيل البياني للحاسبة البيانية عندما تقترب x من موجب مالانهاية. انظر ملحق الإجابات.

4) أوجد متوسط مُعدّل تغيّر الدالة $f(x) = -2x^3 - 5x^2 + 6$ ، على الفترة $[-4, -1]$ **−17**

أوجد معادلات خطوط التقارب الرأسية والأفقية (إن وجدت) لكل دالة مما يأتي: **(5–8** انظر الهامش.

5) $f(x) = \frac{4x^2}{2x^2+1}$

6) $h(x) = \frac{2x^2-8}{x-10}$

7) $f(x) = \frac{(x-1)(x+5)}{(x+2)(x-4)}$

8) $g(x) = \frac{x^2-16}{(x-2)(x+4)}$

أوجد الحدود الأربعة التالية في كل متتابعة مما يأتي: **(9–12** انظر الهامش.

9) $8, 3, -2, -7, \ldots$

10) $5, -1, -7, -13, \ldots$

11) $5, -10, 20, -40, \ldots$

12) $-28, -21, -14, -7, \ldots$

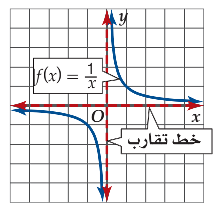
البديل 2

أسئلة تهيئة إضافية على الموقع www.obeikaneducation.com

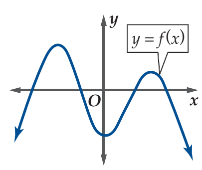
مراجعة المفردات

النهاية (limit)
الاقتراب من قيمة دون الوصول إليها بالضرورة.

خطوط التقارب (asymptotes)
خط يقترب من منحنى الدالة دون أن يصله.



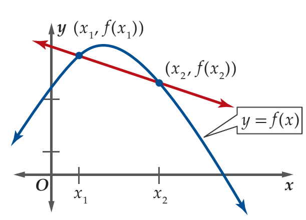
الدالة المتصلة (continuous function)
تكون الدالة متصلة إذا لم يكن في تمثيلها البياني أي انقطاع أو قفزة.



$f(x)$ متصلة لجميع قيم x.

عدم الاتصال القابل للإزالة (removable discontinuity)
نقاط عدم اتصال قابلة للإزالة تحدث غالبًا عندما يكون بين بسط ومقام الدالة النسبية عوامل مشتركة.

متوسط معدل التغير (average rate of change)
متوسط معدل التغير بين نقطتين على منحنى الدالة $f(x)$ هو ميل المستقيم المار بهاتين النقطتين.



المعالجة

استعمل نتائج الاختبار السريع ومخطط المعالجة أدناه لمساعدتك على تحديد مستوى المعالجة المناسب. كما تساعد العبارة "إذا...فقم" في المخطط على تحديد المستوى المناسب للمعالجة، واقتراح مصادر لكل مستوى.

مخطط المعالجة

المستوى 1 — ضمن المتوسط

إذا أخطأ بعض الطلاب فيما لا يزيد على 25% تقريبًا من الأسئلة.

فقم بمراجعة الطلاب في: استعمال التمثيل البياني لوصف سلوك طرفي التمثيل البياني للدالة، وإيجاد معادلات خطوط التقارب، وإيجاد متوسط معدل التغير لدالة على فترة معطاة.

زيارة الموقع www.obeikaneducation.com

المستوى 2 — دون المتوسط

إذا أخطأ بعض الطلاب في 50% تقريبًا من الأسئلة.

فقم بتحديد أخطائهم، ووضع أنشطة علاجية لذلك.

زيارة الموقع www.obeikaneducation.com

تنويع التعليم

دون ضمن

قائمة اطلب إلى الطلاب عمل قائمة بالمفردات الواردة في الفصل، وكتابة تعريف أو وصف لكل منها في أثناء دراستهم للفصل؛ لاستعمالها بوصفها وسيلة مراجعة لاختبار الفصل.

إجابات:

5) $y = 2$

6) $x = 10$

7) $x = -2, x = 4, y = 1$

8) $x = 2, y = 1$

9) $-12, -17, -22, -27$

10) $-19, -25, -31, -37$

11) $80, -160, 320, -640$

12) $0, 7, 14, 21$

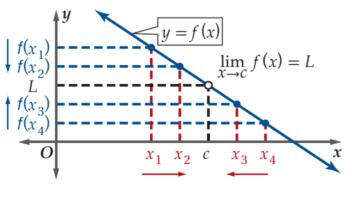
تقدير النهايات بيانيًّا
Estimating Limits Graphically

لماذا ؟

هل هناك نهايات للأرقام المسجَّلة في المسابقات الرياضية لا يمكن تجاوزها؟ لقد كان الرقم القياسي المسجَّل في دورة الألعاب المقامة في بكين عام 2008 م لمسابقة الوثب بالزانة 5.05 m. ويمكن استعمال الدالة:
$f(x) = \frac{5.334}{1 + 62548.213\,(2.7)^{-0.129x}}$ لتقدير الرقم القياسي الذي تم تسجيله في هذه الرياضة للأعوام بين 1996 م و2008 م ، حيث x عدد السنوات منذ عام 1900 م ، يمكنك استعمال نهاية هذه الدالة عندما تقترب x من المالانهاية؛ للتنبؤ بأكبر رقم يمكن تسجيله.

تقدير النهايات عند قيم محددة: يتمحور علمُ التفاضلِ والتكاملِ حول مسألتين أساسيتين:

- إيجاد معادلة مماس منحنى دالة عند نقطة واقعة عليه.
- إيجاد مساحة المنطقة الواقعة بين التمثيل البياني لدالة والمحور x.
  وتُعدُّ مفاهيم النهايات أساسية لحل هاتين المسألتين.



تعلمت في الدرس 3-1 أنه إذا اقتربت قيم $f(x)$ من قيمة وحيدة L، كلما اقتربت قيم x من العدد c من كلا الجهتين ، فإن نهاية $f(x)$ عندما تقترب x من c هي L ، وتكتب على الصورة $\lim_{x \to c} f(x) = L$.

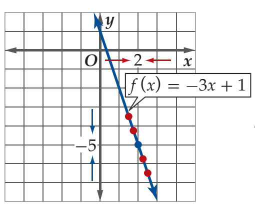
يمكنك تطبيق مفهوم النهاية لتقدير نهاية $f(x)$ عندما تقترب x من العدد c ؛ أي $\lim_{x \to c} f(x)$ ، وذلك من خلال تمثيل الدالة بيانيًّا، أو إنشاء جدولٍ لقيم $f(x)$.

مثال 1 تقدير النهاية (النهاية تساوي قيمة الدالة)

قدِّر $\lim_{x \to 2} (-3x + 1)$ باستعمال التمثيل البياني، ثم عزِّز إجابتك باستعمال جدول قيمٍ.

التحليل بيانيًّا: مثِّل الدالة الخطية $y = -3x+1$ بيانيًّا باستعمال النقطتين $(0, 1), (1, -2)$.
يُبيِّن التمثيل البياني للدالة $f(x) = -3x + 1$، أنه كلما اقتربت x من العدد 2 ، فإن قيم $f(x)$ المقابلة تقترب من العدد -5 ؛ لذا فإن بإمكاننا تقدير أن :

$$\lim_{x \to 2}(-3x + 1) = -5 .$$



التعزيز عدديًّا: كوّن جدولًا لقيم $f(x)$، وذلك باختيار قيم x القريبة من العدد 2 من كلا الجهتين.

x تقترب من 2 ← | → x تقترب من 2

x	1.9	1.99	1.999	2	2.001	2.01	2.1
$f(x)$	−4.7	−4.97	−4.997		−5.003	−5.03	−5.3

يبيِّن نمط قيم $f(x)$ أنه كلما اقتربت x من العدد 2 من اليمين أو من اليسار، فإن قيم $f(x)$ تقترب من العدد -5 ، وذلك يعزِّز تحليلنا البياني.

تحقق من فهمك

قدِّر كل نهاية مما يأتي باستعمال التمثيل البياني، ثم عزِّز إجابتك باستعمال جدول قيمٍ.

(1A $\lim_{x \to -3} (1 - 5x)$ **16**

(1B $\lim_{x \to 1} (x^2 - 1)$ **0**

(1A, 1B) للجداول والتمثيل البياني انظر ملحق الإجابات.

فيما سبق:

درستُ تقدير النهايات لتحديد اتصال الدالة وسلوك طرفي تمثيلها البياني. (مهارة سابقة)

والآن:

- أقدِّر نهاية الدالة عند قيم محددة.
- أقدِّر نهاية الدالة عند المالانهاية .

المفردات:

النهاية من جهة واحدة
one-sided limit

النهاية من جهتين
two-sided limit

www.obeikaneducation.com

تاريخ الرياضيات

ثابت بن قرة
(221هـ–288هـ)
من أوائل من فكروا بعلم التفاضل والتكامل، حيث أوجد حجم الجسم الناتج عن دوران القطع المكافئ حول محوره.

1 التركيز

الترابط الرأسي

ما قبل الدرس 8-1

تقدير النهايات؛ لتحديد اتصال الدالة وسلوك طرفي تمثيلها البياني.

الدرس 8-1

تقدير نهاية الدالة عند قيم محددة.

تقدير نهاية الدالة عند المالانهاية .

ما بعد الدرس 8-1

حساب النهايات جبريًّا.

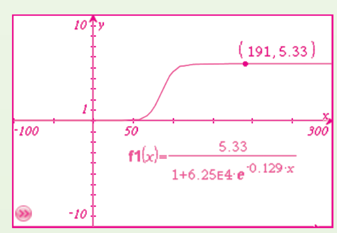
2 التدريس

أسئلة التعزيز

اطلب إلى الطلاب قراءة فقرة "لماذا؟".

واسأل:

- ما ميزات منحنى الدالة $f(x) = \frac{5.334}{1 + 62548.213\,(2.7)^{-0.129x}}$؟
  يتزايد بشكل مُطّرِد، ثم يتوقف التزايد مع الاقتراب من نهاية ما .
- استعمل الحاسبة البيانية؛ لتَمثيل الدالة بيانيًّا. ووظِّف هذا المنحنى في إيجاد نهاية الدالة عندما تقترب x من المالانهاية. 5.334



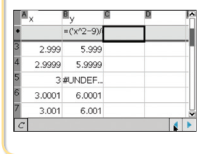
مصادر الدرس 8-1

المصدر	دون المتوسط	ضمن المتوسط	فوق المتوسط
دليل المعلم	• تنويع التعليم، ص (134)	• تنويع التعليم، ص (134, 135)	• تنويع التعليم، ص (135, 136)
كتاب التمارين	• كتاب التمارين، ص (18)	• كتاب التمارين، ص (18)	• كتاب التمارين، ص (18)
مصادر المعلم للأنشطة الصفية	• تدريبات إعادة التعليم، ص (6, 7) • تدريبات حل المسألة، ص (8)	• تدريبات حل المسألة، ص (8) • التدريبات الإثرائية، ص (9)	• تدريبات حل المسألة، ص (8) • التدريبات الإثرائية، ص (9)

في المثال 1 ، لاحظ أن $\lim_{x \to 2} (-3x + 1)$ هي نفسها $f(2)$ ، إلا أن نهاية الدالة لا تساوي دائمًا قيمة الدالة.

إرشاد تقني

جداول
لإنشاء جدول باستعمال الحاسبة البيانية TI-nspire ، أدخل الدالة إلى الحاسبة باستعمال قائمة ، ثم اختيار الجدول بالضغط على . ثم اكتب قيم x للاقتراب من قيمة محددة .



مثـال 2 تقدير النهاية (النهاية لا تساوي قيمة الدالة)

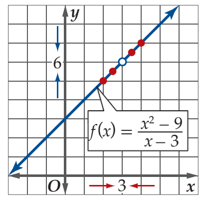
قدِّر $\lim_{x \to 3} \frac{x^2 - 9}{x - 3}$ باستعمال التمثيل البياني، ثم عزِّز إجابتك باستعمال جدولِ قيم.

التحليل بيانيًا :

مجال الدالة $R-\{3\}$

يُبيِّن التمثيل البياني للدالة $f(x) = \frac{x^2 - 9}{x - 3}$ المجاور، أنه كلما اقتربت x من العدد 3 ، فإن قيمة $f(x)$ المقابلة لها تقترب من العدد 6 ؛ لذا فإن بإمكاننا تقدير أن:

$$\lim_{x \to 3} \frac{x^2 - 9}{x - 3} = 6$$



التعزيز عدديًا :

كوّن جدولًا لقيم $f(x)$ ، وذلك باختيار قيم x القريبة من العدد 3 من كلا الجهتين.

x تقترب من 3 ⟵ ⟶ x تقترب من 3

x	2.9	2.99	2.999	3	3.001	3.01	3.1
$f(x)$	5.9	5.99	5.999		6.001	6.01	6.1

يُبيِّن نمط قيم $f(x)$ ، أنه كلما اقتربت قيم x من العدد 3 ، فإن قيم $f(x)$ تقترب من العدد 6 ، وذلك يعزِّز تحليلنا البياني.

تحقق من فهمك

قدِّر كل نهاية مما يأتي باستعمال التمثيل البياني، ثم عزِّز إجابتك من خلال جدول قيم. **(2A, 2B** للجدول والتمثيل البياني انظر ملحق الإجابات.

(2A $\lim_{x \to -2} \frac{x + 2}{x^2 - 4}$ **-0.25**

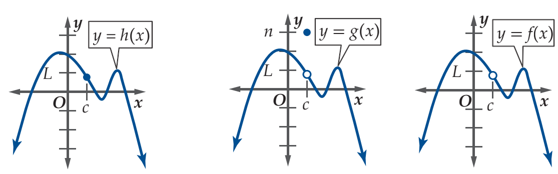
(2B $\lim_{x \to 5} \frac{x^2 - 4x - 5}{x - 5}$ **6**

في المثال 2 ، لاحظ أن قيم $f(x)$ تقترب من العدد 6 عند اقتراب قيم x من العدد 3، على الرغم من أن $f(3) \neq 6$. فالعبارة $\frac{x^2 - 9}{x - 3}$ غير معرّفة عندما $x = 3$. وهذه الملاحظة توضِّح مفهومًا مهمًا في النهايات.

مفهوم أساسي عدم اعتماد النهاية على قيمة الدالة عند نقطة

التعبير اللفظي : لا تعتمد نهاية $f(x)$ عندما تقترب x من العدد c على قيمة الدالة عند c.

الأمثلة :



$\lim_{x \to c} f(x) = L$	$\lim_{x \to c} g(x) = L$	$\lim_{x \to c} h(x) = L$
$f(c)$ غير معرفة	$g(c) = n$	$h(c) = L$

إن النهاية عند عدد لا تعني قيمة الدالة عند ذلك العدد، وإنما قيمة الدالة عندما تقترب x من ذلك العدد.

تقدير النهايات عند قيم محددة

الأمثلة 5-1 تُبيّنُ كيفية استعمال التمثيل البياني في تقدير نهايات أنواع مختلفة من الدوال.

التقويم التكويني

استعمل تدريبات "تحقق من فهمك" بعد كل مثال؛ للتحقق من مدى فهم الطلاب للمفاهيم.

مثالان إضافيان

1 قدّر $\lim_{x \to -1} (4x + 1)$ باستعمال التَّمثيل البياني، ثم عزِّز إجابتك باستعمال جدول قيم. -3 ؛ للتَّمثيل البياني انظر الهامش.

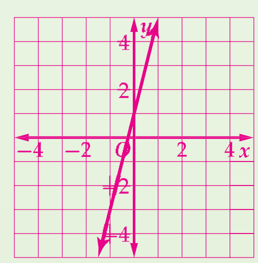
x	$f(x)$
-1.01	-3.04
-1.001	-3.004
-1	
-0.999	-2.996
-0.99	-2.96

2 قدّر $\lim_{x \to 4} \frac{x^2 - 16}{x - 4}$ باستعمال التَّمثيل البياني، ثم عزِّز إجابتك باستعمال جدول قيم. 8 ؛ للتَّمثيل البياني انظر الهامش.

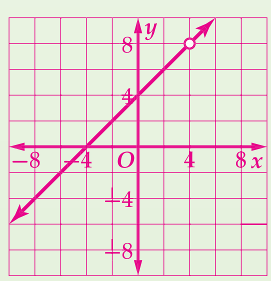
x	$f(x)$
3.99	7.99
3.999	7.999
4	
4.001	8.001
4.01	8.01

إجابات (مثالان إضافيان) :

(1



(2



لاحظ أننا عندما نقدِّر النهاية باستعمال التمثيل البياني أو جدول القيم، فإننا نبحث عن قيمة $f(x)$ عندما تقترب x من c من كلا الجهتين. ويمكننا إيجاز وصف سلوك التمثيل البياني عن يمين عدد أو عن يساره بمفردة **النهاية من جهةٍ واحدة**.

مفهوم أساسي — النهايات من جهة واحدة

النهاية من اليمين	النهاية من اليسار
إذا اقتربت قيم $f(x)$ من قيمة وحيدة L_1، عند اقتراب قيم x من العدد c من اليمين، فإن: $\lim\limits_{x\to c^+} f(x) = L_1$، وتقرأ: نهاية $f(x)$ عندما تقترب x من c من اليمين هي L_1	إذا اقتربت قيم $f(x)$ من قيمة وحيدة L_2، عند اقتراب قيم x من العدد c من اليسار، فإن: $\lim\limits_{x\to c^-} f(x) = L_2$، وتقرأ: نهاية $f(x)$ عندما تقترب x من c من اليسار هي L_2

يمكننا باستعمال هذين التعريفين إيجاز ما تعنيه مفردة **النهاية من جهتين**، وما يعنيه كونها موجودة.

مفهوم أساسي — النهاية عند نقطة

تكون نهاية $f(x)$ موجودة عندما تقترب x من c، إذا وفقط إذا كانت النهايتان من اليمين واليسار موجودتين ومتساويتين، أي أنه:

$\lim\limits_{x\to c^-} f(x) = \lim\limits_{x\to c^+} f(x) = L$،

إذا وفقط إذا كان $\lim\limits_{x\to c} f(x) = L$

تنبيه!

النهاية من اليمين والنهاية من اليسار للدالة

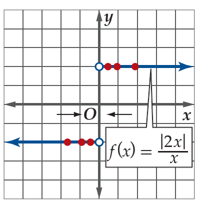
لمناقشة النهاية من اليمين لدالة عند c يجب أن نضمن أن الدالة معرّفة على يمين c على فترة (c, b).

ولمناقشة النهاية من اليسار لدالة عند c يجب أن نضمن أن الدالة معرّفة على يسار c على فترة (a, c).

مثال 3 تقدير النهاية من جهة واحدة ومن جهتين

قدِّر إن أمكن كلًّا من النهايات الآتية باستعمال التمثيل البياني للدالة:

a) $\lim\limits_{x\to 0^-} \frac{|2x|}{x}$, $\lim\limits_{x\to 0^+} \frac{|2x|}{x}$, $\lim\limits_{x\to 0} \frac{|2x|}{x}$

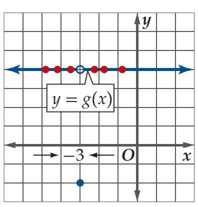


يُبيِّن التمثيل البياني للدالة $f(x) = \frac{|2x|}{x}$ أن:

$\lim\limits_{x\to 0^-} \frac{|2x|}{x} = -2$ ، $\lim\limits_{x\to 0^+} \frac{|2x|}{x} = 2$

وبما أن النهايتين من اليسار واليمين غير متساويتين، فإن $\lim\limits_{x\to 0} \frac{|2x|}{x}$ غير موجودة.

b) $\lim\limits_{x\to -3^-} g(x)$ ، $\lim\limits_{x\to -3^+} g(x)$ ، $\lim\limits_{x\to -3} g(x)$ ، حيث $g(x) = \begin{cases} 4 & , x \neq -3 \\ -2 & , x = -3 \end{cases}$



يُبيِّن التمثيل البياني للدالة $g(x)$ أن:

$\lim\limits_{x\to -3^-} g(x) = 4$ ، $\lim\limits_{x\to -3^+} g(x) = 4$

وبما أن النهايتين من اليسار ومن اليمين متساويتان، فإن $\lim\limits_{x\to -3} g(x)$ موجودة وتساوي 4.

إرشادات للدراسة

وصف النهاية

إذا كانت النهايتان من اليسار ومن اليمين غير متساويتين، فإننا نقول: إن النهاية غير موجودة.

✅ **تحقق من فهمك** (3A, B) انظر ملحق الإجابات

قدِّر إن أمكن كلًّا من النهايات الآتية إذا كانت موجودة:

3A) $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x)$ ، $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x)$ ، $\lim\limits_{x\to 1} f(x)$ ، حيث: $f(x) = \begin{cases} x^3 + 2 & , x < 1 \\ 2x + 1 & , x \geq 1 \end{cases}$

3B) $\lim\limits_{x\to -2^-} g(x)$, $\lim\limits_{x\to -2^+} g(x)$ ، $\lim\limits_{x\to -2} g(x)$ ، حيث: $g(x) = \begin{cases} -0.5x + 2 & , x < -2 \\ -x^2 & , x \geq -2 \end{cases}$

مثال إضافي

3 قدِّر –إن أمكن– كلًّا من النهايات الآتية:

a) $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x)$, $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x)$, $\lim\limits_{x\to 1} f(x)$ ، حيث

$f(x) = \begin{cases} -x^2 - 1 & , x < 1 \\ x + 2 & , x \geq 1 \end{cases}$

$\lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = -2,$

$\lim\limits_{x\to 1^+} f(x) = 3,$

$\lim\limits_{x\to 1^-} f(x) \neq \lim\limits_{x\to 1^+} f(x)$

إذن، $\lim\limits_{x\to 1} f(x)$ غير موجودة

b) $\lim\limits_{x\to 0^-} g(x)$, $\lim\limits_{x\to 0^+} g(x)$, $\lim\limits_{x\to 0} g(x)$ ، حيث

$g(x) = \begin{cases} x^2 - 1 & , x < 0 \\ \frac{1}{4}x - 1 & , x \geq 0 \end{cases}$

$\lim\limits_{x\to 0^-} g(x) = -1,$

$\lim\limits_{x\to 0^+} g(x) = -1,$

$\lim\limits_{x\to 0^-} g(x) = \lim\limits_{x\to 0^+} g(x)$

إذن، $\lim\limits_{x\to 0} g(x)$ موجودة وتساوي -1

التعليم باستعمال التقنيات

مدونة: أنشيء صفحة إلكترونية حول النهايات والاشتقاق، وحدِّث هذه الصفحة بعد نهاية كل درس من خلال إضافة ملاحظات ومقاطع مصورة ومصادر أخرى، ثم اطلب إلى الطلبة تحديث المعلومات.

130 الفصل 8 النهايات والاشتقاق

إن عدم مقدرتنا على إيجاد قيمة نهاية للدالة f كعدد حقيقي عند الاقتراب من نقطة ثابتة ليس ناتجًا بالضرورة عن عدم تساوي النهايتين من اليسار واليمين؛ إذ من الممكن أن تزداد قيم $f(x)$ بشكلٍ غير محدود عند اقتراب قيم x من c، وفي هذه الحالة نشير إلى النهاية بالرمز ∞، أما إذا تناقصت قيم $f(x)$ بشكلٍ غير محدود عند اقتراب قيم x من c، فإننا نشير إلى النهاية بالرمز $-\infty$.

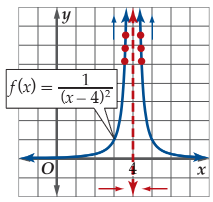
مثال 4 النهايات والسلوك غير المحدود

قدِّر – إن أمكن – كل نهاية مما يأتي إذا كانت موجودة:

a) $\lim\limits_{x\to4}\frac{1}{(x-4)^2}$

التحليل بيانيًا: يُبيّن التمثيل البياني للدالة $f(x)=\frac{1}{(x-4)^2}$ المجاور أن:

$$\lim_{x\to4^-}\frac{1}{(x-4)^2}=\infty \quad , \quad \lim_{x\to4^+}\frac{1}{(x-4)^2}=\infty$$



فكلما اقتربت قيم x من العدد 4، ازدادت قيم $f(x)$ بشكل غير محدود، وبما أن كلًّا من النهايتين من اليسار ومن اليمين ∞. لذا فإن $\lim\limits_{x\to4}\frac{1}{(x-4)^2}$ لا تساوي عددًا حقيقيًّا، إلا أنه وبسبب كون كلتا النهايتين ∞، فإننا نصف سلوك $f(x)$ عند العدد 4 بكتابة $\lim\limits_{x\to4}\frac{1}{(x-4)^2}=\infty$.

التعزيز عدديًا:

x تقترب من 4 ← → x تقترب من 4

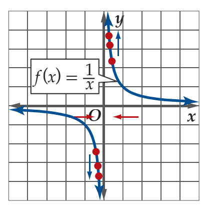
x	3.9	3.99	3.999	4	4.001	4.01	4.1
$f(x)$	100	10000	1000000		1000000	10000	100

يُبيّن نمط قيم $f(x)$ أنه كلما اقتربت قيم x من العدد 4 من اليسار أو من اليمين، فإن قيم $f(x)$ تزداد بشكل غير محدود، وذلك يعزِّز تحليلنا البياني.

b) $\lim\limits_{x\to0}\frac{1}{x}$

التحليل بيانيًا: يُبيّن التمثيل البياني للدالة $f(x)=\frac{1}{x}$ المجاور أن:

$$\lim_{x\to0^-}\frac{1}{x}=-\infty \quad , \quad \lim_{x\to0^+}\frac{1}{x}=\infty$$



فكلما اقتربت قيم x من العدد 0 من اليسار، قلّت قيم $f(x)$ بشكل غير محدود، في حين تزداد قيم $f(x)$ كلما اقتربت قيم x من العدد 0 من اليمين.

إن كلتا النهايتين من اليسار واليمين غير متساويتين. لذا فإن $\lim\limits_{x\to0}\frac{1}{x}$ غير موجودة، لذلك لا يمكننا وصف سلوك الدالة عندما $x=0$ بعبارة واحدة، بمعنى أنه لا يمكن أن نكتب $\lim\limits_{x\to0}\frac{1}{x}=\infty$، وذلك بسبب سلوك الدالة غير المحدود من اليمين واليسار.

التعزيز عدديًا:

x تقترب من 0 ← → x تقترب من 0

x	−0.1	−0.01	−0.001	0	0.001	0.01	0.1
$f(x)$	−10	−100	−1000		1000	100	10

يُبيّن نمط قيم $f(x)$ أنه كلما اقتربت قيم x من العدد 0 من اليسار أو من اليمين، فإن قيم $f(x)$ إما أن تنقص أو تزداد بشكل غير محدود، وذلك يعزز تحليلنا البياني.

تحقق من فهمك

قدِّر – إن أمكن – كل نهاية مما يأتي إذا كانت موجودة:

4A) $\lim\limits_{x\to3}\frac{x^2-4}{x-3}$ غير موجودة

4B) $\lim\limits_{x\to0}-\frac{2}{x^4}$ $-\infty$

قراءة الرياضيات

السلوك غير المحدود تعني زيادة أو نقصان $f(x)$ بصورة غير محدودة عندما $x\to c$، أنه باختيار قيمة لـ x قريبة من c بالقدر الذي نريد، فإنه يمكننا الحصول على قيمة كبيرة لـ $|f(x)|$ بالقدر الذي نريد، وكلما كانت x قريبة من c كانت $|f(x)|$ أكبر.

تنبيه!

النهايات غير المحدودة من الضروري أن نفهم أن العبارتين $\lim\limits_{x\to0^-}f(x)=-\infty$ ، $\lim\limits_{x\to0^+}f(x)=\infty$ هما فقط وصف للحالة التي بسببها $\lim\limits_{x\to0}f(x)$ غير موجودة، إذ لا يمثل الرمزان ∞ و $-\infty$ عددين حقيقيين.

مثال إضافي

4 قدِّر – إن أمكن – كل نهاية مما يأتي:

a) $\lim\limits_{x\to2}\frac{1}{(x-2)^2}$ ∞

b) $\lim\limits_{x\to0}\frac{2}{x^3}$ غير موجودة

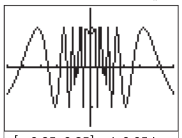
131 الدرس 1-8 تقدير النهايات بيانيًا

مثال إضافي

5 قدِّر $\lim_{x \to 0} (x \sin x)$. **0**

إرشاد تقني

التذبذب اللانهائي
خاصية تتبع المسار في الحاسبة البيانية تفيد غالبًا في توقع قيمة النهاية للدالة، إلا أنه لا يمكنك الاعتماد عليها دائمًا. فهي تعتمد على عدد محدود من النقاط في تمثيل المنحنى، كما في المثال 5 المبيّن تمثيله أدناه.



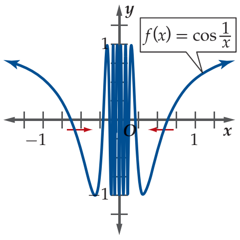
[−0.25, 0.25] scl: 0.05 by [−1.5, 1.5] scl: 1

فالتمثيل بالحاسبة البيانية لم يظهر أن للدالة عددًا لا نهائيًا في التذبذبات بالقرب من الصفر.

لا تكون النهاية موجودة أيضًا عندما تتذبذب قيم $f(x)$ بين قيمتين مختلفتين باقتراب قيم x من العدد c.

مثـال 5 النهايات والسلوك التذبذبي

قدِّر $\lim_{x \to 0} \cos \frac{1}{x}$ إذا كانت موجودة.



يُبيِّن التمثيل البياني للدالة $f(x) = \cos \frac{1}{x}$ المجاور أن قيم $f(x)$ تتذبذبُ بشكل مستمر بين العددين 1 ، -1 كلما اقتربت قيم x من العدد 0، مما يعني أنه لأي قيمة x_1 قريبة من الصفر ، بحيث $f(x_1) = 1$ ، يمكنك إيجاد قيمة قريبة جدًّا من الصفر مثل x_2 ، بحيث $f(x_2) = -1$ ، وبالمثل لأي قيمة قريبة من الصفر x_3 ، بحيث $f(x_3) = -1$ ، يمكنك إيجاد قيمة مثل x_4 قريبة جدًّا من الصفر، بحيث $f(x_4) = 1$.

أي أن $\lim_{x \to 0} \cos \frac{1}{x}$ غير موجودة.

تحقق من فهمك

قدِّر كل نهاية مما يأتي إذا كانت موجودة:

5A) $\lim_{x \to 0} \sin \frac{1}{x}$ **غير موجودة**

5B) $\lim_{x \to 0} (x^2 \sin x)$ **0**

نلخّص فيما يأتي أهم ثلاثة أسباب تجعل نهاية الدالة عند نقطة غير موجودة.

ملخص المفهوم: أسباب عدم وجود نهاية عند نقطة

تكون $\lim_{x \to c} f(x)$ غير موجودة في الحالات الآتية:

- عندما تقترب قيم $f(x)$ من قيمتين مختلفتين عند اقتراب قيم x من العدد c من اليسار ومن اليمين.
- عندما تزداد قيم $f(x)$ بشكل غير محدود عند اقتراب قيم x من العدد c من اليسار وتتناقص قيمها بشكل غير محدود عند اقتراب x من العدد c من اليمين، أو العكس.
- عندما تتذبذب قيم $f(x)$ بين قيمتين مختلفتين عند اقتراب قيم x من العدد c.

تقدير النهاية عند المالانهاية: درست فيما سبق استعمال النهايات لوصف سلوك $f(x)$ عندما تقترب قيم x من عدد ثابت c ، و تستعمل النهايات أيضًا لوصف سلوك طرفي التمثيل البياني للدالة . وهو سلوك الدالة عند ازدياد أو نقصان قيم x بشكل غير محدود. وفيما يأتي ملخّص لرموز هذه النهايات.

مفهوم أساسي: النهايات عند المالانهاية

- إذا اقتربت قيم $f(x)$ من عدد وحيد L_1 عند ازدياد قيم x بشكل غير محدود، فإن:
$\lim_{x \to \infty} f(x) = L_1$ ، وتُقرأ « نهاية $f(x)$ عندما تقترب قيم x من موجب مالانهاية هي L_1 »
- إذا اقتربت قيم $f(x)$ من عدد وحيد L_2 عند نقصان قيم x بشكل غير محدود، فإن:
$\lim_{x \to -\infty} f(x) = L_2$ ، وتُقرأ « نهاية $f(x)$ عندما تقترب قيم x من سالب مالانهاية هي L_2 »

درست سابقًا أنه إذا اقتربت قيم الدالة من ∞ أو $-\infty$ عند اقتراب قيم x من عدد ثابت c ، فإن ذلك يعني وجود خط تقارب رأسي للدالة، كما درست أن خط التقارب الأفقي يحدث عندما تقترب قيم الدالة من عدد حقيقي كلما اقتربت قيم x من ∞ أو $-\infty$ ، بمعنى:

- المستقيم $x = c$ هو خط تقارب رأسي للدالة f ، إذا كانت $\lim_{x \to c^-} f(x) = \pm\infty$ أو $\lim_{x \to c^+} f(x) = \pm\infty$ أو كليهما.
- المستقيم $y = c$ هو خط تقارب أفقي للدالة f ، إذا كانت $\lim_{x \to -\infty} f(x) = c$ أو $\lim_{x \to \infty} f(x) = c$

132 الفصل 8 النهايات والاشتقاق

تقدير النهاية عند المالا نهاية

المثالان 6, 7 يبيِّنان كيفية تقدير النهاية عندما تقترب x من ∞ أو $-\infty$.

مثال إضافي

6 قدِّر –إن أمكن– كل نهاية مما يأتي:

a) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{1}{x}+1\right)$ 1

b) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{1}{x^3}-1\right)$ -1

c) $\lim\limits_{x\to\infty}\cos x$ غير موجودة

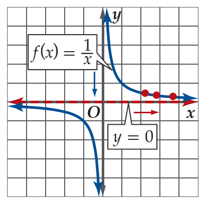
إرشادات للمعلم الجديد

خطوط التقارب للدالة سلوك غير محدود عند خطوط التقارب الرأسية، ويمكن وصف هذا السلوك بـِ $\pm\infty$ ، في حين تكون نهاية الدالة التي لها خط تقارب أفقي $y=c$ مساوية لـِ c عند اقتراب قيم x من ∞ أو من $-\infty$.

مثال 6 تقدير النهاية عند المالانهاية

قدِّر كل نهاية مما يأتي إذا كانت موجودة:

a) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1}{x}$



التحليل بيانيًا: يُبيِّن التمثيل البياني للدالة $f(x)=\frac{1}{x}$ المجاور أن $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1}{x}=0$ ، فكلما زادت قيم x ، اقتربت قيم $f(x)$ من العدد 0.

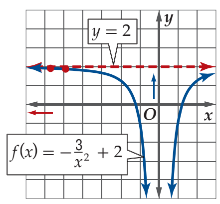
التعزيز عدديًا:

x تقترب من ∞

x	10	100	1000	10000	100000
$f(x)$	0.1	0.01	0.001	0.0001	0.00001

يُبيِّن نمط قيم $f(x)$ أنه كلما زادت قيم x ، فإن قيم $f(x)$ تقترب من العدد 0.

b) $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(-\frac{3}{x^2}+2\right)$



التحليل بيانيًا: يُبيِّن التمثيل البياني للدالة $f(x)=-\frac{3}{x^2}+2$ المجاور أن $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(-\frac{3}{x^2}+2\right)=2$ ، فكلما قلَّت قيم x ، اقتربت قيم $f(x)$ من العدد 2.

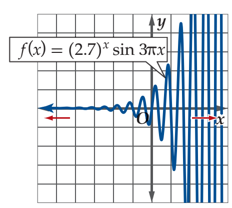
التعزيز عدديًا:

x تقترب من $-\infty$

x	-10000	-1000	-100	-10
$f(x)$	1.99999997	1.999997	1.9997	1.97

يُبيِّن نمط قيم $f(x)$ أنه كلما قلَّت قيم x ، فإن قيم $f(x)$ تقترب من العدد 2.

c) $\lim\limits_{x\to-\infty}(2.7)^x\sin 3\pi x$, $\lim\limits_{x\to\infty}(2.7)^x\sin 3\pi x$



التحليل بيانيًا: يُبيِّن التمثيل البياني للدالة $f(x)=(2.7)^x\sin 3\pi x$ المجاور أن: $\lim\limits_{x\to-\infty}(2.7)^x\sin 3\pi x=0$ ، فكلما قلَّت قيم x ، تذبذبت قيم $f(x)$ مقتربة من العدد 0 . في حين يبيِّن التمثيل البياني أن $\lim\limits_{x\to\infty}(2.7)^x\sin 3\pi x$ غير موجودة ، فكلما ازدادت قيم x ، تذبذبت قيم $f(x)$ متباعدةً.

التعزيز عدديًا:

x تقترب من $-\infty$ x تقترب من ∞

x	-17.1	-10.8	-10.1	0	10.1	50.1	99.1
$f(x)$	3.4×10^{-8}	-0.00002	-0.00004	0	1.8×10^{4}	3.3×10^{21}	-4.5×10^{42}

يتضح من نمط قيم $f(x)$ أنه كلما قلَّت قيم x ، فإن قيم $f(x)$ تقترب من العدد 0 ، في حين تتذبذب قيم $f(x)$ متباعدة كلما زادت قيم x.

إرشادات للدراسة

خطوط التقارب
تشير النهاية في المثال 6a إلى وجود خط تقارب أفقي $y=0$ ، وتشير النهاية في مثال 6b إلى وجود خط تقارب أفقي $y=2$.

تنبيه!

السلوك المتذبذب
إن التذبذب اللانهائي للدالة لا يعني بالضرورة عدم وجود النهاية عندما تقترب x من ∞ أو $-\infty$. فإذا كان التذبذب بين قيمتين مختلفتين، فالنهاية غير موجودة، أما إذا كان التذبذب متقاربًا نحو عدد معين، فالنهاية موجودة.

تحقق من فهمك

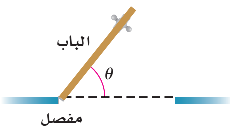
قدِّر كل نهاية مما يأتي إذا كانت موجودة:

6A) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{1}{x^4}-3\right)$ **-3** 6B) $\lim\limits_{x\to-\infty}5^x$ **0** 6C) $\lim\limits_{x\to\infty}\sin x$ **غير موجودة**

يمكنك استعمال التمثيل البياني أو جدول قيم لتقدير النهايات عند المالانهاية في كثير من المواقف الحياتية.

مثال 7 من واقع الحياة — تقدير النهاية عند المالانهاية

a) هيدروليك: تستعمل نوابض لإغلاق الأبواب الثقيلة، وآلية هيدروليكية للتحكم في سرعة حركتها، إذا فُتح باب بزاوية $\frac{\pi}{4}$ ثم تُرك لتغلقه النوابض، فإن الدالة $\theta(t)=\frac{\pi}{4}(1+2t)(2.7)^{-2t}$ تمثِّل زاوية فتحه θ بعد t ثانية. قدِّر $\lim\limits_{t\to\infty}\theta(t)$، وفسِّر معناها إذا كانت موجودة.

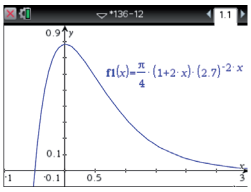


قدِّر النهاية:

مثِّل الدالة $\theta(t)=\frac{\pi}{4}(1+2t)(2.7)^{-2t}$ بيانيًّا باستعمال الحاسبة البيانية.

لاحظ أنه كلما زادت قيم t، فإن قيم الدالة $\theta(t)$ تقترب من العدد 0.

أي أن $\lim\limits_{t\to\infty}\theta(t)=0$.



$[-1, 3]$ scl: 0.5 by $[-0.1, 0.9]$ scl: 0.1

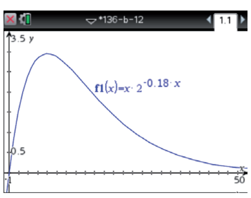
فسِّر النتيجة:

إن قيمة النهاية 0 في هذه المسألة، تعني أن الزاوية التي يصنعها الباب مع وضع الإغلاق مع مرور الزمن هي 0 درجة بالراديان. بمعنى أنه بعد مرور زمن أطول ، فإن الباب سيقترب من وضع الإغلاق التام.

b) دواء: يُعطى تركيز دواء في دم مريض بوحدة ملجرام لكل ملتر بالعلاقة $C(t)=t2^{-0.18t}$، حيث t الزمن بالساعات بعد حقن المريض. قدِّر $\lim\limits_{t\to\infty}C(t)$، وفسِّر معناها إذا كانت موجودة.

قدِّر النهاية:

مثِّل الدالة $C(t)=t2^{-0.18t}$ بيانيًّا باستعمال الحاسبة البيانية. يتضح من التمثيل البياني أنه كلما زادت قيمة t فإن منحنى الدالة يقترب من 0، أي أن $\lim\limits_{t\to\infty}C(t)=0$.



$[-1, 50]$ scl: 2 by $[-0.5, 3.5]$ scl: 0.5

فسِّر النتيجة:

إن قيمة النهاية هي 0 ، وتعني في هذه المسألة أنه مع مرور الزمن، فإن تركيز الدَّواء سيصبح قريبًا من الصفر في دم المريض.

تحقق من فهمك (7A, 7B) انظر الهامش.

7A) كهرباء: يزوِّد مقبس في منطقة ما بفرق جهد كهربائي يُعطى بالعلاقة $V(t)=165\sin 120\pi t$ ، حيث t الزمن بالثواني. قدِّر $\lim\limits_{t\to\infty}V(t)$ إذا كانت موجودة، وفسِّر معناها.

7B) أحياء: عند وضع عدد من ذبابات الفاكهة في وعاء يحوي حليبًا وفاكهةً وخميرةً فإن عدد الذبابات بعد t يوم يُعطى بالعلاقة $P(t)=\frac{230}{1+56.5(2.7)^{-0.37t}}$ ، قدِّر $\lim\limits_{t\to\infty}P(t)$ إذا كانت موجودة، وفسِّر معناها.

الربط مع الحياة

الأنظمة الهيدروليكية هي أحد أنظمة نقل القدرة التي تستعمل طاقة السوائل لقيادة أو تحريك الأجزاء المتحركة في النظام الهيدروليكي. وتستعمل في العديد من المجالات، ومنها فرامل السيارات والأبواب الثقيلة وغيرها.

إرشاد تقني

استعمل الآلة الحاسبة للوصول إلى شكل مناسب للتمثيل البياني للدالة في الآلة الحاسبة، يمكنك استعمال بعض ميزات الآلة. بدءًا من مفتاح menu، يمكنك استعمال خاصية 4: تكبير/تصغير النافذة واختيار 1: إعدادات النافذة؛ لتحديد مدى القيم وطول فترة التدريج لكلٍّ من x, y ، كذلك يمكن اختيار 3: تكبير، 4: تصغير لتصغير وتكبير التمثيل البياني، حتى يمكن الحصول علي شكل مناسب للدالة. كما يمكن استعمال خاصية 5: تتبع المسار لتتبع قيم الدالة؛ مما يساعد على التوصل لتقدير قيمة النهاية.

مثال إضافي

7 a) بكتيريا: يُمكن نمذجة نمو مجتمع بكتيري بالدالة $B(t)=\frac{675}{1+135^{-0.6t}}$، حيث t الزمن بالساعات. قدِّر $\lim\limits_{t\to\infty}B(t)$ ، إذا كانت موجودة، وفسِّر معناها.

$\lim\limits_{t\to\infty}B(t)=675$ ، المجتمع البكتيري يصل إلى 675 كحد أقصى مع مرور الزمن.

b) سكان: يُعطى عدد سكان مدينة ما بالعلاقة $P(t)=0.7(1.1)^t$، حيث t الزمن بالسنوات. قدِّر $\lim\limits_{t\to\infty}P(t)$ ، إذا كانت موجودة، وفسِّر معناها.

$\lim\limits_{t\to\infty}P(t)=\infty$؛ أي أن عدد سكان هذه المدينة سيزداد مع مرور الزمن بلا حدود.

إجابات

7A) $\lim\limits_{t\to\infty}V(t)$ غير موجودة، حيث يتذبذب منحنى $V(t)$ بين -165 و 165. كلما ازدادت t . وهذا يعني أن الجهد الكهربائي في المقبس يتذبذب بين $-165, 165$ مع مرور الزمن

7B) $\lim\limits_{t\to\infty}P(t)=230$ ، سيصبح عدد الذبابات 230 ذبابة مع مرور الزمن.

تنويع التعليم

دون ضمن

المتعلِّمون الحركيُّون: استعمل شريطًا لاصقًا أو حبلًا لرسم مستوى إحداثي على أرضية الفصل، واطلب إلى أحد الطلاب الوقوف عند نقطة الأصل، ثم اطلب إلى مجموعة من الطلاب أن يقفوا ليشكّلوا منحنى دالة على المستوى الإحداثي، وناقشهم في قيمة نهاية الدالة عند نقطة باستعمال الإحداثيات التي تمثِّلها مواقعهم، ثم اطلب إليهم تغيير مواقعهم وتشكيل منحنى جديد.

تدرب وحل المسائل

قدِّر كل نهاية مما يأتي باستعمال التمثيل البياني، ثم عزِّز إجابتك باستعمال جدول قيم. إرشاد: "يمكنك استعمال الآلة البيانية للتمثيل البياني". (المثالان 1, 2) **(8–1) للجدول والتمثيل البياني انظر ملحق الإجابات.**

1) $\lim_{x\to5}(4x-10)$ **10**

2) $\lim_{x\to2}\left(\frac{1}{2}x^5-2x^3+3x^2\right)$ **12**

3) $\lim_{x\to-2}(x^2+2x-15)$ **−15**

4) $\lim_{x\to-2}\frac{x^3+8}{x^2-4}$ **−3**

5) $\lim_{x\to0}[5(\cos^2x-\cos x)]$ **0**

6) $\lim_{x\to4}\frac{x-4}{\sqrt{x}-2}$ **4**

7) $\lim_{x\to6}(x+\sin x)$ **5.72**

8) $\lim_{x\to-5}\frac{x^2+x-20}{x+5}$ **−9**

قدِّر كل نهاية مما يأتي إذا كانت موجودة: (مثال 3) **(9-20) للتمثيل البياني انظر ملحق الإجابات.**

9) $\lim_{x\to0^+}\frac{\sin x-x}{x}$ **0**

10) $\lim_{x\to0^-}\frac{|4x|}{x}$ **−4**

11) $\lim_{x\to0}\frac{2x^2}{|x|}$ **0**

12) $\lim_{x\to3^-}\frac{x^2-5x+6}{x-3}$ **1**

13) $\lim_{x\to-\frac{1}{2}}\frac{|2x+1|}{x}$ **0**

14) $\lim_{x\to-2}\frac{x^2+5x+6}{|x+2|}$ **غير موجودة**

15) $\lim_{x\to0^-}(\sqrt{-x}-7)$ **−7**

16) $\lim_{x\to5}\frac{x^2-25}{x-5}$ **10**

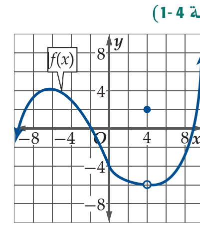
17) $\lim_{x\to0}\frac{|3x|}{2x}$ **غير موجودة**

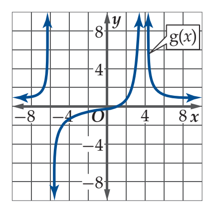
18) $\lim_{x\to-1}\frac{|x+1|}{x^2-1}$ **غير موجودة**

19) $\lim_{x\to0}f(x)$ ، $f(x)=\begin{cases}x-5 & , x<0\\ x^2+5 & , x\ge0\end{cases}$ **غير موجودة**

20) $\lim_{x\to0}f(x)$ ، $f(x)=\begin{cases}-x^2+2 & , x<0\\ \frac{2x}{x} & , x\ge0\end{cases}$ **2**

استعمل التمثيل البياني لتقدير كل نهاية مما يأتي إذا كانت موجودة: (الأمثلة 4-1)





21) $\lim_{x\to-4}f(x)$ **3**

22) $\lim_{x\to4}g(x)$ **∞**

23) $\lim_{x\to4}f(x)$ **−6**

24) $\lim_{x\to-6}g(x)$ **غير موجودة**

قدِّر كل نهاية مما يأتي إذا كانت موجودة: (الأمثلة 6-4)

25) $\lim_{x\to-4}\frac{-17}{x^2+8x+16}$ **−∞**

26) $\lim_{x\to4}\frac{|x|}{x-4}$ **غير موجودة**

27) $\lim_{x\to5}\frac{x^2}{x^2-10x+25}$ **∞**

28) $\lim_{x\to6}\frac{5}{(x-6)^2}$ **∞**

29) $\lim_{x\to-\infty}(x^5-7x^4-4x+1)$ **−∞**

30) $\lim_{x\to\infty}\frac{x^2+x-22}{4x^3-13}$ **0**

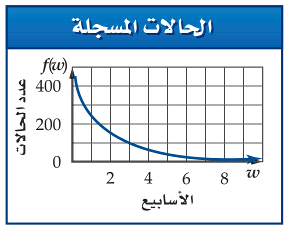
31) $\lim_{x\to\infty}x\cos x$ **غير موجودة**

32) $\lim_{x\to\infty}\frac{3^x+3^{-x}}{3^x-3^{-x}}$ **−1**

33) $\lim_{x\to0}\frac{\sin|x|}{x}$ **غير موجودة**

34) $\lim_{x\to0}x^2\cos\frac{1}{x}$ **0**

35) **دواء:** تم توزيع لقاح للحدِّ من عدوى مرض ما. ويُبيِّن التمثيل البياني أدناه عدد الحالات المصابة بالمرض بعد w أسبوع من توزيع اللقاح. (مثال 7) **(a, b انظر الهامش.)**



a) استعمل التمثيل البياني لتقدير $\lim_{w\to1}f(w)$ ، $\lim_{w\to3}f(w)$.

b) استعمل التمثيل البياني لتقدير $\lim_{w\to\infty}f(w)$ إذا كانت موجودة، وفسِّر النتيجة.

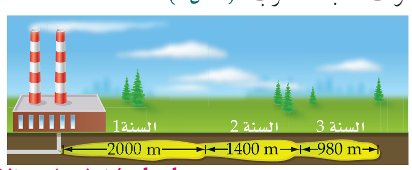
36) **برامج تلفزيونية:** يُقدَّر عدد مشاهدي أحد البرامج التلفزيونية اليومية بالدالة $f(d)=12(1.25012)^d-12$، حيث d رقم اليوم منذ أول يوم للبرنامج. (مثال 7) **(a–c انظر الهامش.)**

a) مثِّل الدالة $f(d)$ بيانيًّا في الفترة $0\le d\le20$.

b) ما عدد مشاهدي البرنامج في اليوم: الخامس، العاشر، العشرين، بعد شهرين ($d=60$)؟

c) قدِّر $\lim_{d\to\infty}f(d)$ إذا كانت موجودة، وفسِّر النتيجة.

37) **كيمياء:** تتسرَّب مادة سامة من أنبوب غاز تحت الأرض كما في الشكل أدناه. ويعبِّر عن المسافة الأفقية بالأمتار التي تقطعها المادة المتسرِّبة بالدالة $d(t)=2000(0.7)^{t-1}, t\ge1$، حيث t عدد السنوات منذ بدء التسرُّب. (مثال 7)



(a, b, d انظر ملحق الإجابات.)

a) مثِّل باستعمال الآلة البيانية الدالة بيانيًّا في الفترة $1\le t\le15$.

b) استعمل التمثيل البياني وخاصية تتبع المسار في الحاسبة البيانية لإيجاد قيم d عندما $t=5, 10, 15$.

c) استعمل التمثيل البياني لتقدير $\lim_{t\to\infty}d(t)$ **0**

d) هل من الممكن أن تصل المادة المتسرِّبة لمستشفى يقع على بُعد 7000 m من موقع التسريب؟ تذكَّر أن مجموع المتسلسلة الهندسية غير المنتهية هو $\frac{a_1}{1-r}$.

3 التدريب

التقويم التكويني

استعمل الأسئلة 37-1 للتأكد من فهم الطلاب.

ثم استعمل الجدول أسفل هذه الصفحة؛ لتعيين الواجبات المنزلية للطلاب بحسب مستوياتهم.

تنبيه !

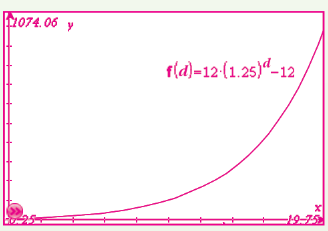
أخطاء شائعة في التمارين 13-9 ذكِّر الطلاب أن نهاية الدالة عند c من أي جهة يمكن أن تكون موجودة، على الرغم من أن الدالة يمكن أن تكون غير معرَّفة عند c، أو النهاية غير موجودة عند c.

إجابات

35a) $\lim_{w\to1}f(w)=250;\ \lim_{w\to3}f(w)=100$

35b) 0؛ إجابة ممكنة: سيقضي اللقاح على العدوى مع مرور الزمن.

36a)



36b) نحو 25 ، نحو 100، نحو 1031، نحو 7875584 شخصًا سوف يشاهدون البرنامج بعد مرور شهرين .

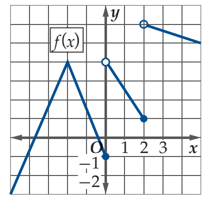
36c) ∞، إجابة ممكنة: يعني الناتج أن عدد مشاهدي البرنامج سيزداد بشكل لا نهائي.

تنويع الواجبات المنزلية

دون ضمن فوق

المستوى	الأسئلة
دون المتوسط	31–1، 48، 49، 51، 52، 61–54
ضمن المتوسط	47–1 فردي، 48، 49، 51، 52، 61–54
فوق المتوسط	61–32

للدالة الممثَّلة بيانيًّا أدناه، قدِّر كل نهاية مما يأتي إذا كانت موجودة:



38) $\lim_{x \to 0^-} f(x)$ **−1**

39) $\lim_{x \to 0^+} f(x)$ **4**

40) $\lim_{x \to 0} f(x)$ **غير موجودة**

41) $\lim_{x \to 2^-} f(x)$ **1**

42) $\lim_{x \to 2^+} f(x)$ **6**

43) $\lim_{x \to 1} f(x)$ **2.5**

حاسبة بيانية : حدِّد ما إذا كانت النهاية موجودة أو غير موجودة في كل مما يأتي. وإذا لم تكن موجودة، فصف التمثيل البياني للدالة عند نقطة النهاية: **غير موجودة؛ يوجد خط تقارب رأسي للدالة عند $x=2$**

44) $\lim_{x \to 1} \frac{x^2 - 1}{x^2 - 2x + 1}$ 45) $\lim_{x \to 2} \frac{x^2 + x}{x^2 - x - 2}$

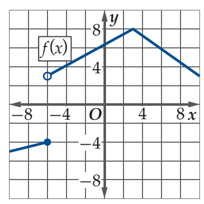
غير موجودة؛ يوجد خط تقارب رأسي للدالة عند $x=$

46) $\lim_{x \to 0} 3 \cos \frac{\pi}{x}$ 47) $\lim_{x \to -5} \frac{|x + 5|}{x + 5}$ **انظر الهامش.**

غير موجودة؛ تذبذب

مسائل مهارات التفكير العليا

48) **اكتشف الخطأ :** قال علي: إن نهاية الدالة الممثَّلة بيانيًّا في الشكل أدناه عندما تقترب x من -6 هي -4 . في حين قال محمد: إنها 3. هل أي منهما إجابته صحيحة؟ برِّر إجابتك.



كلاهما على خطأ، إذا اقتربت الدالة من قيمتين مختلفتين من اليمين واليسار، فإن النهاية غير موجودة عند تلك النقطة.

49) **مسألة مفتوحة :** أعطِ مثالًا على $f(x)$، بحيث تكون $\lim_{x \to 0} f(x)$ موجودة، و $f(0)$ غير معرفة ، ومثالًا على دالة أخرى $g(x)$ ، بحيث تكون $g(0)$ معرفة، ولكن $\lim_{x \to 0} g(x)$ غير موجودة. **انظر ملحق الإجابات.**

50) **تحدٍّ :** إذا كان $g(x) = \frac{x + 1}{x^2 - 4}$, $f(x) = \frac{x^2 + 1}{x - 1}$. فقدِّر كلًّا من $\lim_{x \to 2} g(x)$, $\lim_{x \to 1} f(x)$. وإذا كانت $h(x), j(x)$ كثيرتي حدود بحيث:
$j(a) \neq 0$, $h(a) = 0$ ، فماذا يمكنك القول عن $\lim_{x \to a} \frac{j(x)}{h(x)}$ ؟
برِّر إجابتك. **انظر ملحق الإجابات.**

51) **تبرير :** حَدِّد ما إذا كانت العبارة الآتية صحيحة دائمًا أو صحيحة أحيانًا أو غير صحيحة أبدًا. برِّر إجابتك. **انظر ملحق الإجابات.**

إذا كان $f(c) = L$ ، فإن $\lim_{x \to c} f(x) = L$.

52) **مسألة مفتوحة :** مَثِّل بيانيًّا دالة تحقق كلًّا مما يأتي:
$f(2) = 5$, $f(0) = 2$, $\lim_{x \to 0} f(x) = -3$ ، و $\lim_{x \to 2} f(x)$ غير موجودة.
انظر ملحق الإجابات.

53) **تحدٍّ :** قدِّر كلًّا من النهايات الآتية للدالة f إذا كانت موجودة:

$$f(x) = \begin{cases} 2x + 4 \ , & x < -1 \\ -1 \ , & -1 \leq x \leq 0 \\ x^2 \ , & 1 < x \leq 2 \\ x - 3 \ , & x > 2 \end{cases}$$

a) $\lim_{x \to -1} f(x)$ **غير موجودة** b) $\lim_{x \to 0} f(x)$ **غير موجودة** c) $\lim_{x \to 2^+} f(x)$ **−1**

54) **اكتب :** من خلال ما لاحظته في حل التمارين، وضِّح طريقتك لتقدير نهاية دالة متصلة. **انظر ملحق الإجابات.**

مراجعة تراكمية

55, 56) انظر ملحق الإجابات.

55) أثبت صحة المتطابقة. (الدرس 2-3)

$$\sin \theta \left(\frac{1}{\sin \theta} - \frac{\cos \theta}{\cot \theta} \right) = \cos^2 \theta$$

56) حدِّد ما إذا كانت الدالة الآتية متصلة عند قيم x المعطاة. برِّر إجابتك باستعمال اختبار الاتصال، وإذا كانت الدالة غير متصلة، فحدِّد نوع عدم الاتصال: لا نهائي، قفزي، قابل للإزالة $h(x) = \frac{x^2 - 25}{x + 5}$
(الدرس 1-3)

57) أوجد متوسط مُعدّل تغير $f(x) = \sqrt{x - 6}$ في الفترة $[8, 16]$. (الدرس 1-4) **0.219**

انظر ملحق الإجابات.

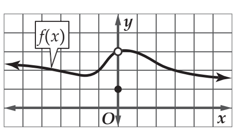
أوجد قياس الزاوية θ بين المتجهين u, v في كلٍّ مما يأتي: (الدرس 5-5)

58) $\mathbf{u} = \langle 2, 9, -2 \rangle, \mathbf{v} = \langle -4, 7, 6 \rangle$ **63°**

59) $\mathbf{m} = 3\mathbf{i} - 5\mathbf{j} + 6\mathbf{k}$, $\mathbf{n} = -7\mathbf{i} + 8\mathbf{j} + 9\mathbf{k}$ **93.4°**

تدريب على اختبار

60) باستعمال التمثيل البياني للدالة $y = f(x)$ أدناه،
ما قيمة $\lim_{x \to 0} f(x)$ (إن وجدت)؟ **C**



A 0 C 3

B 1 D النهاية غير موجودة

61) إذا كانت $g(x) = \frac{1}{x^2}$ وكانت العبارات: **A**

I نقطة عدم اتصال لا نهائي.

II نقطة عدم اتصال قفزي.

III نقطة عدم اتصال قابل للإزالة.

فأيٌّ مما يأتي يصف التمثيل البياني لمنحنى الدالة **g(x)**؟

A I فقط C II فقط

B I , III فقط D I و II فقط

تنبيه !

اكتشف الخطأ في السؤال 48 على الطلاب معرفة عدم وجود النهاية عند هذه النقطة من التمثيل البياني للدالة؛ وذلك لاختلاف النهايتين من اليسار واليمين.

4 التقويم

تعلم لاحق سيقوم الطلاب في الدرس التالي بإيجاد النهايات جبريًّا. اطلب إليهم الكتابة حول فائدة هذا الدرس في تعلم الدرس القادم .

إجابة :

47) غير موجودة؛ تقترب قيم $f(x)$ من قيمتين مختلفتين باقتراب قيم x من العدد -5 من اليمين ومن اليسار.

تنويع التعليم

فوق

توسّع : إذا احتوى كل من بسط ومقام الدالة النسبية العامل الخطي نفسه، فإن بإمكاننا إزالة نقطة عدم الاتصال الناتجة عن هذا العامل من خلال اختصاره. ومثالًا على ذلك، أوجد نقطة عدم الاتصال التي يمكن إزالتها للدالة $f(x) = \frac{x^2 + 2x - 8}{x^2 + 5x - 14}$. هل النهاية موجودة عند تلك النقطة؟ وضِّح إجابتك.

$\left(2, \frac{2}{3}\right)$؛ نعم لأن النهايتين من اليسار واليمين متساويتان .

8-2 حساب النهايات جبريًّا
Evaluating Limits Algebraically

فيما سبق:
درستُ كيفية تقدير النهايات بيانيًا وعدديًا. (الدرس 1-8)

والآن:
- أجدُ نهايات دوال كثيرات الحدود والدوال النسبية عند قيم محددة.
- أجدُ نهايات دوال كثيرات الحدود والدوال النسبية عند المالانهاية .

المفردات:
التعويض المباشر
direct substitution
الصيغة غير المحددة
indeterminate form

www.obeikaneducation.com

لماذا؟


إذا أُعطيت اتساع البؤبؤ بالملمترات لعين حيوان بالعلاقة $d(x)=\frac{152x^{-0.45}+85}{4x^{-0.45}+10}$؛ حيث x الاستضاءة الساقطة على البؤبؤ مقيسة بوحدة اللوكس (lux)، فإنه يمكنك استعمال النهاية عندما تقترب x من 0 أو ∞ لإيجاد اتساع البؤبؤ عندما تكون الاستضاءة في حدِّها الأدنى أو الأعلى.

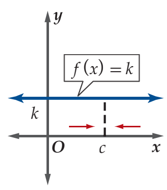
حساب النهاية عند نقطة: تعلمتَ في الدرس 1-8 تقدير النهايات بيانيًّا، وباستعمال جداول قيم . وستكتشف في هذا الدرس طرائق جبرية لحساب النهايات.

مفهوم أساسي نهايات الدوال

نهايات الدوال الثابتة

التعبير اللفظي: نهاية الدالة الثابتة عند أي نقطة c هي القيمة الثابتة للدالة.

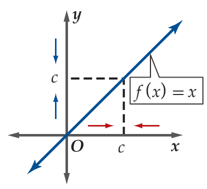
الرموز: $\lim_{x \to c} k = k$



نهايات الدالة المحايدة

التعبير اللفظي: نهاية الدالة المحايدة عند النقطة c هي c .

الرموز: $\lim_{x \to c} x = c$



تظهر أهمية نهايات الدوال الثابتة والدالة المحايدة واضحة في خصائص النهايات.

تنبيه!
إذا كانت $f(c) \le 0$ و n عددًا زوجيًا فإن $\lim_{x \to c} \sqrt[n]{f(x)}$ غير موجودة.

مفهوم أساسي خصائص النهايات

إذا كان k , c عددين حقيقيين، n عددًا صحيحًا موجبًا، وكانت النهايتان $\lim_{x \to c} f(x)$, $\lim_{x \to c} g(x)$ موجودتين، فإن كلًا من الخصائص الآتية صحيحة:

خاصية المجموع: $\lim_{x \to c} [f(x)+g(x)] = \lim_{x \to c} f(x) + \lim_{x \to c} g(x)$

خاصية الفرق: $\lim_{x \to c} [f(x)-g(x)] = \lim_{x \to c} f(x) - \lim_{x \to c} g(x)$

خاصية الضرب في ثابت: $\lim_{x \to c} [k\,f(x)] = k \lim_{x \to c} f(x)$

خاصية الضرب: $\lim_{x \to c} [f(x) \cdot g(x)] = \lim_{x \to c} f(x) \cdot \lim_{x \to c} g(x)$

خاصية القسمة : $\lim_{x \to c} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x \to c} f(x)}{\lim_{x \to c} g(x)}$ ، حيث $\lim_{x \to c} g(x) \ne 0$

خاصية القوة: $\lim_{x \to c} [f(x)]^n = [\lim_{x \to c} f(x)]^n$

خاصية الجذر النوني: $\lim_{x \to c} \sqrt[n]{f(x)} = \sqrt[n]{\lim_{x \to c} f(x)}$ ، إذا كان $\lim_{x \to c} f(x) > 0$ ، حيث n عدد زوجي.
وإذا كان n عددًا فرديًا، فإن $\lim_{x \to c} \sqrt[n]{f(x)} = \sqrt[n]{\lim_{x \to c} f(x)}$ ،

8-2 ملاحظات الدرس

1 التركيز

الترابط الرأسي

ما قبل الدرس 2-8
تقدير النهايات بيانيًّا وعدديًّا.

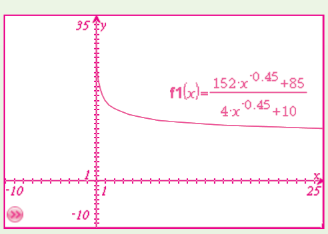
الدرس 2-8
إيجاد نهايات دوال كثيرات الحدود والدوال النسبية عند قيم محددة.
إيجاد نهايات دوال كثيرات الحدود والدوال النسبية عند المالانهاية .

ما بعد الدرس 2-8
استعمال النهايات في حساب ميل منحنى دالة غير خطية عند نقطة.
استعمال النهايات في حساب المساحات تحت المنحنيات.

2 التدريس

أسئلة التعزيز
اطلب إلى الطلاب قراءة فقرة "لماذا؟".

واسأل:
- ما النهاية التي تقترب منها x عندما تكون الاستضاءة في حدِّها الأدنى أو الأعلى؟ $0 ; \infty$
- مثّل العلاقة بيانيًّا باستعمال الحاسبة البيانيّة. وضّح ما الذي يحدث لقطر البؤبؤ عندما تزداد الاستضاءة.



يقل قطر البؤبؤ عندما تزداد الاستضاءة.

مصادر الدرس 2-8

المصدر	دون المتوسط	ضمن المتوسط	فوق المتوسط
دليل المعلم	• تنويع التعليم، ص (144)	• تنويع التعليم، ص (144)	• تنويع التعليم، ص (144, 146)
كتاب التمارين	• كتاب التمارين، ص (19)	• كتاب التمارين، ص (19)	• كتاب التمارين، ص (19)
مصادر المعلم للأنشطة الصفية	• تدريبات إعادة التعليم، ص (10, 11) • تدريبات حل المسألة، ص (12)	• تدريبات حل المسألة، ص (12) • التدريبات الإثرائية، ص (13)	• تدريبات حل المسألة، ص (12) • التدريبات الإثرائية، ص (13)

حساب النهاية عند نقطة

المثال 1 يبيّن كيفية استعمال خصائص النهايات؛ في حساب النهايات.

التقويم التكويني

استعمل تدريبات "تحقق من فهمك" بعد كل مثال؛ للتحقق من مدى فهم الطلاب للمفاهيم.

مثال إضافي

1 استعمل خصائص النهايات لحساب كل نهاية مما يأتي:

a) $\lim_{x\to 3}(x^2+2x-4)$ **11**

b) $\lim_{x\to -1}\dfrac{2x^2-3}{x+2}$ **-1**

c) $\lim_{x\to 2}\sqrt{x+4}$ **$\sqrt{6}$**

إرشادات للدراسة

خصائص النهايات
تبقى خصائص النهايات صحيحة في حال كون النهايات من جهة واحدة، وفي حال كونها عند المالانهاية، شريطة وجود هذه النهايات.

تنبيه!
خاصية الجذر النوني الزوجي تستخدم فقط إذا كان $\lim_{x\to c} f(x)>0$

مثال 1 استعمال خصائص النهايات

استعمل خصائص النهايات لحساب كل نهاية مما يأتي:

a) $\lim_{x\to 4}(x^2-6x+3)$

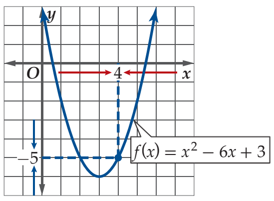
$\lim_{x\to 4}(x^2-6x+3)=\lim_{x\to 4}x^2-\lim_{x\to 4}6x+\lim_{x\to 4}3$ خاصيتا المجموع والفرق

$=\left(\lim_{x\to 4}x\right)^2-6\cdot\lim_{x\to 4}x+\lim_{x\to 4}3$ خاصيتا القوة والضرب في ثابت

$=4^2-6\cdot 4+3$ نهايتا الدالة الثابتة والدالة المحايدة

$=-5$ بسّط

تحقق يعزّز التمثيل البياني للدالة $f(x)=x^2-6x+3$ هذه النتيجة.



b) $\lim_{x\to -2}\dfrac{4x^3+1}{x-5}$

$\lim_{x\to -2}\dfrac{4x^3+1}{x-5}=\dfrac{\lim_{x\to -2}(4x^3+1)}{\lim_{x\to -2}(x-5)}$ خاصية القسمة

$=\dfrac{\lim_{x\to -2}4x^3+\lim_{x\to -2}1}{\lim_{x\to -2}x-\lim_{x\to -2}5}$ خاصيتا المجموع والفرق

$=\dfrac{4\left(\lim_{x\to -2}x\right)^3+\lim_{x\to -2}1}{\lim_{x\to -2}x-\lim_{x\to -2}5}$ خاصيتا القوة والضرب في ثابت

$=\dfrac{4(-2)^3+1}{-2-5}$ نهايتا الدالة الثابتة والدالة المحايدة

≈ 4.4 بسّط

تحقق كوّن جدولًا لقيم x التي تقترب من -2 من الجهتين.

x تقترب من -2 ⟵ ⟶ x تقترب من -2

x	−2.1	−2.01	−2.001	−2	−1.999	−1.99	−1.9
$f(x)$	5.08	4.49	4.43		4.42	4.37	3.83

من الواضح أنه كلما اقترب x من العدد -2، فإن $f(x)$ تقترب من العدد 4.4

c) $\lim_{x\to 3}\sqrt{8-x}$

$\lim_{x\to 3}(8-x)=\lim_{x\to 3}8-\lim_{x\to 3}x$ خاصية الفرق

$=8-3$ عوّض

$=5>0$ بسّط

$\lim_{x\to 3}\sqrt{8-x}=\sqrt{\lim_{x\to 3}(8-x)}$ خاصية الجذر النوني

$=\sqrt{\lim_{x\to 3}8-\lim_{x\to 3}x}$ خاصية الفرق

$=\sqrt{8-3}$ نهايتا الدالة الثابتة والدالة المحايدة

$=\sqrt{5}$ بسّط

تحقق من فهمك

استعمل خصائص النهايات لحساب كل نهاية مما يأتي:

1A) $\lim_{x\to 2}(-x^3+4)$ **-4**

1B) $\lim_{x\to 2}\dfrac{x-3}{2x^2-x-15}$ **$\frac{1}{9}$**

1C) $\lim_{x\to -1}\sqrt{x+3}$ **$\sqrt{2}$**

لاحظ أن نهاية كل دالة في المثال أعلاه عندما تقترب x من c تساوي قيمة $f(c)$. ومع أن هذه الملاحظة ليست صحيحة في جميع الدوال، إلا أنها صحيحة في دوال كثيرات الحدود والدوال النسبية التي مقاماتها لا تساوي صفرًا عندما $x=c$. كما هو موضح فيما يأتي:

حساب النهاية عند نقطة

المثال 2 يُبيِّنُ كيفية استعمال التعويض المباشر في حساب النهايات.

مثال إضافي

2 احسب كل نهاية مما يأتي باستعمال التعويض المباشر، إذا كان ممكنًا، وإلا فاذكر السبب.

(a $\lim\limits_{x \to 2} (-2x^4 + 3x^3 + x^2 - 2x + 5)$ -3

(b $\lim\limits_{x \to -3} \frac{x^2 + 1}{x - 2}$ -2

(c $\lim\limits_{x \to 10} \frac{x^2 - 100}{x - 10}$
بما أن هذه نهاية دالة نسبية مقامها صفر عندما $x = 10$ فلا يمكننا حسابها باستعمال التعويض المباشر.

(d $\lim\limits_{x \to -4} \sqrt{x + 3}$
غير ممكن؛ لأنه إذا كانت $f(x) = x + 3$ فإن $f(-4) = -4 + 3 = -1 < 0$ بما أن $f(-4) < 0$ فلا يمكن حساب $\lim\limits_{x \to -4} \sqrt{f(x)}$

التعليم باستعمال التقنيات

السبورة التفاعلية قم بحلّ الأمثلة على السبورة التفاعلية، واحفظ ذلك في صفحات الملاحظات، ثم أرسلها للطلاب بوصفها مرجعًا إضافيًا خارج الصف.

إرشادات للدراسة

الدوال الجيدة السلوك
تُعدُّ الدوال المتصلة مثل دوال كثيرات الحدود ودالتي الجيب وجيب التمام دوالّ جيدة السلوك، إذ يمكن حساب نهاياتها من خلال التعويض المباشر، ويمكن إيجاد نهاية الدوال من خلال التعويض المباشر حتى وإن لم تكن الدالة جيدة السلوك على مجالها، بشرط أن تكون متصلة عند النقطة التي تحسب عندها النهاية.

مفهوم أساسي نهايات الدوال

نهايات دوال كثيرات الحدود
إذا كانت $p(x)$ دالة كثيرة حدود، وكان c عددًا حقيقيًا، فإن $\lim\limits_{x \to c} p(x) = p(c)$.

نهايات الدوال النسبية
إذا كانت $r(x) = \frac{p(x)}{q(x)}$ دالةً نسبية، وكان c عددًا حقيقيًا، حيث $q(c) \neq 0$، فإن $\lim\limits_{x \to c} r(x) = r(c) = \frac{p(c)}{q(c)}$.

وبشكل مختصر، فإنه يمكن حساب نهايات دوال كثيرات الحدود والدوال النسبية من خلال **التعويض المباشر**، شريطة ألا يساوي مقام الدالة النسبية صفرًا عند النقطة التي تُحسب عندها النهاية.

مثال 2 استعمال التعويض المباشر لحساب النهايات

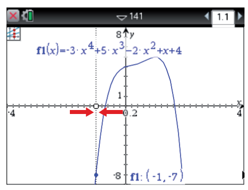
احسب كل نهاية مما يأتي باستعمال التعويض المباشر إذا كان ممكنًا، وإلا فاذكر السبب:

(a $\lim\limits_{x \to -1} (-3x^4 + 5x^3 - 2x^2 + x + 4)$

بما أن هذه نهاية دالة كثيرة حدود، فيمكننا حسابها باستعمال التعويض المباشر.

$$\lim_{x \to -1} (-3x^4 + 5x^3 - 2x^2 + x + 4) = -3(-1)^4 + 5(-1)^3 - 2(-1)^2 + (-1) + 4$$
$$= -3 - 5 - 2 - 1 + 4 = -7$$

تحقق يعزِّز التمثيل البياني بالآلة البيانية للدالة $f(x) = -3x^4 + 5x^3 - 2x^2 + x + 4$ هذه النتيجة.



[−4, 4] scl: 0.2 by [−8, 8] scl: 1

(b $\lim\limits_{x \to 3} \frac{2x^3 - 6}{x - x^2}$

بما أن هذه نهاية دالة نسبية مقامُها ليس صفرًا عندما $x = 3$ ، فيمكننا حسابها باستعمال التعويض المباشر.

$$\lim_{x \to 3} \frac{2x^3 - 6}{x - x^2} = \frac{2(3)^3 - 6}{3 - (3)^2}$$
$$= \frac{48}{-6}$$
$$= -8$$

(c $\lim\limits_{x \to 1} \frac{x^2 - 1}{x - 1}$

بما أن هذه نهاية دالة نسبية مقامها صفر عندما $x = 1$ ، فلا يمكننا حسابها باستعمال التعويض المباشر.

(d $\lim\limits_{x \to -6} \sqrt{x + 5}$

بما أن $\lim\limits_{x \to -6} (x+5) = -6 + 5 = -1 < 0$ ، فلا يمكننا حساب $\lim\limits_{x \to -6} \sqrt{x+5}$ بالتعويض المباشر.

تحقق من فهمك

احسب كل نهاية مما يأتي باستعمال التعويض المباشر إذا كان ممكنًا، وإلا فاذكر السبب:

(2A $\lim\limits_{x \to 4} (x^3 - 3x^2 - 5x + 7)$ 3

(2B $\lim\limits_{x \to -5} \frac{x + 1}{x^2 + 3}$ $\frac{-1}{7}$

(2C $\lim\limits_{x \to 2} \frac{x^3 - 8}{x - 2}$

(2D $\lim\limits_{x \to -8} \sqrt{x + 6}$

(2C بما أن هذه نهاية دالة نسبية مقامها صفر عندما $x=2$ فلا يمكننا حسابها بالتعويض المباشر.

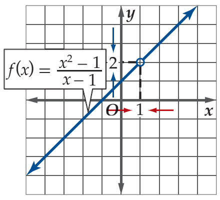
(2d غير ممكن؛ لأنه إذا كانت $f(x) = x + 6$ فإن $f(-8) = -8 + 6 < 0$ إذن لا يمكن حساب $\lim\limits_{x \to -8} \sqrt{f(x)}$

لنفترض أنك استعملت خاصية القسمة أو التعويض المباشر لحساب النهاية $\lim\limits_{x \to 1} \frac{x^2 - 1}{x - 1}$ بشكل خاطئ كما يلي:

$$\lim_{x \to 1} \frac{x^2 - 1}{x - 1} = \frac{\lim\limits_{x \to 1} (x^2 - 1)}{\lim\limits_{x \to 1} (x - 1)} = \frac{1^2 - 1}{1 - 1} = \frac{0}{0}$$

وهذا ليس صحيحًا؛ لأن نهاية المقام تساوي 0 .

يُسمى ناتج التعويض في النهايات على الصورة $\frac{0}{0}$ **الصيغة غير المحددة**؛ لأنه لا يمكنك تحديد نهاية الدالة مع وجود صفر في المقام، ومثل هذه النهايات قد تكون موجودة ولها قيمة حقيقية، أو غير موجودة، أو متباعدة نحو ∞ أو $-\infty$، ويُبيِّن التمثيل البياني للدالة $f(x)=\frac{x^2-1}{x-1}$ أن $\lim_{x\to 1}\frac{x^2-1}{x-1}$ موجودة وتساوي 2 .



على الرغم من أن الصيغة غير المحددة تظهر من خلال تطبيق خاطئ لخصائص النهايات، إلا أن الحصول على هذه الصيغة قد يرشدنا إلى الطريقة الأنسب لإيجاد النهاية.

إذا قمت بحساب نهاية دالة نسبية، ووصلت إلى الصيغة غير المحددة $\frac{0}{0}$ ، فبسِّط العبارة جبريًّا من خلال تحليل كل من البسط والمقام واختصار العوامل المشتركة.

مثال 3 استعمال التحليل لحساب النهايات

احسب كل نهاية مما يأتي:

a) $\lim_{x\to -4}\frac{x^2-x-20}{x+4}$

ينتج عن التعويض المباشر $\frac{0}{0}=\frac{(-4)^2-(-4)-20}{-4+4}$ ؛ لذا فإن علينا تحليل المقدار جبريًّا، واختصار أي عوامل مشتركة بين البسط والمقام.

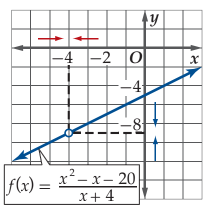
$$\lim_{x\to -4}\frac{x^2-x-20}{x+4}=\lim_{x\to -4}\frac{(x-5)(x+4)}{x+4}$$ حلِّل البسط

$$=\lim_{x\to -4}\frac{(x-5)\cancel{(x+4)}}{\cancel{x+4}}$$ اختصر العامل المشترك

$$=\lim_{x\to -4}(x-5)$$ بسِّط

$$=(-4)-5=-9$$ عوِّض وبسِّط

تحقق يعزِّز التمثيل البياني للدالة $f(x)=\frac{x^2-x-20}{x+4}$ هذه النتيجة.



b) $\lim_{x\to 3}\frac{x-3}{x^3-3x^2-7x+21}$

يَنتج عن التعويض المباشر $\frac{0}{0}=\frac{3-3}{3^3-3(3)^2-7(3)+21}$.

$$\lim_{x\to 3}\frac{x-3}{x^3-3x^2-7x+21}=\lim_{x\to 3}\frac{x-3}{(x^3-3x^2)+(-7x+21)}$$ أعد تجميع المقام

$$=\lim_{x\to 3}\frac{x-3}{x^2(x-3)-7(x-3)}$$ أخرج العامل المشترك من الحدود المجمعة في المقام

$$=\lim_{x\to 3}\frac{x-3}{(x^2-7)(x-3)}$$ أخرج العامل المشترك في المقام

$$=\lim_{x\to 3}\frac{\cancel{x-3}}{(x^2-7)\cancel{(x-3)}}$$ اختصر

$$=\lim_{x\to 3}\frac{1}{x^2-7}$$ بسِّط

$$=\frac{1}{(3)^2-7}=\frac{1}{2}$$ عوِّض وبسِّط

تحقق من فهمك

احسب كل نهاية مما يأتي:

3A) $\lim_{x\to -2}\frac{x^3-3x^2-4x+12}{x+2}$ 20

3B) $\lim_{x\to 6}\frac{x^2-7x+6}{3x^2-11x-42}$ $\frac{1}{5}$

تنبيه!

التحليل

عند اختصار البسط بأكمله، فإنه يصبح 1 وليس 0 .

حساب النهاية عند نقطة

المثال 3 يُبيِّنُ كيفية استعمال التحليل؛ في حساب النهايات.

مثال إضافي

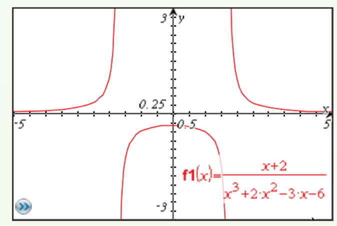
3 أحسب كل نهاية مما يأتي:

a) $\lim_{x\to 3}\frac{x^2-x-6}{x-3}$ 5

b) $\lim_{x\to -2}\frac{x+2}{x^3+2x^2-3x-6}$ 1

إرشادات للمعلم الجديد

الحاسبة البيانية: قد يظهر في بعض الأحيان عند رسم منحنى دالة باستعمال الحاسبة البيانية أكثر من جزء للمنحنى كما في المثال الإضافي 3b.



لذا ذكِّر الطلاب بأننا نهتم فقط بجزء المنحنى قرب النقطة التي نحسب النهاية عندها، أي عندما تقترب x من -2 في هذا المثال.

حساب النهاية عند نقطة

المثال 4 يُبيِّنُ كيفية استعمال فكرة إنطاق البسط أو المقام؛ في حساب النهايات .

مثال إضافي

4 احسب $\lim_{x \to 4} \frac{\sqrt{x}-2}{x-4}$. $\frac{1}{4}$

ينتج عن اختصار العامل المشترك بين بسط ومقام الدالة النسبية دالة جديدة ، ففي المثال 3a ينتج عن الاختصار بين بسط ومقام الدالة f دالة جديدة g ، حيث:

$$f(x) = \frac{x^2 - x - 20}{x+4}, \quad g(x) = x - 5$$

إن قيم هاتين الدالتين متساوية لجميع قيم x إلا عندما $x = -4$ ، فإذا تساوت قيم دالتين إلا عند قيمة وحيدة c ، فإن نهايتيهما عندما تقترب x من c متساويتان ؛ لأن قيمة النهاية لا تعتمد على قيمة الدالة عند النقطة التي تُحسبُ النهاية عندها؛ لذا فإن $\lim_{x \to -4} (x-5) = \lim_{x \to -4} \frac{x^2-x-20}{x+4}$.

والطريقة الأخرى لإيجاد نهايات ناتجِ التعويضِ فيها صيغة غير محددة ، هي إنطاق البسط أو المقام أولًا، ثم اختصار العوامل المشتركة.

مثال 4 استعمال إنطاق البسط أو المقام لحساب النهايات

احسب $\lim_{x \to 9} \frac{\sqrt{x}-3}{x-9}$.

يَنتج عن التعويض المباشر $\frac{0}{0} = \frac{\sqrt{9}-3}{9-9}$ ؛ لذا أنطق البسط، ومن ثم اختصر العوامل المشتركة.

$$\lim_{x \to 9} \frac{\sqrt{x}-3}{x-9} = \lim_{x \to 9} \frac{\sqrt{x}-3}{x-9} \cdot \frac{\sqrt{x}+3}{\sqrt{x}+3}$$ اضرب كلًا من البسط والمقام في $\sqrt{x}+3$ ، والذي يمثل مرافق $\sqrt{x}-3$

$$= \lim_{x \to 9} \frac{x-9}{(x-9)(\sqrt{x}+3)}$$ بسِّط

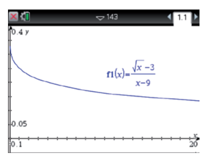
$$= \lim_{x \to 9} \frac{\cancel{x-9}}{\cancel{(x-9)}(\sqrt{x}+3)}$$ اختصر العامل المشترك

$$= \lim_{x \to 9} \frac{1}{\sqrt{x}+3}$$ بسِّط

$$= \frac{1}{\sqrt{9}+3}$$ عوِّض

$$= \frac{1}{6}$$ بسِّط

تحقق يعزِّز التمثيل البياني بالآلة البيانية للدالة $f(x) = \frac{\sqrt{x}-3}{x-9}$ في الشكل المجاور هذه النتيجة.



[−0.1, 20] scl: 1 by [−0.05, 0.4] scl: 0.05

تحقق من فهمك

احسب كل نهاية مما يأتي:

4A) $\lim_{x \to 25} \frac{x-25}{\sqrt{x}-5}$ **10**

4B) $\lim_{x \to 0} \frac{2-\sqrt{x+4}}{x}$ $-\frac{1}{4}$

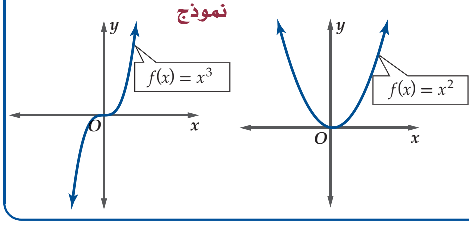
حساب النهايات عند المالانهاية : درست سابقًا أن لجميع الدوال الزوجية سلوك طرفي التمثيل البياني نفسه ، وكذلك الدوال الفردية لها جميعًا سلوك طرفي التمثيل البياني نفسه.

مفهوم أساسي نهايات دوال القوى عند المالانهاية

لأي عدد صحيح موجب n ،

- $\lim_{x \to \infty} x^n = \infty$
- $\lim_{x \to -\infty} x^n = \infty$ ، إذا كان n عددًا زوجيًا.
- $\lim_{x \to -\infty} x^n = -\infty$ ، إذا كان n عددًا فرديًا.

نموذج



إن سلوك طرفي التمثيل البياني لدالة كثيرة الحدود هو ذاته سلوك طرفي التمثيل البياني لدالة القوة الناتجة عن الحد الرئيس في كثيرة الحدود ، وهو الحد ذو القوة الكبرى، ويمكننا وصف ذلك أيضًا باستعمال النهايات.

الدرس 8-2 حساب النهايات جبريًا 141

حساب النهايات عند المالا نهاية

المثال 5 يُبيِّنُ كيفية إيجاد نهايات دوال كثيرات الحدود عند الاقتراب من ∞، −∞.

مثال إضافي

5 احسب كل نهاية مما يأتي:

a) $\lim_{x\to-\infty}(2x^4+x^3-7)$ ∞

b) $\lim_{x\to-\infty}(x^5-x^2+8)$ $-\infty$

c) $\lim_{x\to\infty}(x^3-2x^2+x-7)$ ∞

مفهوم أساسي — نهايات دوال كثيرات الحدود عند المالانهاية

إذا كانت $p(x)=a_nx^n+\ldots+a_1x+a_0$ دالة كثيرة حدود ، فإن

$$\lim_{x\to\infty}p(x)=\lim_{x\to\infty}a_nx^n\ ,\ \lim_{x\to-\infty}p(x)=\lim_{x\to-\infty}a_nx^n$$

يمكنك استعمال هاتين الخاصيتين لحساب نهايات دوال كثيرات حدود عند المالانهاية. تذكَّر أن كون نهاية الدالة ∞ أو −∞ لا يعني أنها موجودة، ولكنه وصف لسلوك منحناها؛ فإما أن يكون متزايدًا بلاحدود أو متناقصًا بلا حدود.

إرشادات للدراسة

الضرب في المالانهاية

$\lim_{x\to c}f(x)=\infty$ تعني أن الدالة تأخذ قيمًا موجبة ومتزايدة بشكل غير محدود، كلما اقتربت قيم x من العدد c؛ لذا فإن ضرب هذه القيم في عدد موجب لا يغير هذا السلوك، أما ضربها في عدد سالب، فإنه يعكس إشاراتها، وبذلك تقترب النهاية من −∞ ، أي أنه إذا كان $a>0$ فإن:

$a(\infty)=\infty,$

$-a(\infty)=-\infty$

مثال 5 — نهايات دوال كثيرات الحدود عند المالانهاية

احسب كل نهاية مما يأتي:

a) $\lim_{x\to-\infty}(x^3-2x^2+5x-1)$

$\lim_{x\to-\infty}(x^3-2x^2+5x-1)=\lim_{x\to-\infty}x^3$ — نهاية دالة كثيرة الحدود عند المالانهاية

$=-\infty$ — نهاية دالة القوة عند المالانهاية

b) $\lim_{x\to\infty}(4+3x-x^2)$

$\lim_{x\to\infty}(4+3x-x^2)=\lim_{x\to\infty}-x^2$ — نهاية دالة كثيرة الحدود عند المالانهاية

$=-\lim_{x\to\infty}x^2$ — خاصية الضرب في ثابت

$=-\infty$ — نهاية دالة القوة عند المالانهاية

c) $\lim_{x\to-\infty}(5x^4-3x)$

$\lim_{x\to-\infty}(5x^4-3x)=\lim_{x\to-\infty}5x^4$ — نهاية دالة كثيرة الحدود عند المالانهاية

$=5\lim_{x\to-\infty}x^4$ — خاصية الضرب في ثابت

$=5\times\infty=\infty$ — نهاية دالة القوة عند المالانهاية

تحقق من فهمك

احسب كل نهاية مما يأتي:

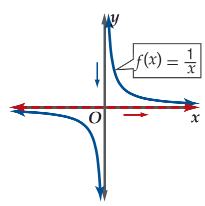
5A) $\lim_{x\to\infty}(-x^3-4x^2+9)$ $-\infty$ 5B) $\lim_{x\to-\infty}(4x^6+3x^5-x)$ ∞ 5C) $\lim_{x\to-\infty}(2x-6x^2+4x^5)$ $-\infty$

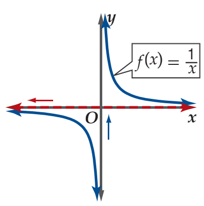
ولحساب نهاية دالة نسبية عند المالانهاية نحتاج إلى خصائص أخرى للنهايات.

مفهوم أساسي — نهايات دالة المقلوب عند المالانهاية

التعبير اللفظي: إن نهاية دالة المقلوب عند موجب أو سالب مالانهاية هي صفر.

الرموز: $\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{1}{x}=0$





نتيجة: لأي عدد صحيح موجب n ، فإن $\lim_{x\to\pm\infty}\frac{1}{x^n}=0$.

مراجعة المفردات

دالة المقلوب

تذكر أن دالة المقلوب هي $f(x)=\frac{1}{a(x)}$ ، حيث $a(x)$ دالة خطية ، و $a(x)\neq 0$.

ويمكننا استعمال هذه الخاصية لحساب نهايات الدوال النسبية عند المالانهاية ، وذلك بقسمة كل حد في بسط ومقام الدالة النسبية على أعلى قوة لمتغير الدالة.

مثال 6 نهايات الدوال النسبية عند المالانهاية

احسب كل نهاية مما يأتي إن أمكن:

a) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{4x+5}{8x-3}$

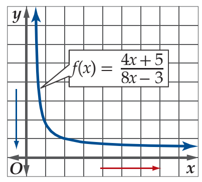
$\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{4x+5}{8x-3} = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{\frac{4x}{x}+\frac{5}{x}}{\frac{8x}{x}-\frac{3}{x}}$ اقسم كل حد على أعلى قوة، وهي x

$= \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{4+\frac{5}{x}}{8-\frac{3}{x}}$ بسِّط

$= \dfrac{\lim\limits_{x\to\infty} 4 + 5\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1}{x}}{\lim\limits_{x\to\infty} 8 - 3\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1}{x}}$ خصائص القسمة، والمجموع، والفرق، والضرب في ثابت

$= \dfrac{4+5\cdot 0}{8-3\cdot 0} = \dfrac{1}{2}$ نهايتا الدالة الثابتة ودالة المقلوب عند المالانهاية

تحقق يعزِّز التمثيل البياني للدالة $f(x) = \dfrac{4x+5}{8x-3}$ المجاور هذه النتيجة. ✓



b) $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{6x^2-x}{3x^3+1}$

$\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{6x^2-x}{3x^3+1} = \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{\frac{6x^2}{x^3}-\frac{x}{x^3}}{\frac{3x^3}{x^3}+\frac{1}{x^3}}$ اقسم كل حد على أعلى قوة، وهي x^3

$= \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{\frac{6}{x}-\frac{1}{x^2}}{3+\frac{1}{x^3}}$ بسِّط

$= \dfrac{6\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{1}{x} - \lim\limits_{x\to-\infty}\frac{1}{x^2}}{\lim\limits_{x\to-\infty} 3 + \lim\limits_{x\to-\infty}\frac{1}{x^3}}$ خصائص القسمة، والمجموع، والفرق، والضرب في ثابت

$= \dfrac{6\cdot 0 - 0}{3+0} = 0$ نهايتا الدالة الثابتة ودالة المقلوب عند المالانهاية

c) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{5x^4}{9x^3+2x}$

$\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{5x^4}{9x^3+2x} = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{5}{\frac{9}{x}+\frac{2}{x^3}}$ اقسم كل حد على أعلى قوة، وهي x^4

$= \dfrac{\lim\limits_{x\to\infty} 5}{9\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1}{x} + 2\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1}{x^3}}$ خصائص القسمة، والمجموع، والضرب في ثابت

$= \dfrac{5}{9\cdot 0 + 2\cdot 0} = \dfrac{5}{0}$ نهايتا الدالة الثابتة ودالة المقلوب عند المالانهاية

وحيث إن نهاية المقام صفر، فإننا نكون قد طبقنا خطأً خاصية القسمة، إلا أننا نعلم أنه عند قسمة العدد 5 على قيم صغيرة موجبة تقترب من الصفر، فإن الناتج سيكون كبيرًا بشكلٍ غير محدود، أي أن النهاية هي ∞.

✓ تحقق من فهمك

احسب كل نهاية مما يأتي:

6A) $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{5}{x-10}$ **0**

6B) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{-3x^2+7}{5x+1}$ **$-\infty$**

6C) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{7x^3-3x^2+1}{2x^3+4x}$ **3.5**

إرشادات للدراسة

نهاية الدوال النسبية
توجد ثلاث حالات عند حساب نهايات الدوال النسبية عندما تقترب x من المالانهاية.
1) إذا كانت درجة البسط أكبر من درجة المقام، فإن النهاية إما ∞ أو −∞ ، بحسب إشارة الحد الرئيس في كل من البسط والمقام.
2) إذا كانت درجة البسط مساوية لدرجة المقام، فإن النهاية مساوية لناتج قسمة معاملي الحدين الرئيسين في البسط والمقام.
3) إذا كانت درجة البسط أقل من درجة المقام، فإن النهاية صفر.

حساب النهايات عند المالانهاية

المثال 6 يُبيِّنُ كيفية إيجاد نهايات دوال نسبية عند المالانهاية.

مثال إضافي

6 أوجد قيمة كل نهاية فيما يأتي:

a) $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{2x+1}{3x-4}$ $\dfrac{2}{3}$

b) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{2x^3-x^2}{3x^2-1}$ ∞

c) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{5x^3+2x^2-x+1}{2x^3-x^2+3x-2}$ 2.5

المحتوى الرياضي

نهاية الدوال النسبية توجد ثلاث حالات عند حساب نهايات الدوال النسبية عندما تقترب x من المالانهاية .

1) إذا كانت درجة البسط أكبر من درجة المقام، فإن النهاية إما ∞ أو −∞، بحسب إشارة الحد الرئيس في كلٍّ من البسط والمقام.
2) إذا كانت درجة البسط مساوية لدرجة المقام، فإن النهاية مساوية لناتج قسمة معاملي الحدين الرئيسين في البسط والمقام.
3) إذا كانت درجة البسط أقل من درجة المقام ، فإن النهاية صفر .

إرشادات للمعلم الجديد

صفر المقام إذا كان المقام صفرًا عند حساب نهاية، وكان البسط عددًا غير الصفر، فإن النهاية إما ∞ أو −∞.

حساب النهايات عند المالا نهاية

المثال 7 يُبيِّنُ كيفية حساب نهاية متتابعة متقاربة.

مثال إضافي

7 احسب نهاية كل متتابعة مما يأتي إن وجدت:

a) $a_n = \frac{2n+3}{n+4}$

$\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 2$

b) $b_n = \frac{3}{n^2}\left[\frac{(n+3)(n+4)}{9}\right]$

$\lim\limits_{n\to\infty} b_n = \frac{1}{3}$

درست سابقًا أن المتتابعة هي دالة مجالها مجموعة من الأعداد الطبيعية، ومداها مجموعة من الأعداد الحقيقية؛ لذا فإن نهاية المتتابعة غير المنتهية هي نهاية دالة عندما $n \to \infty$. إذا كانت النهاية موجودة، فإن قيمة هذه النهاية هي العدد الذي تقترب منه المتتابعة . فمثلًا يمكن وصف المتتابعة $\ldots, \frac{1}{4}, \frac{1}{3}, \frac{1}{2}, 1 = a_n$ بـ $f(n) = \frac{1}{n}$ ، حيث n عدد صحيح موجب . وبما أن $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$ ، فإن المتتابعة تقترب من الصفر .

مثال 7 نهايات المتتابعات

احسب نهاية كل متتابعة مما يأتي إن وجدت:

a) $a_n = \frac{3n+1}{n+5}$

لحساب نهاية المتتابعة، أوجد $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{3n+1}{n+5}$

$\lim\limits_{n\to\infty} \frac{3n+1}{n+5} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{3+\frac{1}{n}}{1+\frac{5}{n}}$ اقسم كل حد على أعلى قوة، وهي n

$= \frac{\lim\limits_{n\to\infty} 3 + \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n}}{\lim\limits_{n\to\infty} 1 + 5\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n}}$ خصائص القسمة، والمجموع، والضرب في ثابت

$= \frac{3+0}{1+5\cdot 0} = 3$ نهايتا الدالة الثابتة ودالة المقلوب عند المالانهاية

أي أن نهاية المتتابعة هي 3 ، بمعنى أن حدود المتتابعة تقترب من 3 .

تحقق كوّن جدولًا، واختر قيمًا متعددة لـ n.

n	1	20	40	60	80	90	100	1000	10000
a_n	0.6667	2.44	2.6889	2.7846	2.8353	2.8526	2.8667	2.9861	2.9986

نلاحظ أن حدود المتتابعة تقترب من العدد 3 كلما كبرت n .

b) $b_n = \frac{5}{n^4}\left[\frac{n^2(n+1)^2}{4}\right]$

الحدود الخمسة الأولى بصورة تقريبية هي 1.8 ,1.953 ,2.222 ,2.813 ,5 . والآن أوجد نهاية المتتابعة

$\lim\limits_{n\to\infty} \frac{5}{n^4}\left[\frac{n^2(n+1)^2}{4}\right] = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{5}{n^4}\left[\frac{n^2(n^2+2n+1)}{4}\right]$ ربع ثنائية الحد

$= \lim\limits_{n\to\infty} \frac{5n^4+10n^3+5n^2}{4n^4}$ اضرب

$= \frac{\lim\limits_{n\to\infty} 5 + 10\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n} + 5\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n^2}}{\lim\limits_{n\to\infty} 4}$ اقسم كل حد على أعلى قوة، وهي n^4 ، ثم استعمل خصائص القسمة، والمجموع، والضرب في ثابت

$= \frac{5}{4} = 1.25$ نهايتا الدالة الثابتة ودالة المقلوب عند المالانهاية

أي أن نهاية المتتابعة هي 1.25 ، بمعنى أن حدود المتتابعة تقترب من 1.25.

تحقّق كوّن جدول قيم، واختر قيمًا كبيرة لـ n . قيم (b_n في الجدول أدناه مقربة إلى أقرب جزء من مئة)

n تقترب من ∞

n	10	100	1000	10000	100000
b_n	1.51	1.28	1.25	1.25	1.25

تحقق من فهمك

احسب نهاية كل متتابعة مما يأتي إن وجدت:

7A) $a_n = \frac{4}{n^2+1}$ **0**

7B) $b_n = \frac{2n^3}{3n+8}$ **∞**

7C) $c_n = \frac{9}{n^3}\left[\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}\right]$ **3**

تنويع التعليم

دون ضمن فوق

المتعلمون الفرديون اطلب إلى الطلاب بعد حَلّ كل مثال أن يعملوا من خلال مجموعات ثلاثية أو رباعية من طلاب متفاوتي القدرات؛ لحَلّ تدريبات تحقق من فهمك، وعند انتهاء المجموعة من الحَلّ، تقارن حلولها مع حلول المجموعات الأخرى، ثم تتم مناقشة النتائج مع الطلاب جميعًا، ومناقشة الأخطاء وتوضيح ما يلزم.

تدرب وحل المسائل

استعمل خصائص النهايات لحساب كل نهاية مما يأتي: (مثال 1)

1) $\lim_{x\to -3}(5x-10)$ **−25**

2) $\lim_{x\to 5}\frac{x^2+4x+13}{x-3}$ **29**

3) $\lim_{x\to 9}\left(\frac{1}{x}+2x+\sqrt{x}\right)$ **21.11**

4) $\lim_{x\to -4}[x^2(x+1)+2]$ **−46**

5) $\lim_{x\to 12}\frac{x^2-10x}{\sqrt{x+4}}$ **6**

6) $\lim_{x\to -6}\frac{x^4-x^3}{x^2}$ **42**

احسب كل نهاية مما يأتي باستعمال التعويض المباشر إذا كان ممكنًا، وإلا فاذكر السبب: (مثال 2) **(7, 10) انظر الهامش.**

7) $\lim_{x\to 16}\frac{x^2+9}{\sqrt{x}-4}$

8) $\lim_{x\to 2}(4x^3-3x^2+10)$ **30**

9) $\lim_{x\to 3}\frac{x^3+9x+6}{x^2+5x+6}$ **2**

10) $\lim_{x\to 3}\sqrt{2-x}$

11) $\lim_{x\to 9}(3x^2-10x+35)$ **188**

12) $\lim_{x\to 10}(-x^2+3x+\sqrt{x})$ **−66.84**

13) **فيزياء:** بحسب نظرية آينشتاين النسبية، فإن كتلة جسم يتحرك بسرعة v تُعطى بالعلاقة $m=\frac{m_0}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$، حيث c سرعة الضوء، m_0 كتلة الجسم الابتدائية أو كتلته عند السكون. **انظر الهامش.** أوجد $\lim_{v\to 0} m$، ووضّح العلاقة بين هذه النهاية و m_0. (مثال 2)

احسب كل نهاية مما يأتي: (المثالان 3, 4)

14) $\lim_{x\to 1}\frac{x^2+4x-5}{x^2-1}$ **3**

15) $\lim_{x\to 0}\frac{4x}{\sqrt{x+1}-1}$ **8**

16) $\lim_{x\to -5}\frac{4x^2+21x+5}{3x^2+17x+10}$ **1.46**

17) $\lim_{x\to 0}\frac{2x}{3-\sqrt{x+9}}$ **−12**

18) $\lim_{x\to -3}\frac{x^2-2x-15}{x+3}$ **−8**

19) $\lim_{x\to 6}\frac{\sqrt{x+3}-3}{x-6}$ $\mathbf{\frac{1}{6}}$

احسب كل نهاية مما يأتي: (المثالان 5, 6)

20) $\lim_{x\to\infty}(5-2x^2+7x^3)$ **∞**

21) $\lim_{x\to\infty}\frac{3x^3-10x+2}{4x^3+20x^2}$ $\mathbf{\frac{3}{4}}$

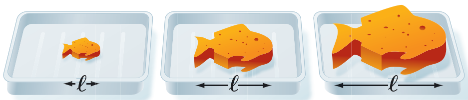
22) $\lim_{x\to\infty}(10x+14+6x^2-x^4)$ **−∞**

23) $\lim_{x\to\infty}\frac{14x^3-12x}{4x^2+13x-8}$ **∞**

24) $\lim_{x\to\infty}\frac{6x^3+2x-11}{-x^5+17x^3+4x}$ **0**

25) $\lim_{x\to\infty}\frac{10x^4-2}{5x^4+3x^3-2x}$ **2**

26) **إسفنج:** تحتوي مادة هلامية على حيوان الإسفنج، وعند وضع المادة الهلامية في الماء، فإن حيوان الإسفنج يبدأ بامتصاص الماء والتضخم. ويمكن تمثيل ذلك بالدالة $\ell(t)=\frac{105t^2}{10+t^2}+25$، حيث ℓ طول حيوان الإسفنج بالملمترات بعد t ثانية من وضعه في الماء. (مثال 6)



$t=0$ $\quad t=t_1$ $\quad t=t_n$

a) ما طول حيوان الإسفنج قبل وضعه في الماء؟ **25 mm**

b) ما نهاية الدالة عندما $t\to\infty$؟ **130 mm**

c) وضّح العلاقة بين نهاية الدالة ℓ وطول حيوان الإسفنج. **لن يتعدى طول حيوان الإسفنج 130 mm**

احسب نهاية كل متتابعة مما يأتي إذا كانت موجودة: (مثال 7)

27) $a_n=\frac{8n+1}{n^2-3}$ **0**

28) $a_n=\frac{-4n^2+6n-1}{n^2+3n}$ **−4**

29) $a_n=\frac{12n^2+2}{6n^2-1}$ **2**

30) $a_n=\frac{8n^2+5n+2}{3+2n}$ **∞**

31) $a_n=\frac{1}{n^4}\left[\frac{n^2(n+1)^2}{4}\right]$ $\mathbf{\frac{1}{4}}$

32) $a_n=\frac{12}{n^2}\left[\frac{n(2n+1)(n+1)}{6}\right]$ **∞**

احسب كل نهاية مما يأتي إذا كانت موجودة مستخدمًا التعويض المباشر لحساب النهايتين من اليمين واليسار:

33) $\lim_{x\to -2}\begin{cases} x-3, & x\le -2\\ 2x-1, & x>-2\end{cases}$ **−5**

34) $\lim_{x\to 0}\begin{cases} 5-x^2, & x\le 0\\ 5-x, & x>0\end{cases}$ **5**

35) $\lim_{x\to 2}\begin{cases} (x-2)^2+1, & x\le 2\\ x-6, & x>2\end{cases}$ **غير موجودة**

3 التدريب

التقويم التكويني

استعمل الأسئلة 32-1 للتأكد من فهم الطلاب.

ثم استعمل الجدول أسفل هذه الصفحة؛ لتعيين الواجبات المنزلية للطلاب بحسب مستوياتهم.

تنبيه !

خطأ شائع: عند إيجاد نهاية دالة نسبية، قد يستعمل بعض الطلاب التعويض المباشر، ويحدد خطأً نهاية الدالة بالقيمة $\frac{0}{0}$؛ لذا ذكِّرهم بتبسيط الدالة النسبية في هذه الحالة قبل إيجاد النهاية.

خطأ شائع: للتمارين 12–7، يجب أن يعرف الطلاب أنه ليس بإمكانهم استعمال التعويض المباشر إذا كانت النتيجة تتضمن صفرًا في المقام، أو إذا كان ما تحت الجذر عددًا سالبًا؛ لذا يجب عليهم في هذه الحالات. توضيح سبب عدم إمكانية حساب النهاية لهذه الدوال بالتعويض المباشر وعدم اللجوء إلى التبسيط.

خطأ شائع: للتمارين 39–37، ذكّر الطلاب بضبط الحاسبة البيانية على وضعية الراديان وليس الدرجات.

إجابات:

7) ليس ممكنًا؛ فالمقام يساوي صفرًا عندما $x=16$.

10) ليس ممكنًا، قيمة الدالة $f(x)=\sqrt{2-x}$ هي $\sqrt{-1}$ عندما $x=3$ وهي ليست معرفة.

13) $\lim_{v\to 0} m=m_0$. عندما تقترب سرعة الجسم من الصفر، فإن كتلته تقترب من كتلته الابتدائية، أو كتلته في وضع السكون.

تنويع الواجبات المنزلية

دون ضمن فوق

المستوى	الأسئلة
دون المتوسط	1–32، 48، 49، 51–61
ضمن المتوسط	1–37 فردي، 40، 41– 47 فردي، 48، 49، 51–61
فوق المتوسط	33 – 61

4 التقويم

بطاقة مكافئة: اطلب إلى كل طالب كتابة توضيح مختصر للحالات التي يمكن فيها حساب نهاية دالة باستعمال التعويض المباشر دون تبسيط الدالة. إجابة ممكنة: يمكن حساب النهاية باستعمال التعويض المباشر. إذا كانت الدالة كثيرة حدود، أو نسبية لا تنتج صيغة غير محددة عند التعويض فيها.

التقويم التكويني

تحقق من فهم الطلاب الدرسين 2-8 ,1-8 بإعطائهم:

الاختبار القصير ١، ص (68)

إجابات:

37) $\lim\limits_{x\to\pi} \frac{\sin x}{x} = \frac{\sin \pi}{\pi} = \frac{0}{\pi} = 0$

38) $\lim\limits_{x\to 0} (1+x+2^x-\cos x) = 1+0+2^0-\cos 0 = 1$

39) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{\tan 2x}{x} = \frac{\tan \pi}{\frac{\pi}{2}} = 0$

50) إذا كانت $m > n$، فإن النهاية تساوي 0.
إذا كانت $m = n$ فإن النهاية تساوي $\frac{a_n}{b_m}$.
إذا كانت $m < n$ ، فإن النهاية إما $+\infty$ أو $-\infty$.

51) صحيحة أحيانًا، تكون صحيحة إذا كانت $r(x)$ معرّفة عند c.

احسب كل نهاية مما يأتي، إذا كانت موجودة: (39-37) انظر الهامش

37) $\lim\limits_{x\to\pi} \frac{\sin x}{x}$ 38) $\lim\limits_{x\to 0} (1 + x + 2^x - \cos x)$

39) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{\tan 2x}{x}$ 40) $\lim\limits_{x\to 1} \frac{1-\sqrt{x}}{x-1}$ -0.5

أوجد $\lim\limits_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h}$ لكل دالة مما يأتي:

41) $f(x) = 2x - 1$ 2 42) $f(x) = 7 - 9x$ -9

43) $f(x) = \sqrt{x}$ $\frac{1}{2\sqrt{x}}$ 44) $f(x) = \sqrt{x+1}$ $\frac{1}{2\sqrt{x+1}}$

45) $f(x) = x^2$ $2x$ 46) $f(x) = x^2 + 8x + 4$ $2x + 8$

47) **فيزياء:** يمتلك الجسم المتحرك طاقة تُسمى الطاقة الحركية؛ لأن بإمكانه بذل شغل عند تأثيره على جسم آخر. وتُعطى الطاقة الحركية لجسم متحرك بالعلاقة $k(t) = \frac{1}{2}m \cdot (v(t))^2$ ، حيث $v(t)$ سرعة الجسم عند الزمن t، و m كتلته بالكيلوجرام. إذا كانت سرعة جسم $v(t) = \frac{50}{1+t^2}$ لكل $t \geq 0$، وكتلته 1kg، فما الطاقة الحركية التي يمتلكها عندما يقترب الزمن من 100s؟ 0.0000125

مسائل مهارات التفكير العليا

48) **برهان:** استعمل خصائص النهايات؛ لإثبات أنه لأي كثيرة حدود

$$p(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_2x^2 + a_1x + a_0$$

ولأي عدد حقيقي c، فإن $\lim\limits_{x\to c} p(x) = p(c)$ انظر ملحق الإجابات.

49) **برهان:** استعمل الاستقراء الرياضي؛ لإثبات أنه إذا كان $\lim\limits_{x\to c} f(x) = L$ ، فإنه لأي عدد صحيح n

$\lim\limits_{x\to c} [f(x)]^n = [\lim\limits_{x\to c} f(x)]^n = L^n$. انظر ملحق الإجابات.

50) **تحدٍّ:** احسب النهاية الآتية إذا كانت $a_n \neq 0$, $b_m \neq 0$:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_2x^2 + a_1x + a_0}{b_mx^m + b_{m-1}x^{m-1} + \cdots + b_2x^2 + b_1x + b_0}$$

(إرشاد: افترض كلًا من الحالات $m < n, m = n, m > n$) انظر الهامش.

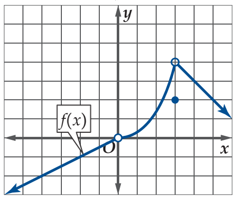
51) **تبرير:** إذا كانت $r(x)$ دالة نسبية، فهل العلاقة $\lim\limits_{x\to c} r(x) = r(c)$ صحيحة أحيانًا، أو صحيحة دائمًا، أو غير صحيحة أبدًا؟ برِّر إجابتك. انظر الهامش.

52) **اكتب:** استعمل جدولًا لتنظيم خصائص النهايات، وضمِّنه مثالًا على كل خاصية. انظر ملحق الإجابات.

53) **اكتب:** افترض أن $\frac{p(x)}{q(x)}$ دالة نسبية، وأن $\lim\limits_{x\to a} \frac{p(x)}{q(x)} = \frac{\infty}{\infty}$. تدَّعي ليلى أن قيمة هذه النهاية هي 1 . وضِّح سبب كونها مخطئة. وما الخطوات التي يمكن اتباعها لحساب هذه النهاية، إذا كانت موجودة؟ انظر ملحق الإجابات.

مراجعة تراكمية

استعمل التمثيل البياني للدالة $f(x)$ أدناه لإيجاد كلٍّ مما يأتي: (الدرس 1-8)



54) $\lim\limits_{x\to -2} f(x)$ ، $f(-2)$ -1 ، -1

55) $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$ ، $f(0)$ 0، غير معرفة

56) $\lim\limits_{x\to 3} f(x)$ ، $f(3)$ 4، 2

أوجد $(f+g)(x)$، $(f-g)(x)$، $(f.g)(x)$، $(\frac{f}{g})(x)$، لكل زوج من الدوال الآتية، ثم حدِّد مجال الدالة الناتجة: (الدرس 6-1) (58, 59) انظر ملحق الإجابات.

57) $f(x) = x^2 - 2x$ ، $g(x) = x + 9$

58) $f(x) = \frac{x}{x+1}$ ، $g(x) = x^2 - 1$

تدريب على اختبار

59) ما قيمة $\lim\limits_{h\to 0} \frac{2h^3 - h^2 + 5h}{h}$ ؟ C

A 3 C 5

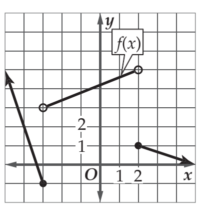
B 4 D غير موجودة

60) ما القيمة التي تقترب منها $g(x) = \frac{x+\pi}{\cos(x+\pi)}$ عندما تقترب x من 0؟ A

A $-\pi$ C $-\frac{1}{2}\pi$

B $-\frac{3}{4}$ D 0

61) باستعمال التمثيل البياني للدالة f أدناه، ما قيمة $\lim\limits_{x\to 2^+} f(x)$ ؟ B



A 0 B 1 C 5 D غير موجودة

تنويع التعليم

فوق

توسّع أوجد دالتين $f(x), g(x)$ تحققان العبارتين $\lim\limits_{x\to 7} f(x) = 0$ ، $\lim\limits_{x\to 7} [f(x) \cdot g(x)] \neq 0$.

إجابة ممكنة: $f(x) = 49 - x^2$, $g(x) = \frac{x+3}{x^2+x-56}$.

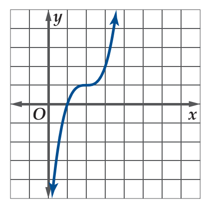
استكشاف
8-3
معمل الحاسبة البيانية:
ميل المنحنى
The Slope of a Curve

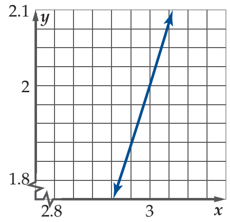
الهدف
استعمال الحاسبة البيانية TI — nspire ؛ لتقدير ميل منحنى.

يعتبر ميل المستقيم بوصفه معدلًا ثابتًا للتغير مفهومًا واضحًا، إلا أن الميل ليس واضحًا بالنسبة للمنحنيات بصورة عامة؛ إذ يتغير ميل المنحنى عند كل نقطة عليه.

وبشكل عام فإن التمثيلات البيانية لمعظم الدوال تبدو خطيةً عند تفحُّصها على فترةٍ قصيرة جدًّا.

وبالنظر إلى القواطع المتتالية، يكون من الممكن تطبيق فكرة الميل على المنحنيات.



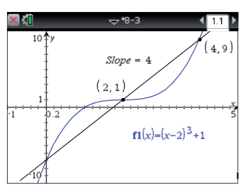


نشاط 1 خطوط القاطع

قدّر ميل منحنى الدالة $y = (x-2)^3 + 1$ عند النقطة $(3, 2)$.

خطوة 1 أدخل $y = (x-2)^3 + 1$ في **f1**، ثم احسب ميل القاطع المار بمنحنى: $y = (x-2)^3 + 1$، عندما $x = 2$, $x = 4$. كما يلي:

- مثّل الدالة بالضغط على on ، ثم اكتب الدالة واضغط enter.
- حدِّد نقطتين على منحنى الدالة بالضغط على مفتاح menu واختيار 8: الهندسة، ثم 1: النقاط والمستقيمات واختيار 2: نقطة على المستقيم ، ثم الضغط على المنحنى مرتين وستظهر نقطتان.
- ظلِّل إحداثيَّ x لكلا النقطتين واستبدلها بالإحداثيين $x = 2, x = 4$.
- ارسم القاطع المار بالنقطتين بالضغط على menu، واختيار 8: الهندسة ، ثم 1: النقاط والمستقيمات ثم اختيار 4: مستقيم واضغط على النقطتين ثم اضغط esc.
- أوجد ميل القاطع بالضغط على menu، واختيار 8: الهندسة ، ثم 3: الميل ، ثم اضغط على القاطع وسيظهر أن ميله يساوي 4.



[−1, 5] scl: 0.2 by [−10, 10] scl: 1

استكشاف
8 - 3 ملاحظات الدرس

1 التركيز

الهدف استعمال الحاسبة البيانية TI-nspire؛ لتقدير ميل منحنى .

إرشادات التدريس
ذكِّر الطلاب بكيفية إيجاد ميل المستقيم، ثم اسألهم عن إمكانية استعمال فكرة ميل المستقيم؛ لإيجاد ميل منحنى دالة.

المواد اللازمة
- الحاسبة البيانية TI-nspire

2 التدريس

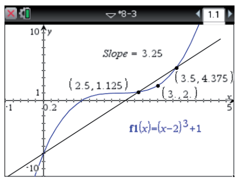
العمل في مجموعات متعاونة
وزّع الطلاب في مجموعات ثلاثية، أو رباعية متفاوتة القدرات، و اطلب إليهم إكمال النشاط وتحليل نتائج السؤالين 5, 6.

تدريب اطلب إلى الطلاب حَلّ التمارين 1-4.

استكشاف
8-3
معمل الحاسبة البيانية:
ميل المنحنى
The Slope of a Curve

خطوة 2 احسب ميل القاطع المار بمنحنى: $y = (x-2)^3 + 1$ عندما $x = 2.5$, $x = 3.5$.

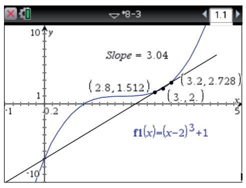
ظلِّل إحداثيَّي x لكلا النقطتين واستبدلهما بالإحداثيين $x = 2.5, x = 3.5$، فيكون ميل القاطع يساوي 3.25



$[-1, 5]$ scl: 0.2 by $[-10, 10]$ scl: 1

خطوة 3 احسب ميل القاطع المار بمنحنى: $y = (x-2)^3 + 1$ عندما $x = 2.8$, $x = 3.2$.

ظلِّل إحداثيَّي x لكلا النقطتين واستبدلهما بالإحداثيين $x = 2.8, x = 3.8$، فيكون ميل القاطع يساوي 3.04



$[-1, 5]$ scl: 0.2 by $[-10, 10]$ scl: 1

خطوة 4 أوجد ميل 3 قواطع أخرى في فترات متناقصة حول النقطة $(3, 2)$.

كلّما نقص طول الفترة حول النقطة $(3, 2)$، فإن ميل القاطع يقترب أكثر من العدد 3؛ لذا فإن ميل منحنى $y = (x-2)^3 + 1$ عند النقطة $(3, 2)$ هو 3 تقريبًا.

تمارين:

قدِّر ميل منحنى كل دالة مما يأتي عند النقطة المعطاة:

1) $y = (x+1)^2, (-4, 9)$ **-6**

2) $y = x^3 - 5, (2, 3)$ **12**

3) $y = 4x^4 - x^2, (0.5, 0)$ **1**

4) $y = \sqrt{x}, (1, 1)$ **0.5**

حلِّل النتائج **5, 6) انظر الهامش.**

5) **حلِّل:** صف ما يحدث لقاطع منحنى دالة عندما تقترب نقاط التقاطع من نقطة معطاة (a, b) على المنحنى.

6) **خمِّن:** صِف كيف يمكنك إيجاد القيمة الفعلية لميل منحنى عند نقطة معطاةٍ عليه.

3 التقويم

التقويم التكويني

استعمل السؤال 4؛ لتقويم مدى اتقان الطلاب لاستعمال الحاسبة البيانية TI-nspire؛ لتقدير ميل دالة عند نقطة معطاة.

من المحسوس إلى المجرَّد

اسأل:

- كيف يرتبط ميل مماس منحنى دالة عند نقطة بالدالة عند تلك النقطة؟ يكون مساويًا لمعدل تغيّر الدالة عند تلك النقطة.

إجابات:

5) إجابة ممكنة: كلما اقتربت نقاط تقاطع القاطع من نقطة (a, b)، على المنحنى، فإن القاطع يقترب أكثر من المماس للمنحنى عند النقطة (a, b).

6) إجابة ممكنة: إيجاد ميل المماس لمنحنى الدالة عند تلك النقطة.

148 الفصل 8 النهايات والاشتقاق

8-3 المماس والسرعة المتجهة
Tangent Line and Velocity

فيما سبق:
درست إيجاد متوسط مُعدّل التغيّر باستعمال القاطع. (مهارة سابقة)

والآن:
- أجدُ مُعدل التغيّر اللحظي لدالة غير خطية عند نقطة بحساب ميل مماس منحنى الدالة عند تلك النقطة.
- أجدُ السرعة المتوسطة المتجهة والسرعة المتجهة اللحظية.

المفردات:
المماس
tangent line
مُعدل التغيّر اللحظي
instantaneous rate of change
قسمة الفرق
difference quotient
السرعة المتجهة اللحظية
instantaneous velocity

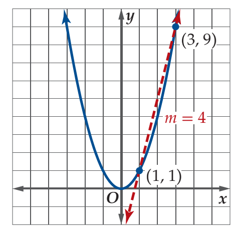
www.obeikaneducation.com

قراءة الرياضيات
اختصارات
يمكن اختصار الجملة ميل المماس لمنحنى الدالة بميل المنحنى.

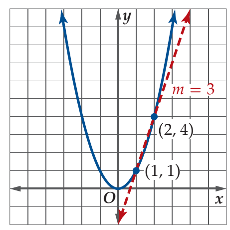
لماذا؟


عندما يقفز المظلي من ارتفاع 15000 ft، فإن سرعته في اتجاه الأرض تزداد مع مرور الزمن؛ بسبب تسارع الجاذبية الأرضية، وتستمر سرعته في الازدياد حتى يفتح مظلته عند ارتفاع 2500 ft، أو عندما يصل إلى السرعة المتجهة الحدية، وهي السرعة المتجهة التي ينعدم عندها تسارع المظلي، ويحدث هذا عندما تصبح محصلة القوى عليه صفرًا.

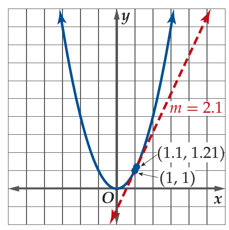
المماسات تعلمت في الدرس 4-1 أن مُعدّل تغيّر منحنى دالة غير خطية يتغير من نقطة إلى أخرى عليه، ويمكن حساب متوسط مُعدّل تغيّر الدالة غير الخطية على فترة باستعمال ميل القاطع. ففي التمثيلات البيانية أدناه للدالة $y = x^2$ والقاطع الذي يقطعه مارًّا بالنقطة $(1, 1)$، وبنقطة أخرى مثل $(3, 9)$، أو $(2, 4)$، أو $(1.1, 1.21)$، تجد أن القاطع يتخذ أوضاعًا مختلفة يتغير خلالها ميله.



الشكل (1)

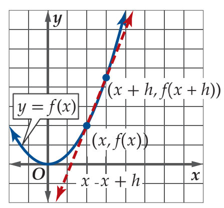


الشكل (2)



الشكل (3)

لاحظ أنه كلما قصُر طولُ الفترة بين نقطتي التقاطع، زادت دِقَّةُ تقريب ميل القاطع لميل المنحنى في هذه الفترة. إذا واصلنا تقصير الفترة إلى درجة تكون فيها نقطتا التقاطع متطابقتين كما في الشكل (3) أعلاه، فإننا نحصل على **مماس** للمنحنى، وهو مستقيم يتقاطع مع المنحنى، ولكنه لا يعبره عند نقطة التماس. ويمثّل ميل هذا المستقيم ميل المنحنى عند نقطة التماس.



ولتعريف ميل المماس لمنحنى عند النقطة $(x, f(x))$ فإنه يمكننا الرجوع إلى صيغة ميل القاطع المار بالنقطتين $(x, f(x))$ و $(x + h, f(x + h))$ كما في الشكل المجاور، ومنه يمكن كتابة ميل القاطع بالصيغة:

$$m = \frac{f(x+h) - f(x)}{(x+h) - x} = \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

وتُسمَّى هذه الصيغة **قسمة الفرق**.

فكلما اقتربت النقطة $(x+h, f(x+h))$ من النقطة $(x, f(x))$؛ أي كلما اقتربت قيمة h من الصفر، فإن القاطع يقترب من مماس المنحنى عند النقطة $(x, f(x))$؛ لذا يمكننا حساب ميل المماس وهو **مُعدل التغيّر اللحظي** للدالة عند تلك النقطة على أنه نهاية ميل القاطع عندما $h \to 0$.

مفهوم أساسي — مُعدل التغيّر اللحظي
مُعدل التغيّر اللحظي للدالة f عند النقطة $(x, f(x))$ هو ميل المماس m عند النقطة $(x, f(x))$، ويُعطى بالصيغة $m = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$، بشرط أن تكون النهاية موجودة.

8-3 ملاحظات الدرس

1 التركيز

الترابط الرأسي
ما قبل الدرس 8-3
إيجاد متوسط معدّل التغيّر باستعمال ميل القاطع.
الدرس 8-3
إيجاد معدّل التغيّر اللحظي لدالة عند نقطة بحساب ميل مماس منحنى الدالة عند تلك النقطة.
إيجاد السرعة المتوسطة المتجهة والسرعة المتجهة اللّحظية.
ما بعد الدرس 8-3
استعمال المشتقات؛ في إيجاد السرعة المتجهة اللّحظية.

2 التدريس

أسئلة التعزيز
اطلب إلى الطلاب قراءة فقرة "لماذا؟".
واسأل:
- ما شكل المنحنى الذي يُمثّل ارتفاع المظلي بوصفه دالة في الزمن قبل فتح المظلة؟
قطع مكافئ
- صِفْ معدل تغيُّر دالة الارتفاع قبل فتح المظلة وبعدها.
نلاحظ أن معدل تغير دالة الارتفاع يزداد قبل فتح المظلة، وذلك نتيجة تزايد سرعته حتى يفتح المظلة، وهذا يعني أن ميل المنحنى يزداد، أما بعد فتح المظلة، فإن معدل التغير سيقل بشكل كبير، وذلك نتيجة انعدام التسارع.

مصادر الدرس 8-3

المصدر	دون المتوسط	ضمن المتوسط	فوق المتوسط
دليل المعلم	• تنويع التعليم، ص (152)	• تنويع التعليم، ص (152)	• تنويع التعليم، ص (154)
كتاب التمارين	• كتاب التمارين، ص (20)	• كتاب التمارين، ص (20)	• كتاب التمارين، ص (20)
مصادر المعلم للأنشطة الصفية	• تدريبات إعادة التعليم، ص (14, 15) • تدريبات حل المسألة، ص (16)	• تدريبات حل المسألة، ص (16) • التدريبات الإثرائية، ص (17)	• تدريبات حل المسألة، ص (16) • التدريبات الإثرائية، ص (17)

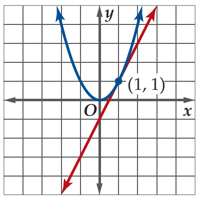
إرشادات للدراسة

مُعدل التغيّر اللحظي
عند حساب نهاية ميل المستقيم القاطع عندما $h \to 0$، فإن الحدود الباقية بعد إجراء الاختصارات، والتي تحتوي المتغير h ستصبح أصفارًا.

يمكنك استعمال صيغة معدل التغيّر اللحظي لإيجاد ميل مماس منحنى عند نقطة عليه.

مثال 1 ميل المماس لِلمنحنى عند نقطة عليه

أوجد ميل مماس منحنى الدالة $y = x^2$ الممثَّلة بالشكل أدناه عند النقطة $(1, 1)$.



$m = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(x+h) - f(x)}{h}$ صيغة مُعدل التغيّر اللحظي

$= \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(1+h) - f(1)}{h}$ $x = 1$

$= \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{(1+h)^2 - 1^2}{h}$ $f(1+h) = (1+h)^2,\ f(1) = 1^2$

$= \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{1 + 2h + h^2 - 1}{h}$ فك المقدار $(1+h)^2$

$= \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{h(2+h)}{h}$ بسّط

$= \lim\limits_{h \to 0} (2+h)$ اقسم على h

$= 2 + 0 = 2$ عوّض وبسّط

أي أن ميل منحنى $y = x^2$ عند النقطة $(1, 1)$ هو 2.

تحقق: من خلال التمثيل البياني للمنحنى ومماسه عند النقطة $(1, 1)$ نلاحظ أن ميل المستقيم الذي يمثّل المماس يساوي 2 .

تحقق من فهمك

أوجد ميل مماس كل منحنى مما يأتي عند النقطة المعطاة:

(1A $y = x^2, (3, 9)$ 6

(1B $y = x^2 + 4, (-2, 8)$ -4

كما يمكنك استعمال صيغة مُعدل التغيّر اللحظي لإيجاد معادلة ميل المنحنى عند أي نقطة $(x, f(x))$ عليه .

مثال 2 ميل المنحنى عند أي نقطة عليه

أوجد معادلة ميل منحنى $y = \frac{4}{x}$ عند أي نقطة عليه.

$m = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(x+h) - f(x)}{h}$ صيغة مُعدل التغيّر اللحظي

$m = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{\frac{4}{x+h} - \frac{4}{x}}{h}$ $f(x+h) = \frac{4}{x+h},\ f(x) = \frac{4}{x}$

$m = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{\frac{-4h}{x(x+h)}}{h}$ اطرح الكسرين في البسط، ثم التبسيط

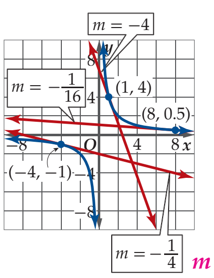
$m = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{-4h}{xh(x+h)}$ بسّط

$m = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{-4}{x^2 + xh}$ اقسم على h، ثم اضرب

$m = \dfrac{-4}{x^2 + x(0)}$ عوّض

$m = \dfrac{-4}{x^2}$ بسّط

أي أن ميل المماس للمنحنى عند أي نقطة $(x, f(x))$ عليه هو $m = -\frac{4}{x^2}$، والشكل المجاور يبين ميل المنحنى عند ثلاث نقط مختلفة.



تحقق من فهمك

أوجد معادلة ميل منحنى كل دالة مما يأتي عند أي نقطة عليه:

(2A $y = x^2 - 4x + 2$ $m = 2x - 4$

(2B $y = x^3$ $m = 3x^2$

المماسات

المثالان 2 ,1 يُبيّنان كيفية استعمال صيغة معدل التغيّر اللّحظي؛ لإيجاد ميل منحنى دالة عند نقطة عليه، أو لإيجاد معادلة تُمكننا من حساب ميل منحنى دالة عند أي نقطة عليه، وذلك من خلال إيجاد ميل مماس المنحنى عند تلك النقطة.

التقويم التكويني

استعمل تدريبات "تحقق من فهمك" بعد كل مثال؛ للتحقق من مدى فهم الطلاب للمفاهيم.

مثالان إضافيان

1 أوجد ميل مماس منحنى $y = x^2 + 1$ عند النقطة $(2, 5)$. 4

2 أوجد معادلة ميل منحنى $y = x^2 + 2x$ عند أي نقطة عليه. $m = 2x + 2$

المحتوى الرياضي

المماسات تُعطي صيغة معدل التغيّر اللّحظي عند نقطة ما، ميل مماس منحنى الدالة عند تلك النقطة. ويمكن استعمال هذه الصيغة لإيجاد معادلة لميل مماس المنحنى عند أي نقطة عليه.

إرشادات للمعلم الجديد

المماسات هندسيًّا، يقطع المماس الدائرة عند نقطة التماس فقط، ولا يقطعها مرة أخرى. والمماس هو مستقيم يلامس المنحنى، إلا أنه من الممكن أن يقطع المنحنى عند نقاطٍ أخرى.

السرعة المتجهة اللحظية: تعلمت في الدرس 4-1 طريقة حساب السرعة المتوسطة لجسم يقطع مسافة $f(t)$ في زمن مقداره t، من خلال قسمة المسافة المقطوعة على الزمن الذي استغرقه الجسم لقطع تلك المسافة. والسرعة المتجهة هي سرعة لها اتجاه. ويمكنك إيجاد السرعة المتوسطة المتجهة بالطريقة نفسها التي أوجدت بها السرعة المتوسطة مع توضيح اتجاهها باستعمال الإشارة في الناتج، فالإشارة الموجبة للناتج تعني اتجاه الأمام أو الأعلى، أما الإشارة السالبة فتعني اتجاه الخلف أو الأسفل.

مفهوم أساسي — السرعة المتوسطة المتجهة

إذا أُعطي موقع جسم متحرك بوصفه دالة في الزمن $f(t)$، فإن السرعة المتوسطة المتجهة للجسم v_{avg} في الفترة الزمنية من a إلى b تُعطى بالصيغة

$$v_{avg} = \frac{\text{التغيّر في المسافة}}{\text{التغيّر في الزمن}} = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

مثال 3 من واقع الحياة — السرعة المتوسطة المتجهة

جري: تمثِّل المعادلة $f(t) = -1.3t^2 + 12t$ المسافة بالأميال، والتي قطعها عدّاء بعد t ساعة باتجاه خط النهاية. ما سرعته المتوسطة المتجهة بين الساعتين الثانية والثالثة من زمن السباق؟

أوجد أولًا المسافة الكلية التي قطعها العدَّاء عند الزمن $a = 2$, $b = 3$.

$f(t) = -1.3t^2 + 12t$	المعادلة الأصلية	$f(t) = -1.3t^2 + 12t$
$f(3) = -1.3(3)^2 + 12(3)$	$a = 2$, $b = 3$	$f(2) = -1.3(2)^2 + 12(2)$
$f(3) = 24.3$	بسّط	$f(2) = 18.8$

استعمل الآن صيغة السرعة المتوسطة المتجهة.

$$v_{avg} = \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \quad \text{صيغة السرعة المتوسطة المتجهة}$$

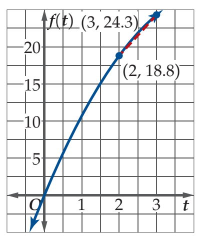
$$= \frac{24.3 - 18.8}{3 - 2} \quad f(b) = 24.3,\ f(a) = 18.8,\ b = 3,\ a = 2$$

$$= 5.5 \quad \text{بسّط}$$

أي أن السرعة المتوسطة المتجهة للعدّاء بين الساعتين الثانية والثالثة هي 5.5 mi/h إلى الأمام.

تحقق من فهمك

3) **بالون:** تمثِّل $h(t) = 5 + 65t - 16t^2$ الارتفاع بالأقدام بعد t ثانية لبالون يصعد رأسيًّا، ما السرعة المتوسطة المتجهة للبالون بين $t = 1$ s ، $t = 2$ s؟ **17 ft/s إلى الأعلى**



إذا أمعنَّا النظر في إجابة المثال 3، نجد أنه تم حساب السرعة المتوسطة المتجهة من خلال إيجاد ميل القاطع الذي يمر بالنقطتين (2, 18.8) ، (3, 24.3) كما في الشكل المجاور. والسرعة المتجهة التي تم حسابها هي السرعة المتوسطة المتجهة خلال فترة زمنية، وليست **السرعة المتجهة اللحظية**، والتي تساوي سرعة الجسم المتجهة عند لحظةٍ زمنيةٍ محددة.

ولإيجاد سرعة العدّاء المتجهة عند لحظةٍ زمنيةٍ محددة t، فإننا نجد مُعدّل التغيّر اللحظي لمنحنى $f(t)$ عند تلك اللحظة .

مفهوم أساسي — السرعة المتجهة اللحظية

إذا أُعطي موقع جسم متحرك بوصفه دالة في الزمن $f(t)$ ، فإن السرعة المتجهة اللحظية $v(t)$ لذلك الجسم عند الزمن t تعطى بالصيغة

$$v(t) = \lim_{h \to 0} \frac{f(t + h) - f(t)}{h}$$

بشرط أن تكون هذه النهاية موجودة.

إرشادات للدراسة

موقع الجسم
موقع الجسم عادة يعطى بالعلاقة $y = f(x)$ وذلك لتحديد الموقع في المستوى بدلالة الإحداثيين x, y، أما إذا أُعطي بوصفه دالة في الزمن t، فهذا يعني الإزاحة (محصلة المركبة x والمركبة y) لموقع الجسم عند اللحظة t، وإذا كانت الحركة على خط مستقيم فإن دالة الموقع تكون نفسها دالة المسافة مع أخذ الاتجاه بعين الاعتبار.

الربط مع الحياة

أحرز العدّاء السعودي محمد شاوين ذهبية سباق 1500 m في دورة ألعاب آسيا المقامة في الصين عام 2010م، وفي المتوسط فقد قطع مسافة كيلومتر خلال 2:24:33 دقيقة تقريبًا.

إرشادات للدراسة

سبق أن عرفت عند دراسة الإحداثيات القطبية أن الاتجاه له دلالة خاصة في المسافة المتجهة والزاوية المتجهة، كذلك فإن الاتجاه في السرعة المتجهة له دلالة خاصة.

السرعة المتجهة اللحظية

المثال 3 يُبيِّن كيفية حساب السرعة المتوسطة المتجهة لجسم متحرك.

إرشادات للمعلم الجديد

السرعة والسرعة المتجهة يُستعملُ مصطلح "السرعة المتجهة" للتعبير عن قيمة السرعة واتجاهها. ويستعمل مصطلح "السرعة" للتعبير عن قيمة السرعة فقط.

مثال إضافي

3 **فيزياء:** قُذفت كرة إلى أعلى في تجربةٍ فيزيائية، وتمثِّل الدالة: $h(t) = -16t^2 + 95t + 15$ ارتفاع الكرة بالأقدام بعد t ثانية، ما السرعة المتوسطة المتجهة للكرة في الفترة من $t = 1$ s إلى $t = 2$ s ؟ 47 ft/s

التعليم باستعمال التقنيات

مدونة: على الطلاب كتابة خطوات إيجاد ميل مماس منحنى دالة عند نقطة بالتفصيل على مدونة الصف. وعليهم توضيح كيفية استعمال صيغة معدل التغيّر اللَّحظي لإيجاد الميل، أو السرعة المتجهة اللَّحظية.

مـثال 4 السرعة المتجهة اللحظية عند لحظة زمنية معينة

سقطت كرة من قمة بناية ارتفاعها 2000 ft ، وتمثِّل الدالة $f(t) = 2000 - 16t^2$ ارتفاع الكرة عن سطح الأرض بالأقدام بعد t ثانية من سقوطها. أوجد السرعة المتجهة اللحظية $v(t)$ للكرة بعد 5 s.

لإيجاد السرعة المتجهة اللحظية، افترض أن $t = 5$ ، وطبق صيغة السرعة المتجهة اللحظية.

$$v(t) = \lim_{h \to 0} \frac{f(t+h) - f(t)}{h}$$ صيغة السرعة المتجهة اللحظية

$$v(5) = \lim_{h \to 0} \frac{2000 - 16(5+h)^2 - [2000 - 16(5)^2]}{h}$$ $f(5+h) = 2000 - 16(5+h)^2,$ $f(5) = 2000 - 16(5)^2$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{-160h - 16h^2}{h}$$ فك المقدار $(5+h)^2$ واضرب وبسّط

$$= \lim_{h \to 0} \frac{h(-160 - 16h)}{h}$$ حلّل

$$= \lim_{h \to 0} (-160 - 16h)$$ اقسم على h

$$= -160 - 16(0) = -160$$ عوّض وبسّط

أي أن سرعة الكرة بعد 5 s هي 160 ft/s، أما الإشارة السالبة فتعني أن الكرة تهبط لأسفل.

تحقق من فهمك

4) سقطت علبة مادة التنظيف من يد عامل في أثناء قيامه بتنظيف نافذة بناية على ارتفاع 1400 ft عن سطح الأرض، وتمثل الدالة $h(t) = 1400 - 16t^2$ ارتفاع العلبة بالأقدام بعد t ثانية من سقوطها. أوجد السرعة المتجهة اللحظية للعلبة $v(t)$ بعد 7 s. **−224 ft/s**

يمكن إيجاد معادلة للسرعة المتجهة اللَّحظية عند أي زمن.

مـثال 5 السرعة المتجهة اللحظية عند أي لحظة زمنية

تُعطى المسافة التي يقطعها جسم بالسنتمترات بعد t ثانية بالدالة $s(t) = 18t - 3t^3 - 1$. أوجد معادلة السرعة المتجهة اللحظية $v(t)$ للجسم عند أي زمن .

طبِّق صيغة السرعة المتجهة اللحظية.

$$v(t) = \lim_{h \to 0} \frac{s(t+h) - s(t)}{h}$$ صيغة السرعة المتجهة اللحظية

$$= \lim_{h \to 0} \frac{18(t+h) - 3(t+h)^3 - 1 - [18t - 3t^3 - 1]}{h}$$ $s(t+h) = 18(t+h) - 3(t+h)^3 - 1$ ، $s(t) = 18t - 3t^3 - 1$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{18h - 9t^2h - 9th^2 - 3h^3}{h}$$ فك المقدار $(t+h)^3$ واضرب وبسّط

$$= \lim_{h \to 0} \frac{h(18 - 9t^2 - 9th - 3h^2)}{h}$$ حلّل

$$= \lim_{h \to 0} (18 - 9t^2 - 9th - 3h^2)$$ اقسم على h

$$= 18 - 9t^2 - 9t(0) - 3(0)^2$$ عوّض وبسّط

$$= 18 - 9t^2$$ بسّط

أي أنَّ معادلة سرعة الجسم المتجهة اللحظية عند أي زمن هي $v(t) = 18 - 9t^2$.

تحقق من فهمك

5) تمثِّل الدالة $s(t) = 90t - 16t^2$ ارتفاع صاروخ بعد t ثانية من إطلاقه رأسيًّا من مستوى سطح البحر ، حيث الارتفاع بالأقدام. أوجد معادلة السرعة المتجهة اللحظية $v(t)$ للصاروخ عند أي زمن . $v(t) = 90 - 32t$

تنبيه!

التعويض تذكر أن توزّع الإشارة السالبة إلى يسار $f(t)$ على كل حد فيها.

السرعة المتجهة اللحظية

المثالان 4, 5 يُبيِّنان كيفية استعمال صيغة السرعةالمتجهة اللَّحظية لإيجاد السرعة المتجهة اللَّحظية لجسم متحرك عند لحظة زمنية محددة، أو التوصل إلى معادلة نجد من خلالها السرعة المتجهة اللحظية لجسم ما عند أي زمن.

مثالان إضافيان

4 **بنايات:** صعد سلمان إلى أعلى بناية ارتفاعها 30 ft ، ومن هناك رمى قطعة نقدية نحو الأرض. إذا كان ارتفاع القطعة النقدية عن سطح الأرض بالأقدام بعد t ثانية من رميها يُعطى بالعلاقة: $h(t) = 30 - 16t^2$، فأوجد السرعة المتجهة اللحظية للقطعة النقدية بعد 2 s. $v(t) = -64$ ft /s

5 **نحل:** يُعطى بُعد نحلةٍ بالبوصات عن خَليَّتها بعد t ثانية بالعلاقة: $p(t) = 12t - 6t^3 + 1$. أوجد معادلة السرعة المتجهة اللحظية للنَّحلة عند أي زمن. $v(t) = 12 - 18t^2$

إرشادات للمعلم الجديد

السرعة تأكد من فهم الطلاب للفرق بين السرعة المتوسطة المتجهة، والسرعة اللَّحظية المتجهة. فالسرعة المتوسطة المتجهة هي السرعة المتوسطة المتجهة بين نقطتين مختلفتين، أما السرعة اللَّحظية المتجهة، فهي السرعة المتجهة عند لحظة زمنية محددة.

تنويع التعليم

دون ضمن

المتعلمون البصريون / المكانيون: زوِّد مجموعات ثنائية من الطلاب بسلك وشريط لاصق، ثم اطلب إلى كل مجموعة تشكيل قطع مكافئ باستعمال السلك ولصقه على ورقة، ثم اطلب إليهم استعمال مسطرة لرسم مماس لهذا المنحنى. وتحديد ميل هذا المماس، ثم ناقشهم في العلاقة بين ميل المماس عند نقطة، ومعدل التغيّر اللَّحظي للدالة عند تلك النقطة.

تدرب وحل المسائل

أوجد ميل مماس منحنى كل دالة مما يأتي عند النقاط المعطاة: (مثال 1)

1) $y = x^2 - 5x$, $(1, -4)$, $(5, 0)$ $\quad -3, 5$

2) $y = 6 - 3x$, $(-2 , 12)$, $(6, -12)$ $\quad -3, -3$

3) $y = \frac{3}{x}$, $(1, 3)$, $(3, 1)$ $\quad -3, -\frac{1}{3}$

4) $y = x^3 + 8$, $(-2, 0)$, $(1, 9)$ $\quad 12, 3$

أوجد معادلة ميل منحنى كل دالة مما يأتي عند أي نقطة عليه: (مثال 2)

5) $y = 4 - 2x$ $\quad m = -2$

6) $y = -x^2 + 4x$ $\quad m = -2x + 4$

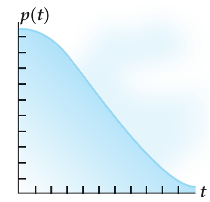
7) $y = 8 - x^2$ $\quad m = -2x$

8) $y = \frac{1}{x^2}$ $\quad m = -\frac{2}{x^3}$

9) $y = \frac{1}{\sqrt{x}}$ $\quad m = -\frac{\sqrt{x}}{2x^2}$

10) $y = -2x^3$ $\quad m = -6x^2$

11) **تزلج:** تمثِّل الدالة $p(t) = 0.06t^3 - 1.08t^2 + 51.84$ موقع متزلج على سفح جليدي بعد t ثانية من انطلاقه. (مثال 2)



a) أوجد معادلة ميل السفح الجليدي عند أي زمن. $m = 0.18t^2 - 2.16t$

b) أوجد الميل عندما $t = 2s, 5s, 7s$. $\quad -3.6, -6.3, -6.3$

تمثِّل $s(t)$ في كلٍّ مما يأتي بُعد جسم متحرك عن نقطة ثابتة بالأميال بعد t دقيقة. أوجد السرعة المتوسطة المتجهة للجسم بالميل لكل ساعة في الفترة الزمنية المعطاة. (تذكر بأن تحوِّل الدقائق إلى ساعات): (مثال 3)

12) $s(t) = 0.4t^2 - \frac{1}{20}t^3$, $3 \le t \le 5$ $\quad$ 45 mi/h تقريبًا

13) $s(t) = 1.08t - 30$, $4 \le t \le 8$ $\quad$ 65 mi/h تقريبًا

14) $s(t) = 0.01t^3 - 0.01t^2$, $4 \le t \le 7$ $\quad$ 49 mi/h تقريبًا

15) $s(t) = -0.5(t - 5)^2 + 3$, $4 \le t \le 4.5$ $\quad$ 45 mi/h

16) تمثِّل المعادلة $f(t) = -16t^2 + 65t + 12$ الارتفاع بالأقدام بعد t ثانية لكرة قذفت إلى أعلى، ما السرعة المتوسطة المتجهة للكرة بين $t = 15, 2t$. (مثال 3) $\quad \frac{-64t^2+130t+2625}{2t-15}$

تمثِّل $f(t)$ في كلٍّ مما يأتي بُعد جسم متحرك عن نقطة ثابتة بالأقدام بعد t ثانية. أوجد السرعة المتجهة اللَّحظية لهذا الجسم عند الزمن المُعطى: (مثال 4)

17) $f(t) = 100 - 16t^2, t = 3$ $\quad -96$ ft/s

18) $f(t) = 38t - 16t^2, t = 0.8$ $\quad 12.4$ ft/s

19) $f(t) = -16t^2 - 400t + 1700, t = 3.5$ $\quad -512$ ft/s

20) $f(t) = 1275 - 16t^2, t = 3.8$ $\quad -121.6$ ft/s

21) $f(t) = 73t - 16t^2, t = 4.1$ $\quad -58.2$ ft/s

22) $f(t) = -16t^2 + 1100, t = 1.8$ $\quad -57.6$ ft/s

تمثِّل $s(t)$ في كلٍّ مما يأتي المسافة التي يقطعها جسم متحرك. أوجد معادلة السرعة المتجهة اللحظية $v(t)$ للجسم عند أي زمن: (مثال 5)

23) $s(t) = 14t^2 - 7$ $\quad v(t) = 28t$

24) $s(t) = t - 3t^2$ $\quad v(t) = 1 - 6t$

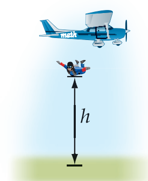
25) $s(t) = 5t + 8$ $\quad v(t) = 5$

26) $s(t) = 18 - t^2 + 4t$ $\quad v(t) = -2t + 4$

27) $s(t) = 12t^2 - 2t^3$ $\quad v(t) = 24t - 6t^2$

28) $s(t) = 3t^3 - 20 + 6t$ $\quad v(t) = 9t^2 + 6$

29) **قفز مظلي:** يمكنُ وصفُ ارتفاع مظلي بالأقدام عن سطح الأرض بعد t ثانية من قفزه بالدالة $h(t) = 15000 - 16t^2$. (الأمثلة 3, 4, 5)



a) أوجد السرعة المتوسطة المتجهة للمظلي بين الثانيتين الثانية والخامسة من القفز. -112 ft/s

b) كم بلغت السرعة المتجهة اللحظية للمظَلّي عند الثانية الثانية، وعند الثانية الخامسة؟ -64 ft/s, -160 ft/s

c) أوجد معادلة سرعة المظلي المتجهة اللحظية عند أي زمن. $v(t) = -32t$

30) **غوص:** يُبيِّن الجدول أدناه ارتفاع غواص d مقربًا لأقرب جزء من عشرة بالأمتار عن سطح الماء بعد t ثانية من قفزه من مكان مرتفع نحو الماء.

t	0.5	0.75	1.0	1.5	2.0	2.5	3.0
d	43.8	42.3	40.1	34	25.3	14.3	0.75

a) احسب السرعة المتوسطة المتجهة للغواص في الفترة الزمنية $0.5 \le t \le 1.0$ $\quad -7.4$ m/s

b) إذا كانت معادلة المنحنى لنقاط الجدول هي $d(t) = -4.91t^2 - 0.04t + 45.06$، فأوجد معادلة سرعة الغواص المتجهة اللحظية $v(t)$ بعد t ثانية، ثم استعمل $v(t)$ لحساب سرعته بعد 3s. $\quad v(t) = -9.82t - 0.04, -29.5$ m/s

3 التدريب

التقويم التكويني

استعمل الأسئلة 1-29 للتأكد من مدى فهم الطلاب.

ثم استعمل الجدول أسفل هذه الصفحة؛ لتعيين الواجبات المنزلية للطلاب بحسب مستوياتهم.

تنبيه !

خطأ شائع للأسئلة 17–22، ذكِّر الطلاب باستعمال صيغة معدل التغيّر اللَّحظي، و ليس حساب $h(t)$ لقيمة t المعطاة؛ لأنها لا تساوي السرعة المتجهة اللحظية.

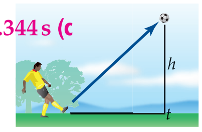
اكتشف الخطأ في السؤال 33، على الطلاب أن يتذكروا أن شكل منحنى دالة القيمة المطلقة شبيه بالحرف "V" ويَنتُجُ عنه ميلان مختلفان. وبذلك تكون دالة الميل الناتجة ليست متصلة.

تنويع الواجبات المنزلية

دون ضمن فوق

المستوى	الأسئلة
دون المتوسط	1–29، 33، 35–45
ضمن المتوسط	1–29 فردي، 30، 31، 33–45
فوق المتوسط	30–45

31) **كرة القدم:** ركل سلمان كرة بسرعة رأسية قدرها 75 ft/s.
افترض أن ارتفاع الكرة بالأقدام بعد t ثانية مُعطى بالدالة $f(t) = -16t^2 + 75t + 2.5$.



c) $t \approx 2.344$ s

a) أوجد معادلة سرعة الكرة المتجهة اللحظية $v(t)$. $-32t + 75$

b) ما سرعة الكرة المتجهة بعد 0.5 s من ركلها؟ 59 ft/s

c) إذا علمت أن السرعة المتجهة اللحظية للكرة لحظة وصولها إلى أقصى ارتفاع هي صفر، فمتى تصل إلى أقصى ارتفاع؟

d) ما أقصى ارتفاع تصل إليه الكرة؟ 90.39 ft تقريبًا

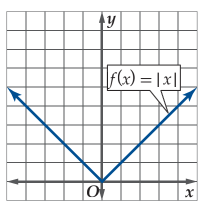
32) **فيزياء:** تعطى المسافة التي يقطعها جسم يتحرك على مسار مستقيم بالمعادلة $d(t) = 3t^3 + 8t + 4$، حيث t الزمن بالثواني، و d المسافة بالأمتار.

a) أوجد معادلة السرعة المتجهة اللحظية للجسم $v(t)$ عند أي زمن. $9t^2 + 8$

b) استعمل $v(t)$ لحساب سرعة الجسم المتجهة عندما $t = 2s, 4s, 6s$ 44 m, 152 m, 332 m

مسائل مهارات التفكير العليا

33) **اكتشف الخطأ:** سُئل علي وجميل أن يصفا معادلة ميل مماس منحنى الدالة الممثَّلة بيانيًّا في الشكل المجاور عند أي نقطة على منحناها. فقال علي: إن معادلة الميل ستكون متصلة؛ لأن الدالة الأصلية متصلة، في حين قال جميل: إن معادلة الميل لن تكون متصلة. أيهما كانت إجابته صحيحة؟ فسِّر إجابتك. انظر الهامش.



34) **تحدٍّ:** أوجد معادلة ميل مماس منحنى $f(x) = 2x^4 + 3x^3 - 2x$ عند أي نقطة عليه. $m = 8x^3 + 9x^2 - 2$

35) **تبرير:** هل العبارة الآتية صحيحة أو خاطئة "يقطع المماس منحنى الدالة عند نقطة التماس فقط"؟ برِّر إجابتك. انظر الهامش.

36) **تبرير:** صح أم خطأ: إذا أُعطيت المسافة التي يقطعها جسم بعد t ثانية بـ $s(t) = at + b$، فإن السرعة المتجهة اللحظية للجسم تساوي a دائمًا. برِّر إجابتك. انظر الهامش.

37) **اكتب** بيِّن لماذا تكون السرعة المتجهة اللحظية لجسم متحرك صفرًا عند نقطة القيمة العظمى والصغرى لدالة المسافة. انظر الهامش.

مراجعة تراكمية

احسب كل نهاية مما يأتي (إن وجدت): (الدرس 2-8)

38) $\lim_{x\to 4} (x^2 + 2x - 2)$ 22

39) $\lim_{x\to -1} (-x^4 + x^3 - 2x + 1)$ 1

40) $\lim_{x\to 0} (x + \sin x)$ 0

احسب كل نهاية مما يأتي (إن وجدت): (الدرس 2-8)

41) $\lim_{x\to\infty} \frac{3x^2 + x + 1}{2x^2 + 5}$ $\frac{3}{2}$

42) $\lim_{x\to\infty} \frac{x^3 - x^2 + 2}{x^4 + x^3 + 3x}$ 0

تدريب على اختبار

43) ما معادلة ميل منحنى $y = 2x^2$ عند أي نقطة عليه؟ A

A $m = 4x$ C $m = x$

B $m = 2x$ D $m = -4x$

44) سقطت كرة بشكل رأسي، فكانت المسافة التي تقطعها بالأقدام بعد t ثانية تعطى بالدالة $d(t) = 16t^2$. إذا كانت $\lim_{h\to 0} \frac{d(2+h) - d(2)}{h}$ تمثِّل السرعة المتجهة للكرة بعد 2s، فكم تساوي هذه السرعة؟ C

A 46 ft/s   C 64 ft/s

B 58 ft/s   D 72 ft/s

45) ما ميل مماس منحنى $y = x^3 + 7$ عند النقطة $(3, 34)$؟ C

A -9 C 27

B 9   D 34

4 التقويم

التسمية في الرياضيات اطلب إلى الطلاب توضيح العلاقة بين ميل مماس منحنى دالة عند نقطة، ومعدل تغيّر الدالة عند نفس النقطة. إجابة ممكنة: ميل مماس الدالة عند نقطة هو معدل تغيّر الدالة عند النقطة نفسها.

التقويم التكويني

تحقق من فهم الطلاب الدرس 3-8 بإعطائهم:

الاختبار القصير 2، ص (68)

إجابات:

33) جميل؛ إجابة ممكنة: ميل المنحنى هو -1 عندما $x < 0$، 1 عندما $x > 0$. لذا فإن التمثيل البياني للميل يتكون من مستقيمين أفقيين: $y = \begin{cases} -1, & x < 0 \\ 1, & x > 0 \end{cases}$؛ ولذلك يكون غير متصل.

35) خاطئة؛ إجابة ممكنة: إذا لم يكن المنحنى دائرة فمن الممكن أن يقطع المماس هذا المنحنى في نقاط أخرى غير نقطة التماس، على سبيل المثال، المنحنى الذي يمثِّل الدالة $y = \sin x$.

36) صح، إجابة ممكنة: بما أن $s(t)$ دالة خطية، فإن ميلها ثابت ويساوي a، وبذلك تكون السرعة المتجهة اللحظية للجسم تساوي a دائمًا.

37) إجابة ممكنة: إذا مثلت دالة المسافة التي يقطعها جسم بيانيًّا، فإن المماس عند نقطة القيمة العظمى (أو الصغرى) يكون أفقيًّا؛ أي موازيًا للمحور x، وميله يساوي صفرًا. ولذلك تكون السرعة المتجهة اللحظية تساوي صفرًا عند نقطة القيمة العظمى (أو الصغرى).

تنويع التعليم

فوق

توسّع: أوجد معادلة ميل منحنى الدالة $f(x) = 3x^5 - 2x^3 + x^2 - 6x + 5$ عند أي نقطة عليه، واعتمد على إجابتك وإجابة السؤال 35؛ لوصف أي علاقة بين الدالة الأصلية، والمعادلة التي تصف ميل الدالة عند أي نقطة. $m = 15x^4 - 6x^2 + 2x - 6$ في كل حد اضرب المعامل في القوة، ثم اطرح 1 من القوة، واحذف الحد الثابت.

قدِّر كل نهاية مما يأتي: (الدرس 8-1)

1) $\lim\limits_{x\to 0^+} \frac{\sin x}{x}$ **1**

2) $\lim\limits_{x\to 0^+} \frac{|x|}{x}$ **1**

3) $\lim\limits_{x\to 3^-} \frac{2x^2-18}{x-3}$ **12**

4) $\lim\limits_{x\to 0^-} \frac{\cos x - 1}{x}$ **0**

5) $\lim\limits_{x\to 3} \frac{2x}{x^2+1}$ **0.66**

6) $\lim\limits_{x\to 1} \sqrt{x^3+3}$ **2**

7) $\lim\limits_{x\to -4} \frac{\sqrt{x+20}}{x}$ **−1**

8) $\lim\limits_{x\to 3} \frac{|4-x|}{\sqrt{3x}}$ **0.33**

9) تزداد قيمة تحفة فنية فريدة سنويًّا بحيث تُعطى قيمتها بآلاف الريالات بعد t سنة بالعلاقة $v(t) = \frac{400t+2}{2t+15}$. (الدرس 8-1) **انظر الهامش.**

a) مثِّل الدالة $v(t)$ بيانيًّا في الفترة $0 \le t \le 10$.

b) استعمل التمثيل البياني؛ لتقدير قيمة التحفة الفنية عندما $t = 2, 5, 10$. **42000, 80000, 115000 ريال**

c) استعمل التمثيل البياني لتقدير $\lim\limits_{t\to\infty} v(t)$. **200**

d) وضِّح العلاقة بين النهاية وسعر التحفة الفنية. **إن قيمة التحفة لن تزيد عن 200000 ريال.**

احسب كل نهاية مما يأتي بالتعويض المباشر، إذا كان ممكنًا، وإلا فاذكر السبب. (الدرس 8-2)

10) $\lim\limits_{x\to 9} \frac{x^2+1}{\sqrt{x}-3}$ **ليس ممكنًا؛ عندما $x = 9$ فإن المقام يساوي صفرًا.**

11) $\lim\limits_{x\to -2} (2x^3 + x^2 - 8)$ **−20**

12) **حياة بريَّة:** يمكن تقدير عدد الغزلان بالمئات في محمية بالعلاقة $P(t) = \frac{10t^3 - 40t + 2}{2t^3 + 14t + 12}$، وذلك بعد t سنة، حيث $t \ge 3$. ما أكبر عدد للغزلان يمكن أن يوجد في هذه المحمية؟ (الدرس 8-2) **500 غزال**

احسب كل نهاية مما يأتي إذا كانت موجودة: (الدرس 8-2)

13) $\lim\limits_{x\to\infty} (15 - x^2 + 8x^3)$ **∞**

14) $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{2x^3 - x - 2}{4x^3 + 5x^2}$ **$\frac{1}{2}$**

15) $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{2x^2+5x-1}{2x^4-14x^2+2}$ **0**

16) $\lim\limits_{x\to\infty} (10x^3 - 4 + x^2 - 7x^4)$ **−∞**

17) **اختيار من متعدد:** قدِّر $\lim\limits_{x\to 0} \frac{2x^2+5}{10-(2.7)^{\frac{16}{x}}}$ (الدرس 8-1) **A**

A غير موجودة

B $\frac{1}{2}$

C ∞

D −∞

أوجد ميل مماس منحنى كل دالة مما يأتي عند النقاط المعطاة: (الدرس 8-3)

18) $y = x^2 - 3x$, $(2, -2)$, $(-1, 4)$ **1, −5**

19) $y = 2 - 5x$, $(-2, 12)$, $(3, -13)$ **−5, −5**

20) $y = x^3 - 4x^2$, $(1, -3)$, $(3, -9)$ **−5, 3**

21) **ألعاب نارية:** انطلقت قذيفة ألعاب نارية رأسيًّا إلى أعلى بسرعة 90 ft/s، وتمثِّل الدالة $h(t) = -16t^2 + 90t + 3.2$ الارتفاع الذي تبلغه القذيفة بعد t ثانية من إطلاقها. (الدرس 8-3)

a) أوجد معادلة السرعة المتجهة اللحظية $v(t)$ للقذيفة. **$v(t) = -32t + 90$**

b) ما السرعة المتجهة للقذيفة بعد 0.5 s من الإطلاق؟ **74 ft/s**

c) ما أقصى ارتفاع تبلغه القذيفة؟ **129.76ft تقريبًا**

22) **اختيار من متعدد:** أيٌّ مما يأتي يمثِّل معادلة ميل منحنى $y = 7x^2 - 2$ عند أي نقطة عليه؟ (الدرس 8-3) **B**

A $m = 7x$

B $m = 14x$

C $m = 7x - 2$

D $m = 14x - 2$

تُعطى المسافة التي يقطعها جسم متحرك بالأميال بعد t دقيقة بالدالة $s(t)$. أوجد السرعة المتوسطة المتجهة للجسم في كل مما يأتي بالميل لكل ساعة على الفترة الزمنية المعطاة. تذكَّر أن تحول الدقائق إلى ساعات. (الدرس 8-3)

23) $s(t) = 12 + 0.7t$, $2 \le t \le 5$ **42 mi/h**

24) $s(t) = 2.05t - 11$, $1 \le t \le 7$ **123 mi/h**

25) $s(t) = 0.9t - 25$, $3 \le t \le 6$ **54 mi/h تقريبًا**

26) $s(t) = 0.5t^2 - 4t$, $4 \le t \le 8$ **120 mi/h تقريبًا**

أوجد معادلة السرعة المتجهة اللحظية $v(t)$ لجسم يُعطى موقعه عند أي زمن بالعلاقة $h(t)$ في كل مما يأتي: (الدرس 8-3)

27) $h(t) = 4t^2 - 9t$ **$v(t) = 8t - 9$**

28) $h(t) = 2t - 13t^2$ **$v(t) = 2 - 26t$**

29) $h(t) = 2t - 5t^2$ **$v(t) = 2 - 10t$**

30) $h(t) = 6t^2 - t^3$ **$v(t) = 12t - 3t^2$**

الفصل 8 اختبار منتصف الفصل

الدروس من 8-1 إلى 8-3

التقويم التكويني

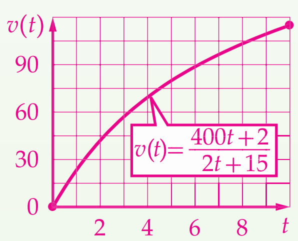
استعمل اختبار منتصف الفصل؛ للتحقق من مدى فهم الطلاب. للأسئلة التي لم يجب عنها الطلاب بشكل صحيح، اطلب إليهم مراجعة الدرس المشار إليه بعد كل سؤال.

التقويم الختامي

اختبار منتصف الفصل، ص (70)

إجابات:

(9a



مخطط المعالجة

المستوى 1	ضمن المتوسط	المستوى 2	دون المتوسط
إذا	أخطأ بعض الطلاب في 25% تقريبًا من الأسئلة	إذا	أخطأ بعض الطلاب في 50% تقريبًا من الأسئلة
فاختر	أحد المصدرين الآتيين:	فاختر	المصدر الآتي:
كتاب الطالب	الدروس 8-1, 8-2, 8-3	زيارة الموقع	www.obeikaneducation.com
دليل المعلم	مشروع الفصل، ص (126)		

8-4 ملاحظات الدرس

1 التركيز

الترابط الرأسي

ما قبل الدرس 4-8

حساب ميل المماسات؛ لإيجاد معدل التغير اللّحظي.

الدرس 4-8

إيجاد ميل منحنى دالة غير خطية باستعمال المشتقات.

استعمال قواعد الاشتقاق في إيجاد المشتقات.

ما بعد الدرس 4-8

استعمال قواعد الدالة الأصلية؛ في حساب تكاملات بعض الدوال.

2 التدريس

أسئلة التعزيز

اطلب إلى الطلاب قراءة فقرة "لماذا؟"، وذكِّرهم بمعادلة الحركة بتسارع ثابت، والتي درسوها في الفيزياء: $h - h_0 = v_0t - 16t^2$، حيث h_0 هو الارتفاع الذي قُذف منه الجسم، و v_0 السرعة الابتدائية، و t الزمن.

واسأل:

- ما الدالة التي تصف ارتفاع الكرة بعد t ثانية؟
  $h(t) = -16t^2 + 65t + 3$
- استعمل الحاسبة البيانية؛ لإيجاد أعلى ارتفاع تصله الكرة. 69 ft تقريبًا
- هل يمكن أن تبلغ الكرة ارتفاع 68 ft؟ علِّل.
  نعم، حيث ستصل الكرة إلى ارتفاع 69 ft تقريبًا.

قواعد أساسية

مثال 1 يُبيّن كيفية إيجاد مشتقة دالة باستعمال النهايات، وحساب قِيَمِها عند نقاط محددة؛ وذلك من خلال التعويض المباشر.

8-4 المشتقات

Derivatives

فيما سبق:

درستُ حساب ميل المماسات لإيجاد معدَل التغيُّر اللحظي. (الدرس 3–8)

والآن:

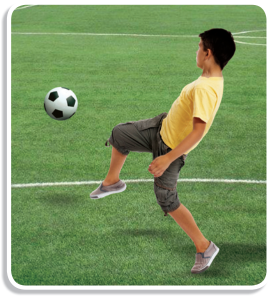
- أجدُ ميل منحنى دالة غير خطية باستعمال المشتقات.
- أستعملُ قواعد الاشتقاق لإيجاد المشتقات.

المفردات:

المشتقة
derivative
الاشتقاق
differentiation
المعادلة التفاضلية
differential equation
المؤثر التفاضلي
differential operator

www.obeikaneducation.com

لماذا؟



ركل أحمد كرةً رأسيًا إلى أعلى من ارتفاع 3 ft، فانطلقت بسرعة 65 ft/s. يمكنك استعمال معادلات الحركة بتسارع ثابت، التي درستها في الفيزياء لكتابة دالة تصف ارتفاع الكرة بعد t ثانية، ومن ثم تحديد ما إذا كانت الكرة ستبلغ ارتفاع 68 ft أم لا.

قواعد أساسية للاشتقاق: استعملت النهايات في الدرس 3-8 لتحديد ميل مماس منحنى الدالة $f(x)$ عند أي نقطة عليه ، وتُسمى هذه النهاية **مشتقة الدالة** ويرمز لها بالرمز $f'(x)$، وتُعطى بالصيغة:

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

بشرط وجود هذه النهاية، وتُسمَّى عملية إيجاد المشتقة **الاشتقاق**، وتُسمَّى النتيجة **معادلة تفاضلية**.

مثال 1 مشتقة دالة عند أي نقطة

أوجد مشتقة $f(x) = 4x^2 - 5x + 8$ باستعمال النهايات، ثم احسب قيمة المشتقة عندما $x = 1 , 5$.

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$ صيغة المشتقة

$$= \lim_{h \to 0} \frac{4(x+h)^2 - 5(x+h) + 8 - (4x^2 - 5x + 8)}{h}$$ $f(x+h) = 4(x+h)^2 - 5(x+h) + 8$, $f(x) = 4x^2 - 5x + 8$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{8xh + 4h^2 - 5h}{h}$$ بسّط

$$= \lim_{h \to 0} \frac{h(8x + 4h - 5)}{h}$$ حلّل

$$= \lim_{h \to 0} (8x + 4h - 5)$$ اقسم على h

$$= [8x + 4(0) - 5] = 8x - 5$$ عوّض

أي أن مشتقة $f(x)$ هي $f'(x) = 8x - 5$. احسب $f'(x)$ عندما $x = 1 , 5$.

$f'(x) = 8x - 5$	المعادلة الأصلية	$f'(x) = 8x - 5$
$f'(5) = 8(5) - 5$	$x = 1 , x = 5$	$f'(1) = 8(1) - 5$
$f'(5) = 35$	بسّط	$f'(1) = 3$

تحقق من فهمك

أوجد مشتقة $f(x)$ باستعمال النهايات، ثم احسب قيمة المشتقة عند قيم x المعطاة:

1A) $f(x) = 6x^2 + 7, x = 2 , 5$

1B) $f(x) = -5x^2 + 2x - 12, x = 1 , 4$

$f'(x) = -10x + 2,$
$f'(1) = -8, f'(4) = -38$

يُرمز لمشتقة $y = f(x)$ أيضًا بالرموز $\frac{dy}{dx}$ ، $\frac{df}{dx}$ ، y' ، وإذا سبق الدالة **المؤثر التفاضلي** $\frac{d}{dx}$ ، فإن ذلك يعني إيجاد مشتقة الدالة.

قراءة الرياضيات

المشتقة

يُقرأ الرمز $f'(x)$ مشتقة f بالنسبة للمتغير x، أو f prime of x.

تاريخ الرياضيات

شرف الدين الطوسي

العالم المسلم شرف الدين الطوسي (المتوفى عام 610هـ) من خلال دراسته المعادلات التي درجتها ≤3 استعمل في حل هذه المعادلات، القيمة العظمى للعبارات الجبرية، وأخذ" المشتق الأول "لهذه العبارات من دون أن يستعمل اسمه (المشتق الأول)، وبرهن على أن جذر المعادلة التي يحصل عليها إذا ما عُوِّض به في العبارة الجبرية، أعطى القيمة العظمى للعبارة.

$f'(x) = 12x,$ (1A
$f'(2) = 24, f'(5) = 60$

مصادر الدرس 4-8

المصدر	دون المتوسط	ضمن المتوسط	فوق المتوسط
دليل المعلم	• تنويع التعليم، ص (161)	• تنويع التعليم، ص (161)	• تنويع التعليم، ص (161 , 163)
كتاب التمارين	• كتاب التمارين، ص (21)	• كتاب التمارين، ص (21)	• كتاب التمارين، ص (21)
مصادر المعلم للأنشطة الصفية	• تدريبات إعادة التعليم، ص (18, 19) • تدريبات حل المسألة، ص (20)	• تدريبات حل المسألة، ص (20) • التدريبات الإثرائية، ص (21)	• تدريبات حل المسألة، ص (20) • التدريبات الإثرائية، ص (21)

حتى هذه اللحظة استعملت النهاية؛ لإيجاد كلٍّ من المشتقة وميل المماس والسرعة المتجهة اللحظية. وتُعدُّ قاعدة مشتقة القوة من أكثر القواعد فعالية لإيجاد المشتقات من دون اللجوء إلى استعمال النهايات، مما يجعل عملية إيجاد المشتقات أكثر سهولةً ودقة.

مفهوم أساسي — قاعدة مشتقة القوة

التعبير اللفظي: قوة x في المشتقة أقل بواحد من قوة x في الدالة الأصلية، ومعامل x في المشتقة يساوي قوة x في الدالة الأصلية.

الرموز: إذا كان $f(x) = x^n$ ، حيث n عدد حقيقي، فإن: $f'(x) = nx^{n-1}$.

مثال 2 — قاعدة مشتقة القوة

أوجد مشتقة كل دالة مما يأتي:

a) $f(x) = x^9$

$f(x) = x^9$ الدالة المعطاة

$f'(x) = 9x^{9-1}$ قاعدة مشتقة القوة

$= 9x^8$ بسّط

b) $g(x) = \sqrt[5]{x^7}$

$g(x) = \sqrt[5]{x^7}$ الدالة المعطاة

$g(x) = x^{\frac{7}{5}}$ أعد كتابة الدالة كقوّة نسبية

$g'(x) = \frac{7}{5}x^{\frac{7}{5}-1}$ قاعدة مشتقة القوة

$= \frac{7}{5}x^{\frac{2}{5}} = \frac{7}{5}\sqrt[5]{x^2}$ بسّط

c) $h(x) = \frac{1}{x^8}$

$h(x) = \frac{1}{x^8}$ الدالة المعطاة

$h(x) = x^{-8}$ أعد كتابة الدالة كقوّة سالبة

$h'(x) = -8x^{-8-1}$ قاعدة مشتقة القوة

$= -8x^{-9} = -\frac{8}{x^9}$ بسّط

تنبيه!

مشتقات القوى السالبة

مشتقة $f(x) = x^{-4}$ ليست $f'(x) = -4x^{-3}$. تذكر بأننا يجب أن نطرح واحدًا من الأس ؛ لنحصل على: $-4-1=-4+(-1)=-5$ ؛ لذا فإن $f'(x) = -4x^{-5}$.

تحقق من فهمك

أوجد مشتقة كل دالة مما يأتي:

2A) $j(x) = x^4$ $\quad j'(x) = 4x^3$

2B) $k(x) = \sqrt{x^3}$ $\quad k'(x) = \frac{3}{2}x^{\frac{1}{2}} = \frac{3}{2}\sqrt{x}$

2C) $m(x) = \frac{1}{x^5}$ $\quad m'(x) = -\frac{5}{x^6}$

هناك العديد من قواعد الاشتقاق الأخرى المهمة التي تفيد في إيجاد مشتقات الدوال التي تحوي أكثر من حدّ.

مفهوم أساسي — قواعد أخرى للاشتقاق

مشتقة الثابت: مشتقة الدالة الثابتة تساوي صفرًا؛ أي أنه إذا كانت $f(x) = c$ ، حيث c عدد ثابت ، فإن $f'(x) = 0$.

مشتقة مضاعفات القوّة: إذا كانت $f(x) = cx^n$ ، حيث c ثابت، و n عدد حقيقي، فإن: $f'(x) = cnx^{n-1}$.

مشتقة المجموع أو الفرق: إذا كانت: $f(x) = g(x) \pm h(x)$ ، فإن: $f'(x) = g'(x) \pm h'(x)$.

قواعد أساسية

الأمثلة 4-2 تُبيّن كيفية استعمال قواعد الاشتقاق؛ في إيجاد مشتقات دوال مختلفة.

التقويم التكويني

استعمل تدريبات "تحقق من فهمك" بعد كل مثالٍ؛ للتحقق من مدى فهم الطلاب المفاهيم.

مثالان إضافيان

1 أوجد مشتقة: $f(x) = 2x^3 + 2x^2 - 7x + 12$ باستعمال النهايات. ثم احسب قيمة المشتقة عندما $x = 1, 4$.

$f'(x) = 6x^2 + 4x - 7, f'(1) = 3, f'(4) = 105$

2 أوجد مشتقة كل دالة مما يأتي :

a) $f(x) = x^5$ $\quad f'(x) = 5x^4$

b) $g(x) = \sqrt[4]{x^6}$ $\quad g'(x) = \frac{3}{2}\sqrt{x}$

c) $h(x) = \frac{1}{x^{10}}$ $\quad h'(x) = -\frac{10}{x^{11}}$

مثال 3 قواعد الاشتقاق

أوجد مشتقة كل دالة مما يأتي:

a) $f(x) = 5x^3 + 4$

$f(x) = 5x^3 + 4$	الدالة المعطاة
$f'(x) = 5 \cdot 3x^{3-1} + 0$	قواعد مشتقة الثابت، ومضاعفات القوى، والمجموع
$= 15x^2$	بسّط

b) $g(x) = x^5(2x^3 + 4)$

$g(x) = x^5(2x^3 + 4)$	الدالة المعطاة
$g(x) = 2x^8 + 4x^5$	خاصية التوزيع
$g'(x) = 2 \cdot 8x^{8-1} + 4 \cdot 5x^{5-1}$	قاعدتا مشتقتي مضاعفات القوى، والمجموع
$= 16x^7 + 20x^4$	بسّط

c) $h(x) = \dfrac{5x^3 - 12x + 6\sqrt{x^5}}{x}$

$h(x) = \dfrac{5x^3 - 12x + 6\sqrt{x^5}}{x}$	الدالة المعطاة
$h(x) = \dfrac{5x^3}{x} - \dfrac{12x}{x} + \dfrac{6\sqrt{x^5}}{x}$	اقسم كل حدّ في البسط على x
$h(x) = 5x^2 - 12 + 6x^{\frac{3}{2}}$	$x^{\frac{5}{2}} \cdot x^{-1} = x^{\frac{3}{2}}$
$h'(x) = 5 \cdot 2x^{2-1} - 0 + 6 \cdot \frac{3}{2}x^{\frac{3}{2}-1}$	قواعد مشتقة الثابت، ومضاعفات القوى، والمجموع والفرق
$= 10x + 9x^{\frac{1}{2}} = 10x + 9\sqrt{x}$	بسّط

تحقق من فهمك

أوجد مشتقة كل دالة مما يأتي:

3A) $f(x) = 2x^5 - x^3 - 102$ 3B) $g(x) = 3x^4(x + 2)$ 3C) $h(x) = \dfrac{4x^4 - 3x^2 + 5x}{x}$

إرشادات للدراسة

المشتقات

إذا كانت $f(x) = x$، فإن $f'(x) = 1$، وإذا كانت $f(x) = cx$، فإن $f'(x) = c$.

3A) $f'(x) = 10x^4 - 3x^2$

3B) $g'(x) = 15x^4 + 24x^3$

3C) $h'(x) = 12x^2 - 3$

الآن، وبعد أن درست القواعد الأساسية للاشتقاق، يمكنك حل المسائل التي تتطلب حساب ميل مماس المنحنى، أو إيجاد السرعة المتجهة اللحظية بخطوات أقل، ففي مثال 5 من الدرس 3–8، أوجدنا معادلة السرعة المتجهة اللحظية لجسم متحركٍ، وستلاحظ الآن سهولة حل المسألة نفسها بتطبيق قواعد الاشتقاق.

تنبيه!

لتسهيل يمكنك إيجاد كلٍّ من ميل المماس لمنحنى الدالة، والسرعة المتجهة اللحظية، ومشتقة الدالة، باستخدام القواعد ما لم يُطلب منك استخدام النهايات لإيجاد أيٍّ منها.

مثال 4 السرعة المتجهة اللحظية

تُعطى المسافة التي يقطعها جسم بالسنتمترات بعد t ثانية بالدالة: $s(t) = 18t - 3t^3 - 1$، أوجد معادلة السرعة المتجهة اللحظية $v(t)$ للجسم.

السرعة المتجهة اللحظية للجسم هي $s'(t)$.

$s(t) = 18t - 3t^3 - 1$	الدالة المعطاة
$s'(t) = 18 \cdot 1t^{1-1} - 3 \cdot 3t^{3-1} - 0$	قواعد مشتقة الثابت، ومضاعفات القوى، والفرق
$= 18 - 9t^2$	بسّط

أي أن سرعة الجسم المتجهة اللحظية هي: $v(t) = 18 - 9t^2$، لاحظ أن هذه الإجابة مكافئة لتلك التي حصلت عليها في المثال 5 من الدرس 3-8.

تحقق من فهمك

4) الدالة: $h(t) = 55t - 16t^2$ تمثّل الارتفاع بالأقدام بعد t ثانية لكرة قُذِفت رأسيًّا إلى أعلى. أوجد معادلة السرعة المتجهة اللحظية للكرة عند أي زمن. $v(t) = 55 - 32t$

مثالان إضافيان

3) أوجد مشتقة كل دالة مما يأتي:

a) $f(x) = 6x^2 - 3$ $f'(x) = 12x$

b) $g(x) = 2x^3(5x - 3)$ $g'(x) = 40x^3 - 18x^2$

c) $h(x) = \dfrac{3x^3 - 2x^2 + x}{x}$ $h'(x) = 6x - 2$

4) **حركة:** تعطى المسافة التي يقطعها جسم بالملمترات بعد t ثانية بالدالة: $s(t) = 6t - 2t^3 + 4$، أوجد معادلة السرعة المتجهة اللّحظية $v(t)$ للجسم. $v(t) = 6 - 6t^2$

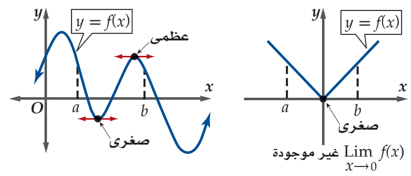
التعليم باستعمال التقنيات

الكاميرا التوثيقية: اختر مجموعة من الطلاب ليقوموا بتوضيح كيفية استعمال قواعد الاشتقاق لبقية طلاب الصف باستعمال الكاميرا التوثيقية.

النقطة التي تكون عندها مشتقة الدالة صفرًا أو غير موجودة تُسمَّى نقطةً حرجةً للدالة، والنقطة الحرجة قد تشير إلى وجود نقطة قيمة عظمى أو صغرى للدالة ، وتحدثُ عندما يكون ميل مماس منحنى الدالة صفرًا أو غير موجود.

مفهوم أساسي **نظرية القيمة القصوى**

إذا كانت $f(x)$ متصلة على الفترة المغلقة $[a, b]$ ، فإن لها قيمة عظمى وصغرى على الفترة $[a, b]$ ، وذلك إما عند أحد طرفَي الفترة أو عند إحدى النقاط الحرجة.



لتعيين نقاط القيم العظمى والصغرى للدالة على فترة مغلقة، لا بد من حساب قيم الدالة عند أطراف الفترة، وعند النقاط الحرجة في تلك الفترة.

الربط مع الحياة

ازدادت سرعة الأفعوانيات حديثًا لتصل إلى 120 mi/h ، وكذلك ازدادت ارتفاعاتها لتبلغ 450 ft.

مثال 5 من واقع الحياة القيمتان العظمى والصغرى لدالة

أفعوانية : الدالة: $h(t) = -\frac{1}{3}t^3 + 4t^2 + \frac{11}{3}$ تمثِّل ارتفاع إبراهيم بالأقدام في أثناء ركوبه أفعوانية، حيث t الزمن بالثواني في الفترة الزمنية $[1, 12]$ ، أوجد أقصى وأدنى ارتفاع يبلغه إبراهيم.

أوجد مشتقة $h(t)$.

$$h(t) = -\frac{1}{3}t^3 + 4t^2 + \frac{11}{3} \quad \text{الدالة المعطاة}$$

$$h'(t) = -\frac{1}{3} \cdot 3t^{3-1} + 4 \cdot 2t^{2-1} + 0 \quad \text{قواعد اشتقاق الثابت، ومضاعفات القوى، والمجموع، والفرق}$$

$$= -t^2 + 8t \quad \text{بسِّط}$$

أوجد النقاط الحرجة بحل المعادلة $h'(t) = 0$.

$$h'(t) = 0 \quad \text{اكتب المعادلة}$$

$$-t^2 + 8t = 0 \quad h'(t) = -t^2 + 8t$$

$$-t(t-8) = 0 \quad \text{حلِّل}$$

إذن: $t = 8$ أو $t = 0$ ، وحيث إن $t = 0$ لا تقع في الفترة $[1, 12]$ ، فإن للدالة نقطة حرجة واحدة عند $t = 8$ ؛ لذا نحسب قيم $h(t)$ عندما $t = 1, 8, 12$.

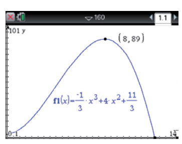
$$h(1) = -\frac{1}{3}(1)^3 + 4(1)^2 + \frac{11}{3} \approx 7.33$$

$$h(8) = -\frac{1}{3}(8)^3 + 4(8)^2 + \frac{11}{3} = 89 \quad \text{قيمة عظمى}$$

$$h(12) = -\frac{1}{3}(12)^3 + 4(12)^2 + \frac{11}{3} \approx 3.67 \quad \text{قيمة صغرى}$$

أي أن أقصى ارتفاع يبلغه إبراهيم هو 89 ft، وذلك بعد 8 s، في حين أن أدنى ارتفاع هو 3.67 ft تقريبًا بعد 12 s.

التحقق من الحل التمثيل البياني للدالة: $h(t) = -\frac{1}{3}t^3 + 4t^2 + \frac{11}{3}$ المجاور على الفترة $[1, 12]$ باستعمال الآلة البيانية يعزِّز هذه النتيجة ، حيث يبيِّن التمثيل البياني أن أعلى ارتفاع يساوي 89 ft ، ويكون عندما $t = 8\,s$. وأدنى ارتفاع يساوي 3.67، ويكون عندما $t = 12\,s$ ✓



إرشادات للدراسة

دالة كثيرة الحدود
مجال تعريف دالة كثيرة الحدود هو مجموعة الأعداد الحقيقية لذلك إذا كانت المشتقة دالة كثيرة حدود، فإن النقاط الحرجة توجد فقط عندما تكون المشتقة صفرًا.
ولذلك عند إيجاد القيم العظمى والصغرى لدالة كثيرة حدود $f(x)$ على فترة $[a, b]$، نجد قيم الدالة عند طرفَي الفترة وعند أي قيمة لـ x تكون عندها $f'(x)=0$.

تحقق من فهمك

5) **رياضة القفز:** الدالة: $h(t) = 20t^2 - 160t + 330$ تمثِّل ارتفاع سعد بالأقدام في أثناء مشاركته في قفزة البنجي (القفز من أماكن مرتفعة، بحيث تكون القدمان موثقتين بحبل مطاطيٍّ)، حيث t الزمن بالثواني في الفترة $[0, 6]$. أوجد أقصى وأدنى ارتفاع يبلغه سعد في هذه الفترة الزمنية.

5) أقصى ارتفاع وقدره 330 ft ، وذلك عند 0 s، وأدنى ارتفاع 10 ft عند 4 s.

قواعد أساسية

المثال 5 يُبيِّن كيفية استعمال النقاط الحرجة وأطراف الفترات؛ في إيجاد القيم العظمى والصغرى لدالة معرفة على فترة مغلقة.

مثال إضافي

5 **الألعاب البهلوانية :** الدالة $h(t) = 4 + 5t - 2t^2$ تُمثِّل ارتفاع لاعبٍ بهلواني بالأقدام بعد قفزه من على منصة إلى أخرى في الفترة الزمنية $[0, 3]$، حيث t الزمن بالثواني. أوجد أقصى وأدنى ارتفاع يصله اللاعب.

أقصى ارتفاع هو 7.125 ft بعد 1.25 s ، وأدنى ارتفاع يساوي 1 ft بعد 3 s.

قاعدتا مشتقَّتي الضرب والقسمة: تعلَّمت في هذا الدرس أن مشتقة مجموع دالَّتين تساوي مجموع مشتقَّتي الدالَّتين، فهل تكون مشتقة ناتج ضرب دالتين مساويةً لناتج ضرب مشتقَّتي الدالتين؟ افترض أن: $f(x) = x$, $g(x) = 3x^3$.

مشتقة الضرب

$$\frac{d}{dx}[f(x) \cdot g(x)] = \frac{d}{dx}[x \cdot 3x^3]$$
$$= \frac{d}{dx}(3x^4) = 12x^3$$

ضرب المشتقات

$$\frac{d}{dx}f(x) \cdot \frac{d}{dx}g(x) = \frac{d}{dx}(x) \cdot \frac{d}{dx}(3x^3)$$
$$= 1 \cdot 9x^2 = 9x^2$$

يتضح من هذا المثال أن مشتقة ناتج ضرب دالَّتين لا تساوي بالضرورة ناتج ضرب مشتقَّتي الدالتين، ويمكننا استعمال القاعدة الآتية لإيجاد مشتقة ناتج ضرب دالَّتين.

مفهوم أساسي **قاعدة مشتقة الضرب**

إذا كانت مشتقة كلٍّ من الدالتين f وَ g موجودة عند x، فإن: $\frac{d}{dx}[f(x)\, g(x)] = f'(x)\, g(x) + f(x)\, g'(x)$.

ستبرهن قاعدة مشتقة الضرب في التمرين 48

مثال 6 قاعدة مشتقة الضرب

أوجد مشتقة كل دالةٍ مما يأتي:

a) $h(x) = (x^3 - 2x + 7)(3x^2 - 5)$

افترض أن: $f(x) = x^3 - 2x + 7$, $g(x) = 3x^2 - 5$، أي أن: $h(x) = f(x)g(x)$.

$f(x) = x^3 - 2x + 7$ — من الفرض

$f'(x) = 3x^2 - 2$ — قواعد مشتقات القوة، ومضاعفات القوى، والثابت، والمجموع والفرق

$g(x) = 3x^2 - 5$ — من الفرض

$g'(x) = 6x$ — قواعد مشتقات مضاعفات القوى، والثابت، والفرق

استعمل $f(x), f'(x), g(x), g'(x)$ لإيجاد مشتقة $h(x)$.

$h'(x) = f'(x)\, g(x) + f(x)\, g'(x)$ — قاعدة مشتقة الضرب

$= (3x^2 - 2)(3x^2 - 5) + (x^3 - 2x + 7)(6x)$ — عوِّض

$= 9x^4 - 15x^2 - 6x^2 + 10 + 6x^4 - 12x^2 + 42x$ — خاصية التوزيع

$= 15x^4 - 33x^2 + 42x + 10$ — بسِّط

b) $h(x) = (x^3 - 4x^2 + 48x - 64)(6x^2 - x - 2)$

افترض أن: $f(x) = x^3 - 4x^2 + 48x - 64$, $g(x) = 6x^2 - x - 2$.

$f(x) = x^3 - 4x^2 + 48x - 64$ — من الفرض

$f'(x) = 3x^2 - 8x + 48$ — قواعد مشتقات القوة، ومضاعفات القوى، والثابت، والمجموع والفرق

$g(x) = 6x^2 - x - 2$ — من الفرض

$g'(x) = 12x - 1$ — قواعد مشتقات ومضاعفات القوى، والقوة، والثابت، والفرق

استعمل $f(x), f'(x), g(x), g'(x)$ لإيجاد مشتقة $h(x)$.

$h'(x) = f'(x)\, g(x) + f(x)\, g'(x)$ — قاعدة مشتقة الضرب

$= (3x^2 - 8x + 48)(6x^2 - x - 2) + (x^3 - 4x^2 + 48x - 64)(12x - 1)$ — عوِّض

إرشادات للدراسة

قاعدة مشتقة الضرب
يَنتج عن قاعدة مشتقة الضرب مقدار يمكن تبسيطه. ويمكنك أيضًا تركه على حاله من دون تبسيط، ما لم تكن في حاجة إلى تبسيطه.

تحقق من فهمك (6A-B انظر الهامش)

أوجد مشتقة كل دالةٍ مما يأتي:

6A) $h(x) = (x^5 + 13x^2)(7x^3 - 5x^2 + 18)$

6B) $h(x) = (x^2 + x^3 + x)(8x^2 + 3)$

قاعدتا مشتقتَي الضرب والقسمة

المثال 6 يُبيِّن كيفية استعمال قاعدة مشتقة الضرب؛ في إيجاد مشتقة حاصل ضرب دالتين.

مثال إضافي

6 أوجد مشتقة كل دالة مما يأتي:

a) $h(x) = (x^2 - 2x + 3) \cdot (x^3 - 4)$

$h'(x) = 5x^4 - 8x^3 + 9x^2 - 8x + 8$

b) $h(x) = (x^4 - x^2 + 2) \cdot (x^3 - x + 1)$

$h'(x) = (4x^3 - 2x)(x^3 - x + 1) + (x^4 - x^2 + 2)(3x^2 - 1)$

المحتوى الرياضي

قاعدة مشتقة الضرب لاحظ أن قاعدة مشتقة مضاعفات القوى هي حالة خاصة من قاعدة مشتقة الضرب، حيث يُعَدُّ الثابت عاملًا، كما أنه بإمكاننا تعميم قاعدة مشتقة الضرب لأكثر من دالتين. فمثلًا:

$$\frac{d}{dx}[f(x)g(x)h(x)] = f'(x)g(x)h(x) + f(x)g'(x)h(x) + f(x)g(x)h'(x).$$

إرشادات للمعلم الجديد

رمز المشتقة: رمز المشتقة $\frac{dy}{dx}$ يُعبِّر عن "التغيُّر في y مقسومًا على التغيّر في x" والحرف d هو اختصار للحرف اليوناني دلتا (delta)، والذي يُستعمل للتعبير عن فرق القيم، أو التغيّر في القيم.

إجابات (تحقق من فهمك):

6A) $h'(x) = (5x^4 + 26x)(7x^3 - 5x^2 + 18) + (x^5 + 13x^2)(21x^2 - 10x)$

6B) $h'(x) = (2x + 3x^2 + 1)(8x^2 + 3) + (x^2 + x^3 + x)(16x)$

بطريقة التبرير نفسها في مشتقة الضرب، يمكنك ملاحظة أن مشتقة ناتج قسمة دالتين لا تساوي ناتج قسمة مشتقتَي الدالتين، ويمكن استعمال القاعدة الآتية لحساب مشتقة قسمة دالتين.

مفهوم أساسي **قاعدة مشتقة القسمة**

إذا كانت مشتقة كلٍّ من الدالتين f, g موجودة عند x، وكان $g(x) \neq 0$، فإن:

$$\frac{d}{dx}\left[\frac{f(x)}{g(x)}\right] = \frac{f'(x)\, g(x) - f(x)\, g'(x)}{[g(x)]^2}$$

ستبرهن قاعدة مشتقة القسمة في التمرين 50

مثال 7 قاعدة مشتقة القسمة

أوجد مشتقة كل دالةٍ مما يأتي:

a) $h(x) = \dfrac{5x^2 - 3}{x^2 - 6}$

افترض أن: $f(x) = 5x^2 - 3,\ g(x) = x^2 - 6$ ؛ أي أن: $h(x) = \dfrac{f(x)}{g(x)}$.

$f(x) = 5x^2 - 3$ من الفرض

$f'(x) = 10x$ قواعد مشتقات مضاعفات القوى ، والثابت، والفرق

$g(x) = x^2 - 6$ من الفرض

$g'(x) = 2x$ قواعد مشتقات القوة ، والثابت، والفرق

استعمل $f(x), f'(x), g(x), g'(x)$ لإيجاد مشتقة $h(x)$.

$h'(x) = \dfrac{f'(x)\, g(x) - f(x)\, g'(x)}{[g(x)]^2}$ قاعدة مشتقة القسمة

$= \dfrac{10x(x^2 - 6) - (5x^2 - 3)(2x)}{(x^2 - 6)^2}$ عوّض

$= \dfrac{10x^3 - 60x - 10x^3 + 6x}{(x^2 - 6)^2}$ خاصية التوزيع

$= \dfrac{-54x}{(x^2 - 6)^2}$ بسّط

b) $h(x) = \dfrac{x^2 + 8}{x^3 - 2}$

افترض أن: $f(x) = x^2 + 8,\ g(x) = x^3 - 2$.

$f(x) = x^2 + 8$ من الفرض

$f'(x) = 2x$ قواعد مشتقات القوة ، والثابت، والمجموع

$g(x) = x^3 - 2$ من الفرض

$g'(x) = 3x^2$ قواعد مشتقات القوة ، والثابت، والفرق

استعمل $f(x), f'(x), g(x), g'(x)$ لإيجاد مشتقة $h(x)$.

$h'(x) = \dfrac{f'(x)\, g(x) - f(x)\, g'(x)}{[g(x)]^2}$ قاعدة مشتقة القسمة

$= \dfrac{2x(x^3 - 2) - (x^2 + 8)3x^2}{(x^3 - 2)^2}$ عوّض

$= \dfrac{-x^4 - 24x^2 - 4x}{(x^3 - 2)^2}$ فك الأقواس، ثم بسّط

تحقق من فهمك

أوجد مشتقة كل دالةٍ مما يأتي:

7A) $j(x) = \dfrac{7x - 10}{12x + 5}$ $\quad \dfrac{155}{(12x + 5)^2}$

7B) $k(x) = \dfrac{6x}{2x^2 + 4}$ $\quad \dfrac{-12x^2 + 24}{(2x^2 + 4)^2}$

إرشادات للدراسة

قاعدة مشتقة القسمة
يُعدّ تبسيط ناتج مشتقة القسمة مهمًا في كثير من التمارين، إلا أنه ليس من الضروري فك أقواس المقام، ما لم ينتج عن ذلك تبسيط أكثر.

قاعدتا مشتقتَي الضرب والقسمة

المثال 7 يُبيّن كيفية استعمال قاعدة مشتقة القسمة في إيجاد مشتقة ناتج قسمة دالتين.

مثال إضافي

7 أوجد مشتقة كل دالة مما يأتي:

a) $h(x) = \dfrac{4x^3}{x^2 - 2}$

$h'(x) = \dfrac{4x^4 - 24x^2}{x^4 - 4x^2 + 4}$

b) $h(x) = \dfrac{x^3 - 4}{x^2 + 1}$

$h'(x) = \dfrac{x^4 + 3x^2 + 8x}{x^4 + 2x^2 + 1}$

إرشادات للمعلم الجديد

المشتقات: السرعة المتجهة اللّحظية، والمشتقة وميل المماس مصطلحات متكافئة. والمشتقات هي أسهلها حسابًا. ولكن من الضروري أن يفهم الطلاب العلاقة بين هذه المصطلحات الثلاثة.

تنويع التعليم

دون ضمن فوق

المتعلمون اللغويون: نظِّم الطلاب في مجموعات مكونة من خمسة إلى ثمانية طلاب، ثم اطلب إلى كل مجموعة كتابة قواعد الاشتقاق بأسلوبهم الخاص، ثم اطلب إلى كل مجموعة عرْض ما كتبوه على المجموعات الأخرى، بحيث يتم التحقق من سلامة اللغة المُستعملة في صياغة القواعد. قم بعد ذلك بالتحقق من كتابات الطلاب.

3 التدريب

التقويم التكويني

استعمل الأسئلة 34-1 ؛ للتأكد من فهم الطلاب. ثم استعمل الجدول أسفل هذه الصفحة؛ لتعيين الواجبات المنزلية للطلاب بحسب مستوياتهم.

تنبيه !

خطأ شائع: في الأسئلة 28–22، ذكّر الطلاب بأن مشتقة حاصل ضرب دالتين لا تساوي حاصل ضرب مشتقتيهما، إلا أنها تساوي حاصل جمع كل دالة في مشتقة الدالة الأخرى.

إجابات:

6) $y'(f) = -11$

7) $z'(n) = 4n + 7$

8) $g'(h) = \frac{1}{h^{\frac{1}{2}}} + \frac{2}{h^{\frac{2}{3}}} - 3h^{\frac{1}{2}}$

9) $b'(m) = 2m^{-\frac{1}{3}} - 3m^{\frac{1}{2}}$

10) $n'(t) = -\frac{1}{t^2} - \frac{6}{t^3} - \frac{6}{t^4}$

11) $f'(x) = \frac{3}{2x^{\frac{1}{2}}} - \frac{3}{2}x^{\frac{1}{2}} - \frac{1}{x^{\frac{3}{2}}}$

12) $q'(c) = 9c^8 - 15c^4 + 10c - 3$

13) $p'(k) = 5.2k^{4.2} - 38.4k^{3.8} + 3$

40a) $f''(x) = 80x^3 - 12x$

40b) $g'''(x) = -420x^4 + 96x - 42$

40c) $h^{(4)}(x) = 1080x^{-7} + 240x^{-6}$

تدرب وحل المسائل

أوجد مشتقة كلٍّ دالة مما يأتي باستعمال النهايات، ثم احسب قيمة المشتقة عند النقاط المعطاة: (مثال 1) (1-5) انظر ملحق الإجابات.

1) $f(x) = 4x^2 - 3, x = 2, -1$

2) $g(t) = -t^2 + 2t + 11, t = 5, 3$

3) $m(j) = 14j - 13, j = -7, -4$

4) $v(n) = 5n^2 + 9n - 17, n = 7, 2$

5) $r(b) = 2b^3 - 10b, b = -4, -3$

أوجد مشتقة كل دالة مما يأتي: (المثالان 2, 3) (6-13) انظر الهامش.

6) $y(f) = -11f$ 7) $z(n) = 2n^2 + 7n$

8) $g(h) = 2h^{\frac{1}{2}} + 6h^{\frac{1}{3}} - 2h^{\frac{3}{2}}$ 9) $b(m) = 3m^{\frac{2}{3}} - 2m^{\frac{3}{2}}$

10) $n(t) = \frac{1}{t} + \frac{3}{t^2} + \frac{2}{t^3} + 4$ 11) $f(x) = 3x^{\frac{1}{2}} - x^{\frac{3}{2}} + 2x^{-\frac{1}{2}}$

12) $q(c) = c^9 - 3c^5 + 5c^2 - 3c$ 13) $p(k) = k^{5.2} - 8k^{4.8} + 3k$

14) **درجات حرارة:** تُعطى درجة حرارة إحدى المدن بالفهرنهايت في أحد الأيام بالدالة: (a-c) انظر ملحق الإجابات.
$f(h) = -0.0036h^3 - 0.01h^2 + 2.04h + 52$ ،
حيث h عدد الساعات التي انقضت من ذلك اليوم. (مثال 4)

a) أوجد معادلة تمثل مُعدّل التغيّر اللّحظي لدرجة الحرارة.

b) أوجد مُعدَّل التغيّر اللحظي لدرجة الحرارة عندما: $h = 2, 14, 20$.

c) أوجد درجة الحرارة العظمى في الفترة: $0 \leq h \leq 24$

استعمل الاشتقاق لإيجاد النقاط الحرجة، ثم أوجد نقاط القيم العظمى والصغرى لكل دالة مما يأتي على الفترة المعطاة. (مثال 5)

15) $f(x) = 2x^2 + 8x, [-5, 0]$ (15-20) انظر ملحق الإجابات.

16) $r(t) = t^4 + 6t^2 - 2, [1, 4]$

17) $t(u) = u^3 + 15u^2 + 75u + 115, [-6, -3]$

18) $f(x) = -5x^2 - 90x, [-11, -8]$

19) $z(k) = k^3 - 3k^2 + 3k, [0, 3]$

20) $c(n) = \frac{1}{3}n^3 + \frac{1}{2}n^2 - 6n + 8, [-5, 5]$

21) **رياضة:** عُد إلى فقرة "لماذا؟" في بداية الدرس. الدالة: $h(t) = 65t - 16t^2 + 3$ تمثل ارتفاع الكرة h بالأقدام بعد t ثانية، عندما $0 \leq t \leq 4$. (مثال 5)

a) أوجد $h'(t)$. $h'(t) = 65 - 32t$

b) أوجد نقاط القيم العظمى والصغرى للدالة $h(t)$ في الفترة $[0, 4]$.

c) هل يمكن لأحمد ركل الكرة لتصل إلى ارتفاع 68 ft ؟

b) $(0, 3), (2.03, 69.02)$ تقريبًا c) انظر ملحق الإجابات.

أوجد مشتقة كل دالة مما يأتي: (مثال 6) (22-28) انظر ملحق الإجابات.

22) $f(x) = (4x + 3)(x^2 + 9)$

23) $g(x) = (3x^4 + 2x)(5 - 3x)$

24) $s(t) = (\sqrt{t} + 2)(3t^{11} - 4t)$

25) $g(x) = \left(x^{\frac{3}{2}} + 2x\right)(0.5x^4 - 3x)$

26) $c(t) = (t^3 + 2t - t^7)(t^6 + 3t^4 - 22t)$

27) $q(a) = \left(a^{\frac{9}{8}} + a^{-\frac{1}{4}}\right)\left(a^{\frac{5}{4}} - 13a\right)$

28) $f(x) = (1.4x^5 + 2.7x)(7.3x^9 - 0.8x^5)$

استعمل قاعدة مشتقة القسمة لإيجاد مشتقة كل دالةٍ ممّا يأتي: (مثال 7) (29-34) انظر ملحق الإجابات.

29) $f(m) = \frac{3 - 2m}{3 + 2m}$ 30) $r(t) = \frac{t^2 + 2}{3 - t^2}$

31) $m(q) = \frac{q^4 + 2q^2 + 3}{q^3 - 2}$ 32) $f(x) = \frac{\sqrt{x} + 2x}{-x^2 + 3}$

33) $q(r) = \frac{1.5r^3 + 5 - r^2}{r^3}$ 34) $t(w) = \frac{w + w^4}{\sqrt{w}}$

35) قام بائع ملابس بإيجاد العلاقة بين سعر قميص، وعدد القطع المبيعة منه يوميًّا، فوجد أنه عندما يكون سعر القميص d ريالًا ، فإن عدد القطع المبيعة يوميًّا يساوي $80 - 2d$.

a) أوجد $r(d)$ التي تمثل إجمالي المبيعات اليومية، عندما يكون سعر القميص d ريالًا. $r(d) = d(80 - 2d)$

b) أوجد $r'(d)$. $r'(d) = -4d + 80$

c) أوجد السعر d الذي تكون عنده قيمة المبيعات اليومية أكبر ما يمكن. 20 ريالًا

أوجد مشتقة كل دالة مما يأتي، ثم مَثِّل الدالة والمشتقة بيانيًّا على المستوى الإحداثي نفسه. (36-39) للتمثيل البياني انظر ملحق الإجابات.
(إرشاد: يمكنك استعمال الحاسبة البيانية في التمثيل البياني)

36) $f(x) = 3x^2 + 2x - 7$ $f'(x) = 6x + 2$

37) $g(x) = \sqrt{x} + 4$ $g'(x) = \frac{\sqrt{x}}{2x}$

38) $f(x) = 4x^5 - 6x^3 + 10x - 11$ $f'(x) = 20x^4 - 18x^2 + 10$

39) $g(x) = \frac{1}{x}$ $g'(x) = -\frac{1}{x^2}$

40) **المشتقات العليا:** لتكن $f'(x)$ مشتقة $f(x)$، إذا كانت مشتقة $f'(x)$ موجودة، فإنها تسمى المشتقة الثانية للدالة f، ويُرمز لها بالرمز $f''(x)$ ، أو الرمز $f^{(2)}(x)$ ، وكذلك إذا كانت مشتقة $f''(x)$ موجودة، فإنها تسمى المشتقة الثالثة للدالة f، ويرمز لها بالرمز $f'''(x)$ أو $f^{(3)}(x)$، وتسمى المشتقات على هذا النحو المشتقات العليا للدالة f. أوجد كلًّا مما يأتي: (a-c) انظر الهامش.

a) المشتقة الثانية للدالة: $f(x) = 4x^5 - 2x^3 + 6$

b) المشتقة الثالثة للدالة: $g(x) = -2x^7 + 4x^4 - 7x^3 + 10x$

c) المشتقة الرابعة للدالة: $h(x) = 3x^{-3} + 2x^{-2} + 4x^2$

تنويع الواجبات المنزلية

دون ضمن فوق

المستوى	الواجب المنزلي
دون المتوسط	48–62 ،46 ، 1–34
ضمن المتوسط	1–34 فردي، 45 ، 46، 48–62
فوق المتوسط	35–62

41-44) انظر ملحق الإجابات.

مَثِّل منحنى دالة لها الخصائص المعطاة في كلٍّ مما يأتي:

41) المشتقة تساوي 0 ، عندما $x = -1, 1$.

42) المشتقة غير معرَّفة، عندما $x = 4$.

43) المشتقة تساوي -2 ، عندما $x = -1, 0, 2$.

44) المشتقة تساوي 0 ، عندما $x = -1, 2, 4$.

45) **تمثيلات متعددة:** في هذا التمرين ستستكشف علاقة المشتقات ببعض الخصائص الهندسية للدوال. **b-e) انظر ملحق الإجابات.**

a) **تحليليًّا:** أوجد مشتقة صيغة مساحة الدائرة بالنسبة لنصف القطر r. $A' = 2\pi r$

b) **لفظيًّا:** وضِّح العلاقةَ بين المعادلة الأصلية ومشتقتها في الفرع **a**.

c) **بيانيًّا:** ارسم مربعًا طول ضلعه $2a$ ، ومكعبًا طول ضلعه $2a$.

d) **تحليليًّا:** اكتب صيغة تمثِّل مساحة المربع، وأخرى تمثِّل حجم المكعب بدلالة a ، ثم أوجد مشتقتَي الصيغتين.

e) **لفظيًّا:** وَضِّح العلاقة بين المعادلة الأصلية ومشتقتها في الفرع **d**.

مسائل مهارات التفكير العليا

46) **اكتشف الخطأ:** قام كلٌّ من أحمد وعبدالله بإيجاد $[f'(x)]^2$ للدالة $f(x) = 6x^2 + 4x$ ، حيث كانت إجابة عبد الله: $144x^2 + 96x + 16$ ، في حين كانت إجابة أحمد: $144x^3 + 144x^2 + 32x$ ، فأيهما كانت إجابته صحيحة؟ برِّر إجابتك. **انظر ملحق الإجابات.**

47) **تحدٍّ:** أوجد $f'(y)$ علمًا بأن:
$$f(y) = 10x^2y^3 + 5xz^2 - 6xy^2 + 8x^5 - 11x^8yz^7$$
$$f'(y) = 30x^2y^2 - 12xy - 11x^8z^7$$

48) **برهان:** برهن صحة قاعدة مشتقة الضرب، بإثبات أن:
$$f'(x)g(x) + f(x)g'(x) = \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)g(x+h) - f(x)g(x)}{h}$$
(إرشاد: ابدأ بالطرف الأيمن، وأضف $f(x)g(x+h)$ إلى البسط واطرحه منه). **انظر ملحق الإجابات.**

49) **تبرير:** بيِّن ما إذا كانت العبارة الآتية صحيحة أو خاطئة، وبرِّر إجابتك.
"إذا كانت: $f(x) = x^{5n+3}$ ، فإن $f'(x) = (5n+3)\,x^{5n+2}$" **انظر ملحق الإجابات.**

50) **برهان:** برهن صحة قاعدة مشتقة القسمة، وذلك بإثبات أن:
$$\frac{f'(x)\,g(x) - f(x)\,g'(x)}{[\,g(x)]^2} = \lim_{h\to 0}\frac{\frac{f(x+h)}{g(x+h)} - \frac{f(x)}{g(x)}}{h}$$
(إرشاد: ابدأ بالطرف الأيمن، ووحِّد المقامات في البسط، ثم أضف $f(x)\,g(x)$ إلى البسط واطرحه منه). **انظر ملحق الإجابات.**

51) **اكتب:** هل من الممكن أن يكون لدالَّتين مختلفتين المشتقة نفسها؟ عزِّز إجابتك بأمثلة. **انظر ملحق الإجابات.**

مراجعة تراكمية

أوجد ميل مماس منحنى كل دالةٍ مما يأتي عند النقاط المعطاة: (الدرس 8-3)

52) $y = x^2 - 3x, (0, 0), (3, 0)$ $\quad -3, 3$

53) $y = 4 - 2x, (-2, 8), (6, -8)$ $\quad -2, -2$

54) $y = x^2 + 9, (3, 18), (6, 45)$ $\quad 6, 12$

احسب كل نهاية ممَّا يأتي: (الدرس 8-2)

55) $\lim\limits_{x\to -4}\frac{x^2 - 16}{x + 4}$ $\quad -8$

56) $\lim\limits_{x\to -2}\frac{x^2 + 5x + 6}{x^2 + x - 2}$ $\quad -\frac{1}{3}$

57) $\lim\limits_{x\to 2}\frac{3x + 9}{x^2 - 5x - 24}$ $\quad -\frac{1}{2}$

قدِّر كل نهاية ممَّا يأتي: (الدرس 8-1)

58) $\lim\limits_{x\to 4^+}\frac{x^2 - x - 12}{|x - 4|}$ $\quad 7$

59) $\lim\limits_{x\to 0^+}(\sqrt{x} + 2x + 3)$ $\quad 3$

تدريب على اختبار

60) ما مشتقة: $h(x) = (-7x^2 + 4)\,(2-x)$ ؟ **D**

A $h'(x) = -14x$

B $h'(x) = 14x$

C $h'(x) = -21x^2 - 28x + 4$

D $h'(x) = 21x^2 - 28x - 4$

61) ما ميل مماس منحنى $y = 2x^2$ عند النقطة $(1, 2)$؟ **C**

A 1   C 4

B 2   D 8

62) ما مشتقة: $f(x) = 5\sqrt[3]{x^8}$ ؟ **F**

F $f'(x) = \frac{40}{3}x^{\frac{5}{3}}$ H $f'(x) = 225\,x^{\frac{5}{3}}$

G $f'(x) = \frac{40}{3}x^{\frac{8}{3}}$ J $f'(x) = 225\,x^{\frac{8}{3}}$

تمثيلات متعددة

في التمرين 45 يستعمل الطلاب التحليل الجبري والتعبير اللفظي والتمثيل البياني؛ لاستكشاف علاقة المشتقات ببعض الخصائص الهندسية للدوال.

4 التقويم

تعلُّم سابق اطلب إلى الطلاب شرح كيف ساعدتهم أفكار الدرس السابق حول المماس والسرعة المتجهة، على تعلم فكرة المشتقة في هذا الدرس.

تنبيه !

اكتشف الخطأ: في السؤال 46، على الطلاب أن يعرفوا أن: $[\,f'(x)\,]^2 = f'(x)\cdot f'(x)$ ، لاحظ أن قوة الحد الرئيس، يجب أن تكون زوجية في هذه الحالة؛ لذا فإن عبد الله محق.

تنويع التعليم

فوق

توسّع: أوجد القيمة أو القيم التي يكون عندها المماسان للمنحنيين: $f(x) = x, g(x) = x^2$ متوازيين. وضح إجابتك.

يكون المماسان متوازيين، إذا تساوى ميلاهما، ويعني أن $f'(x) = g'(x)$ ، وبما أن $f'(x) = 1$ ، $g'(x) = 2x$ ، فإن $f'(x) = g'(x)$ فقط عندما $x = \frac{1}{2}$.

8-5 المساحة تحت المنحنى والتكامل
Area Under the Curve and Integration

فيما سبق:
درستُ حساب النهايات جبريًا باستعمال خصائصها. (الدرس 2–8)

والآن:
- أقرّب المساحة تحت منحنى دالة باستعمال مستطيلات.
- أجد المساحة تحت منحنى دالة باستعمال التكامل المحدد.

المفردات:
التجزيء المنتظم
regular partition
التكامل المحدد
definite integral
الحد الأدنى
lower limit
الحد الأعلى
upper limit
مجموع ريمان الأيمن
right Riemann sum
التكامل
integration

www.obeikaneducation.com

لماذا؟

التكلفة الحدية (الهامشية) هي التكلفة الإضافية المترتبة على إنتاج وحدة إضافية واحدة من منتج ما، ويمكن إيجاد معادلة التكلفة الحدية باشتقاق معادلة التكلفة الحقيقية للمنتج. تُمثل الدالة $f(x) = 10 - 0.002x$ التكلفة الحدية لطباعة x نسخة من كتاب ما بالريال .

المساحة تحت منحنى سبق أن درست في الهندسة طريقة حساب مساحات الأشكال الأساسية كالمثلث والمستطيل وشبه المنحرف، كما درست حساب مساحات بعض الأشكال المركبة التي تتكون من أشكال أساسية، إلا أن العديد من الأشكال المركبة لا تتكون من أشكال أساسية، مما يستدعي الحاجة إلى طريقة عامة لحساب مساحة أي شكل ثنائي الأبعاد.

يمكننا تقريب مساحة شكل غير منتظم من خلال استعمال شكل أساسي معلوم المساحة كالمستطيل. فمثلًا يمكننا تقريب مساحة المنطقة المحصورة بين منحنى $f(x) = -x^2 + 12x$ والمحور x على الفترة $[0, 12]$ باستعمال مستطيلات متساوية العرض.

مثال 1 المساحة تحت منحنى باستعمال مستطيلات

قرِّب مساحة المنطقة المحصورة بين منحنى $f(x) = -x^2 + 12x$ والمحور x على الفترة $[0, 12]$ باستعمال 4، 6، 12 مستطيلًا على الترتيب. استعمل الطرف الأيمن لقاعدة كل مستطيل لتحديد ارتفاعه.

مثّل الدالة والمستطيلات كما في الأشكال التالية، باتباع الخطوات التالية:

1) أوجد طول الفترة $[0, 12]$ بطرح بدايتها من نهايتها.

2) أوجد عرض كل مستطيل بقسمة طول الفترة على عدد المستطيلات، فمثلًا إذا كان عدد المستطيلات 4 نقسم: $12 \div 4 = 3$

3) قسّم الفترة $[0, 12]$ إلى 4 فترات (لأربعة مستطيلات) طول كل منها يساوي 3

4) ارسم على كل فترة جزئية مستطيلًا أحد بعديه يساوي طول هذه الفترة، والبعد الآخر يساوي قيمة الدالة عند الطرف الأيمن للفترة.

فمثلًا ارتفاعات المستطيلات في الشكل (1) هي $f(3), f(6), f(9), f(12)$. ويمكننا استعمال ارتفاعات المستطيلات وأطوال قواعدها لتقريب المساحة المطلوبة.

تاريخ الرياضيات

ثابت بن قرة (221 هـ – 288 هـ)
من أوائل من وضع نواة علم التكامل من خلال نظريته" إذا ضوعف عدد أضلاع المضلع المنتظم، المرسوم بين محيطين أو مساحتين إلى ما لا نهاية، صغر الفرق تدريجيًا بين الأضلاع كلما اقترب من المركز، واقترب من الصفر حتى يفنى".

8-5 ملاحظات الدرس

1 التركيز

الترابط الرأسي

ما قبل الدرس 8-5
حساب النهايات جبريًّا باستعمال خصائصها.

الدرس 8-5
تقريب المساحة تحت منحنى دالة باستعمال مستطيلات.
إيجاد المساحة تحت منحنى دالة باستعمال التكامل المحدد .

ما بعد الدرس 8-5
استعمال النظرية الأساسية في التفاضل والتكامل؛ في إيجاد المساحة تحت منحنى.

2 التدريس

أسئلة التعزيز

اطلب إلى الطلاب قراءة فقرة "لماذا؟".

واسأل:

- إذا اعتبرنا دالة التكلفة الحقيقية $g(x)$ ، فما العلاقة بين $f(x), g(x)$؟ $g'(x) = f(x)$
- هل بإمكانك تخمين الدالة $g(x)$ بخطوات عكسية لخطوات الاشتقاق؟ نعم.
- خمن دالةيمكن أن تمثل $g(x)$ ، وهل هي وحيدة؟
  إجابة ممكنة: $g(x)=10x-0.001\,x^2$.
  وهي ليست وحيدة

مصادر الدرس 8-5

المصدر	دون المتوسط	ضمن المتوسط	فوق المتوسط
دليل المعلم	• تنويع التعليم، ص (166)		• تنويع التعليم، ص (170)
كتاب التمارين	• كتاب التمارين، ص (22)	• كتاب التمارين، ص (22)	• كتاب التمارين، ص (22)
مصادر المعلم للأنشطة الصفية	• تدريبات إعادة التعليم، ص (22، 23) • تدريبات حل المسألة، ص (24)	• تدريبات حل المسألة، ص (24) • التدريبات الإثرائية، ص (25)	• تدريبات حل المسألة، ص (24) • التدريبات الإثرائية، ص (25)

المساحة تحت منحنى

المثالان 2 ,1 يُبيّنان كيفية حساب المساحة التقريبية تحت منحنى دالة باستعمال مساحات مستطيلات.

التقويم التكويني

استعمل تدريبات "تحقق من فهمك" بعد كل مثال؛ للتحقق من مدى فهم الطلاب للمفاهيم.

مثالان إضافيان

1 قرّب مساحة المنطقة المحصورة بين منحنى $f(x) = -x^2 + 18x$ والمحور x على الفترة $[0, 18]$ باستعمال 6 ، 9 ، 18 مستطيلًا على الترتيب. استعمل الطرف الأيمن لكل مستطيل؛ لتحديد ارتفاعه.

6 مستطيلات = 945 وحدة مربعة

9 مستطيلات = 960 وحدة مربعة

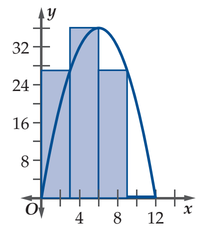
16 مستطيلًا = 969 وحدة مربعة

2 قرّب مساحة المنطقة المحصورة بين منحنى $f(x) = x^2 + 1$ ، والمحور x في الفترة $[0, 4]$ باستعمال مستطيلات عرض كل واحدة منها وحدة واحدة. استعمل الأطراف اليمنى ثم اليسرى للمستطيلات؛ لتحديد ارتفاعاتها، ثم احسب الوسط للتقريبين.

الأطراف اليمنى = 34 وحدة مربعة

الأطراف اليسرى = 18 وحدة مربعة

الوسط = 26 وحدة مربعة.



الشكل (1)

المساحة باستعمال 4 مستطيلات

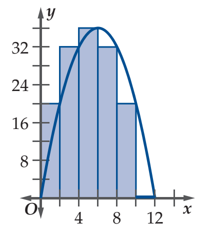
$R_1 = 3 \cdot f(3) = 81$

$R_2 = 3 \cdot f(6) = 108$

$R_3 = 3 \cdot f(9) = 81$

$R_4 = 3 \cdot f(12) = 0$

المساحة الكلية 270 وحدة مربعة.



الشكل (2)

المساحة باستعمال 6 مستطيلات

$R_1 = 2 \cdot f(2) = 40$

$R_2 = 2 \cdot f(4) = 64$

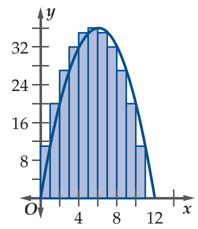
$R_3 = 2 \cdot f(6) = 72$

$R_4 = 2 \cdot f(8) = 64$

$R_5 = 2 \cdot f(10) = 40$

$R_6 = 2 \cdot f(12) = 0$

المساحة الكلية 280 وحدة مربعة.



الشكل (3)

المساحة باستعمال 12 مستطيلًا

$R_1 = 1 \cdot f(1) = 11$

$R_2 = 1 \cdot f(2) = 20$

$R_3 = 1 \cdot f(3) = 27$

$R_4 = 1 \cdot f(4) = 32$

$R_5 = 1 \cdot f(5) = 35$

$R_6 = 1 \cdot f(6) = 36$

$R_7 = 1 \cdot f(7) = 35$

$R_8 = 1 \cdot f(8) = 32$

$R_9 = 1 \cdot f(9) = 27$

$R_{10} = 1 \cdot f(10) = 20$

$R_{11} = 1 \cdot f(11) = 11$

$R_{12} = 1 \cdot f(12) = 0$

المساحة الكلية 286 وحدة مربعة.

أي أن المساحة التقريبية باستعمال 4 ، 6 ، 12 مستطيلًا هي بالترتيب: 270 وحدة مربعة، 280 وحدة مربعة، 286 وحدة مربعة.

تحقق من فهمك

1) قرّب مساحة المنطقة المحصورة بين منحنى $f(x) = -x^2 + 24x$ والمحور x على الفترة $[0, 24]$ باستعمال 6، 8، 12 مستطيلًا على الترتيب. استعمل الطرف الأيمن لقاعدة كل مستطيل لتحديد ارتفاعه.

المساحة باستعمال 6 مستطيلات = 2240 وحدة مربعة، المساحة باستعمال 8 مستطيلات = 2268 وحدة مربعة، المساحة باستعمال 12 وحدة مستطيلة = 2288 وحدة مربعة

لاحظ أن المستطيلات الأقل عرضًا تمثِّل المساحة المطلوبة بصورة أفضل، وتعطي تقريبًا أدق للمساحة الكلية. وكما استعملنا الأطراف اليمنى لقاعدة مستطيل لتحديد ارتفاعاتها ، فإنه يمكننا أيضًا استعمال أطرافها اليسرى لتحديد ارتفاعاتها وهذا قد ينتج عنه تقريب مختلف للمساحة.

إن استعمال الأطراف اليمنى أو اليسرى لقواعد المستطيلات لتحديد ارتفاعاتها قد يؤدي إلى إضافة أجزاء لا تقع بين المنحنى والمحور x ، أو حذف أجزاء تقع بين المنحنى والمحور x . ومن الممكن الحصول على تقريب أفضل للمساحة في بعض الأحيان باستعمال كل من الأطراف اليمنى واليسرى لقواعد المستطيلات ، ثم أخذ الوسط للتقريبين.

مثال 2 المساحة تحت المنحنى باستعمال الأطراف اليمنى واليسرى للمستطيلات

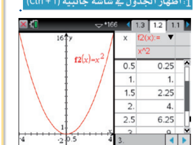
قرّب مساحة المنطقة المحصورة بين منحنى $f(x) = x^2$ والمحور x في الفترة $[0, 4]$ باستعمال مستطيلات عرض كل واحدٍ منها وحدة واحدة . استعمل الأطراف اليمنى ثم اليسرى للمستطيلات لتحديد ارتفاعاتها ، ثم احسب الوسط للتقريبين.

إن استعمال مستطيلات عرض كل منها وحدة واحدة ينتج عنه 4 مستطيلات سواء أكانت الأطراف اليمنى أو اليسرى للمستطيلات هي التي تحدد ارتفاعاتها. ويوضح الشكل (1) أدناه المستطيلات باستعمال الأطراف اليمنى، في حين يوضح الشكل (2) أدناه المستطيلات باستعمال الأطراف اليسرى.

إرشاد تقني

جداول: للحصول على ارتفاعات متعددة للمستطيلات، والتي تمثل بعض قيم $f(x)$ باستعمال الآلة الحاسبة البيانية. مثِّل الدالة باستعمال تطبيق الرسوم البيانية، وذلك بالضغط على on ثم كتابة الدالة $f(x) = x^2$. ويمكن توضيح ارتفاعات المستطيلات $f(x)$ باستعمال جدول، وذلك بالضغط على menu ومنها اختيار 7: الجدول

1: اظهار الجدول في شاشة جانبية (Ctrl + T)

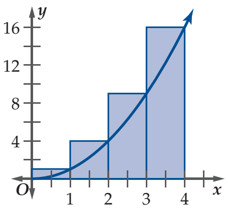


[−4, 4] scl: 0.5 by [−2, 16] scl: 1

ويمكنك تعديل فترات قيم x في الجدول بالضغط على menu ومنها 2: الجدول ، ثم 5: تحرير إعدادات الجدول... ثم حدد بداية الجدول والخطوة أو تدريج قيم x.

المحتوى الرياضي

التقريب باستعمال المستطيلات تم التعرف إلى طريقتين لتقريب المساحة تحت منحنى دالة باستعمال الأطراف اليمنى، أو الأطراف اليسرى للمستطيلات، حيث يعطي الوسط للتقريبين تقريبًا أفضل للمساحة. وبإمكاننا أيضًا حساب المساحة باستعمال أصغر وأكبر ارتفاع لكل مستطيل، حيث يُعطي الوسط للتقريبين الأخيرين تقريبًا أفضل للمساحة الكلية.



الشكل (1)

المساحة باستعمال الأطراف اليمنى

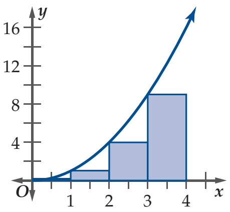
$R_1 = 1 \cdot f(1) = 1$

$R_2 = 1 \cdot f(2) = 4$

$R_3 = 1 \cdot f(3) = 9$

$R_4 = 1 \cdot f(4) = 16$

المساحة الكلية 30 وحدة مربعة



الشكل (2)

المساحة باستعمال الأطراف اليسرى

$R_1 = 1 \cdot f(0) = 0$

$R_2 = 1 \cdot f(1) = 1$

$R_3 = 1 \cdot f(2) = 4$

$R_4 = 1 \cdot f(3) = 9$

المساحة الكلية 14 وحدة مربعة

أي أن المساحة الناتجة عن استعمال الأطراف اليمنى هي 30 وحدة مربعة، بينما المساحة الناتجة عن استعمال الأطراف اليسرى هي 14 وحدة مربعة، وهذان تقديران تقع المساحة بينهما، وبحساب الوسط للقيمتين نحصل على تقريب أفضل للمساحة، وهو 22 وحدة مربعة.

✓ تحقق من فهمك

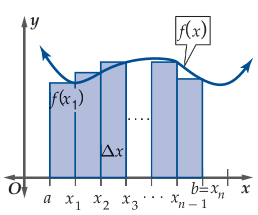
2) قرِّب مساحة المنطقة المحصورة بين منحنى $f(x) = \frac{12}{x}$ والمحور x في الفترة $[1, 5]$ باستعمال مستطيلات عرض كل واحد منها وحدة واحدة . استعمل الأطراف اليمنى ثم اليسرى لقواعد المستطيلات لتحديد ارتفاعاتها، ثم احسب الوسط للتقريبين.

المساحة الناتجة عن استعمال الأطراف اليمنى هي 15.4وحدة مربعة، الأطراف اليسرى = 25 وحدة مربعة، الوسط = 20.2 وحدة مربعة

عند تقريب مساحة المنطقة المحصورة بين منحنى دالة والمحور x، فإنه يمكننا استعمال أي نقطة على قاعدة المستطيل لتحديد ارتفاعه، إلا أن النقاط الأكثر شيوعًا هي نقطتا الطرفين الأيمن والأيسر، ونقطة المنتصف.

التكامل لاحظت في مثال 1 أنه كلما قل عرض المستطيلات، فإن مساحتها الكلية تقترب من المساحة الفعلية تحت المنحنى، ومن ذلك نستنتج أن المساحة المطلوبة هي نهاية مجموع مساحات المستطيلات عندما يقترب عرض كل مستطيل من الصفر.

في الشكل المجاور، قُسِّمت الفترة من a إلى b إلى n من الفترات الجزئية المتساوية الطول، وتُسمَّى هذه التجزئة **التجزيء المنتظم**. إن طول الفترة الكلية من a إلى b هو $b - a$ ، وبذلك يكون طول كل فترة جزئية (عرض كل مستطيل من المستطيلات التي عددها n) هو $\frac{b-a}{n}$ ، ويُرمز له بالرمز Δx. وبما أن ارتفاع كل مستطيل يساوي قيمة الدالة عند الطرف الأيمن لقاعدة المستطيل، فإن ارتفاع المستطيل الأول هو $f(x_1)$، وارتفاع المستطيل الثاني هو $f(x_2)$، وهكذا يكون ارتفاع المستطيل الأخير $f(x_n)$.



يمكن الآن حساب مساحة كل مستطيل من خلال ضرب Δx في ارتفاع ذلك المستطيل، أي أن مساحة المستطيل الأول هي $f(x_1)\,\Delta x$، ومساحة المستطيل الثاني هي $f(x_2)\,\Delta x$، وهكذا. وتُعطى المساحة الكلية A للمستطيلات بمجموع مساحاتها، ويمكن كتابتها باستعمال رمز المجموع.

$$A = f(x_1)\Delta x + f(x_2)\Delta x + \cdots + f(x_n)\Delta x$$ اجمع المساحات

$$A = \Delta x[f(x_1) + f(x_2) + \cdots + f(x_n)]$$ أخرج العامل المشترك Δx

$$A = \Delta x \sum_{i=1}^{n} f(x_i)$$ استعمل رمز المجموع

$$A = \sum_{i=1}^{n} f(x_i)\,\Delta x$$ خواص رمز المجموع

قراءة الرياضيات

رمز المجموع

تُقرأ العبارة $\sum_{i=1}^{n} f(x_i)\,\Delta x$ كالآتي مجموع حواصل ضرب $f(x_i)$ في Δx من $i = 1$ إلى $i = n$.

التعليم باستعمال التقنيات

السبورة التفاعلية: احرص على حَلّ عدة أمثلة حول إيجاد المساحات تحت المنحنيات، ثم احتفظ بكل مثال على شكل ملاحظة، وأضف هذه الملاحظات إلى الصفحة الإلكترونية الخاصة بالصف، بحيث يستطيع الطلاب الاعتماد عليها بوصفها مرجعًا إضافيًّا .

إرشادات للمعلم الجديد

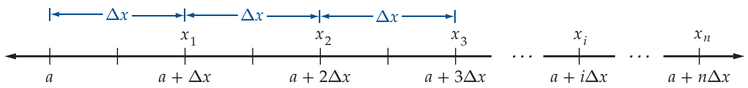
رمز التكامل نبِّه الطلاب إلى أن رمز التكامل هو شد للحرف S في كلمة *sum*.

تنويع التعليم

دون

المتعلمون الحركيون: اطلب إلى الطلاب أن يرسموا منحنى دالة في أحد الأمثلة على ورق مربعات كبير، ثم اطلب إليهم أن يقصُّوا المساحة المطلوبة، وأن يحدّدوا عدد الوحدات المربعة التي تحويها هذه المنطقة. والذي قد يتطلب تجميع أجزاء مختلفة من المساحات، ثم اطلب إليهم أن يقارنوا بين المساحة باستعمال التكامل وعدد الوحدات المربعة التي أوجدوها.

ولتسهيل الحسابات مستقبلًا، فإنه يمكننا اشتقاق صيغة لإيجاد أي x_i. فبما أن عرض أيٍّ من المستطيلات هو Δx ، ويساوي الفرق بين أي قيمتين متتاليتين من قيم x_i . وبالنظر إلى خط الأعداد أدناه:



يمكننا ملاحظة أن $x_i = a + i\Delta x$. ولهذه العلاقة أهميتها عند إيجاد المساحة تحت منحنى أي دالة لاحقًا.

لاحظ أنه كلما اقترب عرض المستطيل من الصفر، فإن عدد المستطيلات يقترب من المالانهاية، وتُسمَّى هذه النهاية **التكامل المحدد**، ويعبَّر عنها برمزٍ خاص.

مفهوم أساسي **التكامل المحدد**

يُعبر عن مساحة المنطقة المحصورة بين منحنى دالة والمحور x في الفترة $[a, b]$ بالصيغة

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta x \,,\ \Delta x = \frac{b-a}{n},\ x_i = a + i\Delta x$$

حيث a **الحد الأدنى**، و b **الحد الأعلى**، وتُسمَّى هذه الطريقة **مجموع ريمان الأيمن**.

سُمي مجموع ريمان بهذا الاسم نسبةً للعالم الألماني بيرنارد ريمان (1826 – 1866). والذي يُعزى إليه إيجاد صيغة لتقريب المساحة المحصورة باستعمال النهايات. ويمكننا تعديل الصيغة باستعمال الأطراف اليُسرى أو نقاط المنتصف لتحديد ارتفاعات المستطيلات.

وتسمى عملية حساب التكامل **تكاملًا**، وستُسهِّل صيغ المجاميع الآتية حساب التكامل المحدد.

$$\sum_{i=1}^{n} c = cn \quad ,\ c \text{ عدد ثابت} \qquad \sum_{i=1}^{n} i^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$$

$$\sum_{i=1}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2} \qquad \sum_{i=1}^{n} i^4 = \frac{6n^5 + 15n^4 + 10n^3 - n}{30}$$

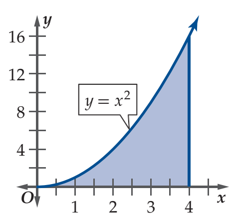
$$\sum_{i=1}^{n} i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \qquad \sum_{i=1}^{n} i^5 = \frac{2n^6 + 6n^5 + 5n^4 - n^2}{12}$$

تُستعمل خاصيتا المجموع الآتيتان لحساب بعض التكاملات:

$$\sum_{i=1}^{n} (a_i \pm b_i) = \sum_{i=1}^{n} a_i \pm \sum_{i=1}^{n} b_i \quad , \quad \sum_{i=1}^{n} ci = c\sum_{i=1}^{n} i \ ,\ c \text{ عدد ثابت}$$

مثال 3 **المساحة تحت منحنى باستعمال التكامل**

استعمل النهايات؛ لإيجاد مساحة المنطقة المحصورة بين منحنى $y = x^2$ والمحور x في الفترة $[0, 4]$ ؛ أي $\int_0^4 x^2\, dx$.



ابدأ بإيجاد Δx ، x_i .

$\Delta x = \frac{b-a}{n}$ صيغة Δx

$= \frac{4-0}{n} = \frac{4}{n}$ $b = 4 , a = 0$

$x_i = a + i\,\Delta x$ صيغة x_i

$= 0 + i\frac{4}{n} = \frac{4i}{n}$ $a = 0 , \Delta x = \frac{4}{n}$

احسب التكامل المحدد الذي يُعطي المساحة المطلوبة.

قراءة الرياضيات

رمز التكامل المحدد

يقرأ الرمز $\int_a^b f(x)dx$ التكامل من a إلى b للدالة $f(x)$ ، $d(x)$

تنبيه!

المجموع

إن مجموع عدد ثابت c هو $c\,n$ ، فمثلاً $\sum_{i=1}^{n} 5 = 5n$

التكامل

الأمثلة 5-3 تُبيّن كيفية استعمال التكامل لإيجاد المساحة تحت منحنى دالة في فترة ما.

مثال إضافي

3 استعمل النهايات ؛ لإيجاد مساحة المنطقة المحصورة بين منحنى الدالة $y = x^2 + 1$ ، والمحور x في الفترة $[0, 4]$ ، أو $\int_0^4 (x^2+1)\, dx$.

25.33 وحدة مربعة تقريبًا

إرشادات للمعلم الجديد

الدقة نبّه الطلاب إلى أهمية كتابة كل خطوة عند حساب التكامل؛ تجنبًا للوقوع في أخطاء غير مقصودة. كما يجب على الطلاب أن يكونوا حريصين في اختيار الصيغة المناسبة لمجاميعهم.

$$\int_0^4 x^2\,dx = \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta x$$
تعريف التكامل المحدد

$$= \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} (x_i)^2\,\Delta x$$
$f(x_i) = x_i^2$

$$= \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} \left(\frac{4i}{n}\right)^2\left(\frac{4}{n}\right)$$
$x_i = \frac{4i}{n},\ \Delta x = \frac{4}{n}$

$$= \lim_{n\to\infty}\frac{4}{n}\sum_{i=1}^{n} \left(\frac{4i}{n}\right)^2$$
خصائص المجموع

$$= \lim_{n\to\infty}\frac{4}{n}\sum_{i=1}^{n} \frac{16i^2}{n^2}$$
وزِّع القوة

$$= \lim_{n\to\infty}\frac{4}{n}\left(\frac{16}{n^2}\sum_{i=1}^{n} i^2\right)$$
خصائص المجموع

$$= \lim_{n\to\infty}\frac{4}{n}\left(\frac{16}{n^2}\cdot\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}\right)$$
$\sum_{i=1}^{n} i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

$$= \lim_{n\to\infty}\frac{4}{n}\left(\frac{16n\,(2n^2+3n+1)}{6n^2}\right)$$
اضرب ووزِّع

$$= \lim_{n\to\infty}\frac{64n(2n^2+3n+1)}{6n^3}$$
اضرب

$$= \lim_{n\to\infty}\frac{64(2n^2+3n+1)}{6n^2}$$
اقسم

$$= \lim_{n\to\infty}\frac{64}{6}\left(\frac{2n^2+3n+1}{n^2}\right)$$
حلِّل

$$= \lim_{n\to\infty}\frac{64}{6}\left(2+\frac{3}{n}+\frac{1}{n^2}\right)$$
اقسم على n^2

$$= \left(\lim_{n\to\infty}\frac{64}{6}\right)\left[\lim_{n\to\infty}2 + \left(\lim_{n\to\infty}3\right)\left(\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\right) + \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^2}\right]$$
خصائص النهايات

$$= \frac{64}{6}\left[2+3(0)+0\right] = \frac{64}{3} \approx 21.33$$

أي أن مساحة المنطقة المطلوبة هي 21.33 وحدة مربعة تقريبًا.

إرشادات للدراسة

النهايات

حلِّل كل مجموع بحيث تتضمن العبارات الباقية إما أعدادًا ثابتة أو i فقط، ثم طبق صيغة المجموع المناسبة.

✓ تحقق من فهمك

استعمل النهايات؛ لإيجاد مساحة المنطقة المحصورة بين منحنى الدالة والمحور x والمعطاة بالتكامل المحدد في كلٍّ مما يأتي:

(3A $\int_0^1 3x^2\,dx$ وحدة مربعة

(3B $\int_0^3 x\,dx$ 4.5 وحدة مربعة

يمكننا أيضًا حساب مساحات المناطق باستعمال النهايات حال كون نقطة الأصل ليست حدًّا أدنى لها.

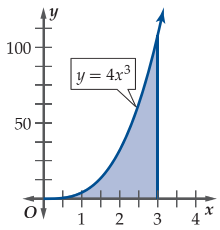
168 الفصل 8 النهايات والاشتقاق

مثال إضافي

4 استعمل النهايات؛ لإيجاد مساحة المنطقة المحصورة بين منحنى الدالة $y = x^3 + 1$ والمحور x في الفترة $[2, 4]$ ، أو $\int_2^4 (x^3+1)\,dx$.

62 وحدة مربعة

مثال 4 المساحة تحت منحنى باستعمال التكامل



استعمل النهايات؛ لإيجاد مساحة المنطقة المحصورة بين منحنى $y = 4x^3$ والمحور x ، في الفترة $[1, 3]$ ؛ أي $\int_1^3 4x^3\,dx$.

ابدأ بإيجاد Δx ، x_i .

$$\Delta x = \frac{b-a}{n}$$ صيغة Δx

$$= \frac{3-1}{n} = \frac{2}{n}$$ $b = 3 , a = 1$

$$x_i = a + i\,\Delta x$$ صيغة x_i

$$= 1 + i\,\frac{2}{n} = 1 + \frac{2i}{n}$$ $a = 1 , \Delta x = \frac{2}{n}$

احسب التكامل المحدد والذي يُعطي المساحة المطلوبة.

$$\int_1^3 4x^3\,dx = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta x$$ تعريف التكامل المحدد

$$= \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} 4(x_i)^3\Delta x$$ $f(x_i) = 4(x_i)^3$

$$= \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} 4\left(1 + \frac{2i}{n}\right)^3 \left(\frac{2}{n}\right)$$ $x_i = 1 + \frac{2i}{n} , \Delta x = \frac{2}{n}$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{8}{n}\sum_{i=1}^{n} \left(1 + \frac{2i}{n}\right)^3$$ خصائص المجموع

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{8}{n}\sum_{i=1}^{n} \left[1 + 3\left(\frac{2i}{n}\right) + 3\left(\frac{2i}{n}\right)^2 + \left(\frac{2i}{n}\right)^3\right]$$ مفكوك $\left(1 + \frac{2i}{n}\right)^3$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{8}{n}\sum_{i=1}^{n} \left(1 + \frac{6i}{n} + \frac{12i^2}{n^2} + \frac{8i^3}{n^3}\right)$$ بسّط

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{8}{n}\left(\sum_{i=1}^{n} 1 + \sum_{i=1}^{n} \frac{6i}{n} + \sum_{i=1}^{n} \frac{12i^2}{n^2} + \sum_{i=1}^{n} \frac{8i^3}{n^3}\right)$$ خصائص المجموع

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{8}{n}\left(\sum_{i=1}^{n} 1 + \frac{6}{n}\sum_{i=1}^{n} i + \frac{12}{n^2}\sum_{i=1}^{n} i^2 + \frac{8}{n^3}\sum_{i=1}^{n} i^3\right)$$ خصائص المجموع

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{8}{n}\left(n + \frac{6}{n}\cdot\frac{n(n+1)}{2} + \frac{12}{n^2}\cdot\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + \frac{8}{n^3}\cdot\frac{n^2(n+1)^2}{4}\right)$$ صيغ المجموع

$$= \lim_{n\to\infty} \left(\frac{8n}{n} + \frac{48n(n+1)}{2n^2} + \frac{96n(2n^2+3n+1)}{6n^3} + \frac{64n^2(n^2+2n+1)}{4n^4}\right)$$ وزّع واضرب

$$= \lim_{n\to\infty} \left(8 + \frac{24(n+1)}{n} + \frac{16(2n^2+3n+1)}{n^2} + \frac{16(n^2+2n+1)}{n^2}\right)$$ بسّط

$$= \lim_{n\to\infty} \left[8 + 24\left(1 + \frac{1}{n}\right) + 16\left(2 + \frac{3}{n} + \frac{1}{n^2}\right) + 16\left(1 + \frac{2}{n} + \frac{1}{n^2}\right)\right]$$ اقسم

$$= \lim_{n\to\infty} 8 + 24\lim_{n\to\infty}\left(1 + \frac{1}{n}\right) + 16\lim_{n\to\infty}\left(2 + \frac{3}{n} + \frac{1}{n^2}\right) + 16\lim_{n\to\infty}\left(1 + \frac{2}{n} + \frac{1}{n^2}\right)$$ خصائص النهايات

$$= 8 + 24(1+0) + 16(2+0+0) + 16(1+0+0) = 80$$ بسّط

أي أن مساحة المنطقة المطلوبة هي 80 وحدة مربعة.

تحقق من فهمك

استعمل النهايات؛ لإيجاد مساحة المنطقة المحصورة بين منحنى الدالة والمحور x والمعطاة بالتكامل المحدد في كلٍّ مما يأتي:

(4A $\int_1^3 x^2\,dx$ $\quad \frac{26}{3}$ وحدات مربعة

(4B $\int_2^4 x^3\,dx$ $\quad$ 60 وحدة مربعة

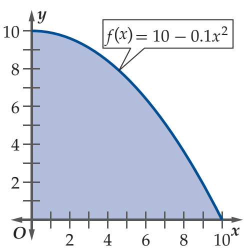
تنبيه!

النهايات
عند تقريب مساحة المنطقة تحت المنحنى باستعمال المجاميع، أوجد مجاميع قيم i قبل توزيع Δx أو أي ثوابت أخرى.

169 الدرس 5-8 المساحة تحت المنحنى والتكامل

مثال 5 من واقع الحياة — المساحة تحت منحنى

بلاط: يكلِّف تبليط القدم المربعة الواحدة من فناء منزل بالجرانيت 22.4 ريالًا. إذا تم تبليط ممرين متطابقين في فناء المنزل بالجرانيت، وكانت المساحة بالقدم المربعة لأيٍ من الممرين تُعطى بالتكامل $\int_0^{10}(10-0.1x^2)\,dx$ ، فما تكلفة تبليط الممرين؟



ابدأ بإيجاد Δx ، x_i .

$$\Delta x = \frac{b-a}{n} \qquad \text{صيغة } \Delta x$$

$$= \frac{10-0}{n} = \frac{10}{n} \qquad a=0,\ b=10$$

$$x_i = a + i\,\Delta x \qquad \text{صيغة } x_i$$

$$= 0 + i\frac{10}{n} = \frac{10i}{n} \qquad a=0,\ \Delta x = \frac{10}{n}$$

احسب التكامل المحدد والذي يُعطي المساحة المطلوبة.

$$\int_0^{10}(10-0.1x^2)\,dx = \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta x \qquad \text{تعريف التكامل المحدد}$$

$$= \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}(10-0.1{x_i}^2)\Delta x \qquad f(x_i) = 10 - 0.1{x_i}^2$$

$$= \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\left[10-0.1\left(\frac{10i}{n}\right)^2\right]\cdot\frac{10}{n} \qquad x_i = \frac{10i}{n},\ \Delta x = \frac{10}{n}$$

$$= \lim_{n\to\infty}\frac{10}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(10-\frac{10i^2}{n^2}\right) \qquad \text{استعمل خصائص المجموع وبسِّط}$$

$$= \lim_{n\to\infty}\frac{10}{n}\left(\sum_{i=1}^{n}10-\sum_{i=1}^{n}\frac{10i^2}{n^2}\right) \qquad \text{خصائص المجموع}$$

$$= \lim_{n\to\infty}\frac{10}{n}\left(\sum_{i=1}^{n}10-\frac{10}{n^2}\sum_{i=1}^{n}i^2\right) \qquad \text{خصائص المجموع}$$

$$= \lim_{n\to\infty}\frac{10}{n}\left(10n-\frac{10}{n^2}\cdot\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}\right) \qquad \text{صيغ المجموع}$$

$$= \lim_{n\to\infty}\left(\frac{100n}{n}-\frac{100n(2n^2+3n+1)}{6n^3}\right) \qquad \text{خاصية التوزيع}$$

$$= \lim_{n\to\infty}\left(100-\frac{50(2n^2+3n+1)}{3n^2}\right) \qquad \text{اقسم على } n$$

$$= \lim_{n\to\infty}\left[100-\frac{50}{3}\left(2+\frac{3}{n}+\frac{1}{n^2}\right)\right] \qquad \text{اقسم على } n^2$$

$$= \lim_{n\to\infty}100-\frac{50}{3}\lim_{n\to\infty}\left(2+\frac{3}{n}+\frac{1}{n^2}\right) \qquad \text{خصائص النهايات}$$

$$= 100-\frac{50}{3}(2+0+0) = 66\tfrac{2}{3} \approx 66.67 \qquad \text{بسِّط}$$

أي أن مساحة أيٍّ من الممرين تساوي $66.67\ ft^2$ تقريبًا؛ لذا فإن تكلفة تبليط الممرين هي $2)\ 22.4 \times (66.67 \times 2)$ ريال أو 2986.8 ريالًا تقريبًا.

تحقق من فهمك

5) **طلاء:** لدى عبد الله كمية من الطلاء تكفي لطلاء $30\ ft^2$ ، هل تكفي هذه الكمية لطلاء جزأين من جدار مساحة كل منهما بالقدم المربعة تُعطَى بالتكامل $\int_0^5(5-0.2x^2)dx$ ؟ برِّر إجابتك.

الربط مع الحياة

الجرانيت
الجرانيت هو صخر ناري يتميز بنسيج خشن يكسبه مظهرًا فريدًا، وهو مقاوم لعوامل الأكسدة، لذلك يستعمل في تبليط الأرضيات.

5) لا؛ مساحة كل جزء من الجدار $16.67\ ft^2$ تقريبًا، بما أن المطلوب طلاء جزأين من الجدار، أي $2(16.67)$، ويساوي $33.34\ ft^2$ تقريبًا.
إذن كمية الطلاء لا تكفي.

مثال إضافي

5 **أعمال:** ينتج مصنع 2000 قميص يوميًا. تُعطى تكلفة زيادة الإنتاج من 2000 قميص إلى 5000 قميص يوميًا بالتكامل: $\int_{2000}^{5000}(20-0.004x)\,dx$. ما قيمة الزيادة في التكلفة؟ 18000 ريال

إرشادات للمعلم الجديد

إجابة السؤال لجميع "مسائل من واقع الحياة" ، ذكّر الطلاب بأن عليهم التحقّق من أنهم قد أجابوا عن المطلوب في المسألة. ففي المثال 5، تحتاج الإجابة إلى ضرب المساحة في 2 لوجود ممرين متطابقين، ثم الضرب في 22.4 ريالًا .

تنويع التعليم

فوق

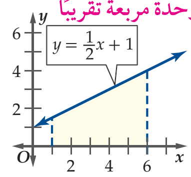
توسُّع: احسب $\int_{-2}^{2}\sqrt{4-x^2}\,dx$ من خلال التَّمثيل البياني للدالة ، وتحديد المساحة الدقيقة تحت المنحنى. وضِّح إجابتك.

6.28، المساحة الدقيقة تحت المنحنى هي 2π ؛ لأن المنطقة على شكل نصف دائرة طول نصف قطرها 2.

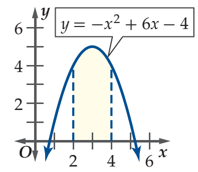
تدرب وحل المسائل

قرِّب مساحة المنطقة المظللة تحت منحنى الدالة مستعملًا الطرف المعطى لتحديد ارتفاعات المستطيلات المعطى عددها في كلٍّ من الأشكال أدناه: (مثال 1)

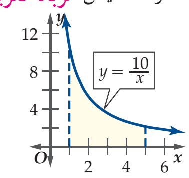
1) 5 مستطيلات
الطرف الأيمن **15 وحدة مربعة تقريبًا**



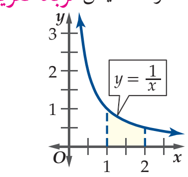
2) 4 مستطيلات **9.25 وحدات**
الطرف الأيسر **مربعة تقريبًا**



3) 8 مستطيلات **14.29 وحدة**
الطرف الأيمن **مربعة تقريبًا**



4) 5 مستطيلات **0.65 وحدة**
الطرف الأيمن **مربعة تقريبًا**

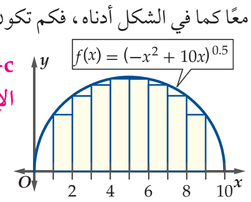


5) **أرضيات:** يرغب أحمد في تبليط جزء من فناء منزله على شكل نصف دائرة تمثله $f(x) = (-x^2 + 10x)^{0.5}$. (مثال 1)

a) قرِّب مساحة المنطقة نصف الدائرية باستعمال الأطراف اليسرى لمستطيلات عرض كل منها وحدة واحدة.

b) إذا قرَّر أحمد تقريب المساحة باستعمال الأطراف اليمنى واليسرى معًا كما في الشكل أدناه، فكم تكون المساحة؟

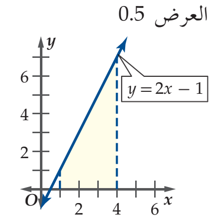
انظر ملحق (a–c الإجابات.



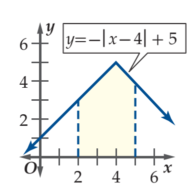
c) أوجد مساحة المنطقة باستعمال صيغة مساحة نصف الدائرة. أي التقريبين أقرب إلى المساحة الحقيقية؟ فسِّر إجابتك.

قرِّب مساحة المنطقة المظلَّلة تحت منحنى الدالة في كلٍّ من الأشكال الآتية مستعملًا الأطراف اليمنى ثم اليسرى؛ لتحديد ارتفاعات المستطيلات المعطى عرض كلٍّ منها، ثم أوجد الوسط للتقريبين: (مثال 2) **9-6) انظر الهامش.**

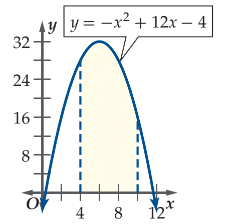
6) العرض 0.5



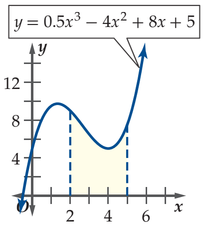
7) العرض 0.5



8) العرض 0.75



9) العرض 0.5



استعمل النهايات؛ لتقريب مساحة المنطقة المحصورة بين منحنى الدالة والمحور x والمعطى بالتكامل المحدد في كل مما يأتي: (المثالان 3, 4)

10) $\int_1^4 4x^2\,dx$ **84 وحدة مربعة**

11) $\int_0^2 6x\,dx$ **12 وحدة مربعة**

12) $\int_1^3 (2x^2 + 3)\,dx$ **$\frac{70}{3}$ وحدة مربعة**

13) $\int_0^4 (4x - x^2)\,dx$ **$\frac{32}{3}$ وحدة مربعة**

14) $\int_3^4 (-x^2 + 6x)\,dx$ **$\frac{26}{3}$ وحدة مربعة**

15) $\int_2^4 (-3x + 15)\,dx$ **12 وحدة مربعة**

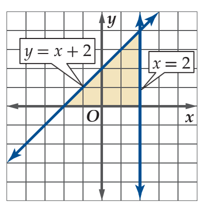
16) $\int_1^5 (x^2 - x + 1)\,dx$ **$\frac{100}{3}$ وحدة مربعة**

17) $\int_1^3 12x\,dx$ **48 وحدة مربعة**

18) **طباعة:** ارجع إلى فقرة "لماذا؟" في بداية الدرس. إذا زاد عدد الكتب المطبوعة يوميًا من 1000 كتاب إلى 1500 كتاب، فأوجد قيمة تكلفة الزيادة والمعطاة بالتكامل

$\int_{1000}^{1500} (10 - 0.002x)\,dx$. (مثال 5) **3750 ريالًا**

19) يمكن حساب التكاملات المحددة عندما يكون أحد حدي التكامل موجبًا والآخر سالبًا.



a) أوجد طول قاعدة وارتفاع المثلث، ثم مساحته باستعمال قانون مساحة المثلث. **انظر الهامش.**

b) أوجد مساحة المثلث بحساب التكامل $\int_{-2}^{2} (x + 2)\,dx$. **8 وحدات مربعة**

استعمل النهايات؛ لتقريب مساحة المنطقة المحصورة بين منحنى الدالة والمحور x والمعطى بالتكامل المحدد في كل مما يأتي:

20) $\int_{-1}^{1} x^2\,dx$ **$\frac{2}{3}$ وحدة مربعة**

21) $\int_{-1}^{0} (x^3 + 2)\,dx$ **1.75 وحدة مربعة**

22) $\int_{-4}^{-2} (-x^2 - 6x)\,dx$ **$\frac{52}{3}$ وحدة مربعة**

23) $\int_{-3}^{-2} -5x\,dx$ **12.5 وحدة مربعة**

24) $\int_{-2}^{0} (2x + 6)\,dx$ **8 وحدات مربعة**

25) $\int_{-1}^{0} (x^3 - 2x)\,dx$ **0.75 وحدة مربعة**

3 التدريب

التقويم التكويني

استعمل الأسئلة 1-18 للتأكد من فهم الطلاب.

ثم استعمل الجدول أسفل هذه الصفحة؛ لتعيين الواجبات المنزلية للطلاب بحسب مستوياتهم.

تنبيه !

خطأ شائع في التمارين 4–1، قد ينسى الطلاب أن يضربوا في عرض المستطيلات؛ لذا ذكّرهم بضرورة الضرب في العرض الصحيح لهذه المستطيلات .

إجابات:

5c) 39.27 وحدة مربعة، التقريب الأول أفضل. إجابة ممكنة: المساحة الإضافية الواقعة خارج نصف الدائرة والمحتواه في التقريب الأول تساعد على حساب مساحة المنطقة التي لم تدخل في حسابات المستطيلات.

6) المساحة باستعمال الأطراف اليمنى هي 13.5 وحدة مربعة، المساحة باستعمال الأطراف اليسرى هي 10.5 وحدات مربعة، الوسط للمساحة هو 12 وحدة مربعة.

7) المساحة باستعمال الأطراف اليمنى هي 12.75 وحدة مربعة، المساحة باستعمال الأطراف اليسرى هي 12.25 وحدات مربعة، الوسط للمساحة هو 12.5 وحدة مربعة.

8) المساحة باستعمال الأطراف اليمنى هي 162.94 وحدة مربعة، المساحة باستعمال الأطراف اليسرى هي 171.94 وحدة مربعة، الوسط للمساحة هو 167.44 وحدة مربعة.

9) المساحة باستعمال الأطراف اليمنى هي 18.91 وحدة مربعة. المساحة باستعمال الأطراف اليسرى هي 19.66 وحدة مربعة، الوسط للمساحة هو 19.28 وحدة مربعة.

19a) الارتفاع = 4 وحدات، القاعدة = 4 وحدات، المساحة = 8 وحدات مربعة.

تنويع الواجبات المنزلية

دون ضمن فوق

المستوى	الأسئلة
دون دون المتوسط	1–18 ، 31–33 ، 35–47
ضمن ضمن المتوسط	1–29 (فردي)، 30–33، 35–47
فوق فوق المتوسط	19–47

استعمل النهايات لتقريب مساحة المنطقة المحصورة بين منحنى الدالة والمحور x ، والمُعطى بالتكامل المحدد في كل مما يأتي:

(26 $\int_{-3}^{-1}(-2x^2-7x)\,dx$ $\frac{32}{3}$ وحدة مربعة

(27 $\int_{-2}^{0}(-x^3)\,dx$ 4 وحدات مربعة

(28 $\int_{-4}^{3}2\,dx$ 14 وحدة مربعة

(29 $\int_{-2}^{-1}\left(-\frac{1}{2}x+3\right)dx$ 3.75 وحدات مربعة

(30 **تمثيلات متعددة:** سوف تستقصي في هذه المسألة عملية إيجاد مساحة المنطقة المحصورة بين منحنيين. (a-e) انظر ملحق الإجابات.

a) **بيانيًا:** مَثِّل منحنى $f(x)=-x^2+4$ ، $g(x)=x^2$ في المستوى الإحداثي نفسه، وظلل المساحتين اللتين يمثّلهما التكاملان $\int_0^1(-x^2+4)\,dx$ ، $\int_0^1 x^2\,dx$

b) **تحليليًا:** احسب $\int_0^1 x^2\,dx$ ، $\int_0^1(-x^2+4)\,dx$.

c) **لفظيًا:** وضّح لماذا تكون مساحة المنطقة المحصورة بين المنحنيين مساوية لـ $\int_0^1(-x^2+4)\,dx-\int_0^1 x^2\,dx$. ثم احسب هذه القيمة باستعمال القيم التي أوجدتها في الفرع b .

d) **تحليليًا:** أوجد $f(x)-g(x)$ ، ثم احسب $\int_0^1[f(x)-g(x)]\,dx$

e) **لفظيًا:** خمِّن طريقة إيجاد مساحة المنطقة المحصورة بين منحنيين.

مسائل مهارات التفكير العليا

(31 **اكتشف الخطأ:** سُئل ماجد وخالد عن دقة تقريب المساحة تحت منحنى باستعمال أطراف المستطيلات، فأجاب ماجد: إنه عند تقريب المساحة تحت منحنى باستعمال أطراف المستطيلات اليمنى، فإن المساحة الناتجة تكون أكبر دائمًا من المساحة الحقيقية تحت المنحنى. في حين أجاب خالد: إن المساحة المحسوبة باستعمال أطراف المستطيلات اليسرى تكون أكبر دائمًا من المساحة الحقيقية تحت المنحنى. أيهما كانت إجابته صحيحة ؟ برِّر إجابتك. انظر ملحق الإجابات.

(32 **تبرير:** افترض أن المقطع الرأسي العرضي لنفق يُعطى بالدالة f . اشرح كيف يمكن حساب حجم النفق باستعمال $\int_0^d f(x)\,dx$ ، حيث d عرض النفق، إذا كان طوله معلومًا. برِّر إجابتك. انظر الهامش.

(33 **اكتب:** اكتب ملخصًا للخطوات المتبعة لتقريب مساحة المنطقة المحصورة بين منحنى دالة والمحور x على فترة معطاة. انظر إجابات الطلاب.

(34 **تحدٍّ:** أوجد $\int_0^t(x^2+2)\,dx$. $\frac{t^3}{3}+2t$

(35 **اكتب:** وضّح إمكانية استعمال المثلثات أو الدوائر في تقريب المساحة تحت المنحنيات. أي الشكلين يعطي تقريبًا أفضل برأيك؟ انظر الهامش.

مراجعة تراكمية

أوجد مشتقة كل دالة مما يأتي: (الدرس 8-4) (36-38) انظر الهامش.

(36 $j(x)=(2x^3+11x)(2x^8-12x^2)$

(37 $f(k)=(k^{15}+k^2+2k)(k-7k^2)$

(38 $s(t)=(\sqrt{t}-7)(3t^8-5t)$

أوجد ميل مماس منحنى كل دالة مما يأتي عندما $x=1$: (الدرس 8-3)

(39 $y=x^3$ 3

(40 $y=x^3-7x^2+4x+9$ -7

(41 $y=(x+1)(x-2)$ 1

أوجد كل نهاية مما يأتي (إن وجدت): (الدرس 8-2)

(42 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x^2+3x}{x}$ 3

(43 $\lim\limits_{x\to 1}\frac{x^2-3x+2}{x-1}$ -1

(44 $\lim\limits_{x\to 3}\frac{x^2-9}{x^3-27}$ $\frac{2}{9}$

تدريب على اختبار

(45 ما مساحة المنطقة المحصورة بين $y=-x^2-3x+6$ والمحور x ، في الفترة $[2,6]$ ؟ A

A 93.33 وحدة مربعة تقريبًا

B 90 وحدة مربعة تقريبًا

C 86.67 وحدة مربعة تقريبًا

D 52 وحدة مربعة تقريبًا

(46 أيٌّ مما يأتي يمثّل مشتقة $n(a)=\frac{4}{a}-\frac{5}{a^2}+\frac{3}{a^4}+4a$ ؟ D

A $n'(a)=8a-5a^2+3a^4$

B $n'(a)=4a^2-5a^3+3a^4+4$

C $n'(a)=-\frac{4}{a^2}+\frac{5}{a^3}-\frac{3}{a^5}+4$

D $n'(a)=-\frac{4}{a^2}+\frac{10}{a^3}-\frac{12}{a^5}+4$

(47 ما قيمة $\lim\limits_{x\to 3}\frac{x^2+3x-10}{x^2+5x+6}$ ؟ D

A $\frac{1}{15}$

B $\frac{2}{15}$

C $\frac{3}{15}$

D $\frac{4}{15}$

4 التقويم

فهم الرياضيات اطلب إلى الطلاب الكتابة عن كيفية استعمال المستطيلات في إيجاد المساحة التقريبية تحت منحنى دالة ما.
إجابة ممكنة: أوجد مساحة كل مستطيل بضرب العرض في الطول الذي يُمثّل قيمة الدالة عند نقطة، ثم اجمع مساحات المستطيلات .

التقويم التكويني

تحقق من فهم الطلاب الدرسين 5-8، 4-8 بإعطائهم:

الاختبار القصير 3، ص (69)

تمثيلات متعددة

يستعمل الطلاب في التمرين 30 التمثيل البياني لإيجاد مساحة المنطقة المحصورة بين منحنيين، ثم حسابها جبريًّا.

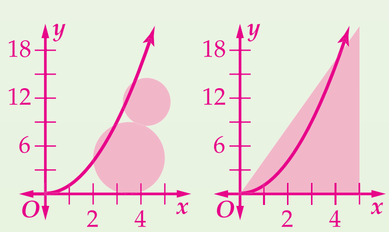
تنبيه !

اكتشف الخطأ: في التمرين 31، على الطلاب إدراك أن التقريب الأكبر يتغيّر اعتمادًا على سلوك الدالة. إذا كانت الدالة متزايدة، فإن استعمال الأطراف اليمنى سيُعطي قيمة أكبر للمساحة. أما إذا كانت الدالة متناقصة، فإن استعمال الأطراف اليسرى للمستطيلات هو الذي يُعطي تقريبًا أكبر للمساحة.

إجابات:

(32 إجابة ممكنة: يعطي التكامل مساحة كل مقطع عرضي، ونحصل على حجم النفق بضرب هذه المساحة في طول النفق.

(35 إجابة ممكنة: يُعطي المثلث تقريبًا جيدًا للمساحة، وذلك اعتمادًا على شكل المنحنى كما هو مبين أدناه، أما إذا كان للدالة عدة نقاط حرجة، فإنه من الصعب استعمال المثلثات. أما الدوائر فيصعب استعمالها، وذلك لأنها تترك مساحات واسعة خارجها؛ لذا فإن المثلثات أسهل للاستعمال عند تقريب المساحة؛ بسبب مرونة التعامل معها مقارنة مع الدوائر.



(36 $j'(x)=(6x^2+11)(2x^8-12x^2)+(2x^3+11x)(16x^7-24x)$

(37 $f'(k)=(15k^{14}+2k+2)(k-7k^2)+(k^{15}+k^2+2k)(1-14k)$

(38 $s'(t)=\frac{\sqrt{t}}{2t}(3t^8-5t)+(\sqrt{t}-7)(24t^7-5)$

8-6 النظرية الأساسية في التفاضل والتكامل
The Fundamental Theorem of Calculus

فيما سبق:
درستُ استعمال النهايات لتقريب المساحة تحت منحنى دالة. (الدرس 5–8)

والآن:
- أجدُ دوال أصلية.
- أستعمل النظرية الأساسية في التفاضل والتكامل لأجد التكامل المحدد.

المفردات:
الدالة الأصلية
antiderivative
التكامل غير المحدد
indefinite integral
النظرية الأساسية في التفاضل والتكامل
Fundamental Theorem of Calculus

www.obeikaneducation.com

لماذا؟

سقط قلم من جيب علي في أثناء ركوبه منطادًا، فهوى نحو الأرض. إذا كانت سرعة سقوط القلم المتجهة بالقدم لكل ثانية تُعطى بـ $v(t) = -32t$ ، فمن الممكن إيجاد الارتفاع الذي سقط منه القلم.

الدوال الأصلية والتكامل غير المحدد تعلمت في الدرسين 3-8 و4-8، أنّه إذا أُعطيتَ موقع جسم بـ $f(x) = x^2 + 2x$ ، فإن العبارة التي تمثِّل سرعة الجسم هي مشتقة $f(x)$ أو $f'(x) = 2x + 2$ ، لكن إذا أُعطيت عبارة تمثِّل السرعة، وطُلِب إليك إيجاد صيغة المسافة التي تم إيجاد السرعة منها، فلا بد من وجود طريقة للعمل عكسيًا والعودة إلى الدالة الأصلية وإلغاء الاشتقاق.

وبمعنى آخر، فإننا نبحث عن $F(x)$ ، بحيث إن $F'(x) = f(x)$. وتُسمَّى $F(x)$ **دالة أصلية** للدالة f .

مثال 1 إيجاد الدوال الأصلية

أوجد دالة أصلية لكل دالة مما يأتي:

a) $f(x) = 3x^2$

لنبحث عن دالة مشتقتها $3x^2$. تذكر أن قوة x في مشتقة دالة القوة أقل بواحد من قوة x في الدالة. وعليه فإن قوة المتغير x في $F(x)$ ستكون 3 ، وبما أن معامل x في مشتقة الدالة يساوي قوة x في الدالة، فإن $F(x) = x^3$ تحقق المطلوب. حيث إن مشتقة x^3 هي $3x^{3-1}$ أو $3x^2$.

إن x^3 ليست الدالة الوحيدة التي تحقِّق المطلوب، فمثلًا $G(x) = x^3 + 10$ تحقق المطلوب أيضًا؛ لأن $G'(x) = 3x^{3-1} + 0 = 3x^2$ ، وكذلك $H(x) = x^3 - 37$ تحقق المطلوب.

b) $f(x) = -\frac{8}{x^9}$

أعد كتابة $f(x)$ بقوى سالبة لتحصل على $f(x) = -8x^{-9}$ ، وبما أن قوة x في مشتقة الدالة أقل بواحد من قوة x في الدالة، فإن قوة x في $F(x)$ ستكون -8 ، وعليه تكون $F(x) = x^{-8}$ دالة أصلية للدالة f ،

فمشتقة x^{-8} هي $-8x^{-8-1} = -8x^{-9}$. لاحظ أن كلًّا من $G(x) = x^{-8} + 3$ ، $H(x) = x^{-8} - 12$ تمثِّل دالة أصلية للدالة f.

تحقق من فهمك

أوجد دالَّتين أصليتين مختلفتين لكل دالة مما يأتي:

1A) $2x$
إجابة ممكنة: $x^2, x^2 + 5, x^2 - 7, x^2 + 28$

1B) $-3x^{-4}$
إجابة ممكنة: $x^{-3}, x^{-3} + 33, x^{-3} - 4, x^{-3} + 9$

في المثال 1 لاحظ أن إضافة أو طرح ثابت لدالَّةٍ أصلية ينتج عنه دالة أصلية أخرى، وبشكل عام فإن إضافة أو طرح ثابت C لدالة أصلية يُنتج دالة أصلية أخرى ؛ لأن مشتقة الثابت صفر. وعليه فإن هناك عددًا لانهائيًّا من الدوال الأصلية لأي دالة. والشكل العام للدالة الأصلية هو الشكل الذي يحوي الثابت C .

8-6 ملاحظات الدرس

1 التركيز

الترابط الرأسي

ما قبل الدرس 6-8
استعمال النهايات؛ لإيجاد المساحات تحت منحنى دالة.

الدرس 6-8
إيجاد دوال أصلية.
استعمال النظرية الأساسية في التفاضل والتكامل في إيجاد التكامل المحدد.

ما بعد الدرس 6-8
إيجاد تكاملات لدوال من غير كثيرات الحدود.

2 التدريس

أسئلة التعزيز

اطلب إلى الطلاب قراءة فقرة "لماذا؟".

واسأل:

- ما علاقة الدالة التي تُمثّل سرعة سقوط القلم بالدالة التي تُمثّل ارتفاعه؟ الدالة التي تُمثّل سرعة سقوط القلم هي مشتقة الدالة التي تُمثّل ارتفاعه. أو الدالة التي تُمثّل ارتفاع القلم هي الدالة الأصلية للدالة التي تُمثّل سرعته.
- ما الذي يحتاج إليه علي لتحديد الارتفاع الذي أسقط منه القلم؟ يحتاج لإيجاد الدالة الأصلية لدالة السرعة وتعويض عدد الثواني التي استغرقها القلم للوصول إلى سطح الأرض بدلًا من t.

مصادر الدرس 8-5

المصدر	دون المتوسط	ضمن المتوسط	فوق المتوسط
دليل المعلم	• تنويع التعليم، ص (177)	• تنويع التعليم، ص (177)	• تنويع التعليم، ص (177, 179)
كتاب التمارين	• كتاب التمارين، ص (23)	• كتاب التمارين، ص (23)	• كتاب التمارين، ص (23)
مصادر المعلم للأنشطة الصفية	• تدريبات إعادة التعليم، ص (26، 27) • تدريبات حل المسألة، ص (28)	• تدريبات حل المسألة، ص (28) • التدريبات الإثرائية، ص (29)	• تدريبات حل المسألة، ص (28) • التدريبات الإثرائية، ص (29)

كما في المشتقات، فإن هناك قواعد لإيجاد الدالة الأصلية.

مفهوم أساسي **قواعد الدالة الأصلية**

قاعدة القوة	إذا كان $f(x) = x^n$، حيث n عدد نسبي لا يساوي -1، فإن: $F(x) = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C$.
قاعدة ضرب دالة القوة في عدد ثابت	إذا كان $f(x) = kx^n$ ، حيث n عدد نسبي لا يساوي -1 ، k عددًا ثابتًا، فإن: $F(x) = \frac{kx^{n+1}}{n+1} + C$.
قاعدة المجموع والفرق	إذا كان لـ $f(x)$ ، $g(x)$ دالتان أصليتان هما $F(x)$ ، $G(x)$ على الترتيب ، فإن: $F(x) \pm G(x)$ دالة أصلية لـ $f(x) \pm g(x)$.

مثـال 2 **قواعد الدوال الأصلية**

أوجد جميع الدوال الأصلية لكل دالة مما يأتي:

a) $f(x) = 4x^7$

$f(x) = 4x^7$ — الدالة المعطاة

$F(x) = \frac{4x^{7+1}}{7+1} + C$ — قاعدة ضرب دالة القوة في عدد ثابت

$= \frac{1}{2}x^8 + C$ — بسِّط

b) $f(x) = \frac{2}{x^4}$

$f(x) = \frac{2}{x^4}$ — الدالة المعطاة

$= 2x^{-4}$ — أعد كتابة الدالة بقوة سالبة

$F(x) = \frac{2x^{-4+1}}{-4+1} + C$ — قاعدة ضرب دالة القوة في عدد ثابت

$= -\frac{2}{3}x^{-3} + C = -\frac{2}{3x^3} + C$ — بسِّط

c) $f(x) = x^2 - 8x + 5$

$f(x) = x^2 - 8x + 5$ — الدالة المعطاة

$= x^2 - 8x^1 + 5x^0$ — أعد كتابة الدالة بدلالة قوى x

$F(x) = \frac{x^{2+1}}{2+1} - \frac{8x^{1+1}}{1+1} + \frac{5x^{0+1}}{0+1} + C$ — قواعد الدالة الأصلية

$= \frac{1}{3}x^3 - 4x^2 + 5x + C$ — بسِّط

تحقق من فهمك

أوجد جميع الدوال الأصلية لكل دالة مما يأتي:

2A) $f(x) = 6x^4$ $F(x) = \frac{6}{5}x^5 + C$

2B) $f(x) = \frac{10}{x^3}$ $F(x) = \frac{-5}{x^2} + C$

2C) $f(x) = 8x^7 + 6x + 2$ $F(x) = x^8 + 3x^2 + 2x + C$

إرشادات للدراسة

الدوال الأصلية

$F(x) = kx$ هي دالة أصلية لـ $f(x) = k$ ، فمثلًا ، إذا كان $f(x) = 3$ ، فإن $F(x) = 3x$.

ربط المفردات

التكامل غير المحدد

سبب تسمية التكامل غير المحدد بهذا الاسم أنه لا يُعبر عن دالة محددة، بل عن عدد لا نهائي من الدوال الأصلية.

يُعطى الشكل العام للدَّالة الأصلية باسم ورمز خاصَّين.

مفهوم أساسي **التكامل غير المحدد**

يُعطى **التكامل غير المحدد** للدالة f بالصيغة $\int f(x)\,dx = F(x) + C$ ، حيث $F(x)$ دالة أصلية لـ $f(x)$، و C ثابت.

الدوال الأصلية والتكامل غير المحدد

المثالان 1, 2 يُبيِّنان كيفية إيجاد دالة أصلية لدوال كثيرات الحدود ودوال القوى.

التقويم التكويني

استعمل تدريبات "تحقق من فهمك" بعد كل مثال؛ للتحقق من مدى فهم الطلاب للمفاهيم.

مثالان إضافيان

1 أوجد دالة أصلية لكل دالة مما يأتي:

a) $f(x) = 6x$ إجابة ممكنة: $3x^2$

b) $f(x) = -6x^{-7}$ إجابة ممكنة: x^{-6}

2 أوجد جميع الدوال الأصلية لكل دالة مما يأتي:

a) $f(x) = 3x^5$ $\frac{1}{2}x^6 + C$

b) $f(x) = \frac{4}{x^6}$ $-\frac{4}{5x^5} + C$

c) $f(x) = x^2 + 3x + 4$ $\frac{1}{3}x^3 + \frac{3}{2}x^2 + 4x + C$

مثال 3 من واقع الحياة — التكامل غير المحدد

فيزياء: أجرى طلاب الصف الثالث الثانوي في إحدى المدارس الثانوية تجربة فيزيائية تتضمن إسقاط كرة من نافذة الفصل التي ترتفع عن سطح الأرض بـ 30 ft ، وتمثّل $v(t) = -32t$ سرعةَ الكرة المتجهة اللحظية بالأقدام بعد t ثانية من سقوطها.

a) أوجد دالَّة موقع الكرة $s(t)$ بعد t ثانية من سقوطها .

لإيجاد دالة الموقع، أوجد الدالة الأصلية لـ $v(t)$.

$s(t) = \int v(t)\,dt$ — العلاقة بين الموقع والسرعة المتجهة

$= \int -32t\,dt$ — $v(t) = -32t$

$= -\frac{32t^{1+1}}{1+1} + C$ — قاعدة ضرب دالة القوة في عدد ثابت

$= -16t^2 + C$ — بسّط

أوجد C بتعويض 30 ft للارتفاع الابتدائي، 0 s للزمن الابتدائي.

$s(t) = -16t^2 + C$ — الدالة الأصلية لـ $v(t)$

$30 = -16(0)^2 + C$ — $s(t) = 30\ ,\ t = 0$

$30 = C$ — بسّط

أي أن دالة موقع الكرة هي $s(t) = -16t^2 + 30$.

b) أوجد الزمن الذي تستغرقه الكرة حتى تصل إلى سطح الأرض.

حُلّ المعادلة $s(t) = 0$.

$s(t) = -16t^2 + 30$ — دالة موقع الكرة

$0 = -16t^2 + 30$ — $s(t) = 0$

$-30 = -16t^2$ — اطرح 30 من كلا الطرفين

$1.875 \approx t^2$ — اقسم كلا الطرفين على -16

$1.369 \approx t$ — خُذ الجذر التربيعي الموجب لكلا الطرفين

أي أن الكرة ستستغرق 1.369 s تقريبًا حتى تصل إلى سطح الأرض.

✓ تحقق من فهمك

3) **سقوط حُر:** عند قيام فنّي بإصلاح نافذة برج على ارتفاع 120 ft سقطت محفظتُه نحو الأرض، وتمثّل $v(t) = -32t$ سرعة المحفظة المتجهة اللحظية بالأقدام بعد t ثانية من سقوطها.

A) أوجد دالة موقع المحفظة $s(t)$ بعد t ثانية من سقوطها. $s(t) = -16t^2 + 120$

B) أوجد الزمن الذي تستغرقُهُ المحفظة حتى تصل إلى سطح الأرض.

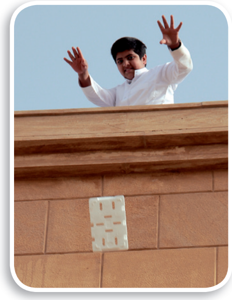
النظرية الأساسية في التفاضل والتكامل لاحظ أن الرمز المُستعمل للتكامل غير المحدد يبدو شبيهًا بالرمز الذي استُعمل للتكامل المحدد في الدرس 5-8 ، إذ إن الفرق الوحيد هو عدم ظهور حدَّي التكامل الأعلى والأدنى في رمز التكامل غير المحدد. إن إيجاد الدالة الأصلية لدالة ما: هو طريقة مختصرة لحساب التكامل المحدد للدالة نفسها باستعمال مجموع ريمان. وهذه العلاقة بين التكاملات المحددة والدوال الأصلية ذات أهمية كبيرة، وتُسمى **النظرية الأساسية في التفاضل والتكامل**.

مفهوم أساسي — النظرية الأساسية في التفاضل والتكامل

إذا كانت $F(x)$ دالةً أصلية للدالة المتصلة $f(x)$ ، فإن

$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)$.

ويمكن التعبير عن الطرف الأيمن من هذه العبارة بالرمز $F(x)\Big|_a^b$.



الربط مع الحياة

السقوط الحر قبل أربعمائة عام تقريبًا، استنتج جاليليو جاليلي أن لجميع الأجسام التي تسقط سقوطًا حرًا التسارع نفسه ، باهمال تأثير الهواء، وأن هذا التسارع لا يتأثر بأي من مادة الجسم الساقط أو وزنه أو الارتفاع الذي سقط منه.

3B) تصل المحفظة إلى سطح الأرض بعد 2.74 s.

الدوال الأصلية والتكامل غير المحدد

المثال 3 يُبيّن كيفية إيجاد ثابت التكامل في مواقف خاصة.

مثال إضافي

3 **القفز إلى الماء:** تُمثّل الدالة $v(t) = -32t$ السرعة التي قفز بها شخص من فوق منحدر ارتفاعه 100 ft باتجاه سطح الماء، حيث $v(t)$ سرعة الشخص المتجهة اللحظية بالأقدام لكل ثانية t.

a) أوجد دالة موقع الشخص $s(t)$ بعد t ثانية من قفزه. $s(t) = -16t^2 + 100$

b) أوجد الزمن الذي يستغرقه الشخص للوصول إلى سطح الماء. 2.5 s

إرشادات للمعلم الجديد

الدوال الأصلية أكد على الطلاب أن مصطلح الدالة الأصلية «مصطلح مضلل»، إذ توجد دوال أصلية عددها لانهائي، فلا نقول: أوجد الدالة الأصلية، إنما نقول: أوجد دالة أصلية، حيث إن وجود ال التعريف تعني واحدة فقط.

175 الدرس 6-8 النظرية الأساسية في التفاضل والتكامل

النظرية الأساسية في التفاضل والتكامل

المثال 4 يُبيّن كيفية استعمال النظرية الأساسية في التفاضل والتكامل في إيجاد المساحة تحت منحنى دالة في فترة محددة.

مثال إضافي

4 استعمل النظرية الأساسية في التفاضل والتكامل في حساب مساحة المنطقة المحصورة بين منحنى كل دالة مما يأتي والمحور x في الفترة المعطاة:

a) $y = 5x^4$ على الفترة $[2, 4]$ ؛ أي $\int_2^4 5x^4\,dx$. 992 وحدة مربعة

b) $y = -x^2 + 6x + 9$ على الفترة $[0, 6]$ ؛ أي $\int_0^6 (-x^2 + 6x + 9)\,dx$. 90 وحدة مربعة

التعليم باستعمال التقنيات

مدونة على الطلاب إضافة مدخل يوضحون فيه مفهوم النظرية الأساسية في التفاضل والتكامل، وكيفية استعمالها في حساب المساحة تحت منحنى دالة في فترة محددة.

إرشادات للمعلم الجديد

دوال أصلية عند حساب تكامل ما، نبّه الطلاب إلى ضرورة إيجاد دالة أصلية أولًا ثم القيام بالتعويض.

من نتائج النظرية الأساسية في التفاضل والتكامل أنها ربطت بين التكاملات والمشتقات، فالتكامل هو عملية إيجاد دوال أصلية، في حين أن الاشتقاق هو عملية إيجاد مشتقات. لذا فإن عمليتي التكامل والاشتقاق هما عمليتان عكسيتان، ويمكننا استعمال النظرية الأساسية في التفاضل والتكامل لحساب التكاملات المحددة دون الحاجة إلى استعمال النهايات.

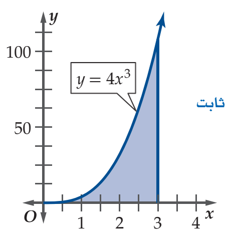
تاريخ الرياضيات

ماريا أجنسن (1718–1799) عالمة إيطالية برعت في اللغات والفلسفة والرياضيات، ويُعدُّ كتابها *Analytical Institutions* أول كتاب ناقش حسابي التفاضل والتكامل معًا.

مثـال 4 المساحة تحت منحنى

استعمل النظرية الأساسية في التفاضل والتكامل لحساب مساحة المنطقة المحصورة بين منحنى كل دالة مما يأتي والمحور x على الفترة المعطاة:

a) $y = 4x^3$ على الفترة $[1, 3]$؛ أي $\int_1^3 4x^3\,dx$.



أولًا: أوجد الدالة الأصلية.

$$\int 4x^3\,dx = \frac{4x^{3+1}}{3+1} + C \quad \text{قاعدة ضرب دالة القوة في عدد ثابت}$$

$$= x^4 + C \quad \text{بسّط}$$

الآن: احسب قيمة الدالة الأصلية عند الحدين الأعلى والأدنى للتكامل ، ثم أوجد الفرق.

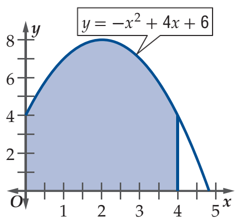
$$\int_1^3 4x^3\,dx = x^4 + C\Big|_1^3 \quad \text{النظرية الأساسية في التفاضل والتكامل}$$

$$= ((3)^4 + C) - ((1)^4 + C) \quad a = 1 , b = 3$$

$$= 81 - 1 = 80 \quad \text{بسّط}$$

أي أن مساحة المنطقة المحصورة بين منحنى $y = 4\,x^3$ والمحور x على الفترة $[1, 3]$ هي 80 وحدة مربعة.

b) $y = -x^2 + 4x + 6$ على الفترة $[0, 4]$؛ أي $\int_0^4 (-x^2 + 4x + 6)\,dx$



أولًا: أوجد الدالة الأصلية.

$$\int (-x^2 + 4x + 6)\,dx$$

$$= -\frac{x^{2+1}}{2+1} + \frac{4x^{1+1}}{1+1} + \frac{6x^{0+1}}{0+1} + C \quad \text{قواعد الدالة الأصلية}$$

$$= -\frac{x^3}{3} + 2x^2 + 6x + C \quad \text{بسّط}$$

الآن: احسب قيمة الدالة الأصلية عند الحدين الأعلى والأدنى للتكامل، ثم أوجد الفرق.

$$\int_0^4 (-x^2 + 4x + 6)\,dx = -\frac{x^3}{3} + 2x^2 + 6x + C\Big|_0^4 \quad \text{النظرية الأساسية في التفاضل والتكامل}$$

$$= \left(-\frac{(4)^3}{3} + 2(4)^2 + 6(4) + C\right) - \left(-\frac{(0)^3}{3} + 2(0)^2 + 6(0) + C\right) \quad a = 0 , b = 4$$

$$\approx 34.67 - 0 \approx 34.67 \quad \text{بسّط}$$

أي أن مساحة المنطقة المحصورة بين منحنى $y = -\,x^2 + 4\,x + 6$ والمحور x على الفترة $[0 , 4]$ هي 34.67 وحدة مربعة تقريبًا.

تحقق من فهمك

احسب كل تكامل محدد مما يأتي:

4A) $\int_2^5 3x^2\,dx$ 117

4B) $\int_1^2 (16x^3 - 6x^2)\,dx$ 46

لاحظ أنه عند حساب قيمة الدالة الأصلية عند الحدين الأعلى والأدنى للتكامل ، وحساب الفرق بين القيمتين ، فإن C لن تظهر في الناتج؛ وذلك لأن C موجودة في كلتا الدالتين الأصليتين، فإن الفرق بين قيمتي C يساوي صفرًا. لذا فإنه لحساب تكامل محدد باستعمال النظرية الأساسية في التفاضل والتكامل يمكنك إهمال الثابت C، وعدم كتابته في الدالة الأصلية.

قبل حساب التكامل حدِّد ما إذا كان محددًا أو غير محدد.

تنبيه!

التكاملات

صحيح أنه يمكن تجاهل الثابت C عند حساب التكامل المحدد، إلا أنه يجب أخذه بعين الاعتبار عند حساب التكامل غير المحدد؛ لأنه جزء من الدالة الأصلية.

مثال 5 التكاملات المحددة وغير المحددة

احسب كل تكامل مما يأتي:

a) $\int (9x - x^3)\,dx$

هذا تكامل غير محدد. استعمل قواعد الدالة الأصلية لحسابه.

$$\int (9x - x^3)\,dx = \frac{9x^{1+1}}{1+1} - \frac{x^{3+1}}{3+1} + C \quad \text{قواعد الدالة الأصلية}$$

$$= \frac{9}{2}x^2 - \frac{x^4}{4} + C \quad \text{بسِّط}$$

b) $\int_2^3 (9x - x^3)\,dx$

هذا تكامل محدد. احسب قيمة التكامل باستعمال قيمة الدالة الأصلية عند الحدين الأعلى والأدنى.

$$\int_2^3 (9x - x^3)\,dx = \left(\frac{9}{2}x^2 - \frac{x^4}{4}\right)\Big|_2^3 \quad \text{النظرية الأساسية في التفاضل والتكامل}$$

$$= \left(\frac{9}{2}(3)^2 - \frac{(3)^4}{4}\right) - \left[\frac{9}{2}(2)^2 - \frac{(2)^4}{4}\right] \quad a = 2 , b = 3$$

$$= 20.25 - 14 = 6.25 \quad \text{بسِّط}$$

تحقق من فهمك

احسب كل تكامل مما يأتي:

5A) $\int (6x^2 + 8x - 3)\,dx$ $\quad 2x^3 + 4x^2 - 3x + C$

5B) $\int_1^3 (-x^4 + 8x^3 - 24x^2 + 30x - 4)\,dx$ $\quad 15.6$

لاحظ أن التكامل غير المحدد يُعطي الدالَّة الأصلية، في حين لا يُعطي التكامل المحدد الدالة الأصلية بصورة صريحة، بل هو الفرق بين قيمتي الدالة الأصلية عند الحدين الأعلى والأدنى. أي أن التكامل غير المحدد يعطي دالة، وهي الدالة الأصلية، ويمكن استعمالها لإيجاد مساحة المنطقة تحت منحنى الدالة بين أي حدين أعلى وأدنى؛ ليصبح التكامل عندها محددًا.

مثال 6 التكاملات المحددة

يُعطى الشغل اللازم لشد نابض ما مسافة 0.5 m من موضعه الطبيعي بالتكامل $\int_0^{0.5} 360x\,dx$.
ما قيمة الشغل اللازم لشد النابض مقيسًا بوحدة الجول؟

احسب قيمة التكامل المحدد.

$$\int_0^{0.5} 360x\,dx = 180x^2 \Big|_0^{0.5} \quad \text{قاعدة ضرب دالة القوة في عدد ثابت ، والنظرية الأساسية في التفاضل والتكامل}$$

$$= 180(0.5)^2 - 180(0)^2 \quad a = 0 , b = 0.5$$

$$= 45 - 0 = 45 \quad \text{بسِّط}$$

أي أن الشغل اللازم هو 45J .

تحقق من فهمك

أوجد الشغل اللازم لشد نابض مسافة ما والمعطى بالتكامل في كل مما يأتي:

6A) $\int_0^{0.7} 476x\,dx$ $\quad$ 116.62 J

6B) $\int_0^{1.4} 512x\,dx$ $\quad$ 501.76 J

النظرية الأساسية في التفاضل والتكامل

المثالان 5, 6 يُبيّنان كيفية إيجاد التكاملات المحددة وغير المحددة.

مثالان إضافيان

5 أوجد كل تكامل مما يأتي :

a) $\int (x^3 - 2x + 1)\,dx$

$\frac{1}{4}x^4 - x^2 + x + C$

b) $\int_1^4 (x^3 - 2x + 1)\,dx$

51.75

6 يُعطى الشغل اللازم لشد نابض من موضعه الطبيعي بالتكامل $\int_0^{2.5} 60x\,dx$.
ما قيمة الشغل اللازم مقيسًا بوحدة الجول؟ 187.5 J

المحتوى الرياضي

التكاملات المحددة وغير المحددة

ينتج عن التكامل غير المحدد للدالة حد ثابت، إلا أن هذا الثابت يُحذف عند حساب التكامل المحدد؛ لأنه يُضاف إلى الحد العلوي، ويُطرح من الحد السفلي للتكامل.

تنويع التعليم

دون ضمن فوق

المتعلمون السمعيون: نظّم الطلاب في مجموعات ثنائية، واطلب إليهم كتابة فقرة يصفون فيها النظرية الأساسية في التفاضل والتكامل واستعمالاتها. واطلب إليهم عرض أعمالهم أمام الطلاب الآخرين.

تدرب وحل المسائل

أوجد جميع الدوال الأصلية لكل دالّة مما يأتي: (المثالان 1,2)

1) $f(x) = x^5$ (1–6) انظر الهامش.

2) $f(z) = \sqrt[3]{z}$

3) $q(r) = \frac{3}{4} r^{\frac{2}{5}} + \frac{5}{8} r^{\frac{1}{3}} + r^{\frac{1}{2}}$

4) $w(u) = \frac{2}{3} u^5 + \frac{1}{6} u^3 - \frac{2}{5} u$

5) $u(d) = \frac{12}{d^5} + \frac{5}{d^3} - 6 d^2 + 3.5$

6) $m(t) = 16 t^3 - 12 t^2 + 20 t - 11$

7) **سقوط حر:** ارجع إلى فقرة "لماذا؟" في بداية الدرس. افترض أن القلم قد استغرق 2s حتى الوصول إلى سطح الأرض. (مثال 3)

a) أوجد دالة الموقع $s(t) = \int -32t\, dt$. (a–c) انظر الهامش.

b) احسب قيمة C عندما $t = 2$s ، $s(t) = 0$.

c) ما ارتفاع القلم عن سطح الأرض بعد 1.5s من سقوطه؟

احسب كل تكامل مما يأتي: (المثالان 4,5)

8) $\int (6m + 12m^3)\, dm$ $3m^2 + 3m^4 + C$

9) $\int_1^4 2x^3\, dx$ 127.5

10) $\int_2^5 (a^2 - a + 6)\, da$ 46.5

11) $\int_1^3 \left(\frac{1}{2} h^2 + \frac{2}{3} h^3 - \frac{1}{5} h^4\right) dh$ 7.99

12) $\int (3.4 t^4 - 1.2 t^3 + 2.3 t - 5.7)\, dt$

$0.68t^5 - 0.3t^4 + 1.15t^2 - 5.7t + C$

13) $\int (14.2 w^{6.1} - 20.1 w^{5.7} + 13.2 w^{2.3} + 3)\, dw$

$2w^{7.1} - 3w^{6.7} + 4w^{3.3} + 3w + C$

14) **حشرات:** تُعطى سرعة قفز حشرة بـ $v(t) = -32t + 34$ ، حيث t الزمن بالثواني، و $v(t)$ السرعة المتجهة بالأقدام لكل ثانية. (مثال 6)

a) أوجد دالة الموقع $s(t)$ للحشرة، ثم احسب قيمة الثابت C بفرض أنه عندما $t = 0$ ، فإن $s(t) = 0$.
$s(t) = -16t^2 + 34t$

b) أوجد الزمن من لحظة قفز الحشرة حتى هبوطها على سطح الأرض؟ 2.125 s

15) **هندسة:** صمَّم مهندس مدخل بناية على شكل قوس يمكن وصفه بـ $y = -\frac{x^2}{157.5} + 4x$ ، حيث x بالأقدام. احسب مساحة المنطقة تحت القوس. (مثال 6) $264600\ \text{ft}^2$

احسب كل تكامل مما يأتي:

16) $\int_{-3}^{1} 3\, dx$ 12

17) $\int_{-1}^{2} (-x^2 + 10)\, dx$ 27

18) $\int_{-2}^{-1} \left(\frac{x^5}{2} + \frac{5x^4}{4}\right) dx$ 2.5

19) $\int_{-1}^{1} (x^4 - 2x^3 - 4x + 8)\, dx$ 16.4

20) $\int_{-6}^{-3} (-x^2 - 9x - 10)\, dx$ 28.5

21) **مقذوفات:** تُعطى سرعة مقذوف بـ $v(t) = -32t + 120$ ، حيث $v(t)$ السرعة المتجهة بالأقدام لكل ثانية بعد t ثانية ، ويبلغ ارتفاعه 228 ft بعد 3 s .

a) أوجد أقصى ارتفاع يصله المقذوف. 237 ft

b) أوجد سرعة المقذوف عندما يصل إلى سطح الأرض. −123.16 ft/s تقريبًا

احسب كل تكامل مما يأتي: (22–27) انظر الهامش.

22) $\int_x^2 (3t^2 + 8t)\, dt$

23) $\int_5^x (10t^4 - 12t^2 + 5)\, dt$

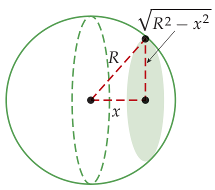
24) $\int_3^2 (4t^3 + 10t + 2)\, dt$

25) $\int_{-x}^{6} (-9t^2 + 4t)\, dt$

26) $\int_x^{x^2} (16t^3 - 15t^2 + 7)\, dt$

27) $\int_{2x}^{x+3} (3t^2 + 6t + 1)\, dt$

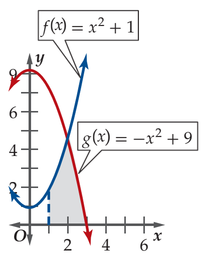
28) **حجم الكرة:** يمكن إيجاد حجم كرة طول نصف قطرها R بقصها إلى حلقات دائرية من خلال مستويات رأسية متوازية ثم إجراء تكامل لحساب مساحات الحلقات الدائرية.



يبلغ طول نصف قطر كل حلقة $\sqrt{R^2 - x^2}$ ، أي أن مساحة كل حلقة هي $\pi\left(\sqrt{R^2 - x^2}\right)^2$.

أوجد $\int_{-R}^{R} (\pi R^2 - \pi x^2)\, dx$ لحساب حجم الكرة. $\frac{4}{3}\pi R^3$

29) **مساحات:** احسب مساحة المنطقة المحصورة بين منحنيي $f(x)$ ، $g(x)$ والمحور x ، في الفترة $1 \le x \le 3$. 6 وحدات مربعة



3 التدريب

التقويم التكويني

استعمل الأسئلة 1-15 للتأكد من فهم الطلاب.

ثم استعمل الجدول أسفل هذه الصفحة؛ لتعيين الواجبات المنزلية للطلاب بحسب مستوياتهم.

تنبيه !

خطأ شائع: للأسئلة 8 و 12 و 13 ، ذكِّر الطلاب بإضافة الثابت C في إجاباتهم؛ لأن التكاملات غير محددة .

إجابات

1) $F(x) = \frac{1}{6}x^6 + C$

2) $F(z) = \frac{3}{4}z^{\frac{4}{3}} + C$

3) $Q(r) = \frac{15}{28}r^{\frac{7}{5}} + \frac{15}{32}r^{\frac{4}{3}} + \frac{2}{3}r^{\frac{3}{2}} + C$

4) $W(u) = \frac{1}{9}u^6 + \frac{1}{24}u^4 - \frac{1}{5}u^2 + C$

5) $U(d) = -\frac{3}{d^4} - \frac{5}{2d^2} - 2d^3 + 3.5d + C$

6) $M(t) = 4t^4 - 4t^3 + 10t^2 - 11t + C$

7a) $s(t) = -16t^2 + C$

7b) $s(t) = -16t^2 + 64$

7c) $28ft$

22) $-x^3 - 4x^2 + 24$

23) $2x^5 - 4x^3 + 5x - 5775$

24) -92

25) $-3x^3 - 2x^2 - 576$

26) $4x^8 - 5x^6 - 4x^4 + 5x^3 + 7x^2 - 7x$

27) $-7x^3 + 44x + 57$

تنويع الواجبات المنزلية

دون ضمن فوق

المستوى	الأسئلة
دون المتوسط	1–15، 32–46
ضمن المتوسط	1–19 فردي، 21، 22–26 زوجي، 28، 29، 30، 32 – 46
فوق المتوسط	16–46

30) **تمثيلات متعددة:** ستستكشف في هذه المسألة العلاقة بين قيمة تكامل دالة على فترة، ومساحة المنطقة المحصورة بين منحنى الدالة والمحور x ، وتأثير موقع الدالة بالنسبة لمحور x على إشارة التكامل.

a) **هندسيًا:** مَثِّل الدالة $f(x) = x^3 - 6x^2 + 8x$ بيانيًا، وظلّل المنطقة المحصورة بين $f(x)$ والمحور x، في الفترة $0 \le x \le 4$.

(a, c, e) انظر ملحق الإجابات.

b) **تحليليًا:** احسب كلًّا من:

$$\int_0^2 (x^3 - 6x^2 + 8x)\,dx \,,\ \int_2^4 (x^3 - 6x^2 + 8x)\,dx$$ **4, −4**

c) **لفظيًا:** أعطِ تخمينًا حول مساحة المنطقة الواقعة فوق أو تحت المحور x .

d) **تحليليًا** أوجد التكامل على الفترة كاملة من خلال حساب $\int_0^4 (x^3 - 6x^2 + 8x)\,dx$ ، ثم أوجد المساحة الكلية من خلال حساب

0, 8

$$\left|\int_0^2 (x^3 - 6x^2 + 8x)\,dx\right| + \left|\int_2^4 (x^3 - 6x^2 + 8x)\,dx\right|$$

e) **لفظيًا:** أعطِ تخمينًا حول الفرق بين قيمة التكامل على الفترة كاملة والمساحة الكلية.

مسائل مهارات التفكير العليا

31) **تحدٍّ:** احسب قيمة $\int_{-r}^{r} \sqrt{r^2 - x^2}\,dx$ ، حيث r عدد ثابت. $\frac{1}{2}\pi r^2$

تبرير: حَدِّد ما إذا كانت كل عبارة مما يأتي صحيحة دائمًا، أو صحيحة أحيانًا، أو غير صحيحة أبدًا. برِّر إجابتك: **(32–34) انظر الهامش.**

32) $\int_a^b f(x)\,dx = \int_b^a f(x)\,dx$

33) $\int_a^b f(x)\,dx = \int_{-b}^{-a} f(x)\,dx$

34) $\int_a^b f(x)\,dx = \int_{|b|}^{|a|} f(x)\,dx$

35) **برهان:** أثبت أنه لأي عددين ثابتين m ، n ، فإن

$$\int_a^b (n + m)\,dx = \int_a^b n\,dx + \int_a^b m\,dx$$

انظر ملحق الإجابات.

36) **تبرير:** صف قيم $\int_a^b f(x)\,dx$ ، $\sum_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta x$ ، $f(x)$ ، عندما يقع التمثيل البياني للدالة f تحت المحور x في الفترة $a \le x \le b$.

انظر ملحق الإجابات.

37) **اكتب:** بيِّن لماذا يمكننا إهمال الحد الثابت C في الدالة الأصلية عند حساب التكامل المحدد. **انظر الهامش.**

مراجعة تراكمية

استعمل النهايات لتقريب مساحة المنطقة المحصورة بين منحنى الدالة والمحور x ، والمعطاة بالتكامل في كل مما يأتي: (الدرس 8-5)

38) $\int_{-2}^{2} 14\,x^6\,dx$ **512**

39) $\int_0^6 (x + 2)\,dx$ **30**

استعمل قاعدة القسمة لإيجاد مشتقة كل دالة مما يأتي: (الدرس 8-4)

40) $j(k) = \frac{k^8 - 7k}{2k^4 + 11k^3}$ $\frac{8k^{11} + 55k^{10} + 42k^4 + 154k^3}{(2k^4 + 11k^3)^2}$

41) $g(n) = \frac{2n^3 + 4n}{n^2 + 1}$ $\frac{2n^4 + 2n^2 + 4}{(n^2 + 1)^2}$

42) إذا كان $\lim_{x \to 1} (2\,x^2 + a\,x) = 8$ ، فأوجد قيمة a. (الدرس 8-2) **6**

أوجد معادلة ميل منحنى كل دالة مما يأتي عند أي نقطة عليه: (الدرس 8-3)

43) $y = x^2 + 3$ $m = 2x$

44) $y = x^3$ $m = 3x^2$

تدريب على اختبار

45) إذا كان $\int_0^2 k\,x\,dx = 6$ ، فما قيمة k ؟ **C**

A 1

B 2

C 3

D 4

تمثيلات متعددة

يستعمل الطلاب في التمرين 30 التمثيل البياني والتحليل الجبري، والتعبير اللفظي لاستكشاف العلاقة بين قيمة تكامل دالة على فترة ومساحة المنطقة المحصورة بين منحنى الدالة والمحور x، وتأثير موقع الدالة بالنسبة لمحور x على إشارة التكامل.

4 التقويم

تعلم سابق اطلب إلى كل طالب كتابة كيفية استفادته من مفاهيم الدرس السابق عن التكامل في الدرس الجديد عن الدوال الأصلية.

التقويم التكويني

تحقق من فهم الطلاب الدرسين 6-8 بإعطائهم:

الاختبار القصير 4، ص (69)

إجابات:

32) أحيانًا؛ إجابة ممكنة: يؤدي تغيير ترتيب حدود التكامل إلى تغيير إشارته ما لم تكن قيمة التكامل صفرًا.

33) أحيانًا؛ إجابة ممكنة: إذا كانت $f(x)$ دالة زوجية، فإن العبارة تكون صحيحة دائمًا.

34) أحيانًا؛ إجابة ممكنة: إذا كان $f(x)$ دالة زوجية وكل من a,b سالبًا.

37) إجابة ممكنة: إذا احتوت الدالة $F(x)$ على الثابت C ، فإنه سيظهر في كل من $F(b)$ و $F(a)$ ، ولأننا نطرح هاتين القيمتين، فإن C تحذف.

تنويع التعليم

فوق

توسّع: افترض أن $f(x)$ دالَّة متصلة، وأن $F(x)$ دالة أصلية للدالة $f(x)$. أثبت أن:

$$\int_a^b f(x)\,dx + \int_b^c f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx.$$

$$\int_a^b f(x)\,dx + \int_b^c f(x)\,dx = [F(b) - F(a)] + [F(c) - F(b)]$$
$$= [F(c) - F(a)]$$
$$= \int_a^c f(x)\,dx$$

التقويم التكويني

المفردات

يشير رقم الصفحة بعد كل مفردة إلى الصفحة التي وردت فيها المفردة لأول مرة. إذا واجه الطلاب صعوبات في حل الأسئلة 8-1، فذكِّرهم بأنه يمكنهم استعمال هذه الصفحات مرجعًا ليتذكروا المعلومات حول هذه المفردات.

التقويم الختامي

اختبار المفردات للفصل 8، ص (71)

الفصل 8

دليل الدراسة والمراجعة

ملخص الفصل

مفاهيم أساسية

تقدير النهايات بيانيًّا (الدرس 8-1)

- تكون نهاية $f(x)$ عندما تقترب x من c موجودة ، إذا وفقط إذا كانت النهايتان من اليمين واليسار موجودتين ومتساويتين.
- تكون نهاية $f(x)$ عندما تقترب x من c غير موجودة إذا اقتربت $f(x)$ من قيمتين مختلفتين عند اقتراب قيم x من العدد c من اليسار ومن اليمين، أو عندما تزداد قيم $f(x)$ أو تتناقص بشكل غير محدود عند اقتراب قيم x من العدد c من اليسار أو اليمين أو كليهما، أو عندما تتذبذب قيم $f(x)$ بين قيمتين مختلفتين عند اقتراب قيم x من c.

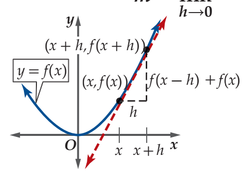
حساب النهايات جبريًّا (الدرس 8-2)

- يمكن إيجاد نهايات كثيرات الحدود والدوال النسبية عادةً من خلال التعويض المباشر.
- إذا توصلت إلى الصيغة غير المحددة $\frac{0}{0}$ عند حساب نهاية دالة نسبية، فبَسِّط العبارة جبريًّا من خلال تحليل كل من البسط والمقام أو إنطاق البسط أو المقام ، ثم اختصار العوامل المشتركة.

المماس والسرعة المتجهة (الدرس 8-3)

- مُعدّل التغيّر اللحظي للدالة f عند النقطة $(x, f(x))$ هو ميل المماس m عند النقطة $(x, f(x))$ ، ويُعطى بالصيغة

$$m = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$



المشتقة (الدرس 8-4)

- يُرمز لمشتقة $f(x) = x^n$ بالرمز $f'(x)$، وتُعطى بالصيغة $f'(x) = nx^{n-1}$ ، حيث n عدد حقيقي.

المساحة تحت المنحنى والتكامل (الدرس 8-5)

- تُعطى مساحة المنطقة المحصورة بين منحنى الدالة $f(x)$ والمحور x بالصيغة

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(x_i)\,\Delta x$$

، حيث b ، a هما الحدان الأعلى والأدنى للتكامل ،

$$\Delta x = \frac{b-a}{n}, x_i = a + i\Delta x$$

النظرية الأساسية في التفاضل والتكامل (الدرس 8-6)

- الدالة الأصلية لـ $f(x) = x^n$ هي $F(x)$ وتُعطى بالصيغة $F(x) = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C$ ، حيث C عدد ثابت
- إذا كانت $F(x)$ دالةً أصلية للدالة المتصلة $f(x)$، فإن

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)$$

المفردات

النهاية من جهة واحدة ص 130	المؤثر التفاضلي ص 156
النهاية من جهتين ص 130	التجزيء المنتظم ص 166
التعويض المباشر ص 139	التكامل المحدد ص 167
الصيغة غير المحددة ص 140	الحد الأدنى ص 167
المماس ص 149	الحد الأعلى ص 167
مُعدل التغيّر اللحظي ص 149	مجموع ريمان الأيمن ص 167
قسمة الفرق ص 149	التكامل ص 167
السرعة المتجهة اللحظية ص 151	الدالة الأصلية ص 173
المشتقة ص 156	التكامل غير المحدد ص 174
الاشتقاق ص 156	النظرية الأساسية في التفاضل والتكامل ص 175
المعادلة التفاضلية ص 156	

اختبر مفرداتك

اختر المفردة المناسبة لكل عبارة مما يأتي:

معدل التغير اللحظي

1) ميل المنحنى غير الخطي عند نقطة عليه هو ________ ، والذي يمكن تمثيله بميل مماس منحنى الدالة عند تلك النقطة.

2) يمكن إيجاد مساحة المنطقة المحصورة بين منحنى دالة والمحور x باستعمال التكامل المحدد.

3) يمكن إيجاد نهايات دوال كثيرات الحدود والدوال النسبية باستعمال التعويض المباشر ، وذلك إذا كان مقام الدالة النسبية لا يساوي صفرًا عند النقطة التي تُحسب عندها النهاية .

4) إذا كان $F'(x) = f(x)$ ، فإن $F(x)$ تُسمى دالة أصلية لـ $f(x)$.

5) يُسمى ناتج التعويض في النهايات على الصورة $\frac{0}{0}$ بـ الصيغة غير المحددة.

6) تُسمى عملية إيجاد المشتقة بـ الاشتقاق .

7) إذا سُبقت دالة بـ المؤثر التفاضلي $\frac{d}{dx}$ ، فإن ذلك يعني إيجاد مشتقة الدالة.

السرعة المتجهة اللحظية

8) يطلق على السرعة المتجهة عند لحظة زمنية محددة ________ .

180 الفصل 8 النهايات والاشتقاق

مراجعة الدروس

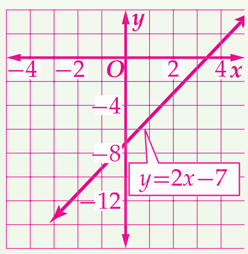
مراجعة: إذا كانت الأمثلة المعطاة غير كافية لمراجعة المواضيع التي تناولتها الأسئلة، فذكّر الطلاب بمرجع الصفحات الذي يدلهم أين يراجعون تلك المواضيع في كتابهم المقرر.

نموذج التوقع

اطلب إلى الطلاب تعبئة نموذج التوقع للفصل 8 ص (65)، وناقشهم حول تغيّر إجاباتهم بعد إتمام دراسة الفصل عمّا كانت عليه عند بدايته.

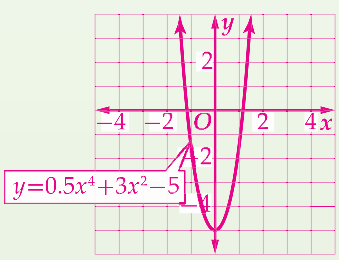
إجابات

9) -1



x	2.99	2.999	3	3.001	3.01
$f(x)$	−1.02	−1.002		−0.998	−0.998

10) -1.5



x	0.99	0.999	1	1.0001	1.001
$f(x)$	−1.579	−1.508		−1.499	−1.492

الفصل 8 دليل الدراسة والمراجعة

مراجعة الدروس

8-1 تقدير النهايات بيانيًا (الصفحات 128 - 136)

قدّر كل نهاية مما يأتي باستعمال التمثيل البياني، ثم عزّز إجابتك باستعمال جدول قيم:

9) $\lim_{x\to 3}(2x-7)$ **9, 10** انظر الهامش.

10) $\lim_{x\to 1}(0.5x^4+3x^2-5)$

قدّر كل نهاية مما يأتي:

11) $\lim_{x\to 2^+}\frac{x^2+x-6}{x-2}$ **5**

12) $\lim_{x\to 4}\frac{x^2+x+20}{x-4}$ **غير موجودة**

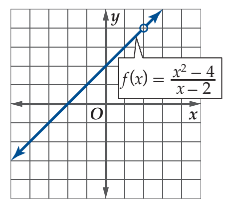
13) $\lim_{x\to 4}\frac{9}{x^2-8x+16}$ **∞**

14) $\lim_{x\to 2}\frac{x^2-7x-10}{x-2}$ **غير موجودة**

مثال 1

قدّر $\lim_{x\to 2}\frac{x^2-4}{x-2}$ باستعمال التمثيل البياني، ثم عزّز إجابتك باستعمال جدول قيم.

التحليل بيانيًا: يُبيّن التمثيل البياني للدالة $f(x)=\frac{x^2-4}{x-2}$ أدناه أنه كلما اقتربت قيم x من العدد 2 ، فإن قيم $f(x)$ المقابلة تقترب من 4 ؛ لذا فإن بإمكاننا تقدير $\lim_{x\to 2}\frac{x^2-4}{x-2}$ بالعدد 4 .



التعزيز عدديًا: كوّن جدول قيم باختيار قيم x القريبة من العدد 2 من كلا الجهتين.

x تقترب من 2 ⟵ ⟶ x تقترب من 2

x	1.9	1.99	1.999	**2**	2.001	2.01	2.1
$f(x)$	3.9	3.99	3.999		4.001	4.01	4.1

يبيِّن نمط قيم $f(x)$، أنه كلما اقتربت قيم x من العدد 2 من اليسار ومن اليمين، فإن قيم $f(x)$ تقترب من العدد 4 .

8-2 حساب النهايات جبريًا (الصفحات 137-146)

استعمل خصائص النهايات لحساب كل نهاية مما يأتي:

15) $\lim_{x\to 5}\frac{x^2+2x+10}{x}$ **9**

16) $\lim_{x\to -1}(5x^2-2x+12)$ **19**

احسب كل نهاية مما يأتي باستعمال التعويض المباشر إذا كان ممكنًا، وإلا فاذكر السبب. **ليس ممكنًا؛ فالمقام يساوي صفرًا عند $x = 25$.**

17) $\lim_{x\to 25}\frac{x^2+1}{\sqrt{x}-5}$

18) $\lim_{x\to 2}(-3x^3-2x^2+15)$ **-17**

احسب كل نهاية مما يأتي:

19) $\lim_{x\to -2}\frac{x+2}{x^2-2x-8}$ **$-\frac{1}{6}$**

20) $\lim_{x\to\infty}(2-4x^3+x^2)$ **$-\infty$**

مثال 2

احسب كل نهاية مما يأتي باستعمال التعويض المباشر إذا كان ذلك ممكنًا، وإلا فاذكر السبب.

a) $\lim_{x\to 2}(2x^3-x^2+4x+1)$

بما أن هذه نهاية كثيرة حدود؛ لذا يمكننا حسابها باستعمال التعويض المباشر.

$$\lim_{x\to 2}(2x^3-x^2+4x+1)=2(2)^3-2^2+4(2)+1$$
$$=16-4+8+1=21$$

b) $\lim_{x\to -4}\frac{2x-7}{2-x^2}$

بما أن هذه نهاية دالة نسبية مقامها ليس صفرًا عندما $x=-4$ ؛ لذا يمكننا حسابها باستعمال التعويض المباشر.

$$\lim_{x\to -4}\frac{2x-7}{2-x^2}=\frac{2(-4)-7}{2-(-4)^2}=\frac{-8-7}{2-16}=\frac{15}{14}$$

الفصل 8 دليل الدراسة والمراجعة

8-3 المماس والسرعة المتجهة (الصفحات 149-154)

أوجد ميل مماس منحنى كل دالة مما يأتي عند النقاط المعطاة :

21) $y = 6 - x$, $(-1, 7)$, $(3, 3)$ **$-1, -1$**

22) $y = x^2 + 2$, $(0, 2)$, $(-1, 3)$ **$0, -2$**

أوجد معادلة ميل منحنى كل دالةٍ مما يأتي عند أي نقطة عليه:

23) $y = -x^2 + 3x$ **$m = -2x + 3$**

24) $y = x^3 + 4x$ **$m = 3x^2 + 4$**

تمثِّل $s(t)$ في كل مما يأتي موقع جسم بالأقدام بعد t ثانية . أوجد سرعة الجسم المتجهة اللحظية عند الزمن المعطى:

25) $s(t) = 15t - 16t^2$, $t = 0.5$ **$v(0.5) = -1$ ft/s**

26) $s(t) = -16t^2 - 35t + 400$, $t = 3.5$ **$v(3.5) = -147$ ft/s**

تمثِّل $h(t)$ في كل مما يأتي مسار جسم متحرك . أوجد السرعة المتجهة اللحظية $v(t)$ للجسم عند أي زمن:

27) $h(t) = 12t^2 - 5$ **$v(t) = 24t$**

28) $h(t) = 8 - 2t^2 + 3t$ **$v(t) = -4t + 3$**

مثال 3

أوجد ميل مماس منحنى $y = x^2$ عند النقطة $(2, 4)$.

$m = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(x+h) - f(x)}{h}$ صيغة مُعدل التغير اللحظي

$= \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(2+h) - f(2)}{h}$ $x = 2$

$= \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{(2+h)^2 - 2^2}{h}$ $f(2+h) = (2+h)^2 , f(2) = 2^2$

$= \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{4 + 4h + h^2 - 4}{h}$ فك الأقواس

$= \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{h(4+h)}{h}$ بسّط، ثم حلّل

$= \lim\limits_{h \to 0} (4 + h)$ اقسم على h

$= 4 + 0 = 4$ عوّض

أي أن ميل مماس منحنى $y = x^2$ عند النقطة $(2, 4)$ هو 4 .

8-4 المشتقات (الصفحات 156-163)

أوجد مشتقة كل دالة مما يأتي باستعمال النهايات ، ثم احسب قيمة المشتقة عند النقاط المعطاة.

29) $g(t) = -t^2 + 5t + 11$, $t = -4 , 1$ **$g'(t) = -2t + 5, g'(-4) = 13, g'(-1) = 3$**

30) $m(j) = 10j - 3$, $j = 5 , -3$ **$m'(j) = 10; m'(5) = 10 , m'(-3) = 10$**

أوجد مشتقة كل دالة مما يأتي: **للتمارين (31-34) انظر الهامش.**

31) $p(v) = -9v + 14$

32) $z(n) = 4n^2 + 9n$

33) $t(x) = -3\sqrt[5]{x^6}$

34) $g(h) = 4h^{\frac{3}{4}} - 8h^{\frac{1}{2}} + 5$

استعمل قاعدة مشتقة القسمة؛ لإيجاد مشتقة كل دالة مما يأتي:

35) $f(m) = \dfrac{5 - 3m}{5 + 2m}$ **$f'(m) = \dfrac{-25}{(5+2m)^2}$**

36) $m(q) = \dfrac{2q^4 - q^2 + 9}{q^2 - 12}$ **$m'(q) = \dfrac{4q^5 - 96q^3 + 6q}{(q^2 - 12)^2}$**

مثال 4

أوجد مشتقة $h(x) = \dfrac{x^2 - 5}{x^3 + 2}$.

افترض أن $f(x) = x^2 - 5 , g(x) = x^3 + 2$. لذا، $h(x) = f(x)/g(x)$. أوجد مشتقة كل من $f(x), g(x)$

$f(x) = x^2 - 5$ من الفرض

$f'(x) = 2x$ قواعد مشتقات القوة والدالة الثابتة

$g(x) = x^3 + 2$ من الفرض

$g'(x) = 3x^2$ قواعد مشتقات القوة والدالة الثابتة

استعمل $f(x), f'(x), g(x), g'(x)$ لإيجاد مشتقة $h(x)$.

$h'(x) = \dfrac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{[g(x)]^2}$ قاعدة مشتقة القسمة

$= \dfrac{2x(x^3+2) - (x^2-5)3x^2}{(x^3+2)^2}$ عوّض

$= \dfrac{-x^4 + 15x^2 + 4x}{(x^3+2)^2}$ بسّط

الفصل 8 دليل الدراسة والمراجعة

إجابات:

31) $p'(v) = -9$

32) $z'(n) = 8n + 9$

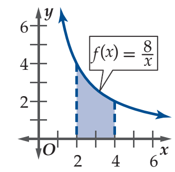
33) $t'(x) = -\frac{18}{5}x^{\frac{1}{5}}$

34) $g'(h) = 3h^{-\frac{1}{4}} - 4h^{-\frac{1}{2}}$

8-5 المساحة تحت المنحنى والتكامل (الصفحات 164 - 172)

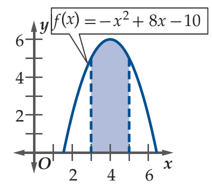
قرِّب مساحة المنطقة المظللة تحت منحنى كل دالة مما يأتي باستعمال الأطراف اليمنى و 5 مستطيلات:

(37



5.16 وحدات مربعة

(38



11.28 وحدة مربعة

استعمل النهايات؛ لتقريب مساحة المنطقة المحصورة بين منحنى الدالة والمحور x، والمعطى بالتكامل المحدد في كل مما يأتي:

(39 $\int_1^2 2x^2\,dx$ 4.67 وحدات مربعة تقريبًا

(40 $\int_0^3 (2x^3 - 1)\,dx$ 37.5 وحدة مربعة تقريبًا

(41 $\int_0^2 (x^2 + x)\,dx$ 4.67 وحدات مربعة تقريبًا

(42 $\int_1^4 (3x^2 - x)\,dx$ 55.5 وحدة مربعة تقريبًا

مثال 5

استعمل النهايات لإيجاد مساحة المنطقة المحصورة بين منحنى $y = 2x^2$ والمحور x، في الفترة $[0, 2]$ أو $\int_0^2 2x^2\,dx$.

ابدأ بإيجاد Δx، x_i.

$\Delta x = \frac{b-a}{n}$ صيغة Δx

$\Delta x = \frac{2-0}{n} = \frac{2}{n}$ $b = 2, a = 0$

$x_i = 0 + i\frac{2}{n} = \frac{2i}{n}$ $a = 0, \Delta x = \frac{2}{n}$

$\int_0^2 2x^2 dx = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} 2\left(\frac{2i}{n}\right)^2\left(\frac{2}{n}\right)$ $x_i = \frac{2i}{n}, \Delta x = \frac{2}{n}$

$= \lim_{n\to\infty} \frac{4}{n}\left(\sum_{i=1}^{n} \frac{4i^2}{n^2}\right)$ بسِّط

$= \lim_{n\to\infty} \frac{4}{n}\left(\frac{4}{n^2} \cdot \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}\right)$ صيغ المجموع

$= \lim_{n\to\infty} \left(\frac{8(2n^2+3n+1)}{3n^2}\right)$ بسِّط

$= \lim_{n\to\infty} \left[\frac{8}{3} \cdot \left(2 + \frac{3}{n} + \frac{1}{n^2}\right)\right]$ أخرج عاملًا مشتركًا، ثم اقسم على n^2

$= \frac{16}{3} \approx 5.33$ خصائص النهايات

8-6 النظرية الأساسية في التفاضل والتكامل (الصفحات 173 - 179)

أوجد جميع الدوال الأصلية لكل دالة مما يأتي: 43-46 انظر الهامش

(43 $g(n) = 5n - 2$

(44 $r(q) = -3q^2 + 9q - 2$

(45 $m(t) = 6t^3 - 12t^2 + 2t - 11$

(46 $p(h) = 7h^6 + 4h^5 - 12h^3 - 4$

احسب كل تكامل مما يأتي:

(47 $\int 8x^2\,dx$ $\frac{8}{3}x^3 + C$

(48 $\int (2x^2 - 4)\,dx$ $\frac{2}{3}x^3 - 4x + C$

(49 $\int_3^5 (2x^2 - 4 + 5x^3 + 3x^4)\,dx$ 2466.53 وحدة مربعة

(50 $\int_1^4 (-x^2 + 4x - 2x^3 + 5x^5)\,dx$ 3294 وحدة مربعة

مثال 6

أوجد جميع الدوال الأصلية لكل دالة مما يأتي:

(a $f(x) = \frac{4}{x^5}$

$f(x) = 4x^{-5}$ أعد كتابة الدالة المعطاة بقوة سالبة

$F(x) = \frac{4x^{-5+1}}{-5+1} + C$ قاعدة ضرب دالة القوة في عدد ثابت

$= x^{-4} + C = -\frac{1}{x^4} + C$ بسِّط

(b $f(x) = x^2 - 7$

$f(x) = x^2 - 7$ الدالة المعطاة

$= x^2 - 7x^0$ أعد كتابة الدالة بدلالة قوى x

$F(x) = \frac{x^{2+1}}{2+1} - \frac{7x^{0+1}}{0+1} + C$ قواعد الدالة الأصلية

$= \frac{1}{3}x^3 - 7x + C$ بسِّط

إجابات:

(43 $G(n) = \frac{5}{2}n^2 - 2n + C$

(44 $R(q) = -q^3 + " \frac{9}{2}q^2 - 2q + C$

(45 $M(t) = \frac{3}{2}t^4 - 4t^3 + t^2 - 11t + C$

(46 $p(h) = h^7 + \frac{2}{3}h^6 - 3h^4 - 4h + C$

تطبيقات ومسائل

51) حيوانات: يُعطى عدد الحيوانات P في محميَّة طبيعية بالمئات بعد t سنة بالدالة $P(t) = \frac{40t^3 + 48t + 100}{5t^3 - 70t - 95}$ ، حيث $t \geq 5$. (الدرس 8-1)

a) أوجد العدد التقريبي للحيوانات في المحميَّة بعد 5 سنوات. **2966 حيوانًا**

b) أوجد $\lim\limits_{t \to \infty} P(t)$ ؟ **800**

52) تحف فنية: لدى سلمان تحفة فنية يزداد سعرها كل سنة. افترض أن الدالة $v(t) = \frac{800t}{4t + 19}$ تمثِّل سعر التحفة بعد t سنة بمئات الريالات. (الدرس 8-1)

a) استعمل الآلة البيانية لتمثيل الدالة في الفترة $0 \leq t \leq 10$. **انظر الهامش.**

b) استعمل التمثيل البياني في الفرع **a** لتقريب سعر التحفة عندما $t = 3 , 6 , 10$. **7674, 11114, 13524**

c) استعمل التمثيل البياني في الفرع **a** لحساب $\lim\limits_{t \to \infty} v(t)$. **20000**

d) وضِّح العلاقة بين نهاية الدالة وسعر التحفة. **انظر الهامش.**

e) بعد 10 سنوات، قدَّم أحد المعارض الفنية عرضًا لشراء التحفة من سلمان بسعر 30000 ريال، هل من الأفضل بيعها بهذا السعر؟ برِّر إجابتك. **نعم؛ العرض أفضل من قيمة التحفة.**

53) مبيعات: افترض أن الدالة $v(t) = \frac{450}{5 + 25(0.4)^t}$ تمثِّل سعر سلعة ما بالريالات بعد t سنة. (الدرس 8-2)

a) أكمل الجدول أدناه: **للتمارين a, b انظر الهامش.**

السنة	0	1	2	3
السعر				

b) استعمل الآلة البيانية لتمثيل الدالة في الفترة $0 \leq t \leq 10$.

c) استعمل التمثيل البياني لتقدير $\lim\limits_{t \to \infty} v(t)$ إذا كانت موجودة. **90**

d) وضِّح العلاقة بين نهاية الدالة وسعر السلعة. **إجابة ممكنة: أقصى سعر يمكن أن تصله السلعة هو 90 ريالًا**

54) صواريخ: أُطلق صاروخ رأسيًّا إلى أعلى بسرعة 150 ft/s . افترض أن ارتفاع الصاروخ $h(t)$ بالأقدام بعد t ثانية يُعطى بالدالة $h(t) = -16t^2 + 150t + 8.2$. (الدرس 8-3)

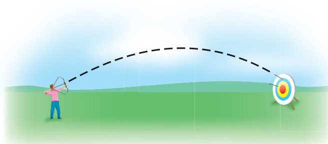
a) أوجد السرعة المتجهة اللحظية $v(t)$ للصاروخ. $-32t + 150$

b) ما سرعة الصاروخ بعد 1.5 s من إطلاقه؟ **102 ft/s**

c) متى يصل الصاروخ إلى أقصى ارتفاع؟ **≈4.69 s**

d) ما أقصى ارتفاع يصل إليه الصاروخ؟ **≈359.8 ft**

55) رماية: أطلق محمد سهمًا بسرعة 35 ft/s باتجاه هدف. افترض أن ارتفاع السهم h بالأقدام بعد t ثانية من إطلاقه مُعطى بالدالة $h(t) = -16t^2 + 35t + 1.5$. (الدرس 8-3)



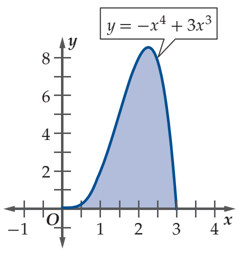
a) اكتب معادلة السرعة المتجهة اللحظية $v(t)$ للسهم. $-32t + 35$

b) ما سرعة السهم بعد 0.5 s من إطلاقه؟ **19 ft/s**

c) متى يصل السهم إلى أقصى ارتفاع؟ **≈1.09 s**

d) ما أقصى ارتفاع يصل إليه السهم؟ **≈20.64 ft**

56) تصميم: يقوم مصمم ألبسة رياضية بعمل شعار جديد يشبه المنطقة المظللة تحت المنحنى أدناه؛ حيث سيقوم بخياطة هذا الشعار على قمصان لاعبي فريق رياضي ، ما مقدار القماش الذي يحتاج إليه لعمل 50 شعارًا إذا كانت x بالبوصات؟ (الدرس 8-6) 607.5 in^2



57) ضفادع: تمثِّل الدالة $v(t) = -32t + 26$ سرعة قفز ضفدع بالأقدام لكل ثانية ، حيث t الزمن بالثواني. (الدرس 8-6)

a) أوجد موقع الضفدع $s(t)$ ، على فرض أن $s(t) = 0$ عندما $t = 0$. $s(t) = -16t^2 + 26t$

b) ما الزمن الذي يستغرقه الضفدع في الهواء عند قفزه؟ **1.63 s**

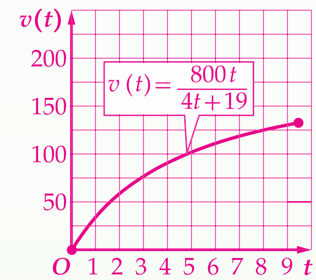
58) طيور: سقطت حبة قمح من منقار حمامة تطير على ارتفاع 20 ft ، وتُعطى سرعة سقوط الحبة بالدالة $v(t) = -32t$ ، حيث t الزمن بالثواني، $v(t)$ بالأقدام لكل ثانية. (الدرس 8-6) $s(t) = -16t^2 + 20$ (a

a) أوجد موقع الحبة $s(t)$ عند أي زمن.

b) أوجد الزمن الذي تستغرقه الحبة حتى تصل إلى سطح الأرض. **1.12 s**

إجابات:

52a)

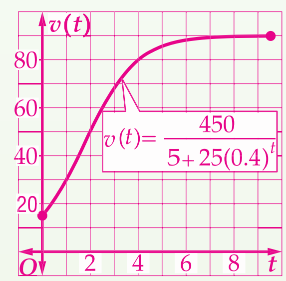


52d) لن تزيد قيمة التحفة عن 20000 ريال.

53a)

t	0	1	2	3
v	15	30	50	68.2

53b)



الفصل 8 اختبار الفصل

قدّر كل نهاية مما يأتي:

1) $\lim_{x \to 0^+} \sqrt{x+4} - 8$ **-6**

2) $\lim_{x \to 4} \frac{x^2 - 16}{x - 4}$ **8**

3) $\lim_{x \to 7} \frac{6}{x - 7}$ **غير موجودة**

4) $\lim_{x \to \infty} x^3 + 5x^2 - 2x + 21$ **∞**

5) **إلكترونيات:** يُعطى متوسط تكلفة إنتاج جهاز إلكتروني بالريال عند إنتاج x جهاز بالدالة $C(x) = \frac{100x + 7105}{x}$.

a) احسب نهاية الدالة عندما تقترب x من المالانهاية. **100**

b) فَسِّر الناتج في الفرع a. **انظر الهامش.**

احسب كل نهاية مما يأتي باستعمال التعويض المباشر إذا كان ممكنًا، وإلا فاذكر السبب:

6) $\lim_{x \to 5} \frac{x^2}{\sqrt{x-4} - 2}$ **-25**

7) $\lim_{x \to 9} (2x^3 - 12x + 3)$ **1353**

8) **نادٍ رياضي:** تُمثّل الدالة $S(t) = \frac{2000t^2 + 4}{1 + 10t^2}$ عدد المشتركين في نادٍ رياضي بعد t يوم من افتتاحه.

a) ما عدد المشتركين في البداية؟ **4**

b) ما أكبر عدد ممكن لمشتركي النادي؟ **200**

احسب كل نهاية مما يأتي (إن وجدت):

9) $\lim_{x \to \infty} (x^2 - 7x + 2)$ **∞**

10) $\lim_{x \to \infty} (2x^3 - 8x^2 - 5)$ **∞**

11) $\lim_{x \to \infty} \frac{2x^3 - x - 1}{-x^4 + 7x^3 + 4}$ **0**

12) $\lim_{x \to \infty} \frac{\sqrt{25 + x} - 4}{x}$ **0**

13) **اختيار من متعدد:** ما قيمة $\lim_{x \to 0} \frac{\frac{1}{x+3} - \frac{1}{3}}{x}$؟ **A**

A $-\frac{1}{9}$

B 0

C $\frac{1}{9}$

D غير موجودة

أوجد ميل مماس منحنى كل دالةٍ مما يأتي عند النقاط المعطاة:

14) $y = x^2 + 2x - 8$, $(-5, 7)$, $(-2, -8)$ **$-8, -2$**

15) $y = \frac{4}{x^3} + 2$, $(-1, -2)$, $\left(2, \frac{5}{2}\right)$ **$-12, -\frac{3}{4}$**

16) $y = (2x + 1)^2$, $(-3, 25)$, $(0, 1)$ **$-20, 4$**

أوجد السرعة المتجهة اللحظية $v(t)$ لجسم يُعطى موقعه عند أي زمن بالدالة $h(t)$ في كل مما يأتي:

17) $h(t) = 9t + 3t^2$ **$v(t) = 9 + 6t$**

18) $h(t) = 10t^2 - 7t^3$ **$v(t) = 20t - 21t^2$**

19) $h(t) = 3t^3 - 2 + 4t$ **$v(t) = 9t^2 + 4$**

أوجد مشتقة كل دالة مما يأتي:

20) $f(x) = -3x - 7$ **$f'(x) = -3$**

21) $b(c) = 4c^{\frac{1}{2}} - 8c^{\frac{2}{3}} + 5c^{\frac{4}{5}}$

21) $b'(c) = \frac{2}{\sqrt{c}} - \frac{16}{3c^{\frac{1}{3}}} + \frac{4}{c^{\frac{1}{5}}}$

22) $w(y) = 3y^{\frac{4}{3}} + 6y^{\frac{1}{2}}$ **$w'(y) = 4y^{\frac{1}{3}} + 3y^{-\frac{1}{2}}$**

23) $g(x) = (x^2 - 4)(2x - 5)$ **$g'(x) = 6x^2 - 10x - 8$**

24) $h(t) = \frac{t^3 + 4t^2 + t}{t^2}$ **$h'(t) = \frac{t^2 - 1}{t^2}$**

25) **صناعة:** تُعطى التكلفة الحدّية c بالريال لإنتاج x كرة قدم يوميًّا بالدالة $c(x) = 15 - 0.005x$.

a) أوجد دالة تمثِّل التكلفة الحقيقية. **$C(x) = 15x - 0.0025x^2$**

b) أوجد تكلفة زيادة الإنتاج اليومي من 1500 كرة إلى 2000 كرة. **3125 ريالًا**

استعمل النهايات؛ لتقريب مساحة المنطقة المحصورة بين منحنى الدالة والمحور x، والمعطاة بالتكامل المحدد في كل مما يأتي:

26) $\int_1^4 (x^2 - 3x + 4)\, dx$ **10.5 وحدات مربعة تقريبًا**

27) $\int_3^8 10x^4\, dx$ **65050 وحدة مربعة تقريبًا**

28) $\int_2^5 (7 - 2x + 4x^2)\, dx$ **156 وحدة مربعة تقريبًا**

أوجد جميع الدوال الأصلية لكل دالّة مما يأتي:

29) $d(a) = 4a^3 + 9a^2 - 2a + 8$ **$D(a) = a^4 + 3a^3 - a^2 + 8a + C$**

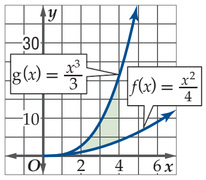
30) $w(z) = \frac{3}{4}z^4 + \frac{1}{6}z^2 - \frac{2}{5}$ **$W(z) = \frac{3}{20}z^5 + \frac{1}{18}z^3 - \frac{2}{5}z + C$**

احسب كل تكامل مما يأتي:

31) $\int (5x^3 - 6x^2 + 4x - 3)\, dx$ **$\frac{5}{4}x^4 - 2x^3 + 2x^2 - 3x + C$**

32) $\int_1^4 (x^2 + 4x - 2)\, dx$ **45**

33) **مساحات:** ما مساحة المنطقة المحصورة بين منحنيي $f(x)$، $g(x)$ في الفترة $2 \le x \le 4$ في الشكل أدناه؟ **C**



A $17\frac{5}{12}$ وحدة مساحة

B $17\frac{1}{3}$ وحدة مساحة

C $15\frac{1}{3}$ وحدة مساحة

D 16 وحدة مساحة

مخطط المعالجة

المستوى 1 ضمن المتوسط	المستوى 2 دون المتوسط
إذا أخطأ بعض الطلاب في 25% أو أقل تقريبًا من الأسئلة،	**إذا** أخطأ بعض الطلاب في 50% تقريبًا من الأسئلة،
فاختر أحد المصادر الآتية:	**فاختر** المصدر الآتي:
كتاب الطالب الدروس 8-1, 8-2, 8-3, 8-4, 8-5, 8-6	**زيارة الموقع** www.obeikaneducation.com
دليل المعلم مشروع الفصل, ص (134)	
زيارة الموقع www.obeikaneducation.com	

المعالجة:

بناءً على نتائج اختبار الفصل استعمل مخطط المعالجة في مراجعة المفاهيم التي لا تزال تشكل تحدِّيًا للطلاب.

اختبار الفصل: نماذج متعددة ص (72–79).

إجابة:

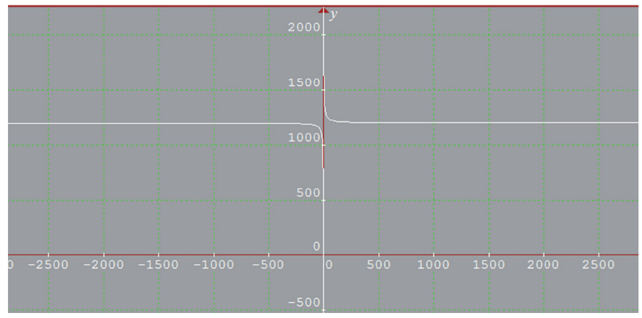
5b) إجابة ممكنة: رغم تقلب متوسط تكلفة الجهاز الإلكتروني، إلا أن متوسط التكلفة سيقترب من 100 ريال لكل جهاز.

التهيئة للفصل 8، ص 127

1) يظهر من المنحنى أن $q(x) \to 0$ عندما $x \to \infty$، و $q(x) \to 0$ عندما $x \to -\infty$.

2) من المنحنى، يظهر أن $m(x) \to -5$ عندما $x \to \infty$، وأن $m(x) \to -5$ عندما $x \to -\infty$.

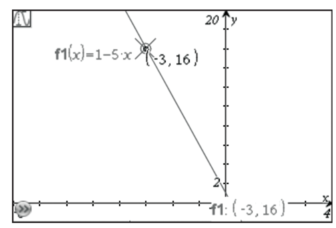
3)



تقترب قيمة $A(x)$ من 1200 عندما تقترب x من موجب مالانهاية.

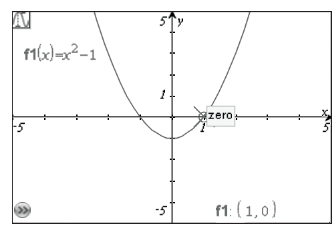
الدرس 1-8 (تحقق من فهمك)، ص (128, 130)

1A)



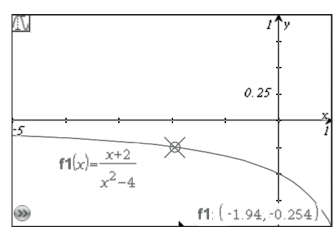
x	-3.01	-3.001	-3	-2.999	-2.99
$f(x)$	16.05	16.005		15.995	15.95

1B)



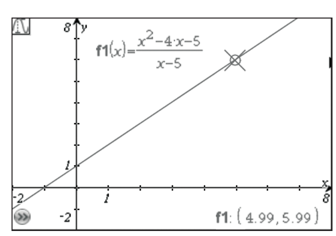
x	0.99	0.999	1	1.001	1.01
$f(x)$	-0.0199	-0.001999		0.002001	0.0201

2A)



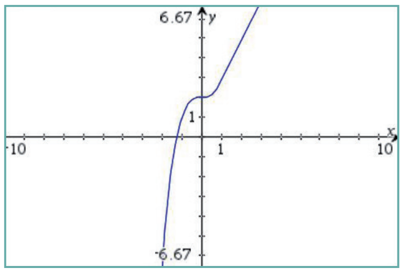
x	-1.99	-1.999	-2	-2.001	-2.01
$f(x)$	-0.2506	-0.2501		-0.2499	-0.2494

2B)



x	4.99	4.999	5	5.001	5.01
$f(x)$	5.99	5.999		6.001	6.01

3A)

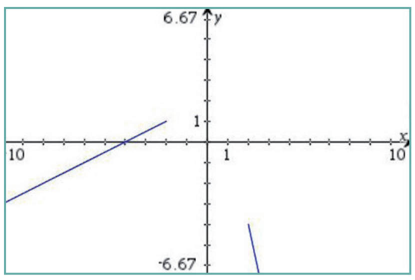


$\lim_{x\to1^-} f(x) = 3$,

$\lim_{x\to1^+} f(x) = 3$,

$\lim_{x\to1} f(x) = 3$

3B)



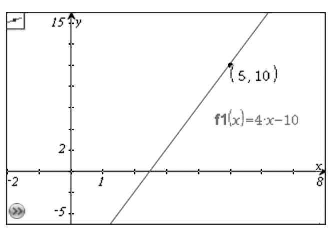
$\lim_{x\to-2^-} g(x) = 3$,

$\lim_{x\to-2^+} g(x) = -4$,

$\lim_{x\to-2} g(x)$ غير موجودة

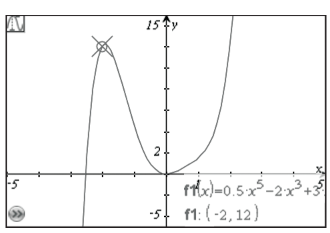
الدرس 1-8، ص (135, 136)

1)



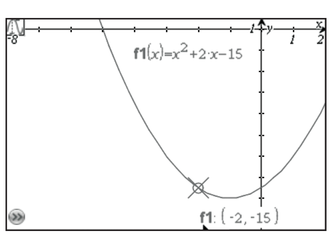
x	4.99	4.999	5	5.001	5.01
$f(x)$	9.96	9.996		10.004	10.04

2)



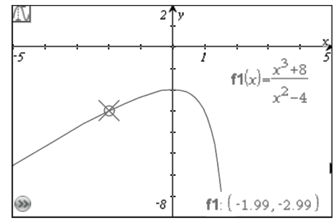
x	1.99	1.999	2	2.001	2.01
$f(x)$	11.72	11.972		12.028	12.28

3)



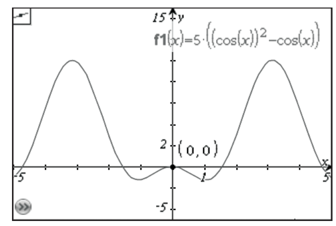
x	-2.01	-2.001	-2	-1.999	-1.99
$f(x)$	-14.98	-14.998		-15.002	-15.02

(4



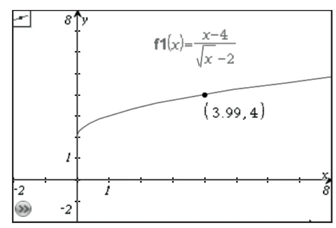
x	-2.01	-2.001	-2	-1.999	-1.99
$f(x)$	-3.008	-3.0008		-2.9993	-2.993

(5



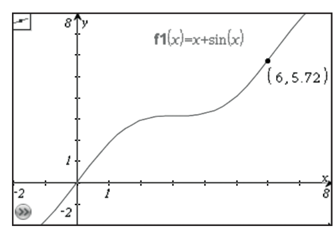
x	-0.01	-0.001	0	0.001	0.01
$f(x)$	-0.0002	-0.000002		-0.000002	-0.0002

(6



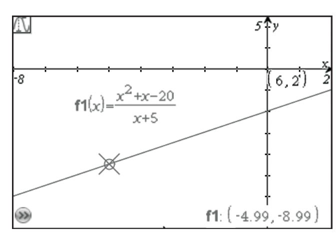
x	3.99	3.999	4	4.001	4.01
$f(x)$	3.997	3.9997		4.0002	4.002

(7



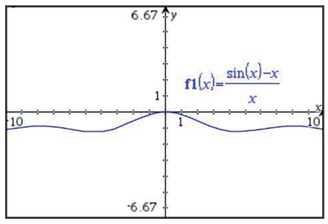
x	5.99	5.999	6	6.001	6.01
$f(x)$	5.70	5.719		5.723	5.74

(8

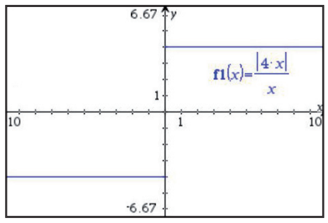


x	-5.01	-5.001	-5	-4.999	-4.99
$f(x)$	-9.01	-9.001		-8.999	-8.99

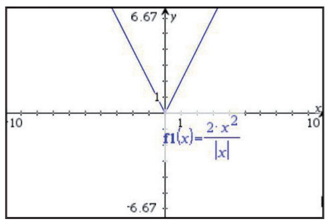
(9



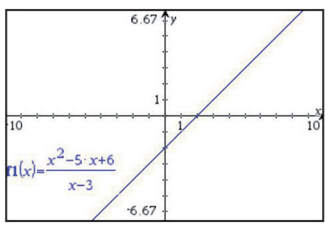
(10



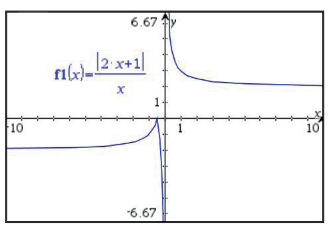
(11



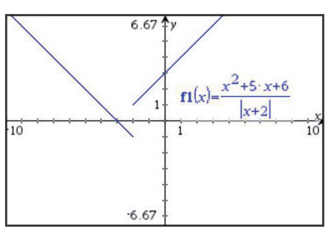
(12



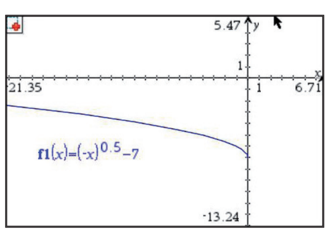
(13



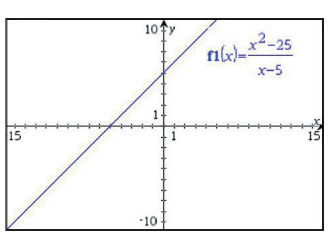
(14

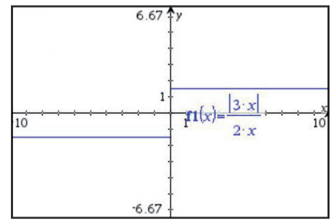


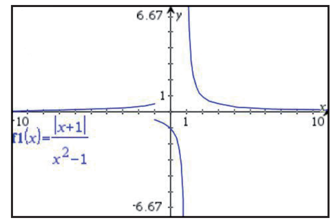
(15

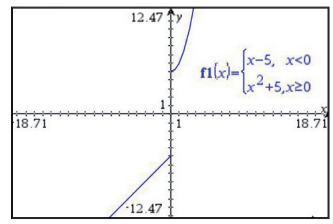


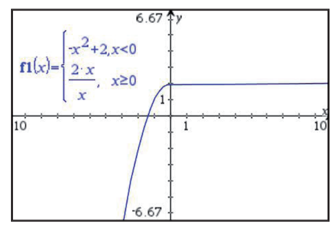
(16

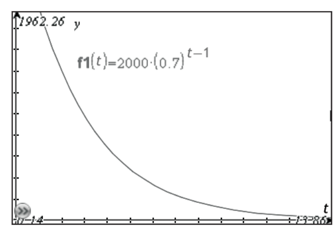


17) 

18) 

19) 

20) 

37a) 

37b) $480.2\ ,\ 80.71\ ,\ 13.56$

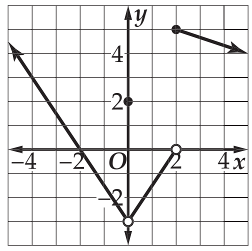
37d) لا؛ مجموع المتسلسلة الهندسية اللانهائية 6666.67 m تقريبًا، وهو أقل من 7000 m ، والذي يساوي بُعد المستشفى.

49) إجابة ممكنة: $f(x)=\frac{\sin x}{x}$، $g(x)=\begin{cases}2x & ، x=0\\ x+1 & ، x>0\end{cases}$.

50) $\lim_{x\to 1} f(x)$ غير موجودة؛ $\lim_{x\to 2} g(x)$ غير موجودة؛ إجابة ممكنة: إذا كان مقام الدالة النسبية صفرًا، والبسط لا يساوي صفرًا عند نقطة معطاة، فإن النهاية غير موجودة.

51) أحيانًا؛ إجابة ممكنة: لا تعتمد نهاية $f(x)$ عندما تقترب x من c على قيمة الدالة عند النقطة c. فإذا كانت الدالة غير متصلة عند c، وكان $f(c)=L$، فإن نهاية الدالة قد تكون قيمة مختلفة عن L.

52) إجابة ممكنة:



54) إجابة ممكنة: إذا كانت الدالة $f(x)$ متصلة عند $x=a$، فإنه يمكنك إيجاد النهاية بالتعويض عن x بـ a في الدالة.

55)
$$\sin\theta\left(\frac{1}{\sin\theta}-\frac{\cos\theta}{\cot\theta}\right)$$
$$=\sin\theta\left(\frac{1}{\sin\theta}-\cos\theta\div\frac{\cos\theta}{\sin\theta}\right)$$
$$=\sin\theta\left(\frac{1}{\sin\theta}-\frac{\cancel{\cos\theta}\cdot\sin\theta}{\cancel{\cos\theta}}\right)$$
$$=\sin\theta\left(\frac{1}{\sin\theta}-\frac{\sin^2\theta}{\sin\theta}\right)$$
$$=\cancel{\sin\theta}\left(\frac{1-\sin^2\theta}{\cancel{\sin\theta}}\right)$$
$$=\cos^2\theta$$

56) الدالة متصلة عند جميع قيم x ما عدا عند $x=-5$

حيث أن: (غير معرّفة) $h(-5)=\frac{0}{0}$

لكن: $\lim_{x\to -5} h(x)=\lim_{x\to -5}\frac{(x-5)(x+5)}{(x+5)}=-10$

وبما أن $h(-5)$ غير معرّفة، $\lim_{x\to -5} h(x)$ موجودة فإنه يوجد نقطة عدم اتصال قابل للإزالة عند $x=-5$.

الدرس 2-8 ، ص (146)

48)

$$\lim_{x\to c} p(x) = \lim_{x\to c} (a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_2x^2 + a_1x + a_0)$$

$$= \lim_{x\to c} a_n x^n + \lim_{x\to c} a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + \lim_{x\to c} a_2x^2 + \lim_{x\to c} a_1x + \lim_{x\to c} a_0$$

$$= a_n \lim_{x\to c} x^n + a_{n-1} \lim_{x\to c} x^{n-1} + \ldots + a_2 \lim_{x\to c} x^2 + a_1 \lim_{x\to c} x + \lim_{x\to c} a_0$$

$$= a_n \left(\lim_{x\to c} x\right)^n + a_{n-1}\left(\lim_{x\to c} x\right)^{n-1} + \ldots + a_2\left(\lim_{x\to c} x\right)^2 + a_1 \lim_{x\to c} x + \lim_{x\to c} a_0$$

$$= a_nc^n + a_{n-1}c^{n-1} + \cdots + a_2c^2 + a_1c + a_0$$

$$= p(c)$$

49) أثبت أن العبارة صحيحة عندما $n = 1$،

$$\lim_{x\to c} [f(x)]^1 = L^1 = L = \lim_{x\to c} [f(x)]$$

أي أن العبارة صحيحة عندما $n = 1$. افترض أن العبارة صحيحة عندما $n = k$ حيث k عدد صحيح موجب أي : $\lim_{x\to c} [f(x)]^k = L^k$.
والمطلوب إثبات أن العبارة صحيحة عندما $n = k + 1$ أي

$$\lim_{x\to c} [f(x)]^{k+1} = L^{k+1}$$

$$\lim_{x\to c} [f(x)]^{k+1} = \lim_{x\to c} [f(x)]^k \cdot \lim_{x\to c} [f(x)]^1 =$$

$$L^k \cdot L^1 = L^{k+1}$$

أي أن العبارة صحيحة عندما $n = k + 1$. وبحسب مبدأ الاستقراء الرياضي، فإن العبارة صحيحة لأي عدد صحيح موجب n.

52) إجابة ممكنة :

الخاصية	التعريف	مثال
خاصية المجموع	$\lim_{x\to c} [f(x) + g(x)] = \lim_{x\to c} f(x) + \lim_{x\to c} g(x)$	$\lim_{x\to 2} (x+5) = \lim_{x\to 2} x + \lim_{x\to 2} 5$
خاصية الفرق	$\lim_{x\to c} [f(x) - g(x)] = \lim_{x\to c} f(x) - \lim_{x\to c} g(x)$	$\lim_{x\to 2} (x-5) = \lim_{x\to 2} x - \lim_{x\to 2} 5$
خاصية الضرب في ثابت	$\lim_{x\to c} [kf(x)] = k \lim_{x\to c} f(x)$	$\lim_{x\to 2} 2x = 2 \lim_{x\to 2} x$
خاصية الضرب	$\lim_{x\to c} [f(x) \cdot g(x)] = \lim_{x\to c} f(x) \cdot \lim_{x\to c} g(x)$	$\lim_{x\to 2} [x^2(x-5)] = \left(\lim_{x\to 2} x^2\right)\left(\lim_{x\to 2} x-5\right)$
خاصية القسمة	$\lim_{x\to c} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x\to c} f(x)}{\lim_{x\to c} g(x)}$ if $\lim_{x\to c} g(x) \neq 0$	$\lim_{x\to 2}\left[\frac{x^2}{(x-5)}\right] = \frac{\left(\lim_{x\to 2} x^2\right)}{\left(\lim_{x\to 2} x-5\right)}$ حيث $\lim_{x\to 2} (x-5) \neq 0$
خاصية القوة	$\lim_{x\to c} [f(x)^n] = [\lim_{x\to c} f(x)]^n$	$\lim_{x\to 2} [(x-5)^2] = [\lim_{x\to 2} (x-5)]^2$
خاصية الجذر النوني	$\lim_{x\to c} \sqrt[n]{f(x)} = \sqrt[n]{\lim_{x\to c} f(x)}$ إذا كانت $\lim_{x\to c} f(x) > 0$ عندما n زوجي.	$\lim_{x\to 9} \sqrt{(x-5)} = \sqrt{\lim_{x\to 9} (x-5)}$

53) إجابة ممكنة: إذا كانت النهاية على الصورة $\frac{\infty}{\infty}$، فإنها لا تساوي 1؛ لأن ∞ ليس عددًا حقيقيًّا؛ بل يمثِّل رمزًا. حَلِّل هذه المسألة بتمثيل الدالة النسبية الأصلية بيانيًّا، وملاحظة سلوكها حول نقطة النهاية.

57)

$$(f+g)(x) = f(x) + g(x)$$
$$= x^2 - 2x + x + 9$$
$$= x^2 - x + 9$$

المجال : $(-\infty, \infty)$ أو R

$$(f-g)(x) = f(x) - g(x)$$
$$= x^2 - 2x - x - 9$$
$$= x^2 - 3x - 9$$

المجال : $(-\infty, \infty)$ أو R

$$(f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x)$$
$$= (x^2 - 2x) . (x + 9)$$
$$= x^3 + 9x^2 - 2x^2 - 18x$$
$$= x^3 + 7x^2 - 18x$$

المجال : $(-\infty, \infty)$ أو R

$$\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{x^2 - 2x}{x + 9}$$

المجال : $\{x \mid x \neq -9, x \in R\}$

58)

$$(f+g)(x)=f(x)+g(x)=\frac{x}{x+1}+x^2-1$$

المجال : $\{x|x\neq -1\,, x\in R\}$

$$(f-g)(x)=f(x)-g(x)=\frac{x}{x+1}-x^2+1$$

المجال : $\{x|x\neq -1\,, x\in R\}$

$$(f\cdot g)(x)=f(x)\cdot g(x)=\frac{x}{\cancel{x+1}}\cdot(x-1)\cancel{(x+1)}=x(x-1)$$

المجال : $\{x|x\neq -1\,, x\in R\}$

$$\left(\frac{f}{g}\right)(x)=\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{x}{x+1}\div(x^2-1)=\frac{x}{x+1}\cdot\frac{1}{x^2-1}$$

المجال : $\{x|x\neq -1, x\neq 1\,, x\in R\}$

الدرس 4-8، ص (162, 163)

1) $f'(x)=8x, f'(2)=16, f'(-1)=-8$

2) $g'(t)=-2t+2, g'(5)=-8, g'(3)=-4$

3) $m'(j)=14, m'(-7)=14\,, m'(-4)=14$

4) $v'(n)=10n+9, v'(7)=79\,, v'(2)=29$

5) $r'(b)=6b^2-10, r'(-4)=86\,, r'(-3)=44$

14a) $f'(h)=-0.0108h^2-0.02h+2.04$

14b) $f'(2)\approx 1.96°F\,, f'(14)\approx -0.36°F\,, f'(20)\approx -2.68°F$

14c) $68.92°F$

15) نقطة حرجة $(-2, -8)$، صغرى $(-2, -8)$، عظمى $(-5, 10)$

16) لا يوجد نقاط حرجة في الفترة $[1, 4]$، صغرى $(1, 5)$، عظمى $(4, 350)$

17) نقطة حرجة $(-5, -10)$، صغرى $(-6, -11)$، عظمى $(-3, -2)$

18) نقطة حرجة $(-9, 405)$، صغرى $(-11, 385)$، عظمى $(-9, 405)$

19) نقطة حرجة $(1, 1)$، صغرى $(0, 0)$، عظمى $(3, 9)$

20) نقطتان حرجتان $(-3, 21.5)$ و $(2, 0.67)$، صغرى $(2, 0.67)$، عظمى $(5, 32.17)$

21c) نعم؛ أقصى ارتفاع يمكن أن تبلغه الكرة هو 69.02 ft تقريبًا. وهذا أعلى من 68 ft

22) $f'(x)=4(x^2+9)+2x(4x+3)$

23) $g'(x)=(12x^3+2)(5-3x)-3(3x^4+2x)$

24) $s'(t)=\frac{\sqrt{t}}{2t}(3t^{11}-4t)+(\sqrt{t}+2)(33t^{10}-4)$

25) $g'(x)=\left(\frac{3}{2}x^{\frac{1}{2}}+2\right)\left(0.5x^4-3x\right)+\left(2x^3-3\right)\left(x^{\frac{3}{2}}+2x\right)$

26) $c'(t)=(3t^2+2-7t^6)(t^6+3t^4-22t)+(t^3+2t-t^7)\cdot(6t^5+12t^3-22)$

27) $q'(a)=\left(\frac{9}{8}a^{\frac{1}{8}}-\frac{1}{4}a^{-\frac{5}{4}}\right)\left(a^{\frac{5}{4}}-13a\right)+\left(a^{\frac{9}{8}}+a^{-\frac{1}{4}}\right)\cdot\left(\frac{5}{4}a^{\frac{1}{4}}-13\right)$

28) $f'(x)=(7x^4+2.7)(7.3x^9-0.8x^5)+(1.4x^5+2.7x)(65.7x^8-4x^4)$

29) $f'(m)=-\frac{12}{(3+2m)^2}$

30) $r'(t)=\frac{10t}{(3-t^2)^2}$

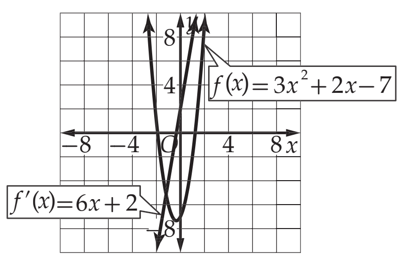
31) $m'(q)=\frac{q^6-2q^4-8q^3-9q^2-8q}{(q^3-2)^2}$

32) $f'(x)=\frac{4x^2+3x^{\frac{3}{2}}+3x^{\frac{-1}{2}}+12}{2(-x^2+3)^2}$

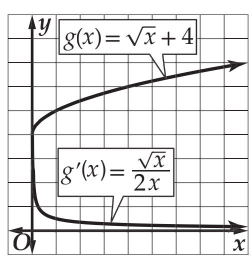
33) $q'(r)=\frac{r^2-15}{r^4}$

34) $t'(w)=\frac{1}{2}w^{-\frac{1}{2}}+\frac{7}{2}w^{\frac{5}{2}}$

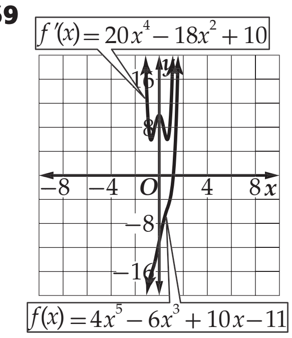
36)



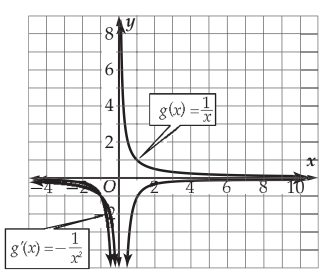
37)



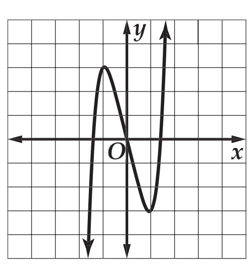
38)



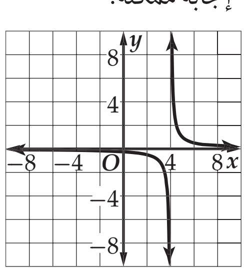
39)



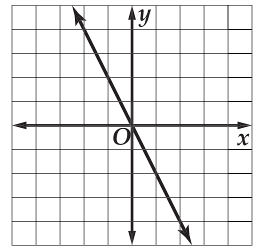
41) إجابة ممكنة :



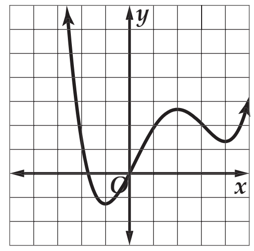
42) إجابة ممكنة:



43) إجابة ممكنة:

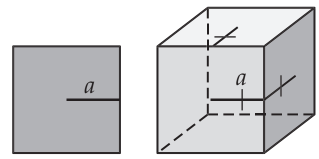


44) إجابة ممكنة:



45b) إجابة ممكنة: مشتقة صيغة مساحة الدائرة هي صيغة محيط الدائرة.

45c)



45d) $A = 4a^2,\ A' = 8a,\ V = 8a^3,\ V = 24a^2$

45e) عند كتابة مساحة المربع بدلالة بعد المركز عن الأضلاع، فإن مشتقة صيغة المساحة هي محيط المربع. وعند كتابة حجم المكعب بدلالة بعد المركز عن الأوجه، فإن مشتقة صيغة الحجم هي مساحة السطح الكلية للمكعب.

46) عبد الله، إجابة ممكنة: وجد عبدالله أن $f'(x) = 12x + 4$، ثم ربَّع الطرفين. أما أحمد فقد ربَّع الدالة الأصلية، ثم أوجد المشتقة.

48) إجابة ممكنة:

$$\lim_{h\to0}\frac{f(x+h)g(x+h)-f(x)g(x)}{h}$$

$$=\lim_{h\to0}\frac{f(x+h)g(x+h)-f(x)g(x+h)+f(x)g(x+h)-f(x)g(x)}{h}$$

$$=\lim_{h\to0}\frac{f(x+h)g(x+h)-f(x)g(x+h)}{h}+$$

$$\lim_{h\to0}\frac{f(x)g(x+h)-f(x)g(x)}{h}$$

$$=\lim_{h\to0}\left[\frac{f(x+h)-f(x)}{h}g(x+h)\right]+\lim_{h\to0}\left[\frac{g(x+h)-g(x)}{h}f(x)\right]$$

$$=\lim_{h\to0}\left[\frac{f(x+h)-f(x)}{h}\right]\left[\lim_{h\to0}g(x+h)\right]+$$

$$f(x)\lim_{h\to0}\frac{g(x+h)-g(x)}{h}$$

$$=f'(x)g(x)+f(x)g'(x)$$

49) صحيحة: إجابة ممكنة: إنّ قوة $f(x)$ هي $5n + 3$. بحسب قاعدة مشتقة القوة، تصبح هذه القوة معاملًا في المشتقة. وتصبح القوة في المشتقة أقل بواحد من $5n + 3$ أي $(5n + 3) - 1$ أو $5n + 2$.

50) إجابة ممكنة:

$$=\lim_{h\to0}\frac{\frac{f(x+h)}{g(x+h)}-\frac{f(x)}{g(x)}}{h}=\lim_{h\to0}\frac{f(x+h)g(x)-f(x)g(x+h)}{h\,g(x+h)g(x)}$$

$$=\lim_{h\to0}\frac{f(x+h)g(x)-f(x)g(x)+f(x)g(x)-f(x)g(x+h)}{h\,g(x+h)g(x)}$$

$$=\lim_{h\to0}\frac{[f(x+h)-f(x)]g(x)-[g(x+h)-g(x)]f(x)}{h\,g(x+h)g(x)}$$

$$=\lim_{h\to0}\frac{\frac{f(x+h)-f(x)}{h}g(x)-\frac{g(x+h)-g(x)}{h}f(x)}{g(x+h)g(x)}$$

$$=\frac{g(x)\lim_{h\to0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}-f(x)\lim_{h\to0}\frac{g(x+h)-g(x)}{h}}{g(x)\lim_{h\to0}g(x+h)}$$

$$=\frac{f'(x)g(x)-f(x)g'(x)}{[g(x)]^2}$$

51) إجابة ممكنة: من الممكن أن يكون لدالتين مختلفتين المشتقة نفسها؛ لأن مشتقة أي ثابت هي 0، أي أنه لأي دالتين تختلفان بانسحاب رأسي، فإن لهما المشتقة نفسها. فمثلًا للدالتين $f(x) = x^2$ و $g(x) = x^2 + 3$ المشتقة نفسها وهي $2x$.

الدرس 5-8، ص (171, 172)

5a) طرفا منحنى نصف الدائرة هما طرفا الفترة $[1, 10]$، وباستعمال الأطراف اليسرى لمستطيلات عرض كل منها وحدة واحدة نجد أن

$R_1 = 1 \cdot f(0) = (-0^2 + 10 \cdot 0)^{0.5} = 0$
$R_2 = 1 \cdot f(1) = (-1^2 + 10 \cdot 1)^{0.5} = 3$
$R_3 = 1 \cdot f(2) = (-2^2 + 10 \cdot 2)^{0.5} = 4$
$R_4 = 1 \cdot f(3) = (-3^2 + 10 \cdot 3)^{0.5} \approx 4.58$
$R_5 = 1 \cdot f(4) = (-4^2 + 10 \cdot 4)^{0.5} \approx 4.90$
$R_6 = 1 \cdot f(5) = (-5^2 + 10 \cdot 5)^{0.5} = 5$
$R_7 = 1 \cdot f(6) = (-6^2 + 10 \cdot 6)^{0.5} \approx 4.90$
$R_8 = 1 \cdot f(7) = (-7^2 + 10 \cdot 7)^{0.5} \approx 4.58$
$R_9 = 1 \cdot f(8) = (-8^2 + 10 \cdot 8)^{0.5} = 4$
$R_{10} = 1 \cdot f(9) = (-9^2 + 10 \cdot 9)^{0.5} = 3$

المساحة الكلية تساوي 37.96 وحدة مربعة تقريبًا.

5b) في هذا الجزء من السؤال، سوف نستعمل الأطراف اليمنى لمستطيلات، والأطراف اليسرى لمستطيلات أخرى.

$R_1 = 1 \cdot f(0) = (-0^2 + 10 \cdot 0)^{0.5} = 0$
$R_2 = 1 \cdot f(1) = (-1^2 + 10 \cdot 1)^{0.5} = 3$
$R_3 = 1 \cdot f(2) = (-2^2 + 10 \cdot 2)^{0.5} = 4$
$R_4 = 1 \cdot f(3) = (-3^2 + 10 \cdot 3)^{0.5} \approx 4.58$
$R_5 = 1 \cdot f(4) = (-4^2 + 10 \cdot 4)^{0.5} \approx 4.90$
$R_6 = 1 \cdot f(6) = (-6^2 + 10 \cdot 6)^{0.5} \approx 4.90$
$R_7 = 1 \cdot f(7) = (-7^2 + 10 \cdot 7)^{0.5} \approx 4.58$
$R_8 = 1 \cdot f(8) = (-8^2 + 10 \cdot 8)^{0.5} = 4$
$R_9 = 1 \cdot f(9) = (-9^2 + 10 \cdot 9)^{0.5} = 3$
$R_{10} = 1 \cdot f(10) = (-10^2 + 10 \cdot 10)^{0.5} = 0$

المساحة الكلية تساوي 32.96 وحدة مربعة تقريبًا.

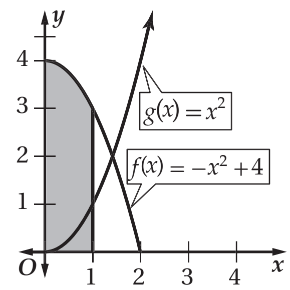
5c) نصف القطر يساوي 5 وحدات.

$$A = \frac{1}{2}\pi r^2$$
$$= \frac{1}{2}\pi 5^2$$
$$= 12.5\pi$$
$$\approx 39.27$$

التقريب الأول هو الأقرب إلى المساحة الحقيقية.

إجابة ممكنة: المساحات خارج نصف الدائرة، والمحتواة داخل مستطيلات التقريب الأول تعوِّض المساحة داخل نصف الدائرة، وغير المحصورة بالمستطيلات.

30a)



30b) $\int_0^1 (-x^2+4)\,dx = 3\frac{2}{3}$ ،

$\int_0^1 x^2\,dx = \frac{1}{3}$

30c) إجابة ممكنة: إذا أردنا إيجاد المساحة المحصورة بين المنحنيين، فإننا نبدأ بالتكامل $\int_0^1 (-x^2+4)\,dx$ ، والذي يمثِّل المساحة الكلية بين $f(x)$ والمحور x. وبما أننا لا نحتاج للمساحة تحت $g(x)$ ، لذا فإننا نطرح المساحة الناتجة عن التكامل $\int_0^1 x^2\,dx$ من $\int_0^1 (-x^2+4)\,dx$ لنحصل على $3\frac{1}{3}$ أو 3.33 تقريبًا.

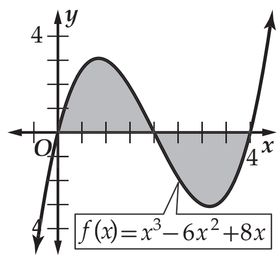
30d) $-2x^2+4$ ، $3\frac{1}{3}$.

30e) عند حساب المساحة المحصورة بين منحنَيي دالتين، بإمكاننا حساب المساحة المحصورة تحت كل منحنًى، ثم نطرح المساحة الصغرى من المساحة الكبرى، أو نطرح الدالة الصغرى من الدالة الكبرى، ونحسب تكامل الدالة الناتجة.

31) كلاهما خطأ؛ إجابة ممكنة: إذا كانت الدالة متزايدة، فإن استعمال الأطراف اليمنى للمستطيلات سيُعطي مساحاتٍ أكبر من تلك المساحة تحت المنحنى، في حين يُعطي استعمال الأطراف اليسرى للمستطيلات مساحاتٍ أصغر. أما إذا كانت الدالة متناقصة، فإن استعمال الأطراف اليسرى للمستطيلات، سيُعطي قيمةً أكبر للمساحة، ويُعطي استعمال الأطراف اليمنى قيمةً أصغر.

الدرس 6-8 ، ص (179)

30a)



30c) إجابة ممكنة: يظهر أن المساحة فوق المحور x موجبة، والمساحة تحت المحور x هي سالب التكامل.

30e) التكامل هو حاصل جمع التكاملين فوق وتحت المحور x.
أما المساحة الكلية، فهي حاصل جمع القيم المطلقة للتكاملين.

35)

$$\int_a^b (n+m)dx = \int_a^b n\,dx + \int_a^b m\,dx$$
$$nx + mx\Big|_a^b = nx\Big|_a^b + mx\Big|_a^b$$
$$(nb+mb) - (na+ma) = (nb-na) + (mb-ma)$$
$$nb + mb - na - ma = nb + mb - na - ma$$

36) بما أن التمثيل البياني للدالة $f(x)$ يقع تحت المحور x، فإن إشارة $f(x)$ سالبة. وبما أن $f(x)$ سالبة و Δx موجبة، فإن كل حدٍّ في $\sum_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta x$ سالب.
وعليه فإن المجموع سالب؛ لأن
$\int_a^b f(x)\,dx$ هو نهاية مجاميع سالبة، لذا يكون سالبًا.