الفصل 2 ملاحظات

مشروع الفصل

قياس شدّة الصوت

يستعمل الطلاب ما تعلموه عن الدوال الأسية واللوغاريتمية لتفسير ملاحظات وظواهر تتعلق بمستويات الصوت.

- أحضر مقياس مستوى الصوت من مختبر العلوم، ومصدرين متماثلين للصوت ؛ مُجفِّفي شعر مثلًا، أو ساعتي تنبيه أو ما شابه ذلك.
- قسّم الطلاب إلى مجموعات تتكون من 3 أو 4 طلاب، واطلب إليهم أن يقيسوا شدة أصوات في غرفة هادئة بوضع المقياس على بعد أقدام قليلة مقابل المصدر وتسجيل مستوى شدة الصوت، ثم يسجلوا مستوى شدة الصوت للمصدرين معًا عند نفس نقطة البعد عن مقياس الصوت. واطلب إليهم تكرار ذلك مع مصدرين آخرين للصوت.
- وبغض النظر عن مصدر الصوت فستجد أن استعمال مصدرين متشابهين معًا يجعل قراءة المقياس تساوي 3 أمثال قراءته للمصدر الواحد؛ لذا اطلب إلى المجموعات استعمال معرفتهم باللوغاريتمات لتفسير صحة هذه الظاهرة.
- وأخيرًا، اطلب إلى الطلاب أن يتنبؤوا بشدة صوت 3, 4, 5 مصادر صوت متماثلة.

المفردات: قدِّم مفردات الفصل مستعملًا الخطوات الآتية :

تعريف: تسمى y في الدالة $x = b^y$ لوغاريتم x للأساس b ، وتكتب: $y = \log_b x$.
وتقرأ "y تساوي لوغاريتم x للأساس b "

مثال: $\log_2 8 = 3$

سؤال: كيف تكتب $3^5 = 243$ بالصورة اللوغاريتمية؟

$\log_3 243 = 5$

الفصل 2 العلاقات والدوال الأسية واللوغاريتمية
Exponential and Logarithmic Relations and Functions

فيما سبق:

درستُ تمثيل دوال كثيرات الحدود وتحويلاتها بيانيًا.

والآن:

- أتعرّف الدوال الأسية واللوغاريتمية.
- أمثل الدوال الأسية واللوغاريتمية بيانيًا.
- أحل مسائل باستعمال الدوال الأسية واللوغاريتمية.
- أحل معادلات ومتباينات أسية ولوغاريتمية.

لماذا؟

علوم: ترتبط العلوم والرياضيات ارتباطًا وثيقًا. ويظهر ذلك جليًا في الفيزياء والكيمياء والأحياء، وغيرها. وتحتاج هذه الفروع إلى مهارات رياضية عالية. وستتعلم في هذا الفصل جوانب رياضية ذات صلة قوية بعلوم: الحاسوب، والفيروسات، والحشرات، ونمو البكتيريا، وانقسام الخلايا، وعلم الفلك، والأعاصير، والهزات الأرضية.

قراءة سابقة: اكتب قائمة بما تعرفه حول العلاقات والدوال، ثم تنبأ بما ستتعلمه في هذا الفصل.

قراءة سابقة

شجِّع الطلاب على الإعداد المسبق لكل درس بطريقة جيدة تتم من خلال قراءته قراءة سريعة مرة، وأخرى متأنية، وأعطهم الوقت الكافي؛ لمناقشة ما يحتويه الدرس من أفكار ومفردات أساسية، واطلب إليهم كتابة استفساراتهم التي لم يتوصلوا إلى الإجابة عنها، وما صعب عليهم فهمه؛ وذلك لمناقشتها في أثناء تقديم الدرس.

تنويع التعليم

نموذج بناء المفردات، ص (28) .

يكمل الطلاب هذا النموذج بكتابة تعريف كل مفردة جديدة تظهر لهم في أثناء دراسة الفصل أو مثال عليها، ويستفيدون من ذلك في أثناء المراجعة والاستعداد لاختبار الفصل.

التهيئة للفصل 2

تشخيص الاستعداد: هناك بديلان للتأكد من المتطلبات السابقة.

البديل 1

أجب عن أسئلة الاختبار السريع الآتي:

اختبار سريع

بسّط كل عبارة مما يأتي مفترضًا أن أيًّا من المتغيرات لا يساوي صفرًا:

1) $a^4a^3a^5$ a^{12}

2) $(2xy^3z^2)^3$ $8x^3y^9z^6$

3) $\frac{-24x^8y^5z}{16x^2y^8z^6}$ $\frac{-3x^6}{2y^3z^5}$

4) $\left(\frac{-8r^2n}{36n^3t}\right)^2$ $\frac{4r^4}{81n^4t^2}$

5) **كثافة:** تُعرّف الكثافة بأنها ناتج قسمة الكتلة على الحجم. فإذا كانت كتلة جسم 7.5×10^3g، وحجمه $1.5 \times 10^3\,\text{cm}^3$، فما كثافته؟ 5g/cm^3

أوجد الدالة العكسية لكل دالة مما يأتي: **6-14) انظر الهامش.**

6) $f(x) = 2x + 5$

7) $f(x) = x - 3$

8) $f(x) = -4x$

9) $f(x) = \frac{1}{4}x - 3$

10) $f(x) = \frac{x-1}{2}$

11) $y = \frac{1}{3}x + 4$

حدد ما إذا كانت كل دالتين مما يأتي دالة عكسية للأخرى، أم لا. وضح إجابتك:

12) $f(x) = x - 6$, $g(x) = x + 6$

13) $f(x) = 2x + 5$, $g(x) = 2x - 5$

14) **طعام:** تكلف شطيرة الجبنة 4 ريالات، وتكلف كل إضافة عليها 0.5 ريال. فإذا كانت الدالة $f(x) = 0.5x + 4$ تمثل تكلفة الشطيرة مضافًا إليها x من الإضافات، فأوجد $f^{-1}(x)$، موضحًا ماذا تعني.

البديل 2

أسئلة تهيئة إضافية على الموقع www.obeikaneducation.com

مراجعة المفردات

المجال (domain): مجموعة الإحداثيات x للأزواج المرتبة التي تمثل العلاقة.

المدى (range): مجموعة الإحداثيات y للأزواج المرتبة التي تمثل العلاقة.

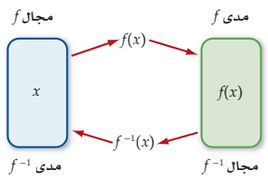
الدالة (function): علاقة يرتبط فيها كل عنصر في المجال بعنصر واحد فقط في المدى.

سلوك طرفي التمثيل البياني (end behaviour): سلوك تمثيل $f(x)$ البياني عندما تقترب x من المالانهاية $(x \to +\infty)$ أو سالب مالانهاية $(x \to -\infty)$.

خط التقارب (asymptote): مستقيم يقترب منه تمثيل الدالة البياني.

الدالة المتباينة (one-to-one function): هي دالة تحقق اختبار الخط الأفقي؛ أي لا يوجد خط أفقي يقطع منحنى الدالة في أكثر من نقطة.

الدالة العكسية (inverse function): تكون كل من الدالتين f, f^{-1} دالة عكسية للأخرى، إذا وفقط إذا تحققت الشرطان: $f(f^{-1}(x)) = x, f^{-1}(f(x)) = x$.



الدالة المتصلة (continuous function): هي الدالة التي يخلو منحناها من الانقطاعات أو الفجوات؛ أي يمكن تمرير القلم على منحناها دون أن نضطر لرفعه.

المعالجة

استعمل نتائج الاختبار السريع ومخطط المعالجة أدناه لمساعدتك على تحديد مستوى المعالجة المناسب. كما تساعد العبارة "إذا ... فقم" في المخطط على تحديد المستوى المناسب للمعالجة، واقتراح مصادر لكل مستوى.

مخطط المعالجة

المستوى 1	ضمن المتوسط
إذا	أخطأ بعض الطلاب فيما لا يزيد على 25% تقريبًا من الأسئلة،
فقم	بمراجعة تبسيط العبارات الجبرية الأسية، والدالة العكسية.
زيارة الموقع	www.obeikaneducation.com
المستوى 2	**دون المتوسط**
إذا	أخطأ بعض الطلاب في 50% تقريبًا من الأسئلة،
فقم	بتحديد أخطائهم، ووضع أنشطة علاجية لذلك.
زيارة الموقع	www.obeikaneducation.com

تنويع التعليم

دون ضمن

قائمة اطلب إلى الطلاب عمل قائمة بالتعريفات الواردة، وكتابة مثال على كل منها في أثناء دراستهم للفصل؛ لاستعمالها وسيلة مراجعة لاختبار الفصل.

إجابات:

6) $f^{-1}(x) = \frac{1}{2}x - \frac{5}{2}$

7) $f^{-1}(x) = x + 3$

8) $f^{-1}(x) = -\frac{1}{4}x$

9) $f^{-1}(x) = 4x + 12$

10) $f^{-1}(x) = 2x + 1$

11) $f^{-1}(x) = 3x - 12$

12) نعم؛ لأن $[f \circ g](x) = [g \circ f](x) = x$

13) لا؛ لأن $[f \circ g](x) = 4x - 5$

14) $f^{-1}(x) = 2x - 8$، وهي تعطي عدد الإضافات التي يحصل عليها شخص دفع x ريالًا.

1 التركيز

الترابط الرأسي

ما قبل الدرس 2-1

تمثيل دوال خطية، وخاصة، وتربيعية بيانيًّا.

الدرس 2-1

تعرف الدالة الأسّيّة وتمثيلها البياني.
تمثيل دوال النمو الأسّي بيانيًّا.
تمثيل دوال الاضمحلال الأسّي بيانيًّا.

ما بعد الدرس 2-1

حل معادلات أسّية.

2 التدريس

أسئلة التعزيز

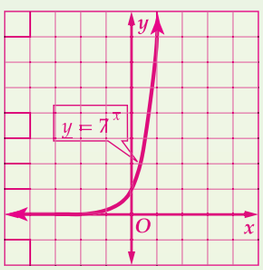
اطلب إلى الطلاب قراءة فقرة "لماذا؟".

واسأل:

- لماذا لا تعد الدالة $y = 3(2)^x$ دالةً تربيعية؟ لأن المتغير المستقل x في هذه الدالة هو الأس، والأساس هو العدد 2، بينما المتغير المستقل x في الدالة التربيعية هو الأساس، والأس هو العدد 2
- ما قيمة y عندما $x = 0$؟ $y = 3$
- هل توجد قيمة للمتغير المستقل x تجعل قيمة المتغير y صفرًا؟ لا

إجابة:

(1A



$1, D = \{x | x \in R\}$

$R = \{y | y > 0\}$

2-1 الدوال الأسّية
Exponential Functions

فيما سبق:

درستُ دوال كثيرات الحدود وتمثيلها بيانيًّا. (الدرس 1–1)

والآن:

- أتعرف الدالة الأسية.
- أمثّل الدالة الأسية.
- أمثّل دوال النمو الأسي بيانيًّا.
- أمثّل دوال الاضمحلال الأسي بيانيًّا.

المفردات:

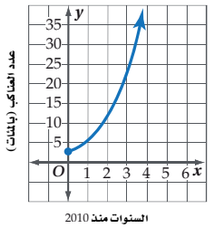
الدالة الأسية
exponential function
النمو الأسّي
exponential growth
عامل النمو
growth factor
الاضمحلال الأسّي
exponential decay
عامل الاضمحلال
decay factor

www.obeikaneducation.com

لماذا؟

قد تبدو عناكب الرتيلاء (Tarantulas) مخيفة بأجسامها الكبيرة المغطاة بالشعر وأرجلها الكبيرة، ولكنها غير مؤذية للإنسان، ويبيِّن التمثيل المجاور الزيادة في أعدادها عبر الزمن.

لاحظ أن هذا التمثيل ليس خطيًّا، وليس تربيعيًّا أيضًا، وإنما يمثِّل الدالة $y = 3(2)^x$، والتي هي مثال على الدالة الأسية.



تمثيل الدوال الأسّيّة: **الدالة الأسّية** هي دالة مكتوبة على الصورة $y = ab^x$ حيث $a \neq 0, b > 0, b \neq 1$.
لاحظ أن الأساس في الدالة الأسية ثابت، وأن الأس هو المتغير المستقل.

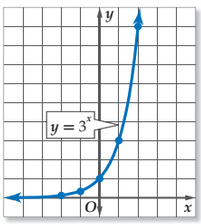
مفهوم أساسي **الدالة الأسية**

التعبير اللفظي: الدالة الأسية هي دالة يمكن وصفها بمعادلة على الصورة $y = ab^x, a \neq 0, b > 0, b \neq 1$

أمثلة: $y = 2(3)^x$ $y = 4^x$ $y = (\frac{1}{2})^x$

مثال 1 **تمثيل الدالة الأسيّة عندما $a > 0$ ، $b > 1$**

a) مثّل الدالة $y = 3^x$ بيانيًّا، وأوجد مقطع المحور y، وحدد مجال الدالة ومداها.



x	3^x	y
-2	3^{-2}	$\frac{1}{9}$
-1	3^{-1}	$\frac{1}{3}$
0	3^0	1
1	3^1	3
2	3^2	9

عيّن الأزواج المرتبة الواردة في الجدول، ثم صل بينها بمنحنى. لاحظ أن التمثيل البياني للدالة يقطع المحور y عندما $y = 1$ ، وهذا يعني أن منحنى الدالة يمر بالنقطة $(0 , 1)$، لذا فمقطع المحور y هو 1، ومجال الدالة هو جميع الأعداد الحقيقية، ومداها جميع الأعداد الحقيقية الموجبة.

b) استعمل التمثيل البياني لتقدير قيمة $3^{0.7}$ إلى أقرب جزء من عشرة.

يظهر التمثيل البياني جميع القيم الحقيقية للمتغير x والقيم المرتبطة بها للمتغير y، حيث $y = 3^x$، لذا فإذا كانت $x = 0.7$ فإن $y \approx 2.2$، (استعمل الآلة الحاسبة للتحقق من أن $3^{0.7} \approx 2.157669$).

تحقق من فهمك

1A) مثّل الدالة $y = 7^x$ بيانيًّا، وأوجد مقطع المحور y، وحدِّد مجال الدالة ومداها. انظر الهامش.

1B) استعمل التمثيل البياني لتقدير قيمة $7^{0.5}$ إلى أقرب جزء من عشرة، واستعمل الآلة الحاسبة للتحقق من ذلك. 2.6

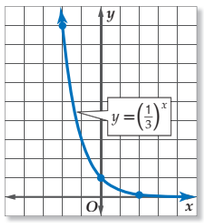
يتضح من المثال (1) أعلاه أنه كلما ازدادت قيم x بمقدار ثابت (قيمته 1)، فإن قيم y تزداد أيضًا بنسبة ثابتة، فكل قيمة لـ y تمثّل 3 أمثال القيمة السابقة لها مباشرة، لذا فالدالة متزايدة، كما أن المحور x هو خط تقارب أفقي لها.

مصادر الدرس 1 – 2

المصدر	دون المتوسط	ضمن المتوسط	فوق المتوسط
دليل المعلم	• تنويع التعليم ص (84)	• تنويع التعليم ص (84)	• تنويع التعليم ص (88)
كتاب التمارين	• ص (11)	• ص (11)	• ص (11)
مصادر المعلم للأنشطة الصفية	• تدريبات إعادة التعليم، ص (6) • تدريبات حل المسألة، ص (8)	• تدريبات حل المسألة، ص (8) • التدريبات الإثرائية، ص (9)	• تدريبات حل المسألة، ص (8) • التدريبات الإثرائية، ص (9)

مـثال 2 تمثيل الدالة الأسيّة عندما $a > 0$ ، $0 < b < 1$

a) مثّل الدالة $y = (\frac{1}{3})^x$ بيانيًّا، وأوجد مقطع المحور y، وحدِّد مجال الدالة ومداها.



x	$(\frac{1}{3})^x$	y
-2	$(\frac{1}{3})^{-2}$	9
0	$(\frac{1}{3})^0$	1
2	$(\frac{1}{3})^2$	$\frac{1}{9}$

عيّن الأزواج المرتبة الواردة في الجدول، ثم صل بينها بمنحنى. لاحظ أن التمثيل البياني للدالة يقطع المحور y عندما $y = 1$، أي أن منحنى الدالة يمر بالنقطة $(1 , 0)$، لذا فمقطع المحور y هو 1، ومجال الدالة هو جميع الأعداد الحقيقية، ومداها جميع الأعداد الحقيقية الموجبة.

b) استعمل التمثيل البياني لتقدير قيمة $(\frac{1}{3})^{-1.5}$ إلى أقرب جزء من عشرة.

عندما $x = -1.5$، فإن قيمة $y \approx 5.2$، (استعمل الآلة الحاسبة للتحقق من أن $(\frac{1}{3})^{-1.5} \approx 5.19615$).

تحقق من فهمك

2A) مثّل الدالة $y = (\frac{1}{2})^x - 1$ بيانيًّا، وأوجد مقطع المحور y، وحدِّد مجال الدالة ومداها.

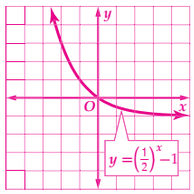
2B) استعمل التمثيل البياني لتقدير قيمة $(\frac{1}{2})^{-2.5} - 1$ إلى أقرب جزء من عشرة، واستعمل الآلة الحاسبة للتحقق من ذلك. 4.7

إرشادات للدراسة

$a < 0$

إذا كانت قيمة a سالبة، فإن منحنى الدالة ينعكس حول المحور x.

(2A

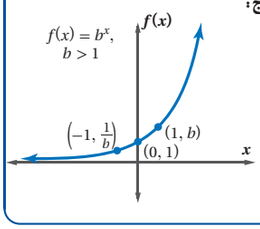


1, D = {x | x∈R}
R = {y | y>−1}

يتضح من المثال (2) أعلاه أنه كلما ازدادت قيم x بمقدار ثابت قيمته 2، فإن قيم y تتناقص بنسبة ثابتة، فكل قيمة لـ y تمثّل $\frac{1}{9}$ القيمة السابقة لها مباشرة، لذا فالدالة متناقصة، كما أن المحور x هو خط تقاربٍ أفقي لها.

النمو الأسّي: تسمى الدالة الأسيّة $f(x) = b^x$ ، حيث $b > 1$ دالة **النمو الأسّي**.

مفهوم أساسي الدالة الرئيسة (الأم) لدوال النمو الأسّي



الدالة الرئيسة (الأم):	$f(x) = b^x, b > 1$
النموذج:	
خصائص منحنى الدالة:	متصل، متباين، متزايد
المجال:	مجموعة الأعداد الحقيقية(R)
المدى:	مجموعة الأعداد الحقيقية الموجبة(R^+)
خط التقارب:	المحور x
مقطع المحور y:	1

تمثيل الدوال الأسية بيانيًّا

مثال 1 يبين كيفية تمثيل الدالة $y = ab^x$ عندما $a > o$ ، $b > 1$

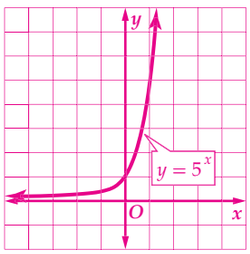
المثال 2 يبين كيفية تمثيل الدالة $y = ab^x + c$ عندما $a > o$ ، $o < b < 1$.

التقويم التكويني

استعمل تدريبات "تحقق من فهمك" بعد كل مثال؛ للتحقق من مدى فهم الطلاب للمفاهيم.

مثالان إضافيان

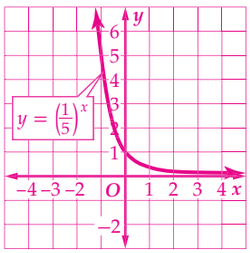
1 مثّل الدالة $y = 5^x$ بيانيًّا، ثم حدّد مجالها ومداها.



المجال = $\{x \mid x \in R\}$

المدى = $\{y \mid y > o\}$

2 مثّل الدالة $y = (\frac{1}{5})^x$ بيانيًّا، وحدد مجالها ومداها.



المجال = جميع الأعداد الحقيقية

المدى = $\{y \mid y > 0\}$

التعليم باستعمال التقنيات

الكاميرا التوثيقية اختر طالبًا ليحل مثالاً أمام الطلاب، واطلب إليه أن ينشئ جدول قيم للدالة، ويوضح كيفية تمثيل الدالة بيانيًّا. وكلّف أحد الطلاب بتوثيق الحل باستعمال الكاميرا.

المحتوى الرياضي

الدوال الأسية الدالة $f(x) = b^x$ ، حيث b عدد حقيقي موجب، و $b \neq 1$ هي دالة أسّية. عندما تكون $b > 1$ فإن الدالة لا تقطع المحور x ، بل يكون لها مقطع واحد للمحور y، وهي دالة متزايدة ولها خط تقارب أفقي هو المحور x، وعندما تكون $0 < b < 1$، فإن الدالة لا تقطع المحور x، بل يكون لها مقطع واحد للمحور y . والتمثيل البياني للدالة متناقص وله خط تقارب أفقي هو المحور x .

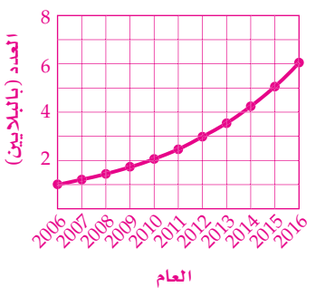
النمو الأسّي

مثال 3 يبيّن كيفية تمثيل دالة أسّية بيانيًّا لنمذجة موقف حياتي للنموّ.

مثال إضافي

3 **إنترنت:** بلغ عدد مستعملي الإنترنت في العالم عام 2006 نحو 1020000000 مستعمل، وفي ذلك الوقت كانت نسبة نمو عدد مستعملي الإنترنت 19.5%. إذا استمر نمو عدد المستعملين بالنسبة نفسها، فأوجد معادلة أسية تمثل عدد مستعملي الإنترنت منذ ذلك الوقت حتى عام 2016، ثم مثّلها بيانيًّا باستعمال الآلة الحاسبة البيانية.

مستعملو الإنترنت



$y = (1020000000)\ (1.195)^t$

لاحظ أن قيم $f(x)$ تزداد كلما زادت قيم x. ولذلك نقول: إن $f(x)$ دالة متزايدة. يمكنك تمثيل الزيادة في قيمة ما بنسبة مئوية ثابتة في فترات زمنية متساوية باستعمال دالة النمو الأسي $A(t) = a\ (1 + r)^t$، حيث t الفترة الزمنية، a القيمة الابتدائية، r النسبة المئوية للنمو في الفترة الزمنية الواحدة. لاحظ أن أساس العبارة الأسية هو $(1 + r)$ ويُسمى **عامل النمو**.

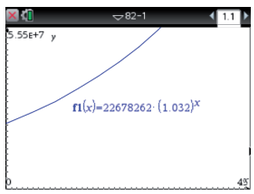
وتستعمل دوال النمو الأسي عادةً لتمثيل النمو السكاني.

الربط مع الحياة

تُعد الإحصاءات السكانية أحد أهم مصادر البيانات التي يتطلبها التخطيط التنموي في المجالات الاقتصادية والاجتماعية. وقد أجري أول تعداد سكاني في المملكة عام 1394 هـ، وكان عدد سكان المملكة حينئذ 7 ملايين نسمة تقريبًا.

مثال 3 من واقع الحياة — تمثيل دوال النمو الأسي بيانيًّا

تعداد سكاني: بلغ المعدل السنوي للنمو السكاني في المملكة خلال الفترة 1425-1431 هـ 3.2% سنويًّا تقريبًا. إذا كان عدد سكان المملكة 22678262 نسمة عام 1425هـ، فأوجد معادلة أسية تمثّل النمو السكاني للمملكة خلال هذه الفترة، ثم مثّلها بيانيًّا باستعمال الحاسبة البيانية.



a) أوجد دالة النمو الأسي مستعملًا $a = 22678262, r = 0.032$

$y = 22678262\ (1.032)^t$

b) مثّل الدالة بيانيًّا باستعمال الحاسبة البيانية TI–nspire لتحصل على الشكل المجاور.

تحقق من فهمك انظر ملحق الإجابات.

3) ثقافة مالية: يتوقع أن يزداد إنفاق عائلة بما نسبته 8.5% سنويًّا، إذا كان إنفاق العائلة عام 1430 هـ هو 80000 ريال، فأوجد معادلة أسية تمثّل إنفاق العائلة منذ عام 1430 هـ، ثم مثّلها بيانيًّا باستعمال الحاسبة البيانية.

تنبيه!

النسبة المئوية

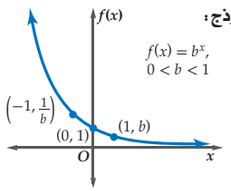
تذكر أن جميع أشكال النسب المئوية تتحول إلى كسور عشرية. فمثلًا، $12.5\% = 0.125$

الاضمحلال الأسّي: تُسمى الدالة الأسيّة $f(x) = b^x$، حيث $0 < b < 1$ دالة **الاضمحلال الأسّي**.

مفهوم أساسي — الدالة الرئيسة (الأم) لدوال الاضمحلال الأسّي

الدالة الرئيسة (الأم):	$f(x) = b^x, 0 < b < 1$
خصائص منحنى الدالة:	متصل، متباين، متناقص
المجال:	مجموعة الأعداد الحقيقية (R)
المدى:	مجموعة الأعداد الحقيقية الموجبة (R^+)
خط التقارب:	المحور x
مقطع المحور y:	1

النموذج:



يمكنك تمثيل دوال الاضمحلال الأسي بيانيًّا بنفس طريقة تمثيل دوال النمو الأسي، ونلاحظ أن قيم $f(x)$ تقل كلما زادت قيم x، ولذلك نقول: إن $f(x)$ دالة متناقصة.

وكما في النمو الأسي، فإنه يمكنك تمثيل النقص في قيمة ما بنسبة مئوية ثابتة في فترات زمنية متساوية باستعمال دالة الاضمحلال الأسي $A(t) = a(1 - r)^t$، حيث a القيمة الابتدائية، r النسبة المئوية للاضمحلال في الفترة الزمنية الواحدة. لاحظ أن أساس العبارة الأسية هو $(1 - r)$، ويُسمى **عامل الاضمحلال**.

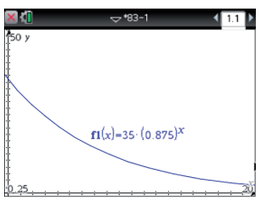
وتستعمل دوال الاضمحلال الأسي عادة في التطبيقات المالية.

الربط مع الحياة

الشاي الأخضر قليل الأكسدة بخلاف الشاي الأسود، وقد أثبتت بعض الدراسات العلمية والطبية أن الذين يشربون الشاي الأخضر أقل عُرضة للإصابة بأمراض القلب وأنواع معينة من السرطان.

مثال 4 من واقع الحياة — تمثيل دوال الاضمحلال الأسّي بيانيًّا

شاي: يحتوي كوب من الشاي الأخضر على 35 mg من الكافايين، ويمكن للأشخاص اليافعين التخلص من 12.5% تقريبًا من كمية الكافايين من أجسامهم في الساعة.



a) أوجد دالة أسية تمثّل كمية الكافايين المتبقية في جسم اليافعين بعد شرب كوب من الشاي الأخضر، ثم مثّلها بيانيًّا باستعمال الحاسبة البيانية.

تنويع التعليم

دون ضمن

توسّع: كلِّف الطلاب بالبحث في الإنترنت أو أي مصدر آخر عن تطبيقات حياتية تتضمن دوال النمو الأسي، ثم ناقش ما توصل إليه الطلاب من تطبيقات.

$$y = a(1 - r)^t$$
$$= 35(1 - 0.125)^t$$
$$= 35(0.875)^t$$

لاحظ التمثيل البياني للدالة باستعمال الحاسبة البيانية.

b) قدّر كمية الكافايين المتبقية في جسم شخص يافع بعد 3 ساعات من شربه كوبًا من الشاي الأخضر.

$y = 35(0.875)^t$ — المعادلة من الفرع a

$= 35(0.875)^3$ — عوّض 3 بدلًا من الزمن t

≈ 23.45 — استعمل الحاسبة

سيبقى في جسم هذا الشخص 23.45mg من الكافايين تقريبًا بعد 3 ساعات.

تحقق من فهمك

4) يحتوي كوب من الشاي الأسود على 68mg من الكافايين. أوجد معادلة أسية تمثّل كمية الكافايين المتبقية في جسم شخص يافع بعد شربه كوبًا من الشاي الأسود، ومثّلها بيانيًّا مستعملًا الحاسبة البيانية، ثم قدّر كمية الكافايين المتبقية في جسمه بعد ساعتين من شربه الكوب.

$y = 68\ (0.875)^x$ ، 52.06 mg تقريبًا

للتمثيل البياني انظر الهامش.

التحويلات الهندسية: تؤثّر التحويلات الهندسية في شكل منحنى الدالة الرئيسة (الأم) لكلٍّ من دالتي النمو الأسي والاضمحلال الأسي كما هو الحال في باقي الدوال.

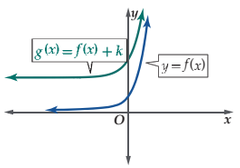
مفهوم أساسي

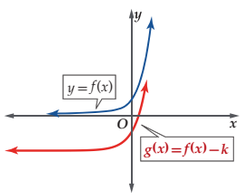
الانسحاب الرأسي والانسحاب الأفقي

الانسحاب الرأسي

منحنى $g(x) = f(x) + k$ هو انسحاب لمنحنى $f(x)$:

- k وحدة إلى أعلى عندما $k > 0$.
- $|k|$ من الوحدات إلى أسفل عندما $k < 0$.

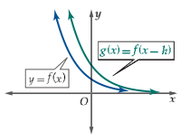


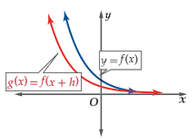


الانسحاب الأفقي

منحنى $g(x) = f(x - h)$ هو انسحاب لمنحنى $f(x)$:

- h من الوحدات إلى اليمين عندما $h > 0$.
- $|h|$ من الوحدات إلى اليسار عندما $h < 0$.





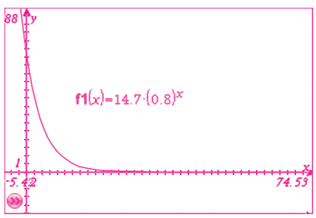
الاضمحلال الأسّي

مثال 4 يبيِّن كيفية تمثيل دوال الاضمحلال الأسي بيانيًّا.

مثال إضافي

4 **ضغط الهواء:** يبلغ الضغط الجوي $14.7\ \text{lb/in}^2$ على سطح الأرض. ويتناقص بنسبة 20% كلما ارتفعنا 1mi إلى أعلى، ويستمر هذا التناقص حتى ارتفاع 50 mi عن سطح الأرض.

a) أوجد معادلة أسية تمثل الضغط الجوي للارتفاعات 0-50 mi. ومثّلها بيانيًّا مستعملًا الحاسبة البيانية. $y = 14.7\ (0.8)^x$



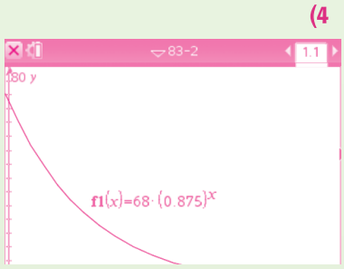
b) قدّر الضغط الجوي على ارتفاع 10 mi. $1.6\ \text{lb/in}^2$

تنبيه!

خطأ شائع تأكد أن الطلاب لا يخلطون بين دوال كثيرات الحدود والدوال الأسية، فالدالتان $y = x^2$, $y = 2^x$ كل منهما تحتوي أسًّا، إلا أن الدالة $y = x^2$ هي دالة كثيرة حدود، والدالة $y = 2^x$ هي دالة أسية.

إجابة (تحقق من فهمك):

4)



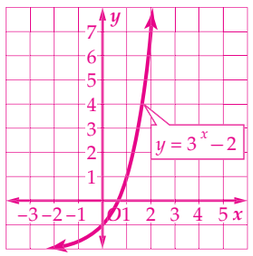
النمو الأسّي

مثال 5 يبيِّن كيفية تمثيل تحويلات دوال النمو الأسّي بيانيًّا.

مثال إضافي

5 مثّل كل دالة مما يأتي بيانيًّا، وحدد مجالها ومداها.

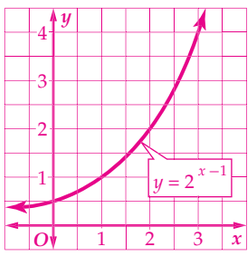
a $y = 3^x - 2$



المجال $= \{x \mid x \in R\}$

المدى $= \{y \mid y > -2\}$

b $y = 2^{x-1}$

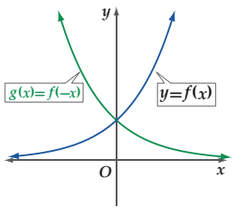


المجال $= \{x \mid x \in R\}$،

المدى $= \{y \mid y > 0\}$

مفهوم أساسي الانعكاس حول المحور y

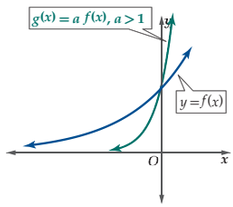
منحنى الدالة $g(x) = f(-x)$ هو انعكاس لمنحنى الدالة $f(x)$ حول المحور y.



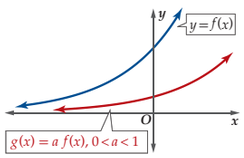
مفهوم أساسي التمدد الرأسي

إذا كان a عددًا حقيقيًّا موجبًا، فإن منحنى الدالة $g(x) = a\,f(x)$ هو:

توسع رأسي لمنحنى $f(x)$، إذا كانت $a > 1$.



تضيق رأسي لمنحنى $f(x)$، إذا كانت $0 < a < 1$



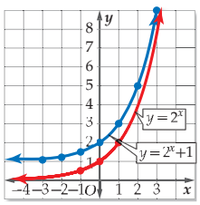
مثال 5 تحويلات التمثيلات البيانية لدوال النمو الأسي

مثّل كل دالة مما يأتي بيانيًّا، وحدِّد مجالها، ومداها:

a $y = 2^x + 1$

حدِّد نقاط التمثيل البياني للدالة الأم $y = 2^x$. بما أن $2 > 1$ فالدالة دالة نمو أسي، لذا استعمل النقاط $(1, b)$، $(0, 1)$، $\left(-1, \frac{1}{b}\right)$ أي النقاط $(1, 2)$، $(0, 1)$، $\left(-1, \frac{1}{2}\right)$، والتمثيل البياني للدالة هو تحويل للتمثيل البياني للدالة $y = 2^x$، بما أن $k = 1$ فإن المعادلة $y = 2^x + 1$ تمثِّل انسحابًا لمنحنى الدالة الرئيسة (الأم) $y = 2^x$ وحدة واحدة إلى أعلى. وبالاستعانة بالأزواج المرتبة الواردة في الجدول أيضًا، فإن التمثيل البياني للدالة $y = 2^x + 1$ يكون كما هو موضح أدناه.

x	$2^x + 1$	y
-3	$2^{-3} + 1$	$1\frac{1}{8}$
-2	$2^{-2} + 1$	$1\frac{1}{4}$
-1	$2^{-1} + 1$	$1\frac{1}{2}$
0	$2^0 + 1$	2
1	$2^1 + 1$	3
2	$2^2 + 1$	5



المجال هو مجموعة الأعداد الحقيقية (R)، والمدى هو $\{y \mid y > 1\}$

إرشادات للدراسة

سلوك طرفي التمثيل البياني

مجال الدالتين في المثال 5 هو مجموعة الأعداد الحقيقية (R). تذكر أن سلوك طرفي التمثيل البياني هو سلوك التمثيل البياني مع اقتراب x من مالانهاية أو سالب مالانهاية. نلاحظ في المثال(5a) أنه مع اقتراب x من مالانهاية، تقترب y من مالانهاية أيضًا، وأما عندما تقترب x من سالب مالانهاية، فإن y تقترب من 1. وفي المثال(5b) عندما تقترب x من مالانهاية فإن y تقترب من سالب مالانهاية، وأما عندما تقترب x من سالب مالانهاية، فإن y تقترب من الصفر.

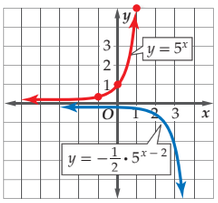
86 الفصل 2 العلاقات والدوال الأسية واللوغاريتمية

b) $y = -\frac{1}{2} \cdot 5^{x-2}$

حدِّد نقاط التمثيل البياني للدالة الأم $y = 5^x$. بما أن $5 > 1$ فالدالة دالة نمو أسي، لذا استعمل النقاط $(1,b)$، $(0,1)$، $\left(-1,\frac{1}{b}\right)$ أي النقاط $(1,5)$، $(0,1)$، $\left(-1,\frac{1}{5}\right)$ والتمثيل البياني للدالة هو تحويل للتمثيل البياني للدالة $y = 5^x$

- $a = -\frac{1}{2}$: ينعكس التمثيل البياني حول المحور x ويضيق رأسيًّا.
- $h = 2$: يسحب التمثيل البياني وحدتين إلى اليمين.
- $k = 0$: لا يوجد انسحاب رأسي للتمثيل البياني.

المجال هو مجموعة الأعداد الحقيقية (R)، والمدى هو $\{y \mid y < 0\}$



تحقق من فهمك **(5A, 5B)** انظر ملحق الإجابات.

(5A) $y = 2^{x+3} - 5$ **(5B)** $y = 0.1(6)^x - 3$

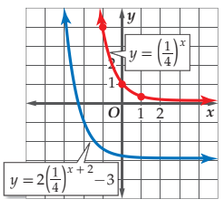
مثال 6 تمثيل تحويلات دوال الاضمحلال الأسي بيانيًّا

مثّل الدالة $y = 2\left(\frac{1}{4}\right)^{x+2} - 3$ بيانيًّا، وحدّد مجالها ومداها.

حدِّد نقاط التمثيل البياني للدالة الأم $y = \left(\frac{1}{4}\right)^x$. بما أن $0 < \frac{1}{4} < 1$؛ فالدالة دالة اضمحلال أسي، لذا استعمل النقاط $\left(1,\frac{1}{4}\right)$، $(0,1)$، $(-1,4)$

والتمثيل البياني للدالة هو تحويل للتمثيل البياني للدالة $y = \left(\frac{1}{4}\right)^x$.

- $a = 2$: يتسع التمثيل البياني رأسيًّا.
- $h = -2$: يسحب التمثيل البياني وحدتين إلى اليسار.
- $k = -3$: يسحب التمثيل البياني 3 وحدات إلى أسفل.



تحقق من فهمك

6) $y = \frac{3}{8}\left(\frac{5}{6}\right)^{x-1} + 1$ انظر الهامش.

المجال هو مجموعة الأعداد الحقيقية، والمدى هو مجموعة الأعداد الحقيقية الأكبر من -3 .

تدرب وحل المسائل

مثّل كل دالة مما يأتي بيانيًّا، وأوجد مقطع المحور y، وحدّد مجالها ومداها، ثم استعمل تمثيلها البياني؛ لتقدير قيمة المقدار العددي المعطى إلى أقرب جزء من عشرة، واستعمل الآلة الحاسبة للتحقق من ذلك.: (مثال 1)

1) $y = 2^x$ ، $2^{1.5}$ **2-4)** انظر ملحق الإجابات.

2) $y = 2(8)^x$ ، $2(8)^{-0.5}$

مثّل كل دالة مما يأتي بيانيًّا، وأوجد مقطع المحور y، وحدّد مجالها ومداها، ثم استعمل تمثيلها البياني؛ لتقدير قيمة المقدار العددي المعطى إلى أقرب جزء من عشرة، واستعمل الآلة الحاسبة للتحقق من ذلك.: (مثال 2)

3) $y = 2\left(\frac{1}{6}\right)^x$ ، $2\left(\frac{1}{6}\right)^{1.5}$ **4)** $y = 3\left(\frac{1}{4}\right)^x$ ، $3\left(\frac{1}{4}\right)^{0.5}$

5) حاسوب: يزداد انتشار فيروس في شبكة حاسوبية بمعدل 25% كل دقيقة. إذا دخل الفيروس إلى جهاز واحد عند البداية، فأوجد دالة أسية تمثل النمو في انتشار الفيروس منذ البداية، ثم مثلها بيانيًّا باستعمال الحاسبة البيانيّة. (مثال 3) انظر الهامش.

تنويع الواجبات المنزلية

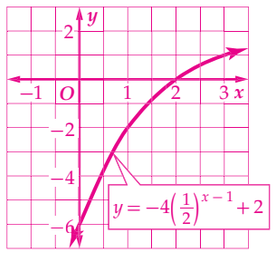
المستوى	الأسئلة
دون	دون المتوسط 1-21، 27–28، 34-41
ضمن	ضمن المتوسط 1–25 (فردي)، 27–32، 34–41
فوق	فوق المتوسط 22-41

الاضمحلال الأسّي

مثال 6 يبيِّن كيفية تمثيل تحويلات دوال الاضمحلال الأسي بيانيًّا.

مثال إضافي

5) $y = -4\left(\frac{1}{2}\right)^{x-1} + 2$



المجال = جميع الأعداد الحقيقية

المدى = $\{y \mid y < 2\}$

3 التدريب

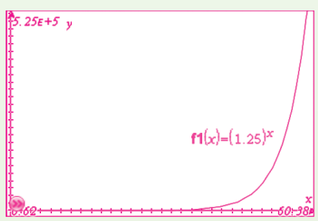
التقويم التكويني

استعمل الأسئلة **1-21** للتأكد من مدى فهم الطلاب.

ثم استعمل الجدول أسفل هذه الصفحة؛ لتعيين الواجبات المنزلية للطلبة بحسب مستوياتهم.

إجابات :

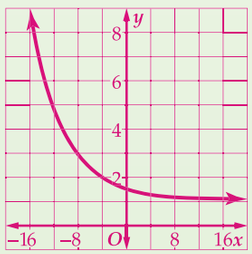
5) $y = (1.25)^t$



بعد الساعة الأولى يكون الفيروس انتشر في 652530 حاسوبًا تقريبًا

تحقق من فهمك :

6)



المجال = $\{x \mid x \in R\}$

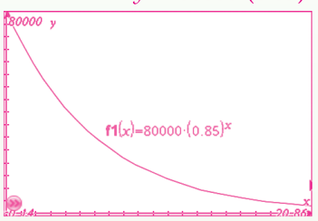
المدى = $\{y \mid y > 1\}$

تمثيلات متعددة

يستعمل الطلاب في السؤال 26 جدول القيم، والتمثيلات البيانية، والتحليل لاستكشاف الدوال الأسّية وتمييز أنماط النمو الأسي من أنماط الاضمحلال الأسي.

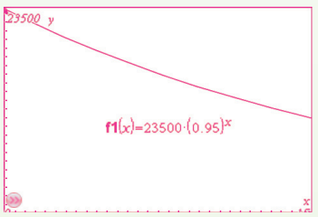
إجابات:

6) $y = 80000\ (0.85)^t$



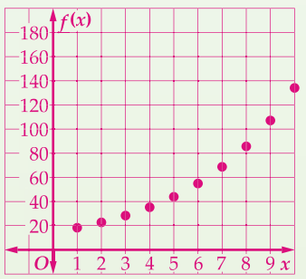
بعد 20 سنة يكون ثمنها 3100 ريال تقريبًا.

20) $y = 23500\ (0.95)^t$



في المباراة 15 يكون الحضور 10887 تقريبًا.

23b)



6) سيارات: سيارة كان سعرها 80000 ريال، ثم بدأ يتناقص بمعدل 15% كل سنة. أوجد دالة أسية تمثل سعر السيارة بعد t سنة من شرائها، ثم مثّلها بيانيًا باستعمال الحاسبة البيانية. ثم قدّر سعر السيارة بعد 20 سنة من شرائها. (مثال 4) انظر الهامش.

7-12) انظر ملحق الإجابات.

مثّل كل دالة مما يأتي بيانيًا، وحدّد مجالها، ومداها: (مثال 5)

7) $f(x) = 2(3)^x$

8) $f(x) = 4^{x+1} - 5$

9) $f(x) = 2^{x+1} + 3$

10) $f(x) = 3^{x-2} + 4$

11) $f(x) = 3(2)^x + 8$

12) $f(x) = 0.25(4)^x - 6$

مثّل كل دالة مما يأتي بيانيًا، وحدد مجالها، ومداها: (مثال 6)

13-18) انظر ملحق الإجابات.

13) $f(x) = 2\left(\frac{2}{3}\right)^{x-3} - 4$

14) $f(x) = -\frac{1}{2}\left(\frac{3}{4}\right)^{x+1} + 5$

15) $f(x) = -\frac{1}{3}\left(\frac{4}{5}\right)^{x-4} + 3$

16) $f(x) = \frac{1}{8}\left(\frac{1}{4}\right)^{x+6} + 7$

17) $f(x) = -4\left(\frac{3}{5}\right)^{x+4} + 3$

18) $f(x) = -\frac{1}{2}\left(\frac{3}{8}\right)^{x+2} + 9$

19) علوم: يتكاثر نحل في خلية، فيزداد العدد بمعدل 30% كل أسبوع. إذا كان عدد النحل في البداية 65 نحلة، فأوجد دالة أسية تمثل عدد النحل بعد t أسبوع، ومثلها بيانيًا باستعمال الحاسبة البيانية، ثم قدّر عدد النحل بعد 10 أسابيع. انظر ملحق الإجابات.

20) كرة قدم: تناقص عدد الحضور لمباريات فريق كرة قدم بمعدل 5% لكل مباراة بعد خسارته في أحد المواسم. أوجد دالة أسية تمثل عدد الحضور (y) في المباراة (t)، إذا كان عددهم في المباراة الأولى 23500، ومثلها بيانيًا باستعمال الحاسبة البيانية، ثم قدّر عدد الحضور في المباراة 15 . انظر الهامش.

21) هواتف: تناقص عدد الهواتف العمومية في الآونة الأخيرة نتيجة انتشار الهواتف المحمولة. فإذا كان عدد الهواتف العمومية بالآلاف في إحدى المدن يعطى بالدالة $P(x) = 2.28(0.9)^x$ في السنة x منذ عام 1420هـ. انظر ملحق الإجابات.

a) مثّل الدالة بيانيًا باستعمال الحاسبة البيانية.

b) وضّح ماذا يمثل مقطع $P(x)$ وخط التقارب في هذه الحالة.

22) صحة: أخذ مريض حقنة، وفي كل يوم تلي ذلك، استهلك جسمه 10% مما تبقى من المادة المحقونة.

a) مثّل الدالة التي تعبّر عن هذا الموقف بيانيًا. انظر ملحق الإجابات.

b) متى يكون في جسم المريض أقل من 50% من المادة المحقونة؟ بعد اليوم السادس

c) كم يبقى من المادة المحقونة في الجسم بعد 9 أيام؟ أقل من 40% بقليل

23) نظرية الأعداد: تتبع متتابعة عددية نمطًا معينًا، حيث يساوي كل حد فيها 125% من الحد السابق له، فإذا كان الحد الأول يساوي 18 فأجب عما يأتي:

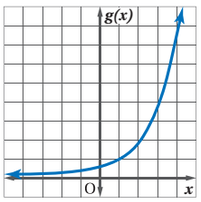
a) اكتب الدالة التي تمثل هذا الموقف. $f(x) = 18(1.25)^{x-1}$

b) مثّل الدالة لأول 10 حدود بيانيًا. انظر الهامش.

c) ما قيمة الحد العاشر؟ قرّب الناتج إلى أقرب عدد صحيح. 134

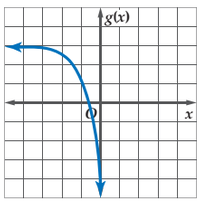
إذا كانت $f(x)$ هي الدالة الرئيسة (الأم) لكل دالة ممثلة بيانيًا أدناه، والتمثيل البياني لـ $g(x)$ هو تحويل للتمثيل البياني لـ $f(x)$، فأوجد الدالة $g(x)$: انظر الهامش.

24)



$g(x) = 4\ (2)^{x-3} = \frac{1}{2}\ (2)^x$

25)



$g(x) = 4\ (2)^{x-3} = \frac{1}{2}\ (2)^x$

26) تمثيلات متعددة: ستستعمل لحل هذا التمرين جداول القيم أدناه للدوال الأسية $f(x), g(x), h(x)$. انظر ملحق الإجابات.

x	−1	0	1	2	3	4	5
$f(x)$	2.5	2	1	−1	−5	−13	−29

x	−1	0	1	2	3	4	5
$g(x)$	5	11	23	47	95	191	383

x	−1	0	1	2	3	4	5
$h(x)$	3	2.5	2.25	2.125	2.0625	2.0313	2.0156

a) بيانيًا: مثّل كل دالة بيانيًا في الفترة $-1 \le x \le 5$ على ورقة تمثيل بياني مستقلة.

b) لفظيًا: أي الدوال معاملها (a) سالب؟ وضّح إجابتك .

c) تحليليًا: أي الدوال تمثل نموًا أسيًا؟ وأيها تمثل اضمحلالًا أسيًا؟

27) مدارس: يزداد عدد خريجي إحدى المدارس بمعدل 1.055 كل عام منذ عام 1424هـ . إذا كان عدد الخريجين عام 1424هـ 110 طلاب، فإن الدالة $N = 110\ (1.055)^t$ تمثل عدد الخريجين في العام t بعد العام 1424هـ . ما عدد الخريجين المتوقع في عام 1335هـ ؟

198 طالبًا تقريبًا

تنويع التعليم

فوق

توسّع: اطلب إلى الطلاب أن يلقوا 50 قطعة نقد ويعدوا القطع التي يظهر عليها الشعار، ثم اطلب إليهم أن يستثنوا القطع التي ظهر عليها الشعار ويعيدوا تطبيق النشاط على القطع المتبقية ويستمروا في ذلك، مسجلين عدد القطع التي يظهر عليها الشعار في كل مرة، ثم اطلب إليهم تمثيل نواتج التجربة بيانيًا، وذلك بتعيين نقاط بحيث يمثل الإحداثي x فيها رقم المحاولة، ويمثل الإحداثي y عدد مرات ظهور الشعار والتوصيل بين النقاط بمنحنى، واطلب إليهم أيضًا أن يفسروا نظريًا لماذا يمكن تمثيل بياناتهم بالمعادلة $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$.

مسائل مهارات التفكير العليا

28) تحدٍّ: اكتب دالة أسية يمر منحناها بكل من النقطتين $(0, 3)$, $(1, 6)$

إجابة ممكنة: $f(x) = 3(2)^x$

29) تبرير: حدد ما إذا كانت كل من الجمل الآتية صحيحة دائمًا أو صحيحة أحيانًا أو غير صحيحة أبدًا. وضِّح إجابتك. **انظر ملحق الإجابات (29, 30)**

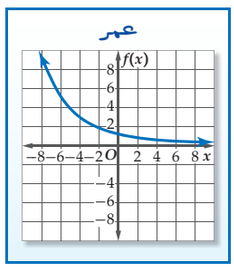
a) التمثيل البياني للدالة الأسية التي على الصورة $y = ab^{x-h} + k$ يقطع المحور y .

b) التمثيل البياني للدالة الأسية التي على الصورة $y = ab^{x-h} + k$ يقطع المحور x .

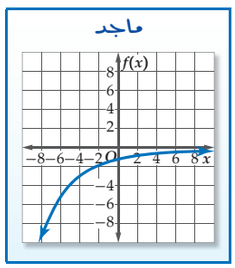
c) إذا كان b عددًا صحيحًا، فإن الدالة $f(x) = |b|^x$ هي دالة نمو أسي.

30) اكتشف الخطأ: طُلب إلى عمر وماجد أن يمثّلا الدالة $f(x) = -\frac{2}{3}\left(\frac{3}{4}\right)^{x-1}$ بيانيًّا. أي منهما تمثيله صحيح؟ وضِّح إجابتك.

عمر



ماجد



31) تحدٍّ: تتناقص مادة بنسبة 35% مما تبقى كل يوم، إذا بقي منها 8 mg بعد 8 أيام، فكم ملجرامًا من المادة كان موجودًا في البداية؟

251 mg تقريبًا

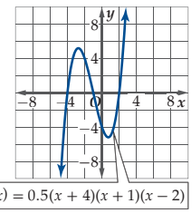
32) مسألة مفتوحة: أعطِ قيمة للثابت b تجعل الدالة $f(x) = \left(\frac{8}{b}\right)^x$ دالة اضمحلال أسّي. **إجابة ممكنة: 10**

33) اكتب: صِف التحويل الذي ينقل الدالة $g(x) = b^x$ إلى الدالة $f(x) = ab^{x-h} + k$. **انظر ملحق الإجابات.**

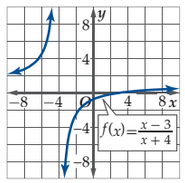
مراجعة تراكمية

استعمل التمثيل البياني لكل من الدالتين أدناه لتقدير الفترات التي تكون فيها الدالة متزايدة، أو متناقصة أو ثابتة مقربة إلى أقرب 0.5 وحدة، ثم عزز إجابتك عدديًّا: (الدرس 1-4) **انظر ملحق الإجابات.**

34)



35)



استعمل منحنى الدالة $f(x)$ لتمثيل كل من الدالتين $g(x) = |f(x)|$, $h(x) = f(|x|)$ بيانيًّا: (الدرس 1-5) **انظر ملحق الإجابات. (36, 37)**

36) $f(x) = -4x + 2$

37) $f(x) = \sqrt{x + 3} - 6$

أوجد $(f+g)(x)$, $(f-g)(x)$, $(f \cdot g)(x)$, $\left(\frac{f}{g}\right)(x)$ للدالتين $f(x), g(x)$ في كل مما يأتي، وحدد مجال كل من الدوال الناتجة: (الدرس 1-6) **انظر ملحق الإجابات. (38, 39)**

38) $f(x) = x^2 - 2x$, $g(x) = x + 9$

39) $f(x) = \frac{x}{x+1}$, $g(x) = x^2 - 1$

تدريب على اختبار

40) أي من الأعداد الآتية لا ينتمي إلى مجال الدالة $f(x) = \sqrt{4 - 2x}$؟ **A**

A 3 **B** 2 **C** 1 **D** 0

41) إذا كانت $f(x) = \sqrt{x+1}$, $g(x) = 4x$ فما قيمة $(fog)(2)$؟ **C**

A $\sqrt{3}$ **B** $4\sqrt{3}$ **C** 3 **D** 8

تنبيه!

اكتشف الخطأ ذكّر الطلاب في السؤال 30 أن ضرب أي دالة في عدد سالب يعكس تمثيلها البياني حول المحور x.

4 التقويم

بطاقة مكافأة: اكتب خمس دوال أسية مختلفة بعدة نسخ. وأعط دالة لكل طالب ليكتب إن كانت الدالة تمثّل دالة نمو أسي أم دالة اضمحلال أسي. واطلب إليهم أن يسلموا أوراقهم قبل مغادرتك غرفة الصف.

1 التركيز

التقويم التكويني

الهدف استعمال الآلة الحاسبة البيانية لحل معادلات ومتباينات أسية بيانيًّا أو باستعمال ميزة الجداول.

المواد اللازمة

- الآلة الحاسبة البيانية **TI-nspire**.

إرشادات التدريس

ذكّر الطلاب بوضع الأسس بين قوسين في الخطوة **1** من النشاط.

2 التدريس

العمل في مجموعات تعاونية

وزِّع الطلاب في مجموعات ثنائية أو ثلاثية متفاوتة القدرات، واطلب إلى كل مجموعة إكمال النشاط وحل التمارين **1-5**.

نشاط 1

- قبل البدء بمناقشة النشاط، استعمل معادلة بسيطة مثل $2x = 6$ لتذكّر الطلاب بكيفية حل المعادلات بيانيًّا.
ثم مثّل المعادلتين $y = 2x$ و $y = 6$ بيانيًّا، وحدد نقطة التقاطع.
- اسأل الطلاب: ما أهمية وضع الأسس بين أقواس في الخطوة **1** من النشاط؟
- اطلب إلى الطلاب تعويض حل النشاط في المعادلة الأصلية للتحقق من صحة الحل.

تدريب

اطلب إلى الطلاب حل التمارين **2-5**.

معمل الحاسبة البيانية:

حل المعادلات والمتباينات الأسية

Solving Exponential Equations and Inequalities

يمكن استعمال الحاسبة البيانية TI-nspire، لحل المعادلات الأسية بيانيًّا أو باستعمال خاصية الجدول.
ولعمل ذلك اكتب المعادلات الأسية على صورة نظام من المعادلات.

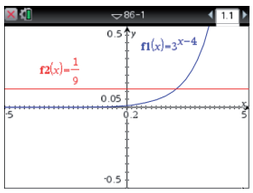
نشاط 1

استعمل الحاسبة البيانية لحل المعادلة $3^{x-4} = \frac{1}{9}$

الخطوة 1: تمثيل طرفَي المعادلة بيانيًّا

مثّل طرفَي المعادلة بيانيًّا في صورة دالتين مستقلتين، وأدخل 3^{x-4} في f1، و $\frac{1}{9}$ في f2، ثم مثّل المعادلتين بيانيًّا، وذلك بالضغط على المفاتيح:

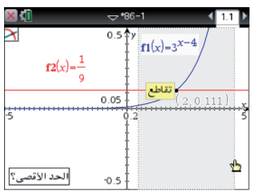
on ، 3^{x-4} ، enter ، tab ، $\frac{1}{9}$ ، enter



الخطوة 2: استعمال ميزة نقاط التقاطع.

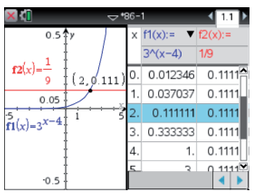
إن ميزة **نقاط التقاطع** في قائمة **تحليل الرسم البياني** تمكنك من تقدير الزوج المرتب الذي يمثّل نقطة التقاطع.

اضغط على مفتاح menu واختر 6: تحليل الرسم البياني واختر منها 4: نقاط التقاطع، ثم اضغط في أي نقطة على الشاشة وحرِّك المؤشر مرورًا بنقطة التقاطع، سيظهر الزوج المرتب $(2, 0.111)$؛ أي أن الحل هو 2



الخطوة 3: استعمال خاصية الجدول

تستعمل هذه الخاصية عادة لإنشاء جدول لقيم الدالة؛ يسهم في تحليلها (تحديد أصفارها، وتحديد خطوط التقارب لها، وتحديد نقطة تقاطع دالتين، .. إلخ).
تحقق من صحة حلّك باستعمال **خاصية الجدول**. اعمل جدولًا في شاشة جانبية، وذلك بالضغط على مفتاح: menu واختر منها 7: الجدول ثم اختر 1: اظهار الجدول في شاشة جانبية (Ctrl + T)
يبيِّن الجدول قيم x وقيم $f(x)$ أو y المناظرة لها لكل تمثيل بياني؛ فعندما $x = 2$ ، يكون للدالتين القيمة نفسها، وهي $0.111 \approx \frac{1}{9}$ ، وهذا يعني أن حل المعادلة هو 2 .



التحقق عوّض عن x بـ 2 في المعادلة الأصلية.

$3^{x-4} \stackrel{?}{=} \frac{1}{9}$ المعادلة الأصلية

$3^{2-4} \stackrel{?}{=} \frac{1}{9}$ بتعويض 2 بدلًا من x

$3^{-2} \stackrel{?}{=} \frac{1}{9}$ بالتبسيط

$\frac{1}{9} = \frac{1}{9}$ ✓ الحل صحيح

تمارين:

استعمل الحاسبة البيانية لحل كل معادلة مما يأتي :

1) $9^{x-1} = \frac{1}{81}$ **−1**

2) $4^{x+3} = 2^{5x}$ **2**

3) $5^{x-1} = 2^{x}$ **1.76**

4) $3.5^{x+2} = 1.75^{x+3}$ **−1.2**

5) $-3^{x+4} = -0.5^{2x+3}$ **−2.6**

6) $6^{3x} = 8^{x-1}$ **−0.6309**

وبطريقة مشابهة، يمكنك استعمال الحاسبة البيانية TI–nspire لحل متباينات أسية.

نشاط 2

استعمل الحاسبة البيانية لحل المتباينة $2^{x-2} \geq 0.5^{x-3}$

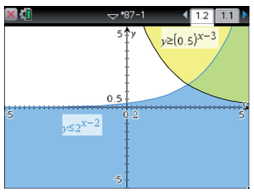
الخطوة 1: تمثيل المتباينات المناظرة.

أعد كتابة المسألة على صورة نظام من المتباينات.

المتباينة الأولى هي: $y \geq 2^{x-2}$ أو $2^{x-2} \leq y$، والمتباينة الثانية هي: $y \geq 0.5^{x-3}$.

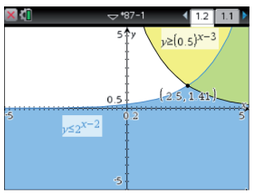
ثم مثّلها بالضغط على المفاتيح:

فتكون منطقة الحل هي منطقة التظليل المشترك.



الخطوة 2: تحديد مجموعة الحل

مجموعة إحداثيات x للنقاط التي تقع في منطقة تقاطع التظليلين تمثل مجموعة الحل للمتباينة الأصلية، و باستعمال ميزة **نقاط التقاطع** وذلك بالضغط على مفتاح menu ، واختيار 6:تحليل الرسم البياني ثم اختيار 4:نقاط التقاطع والضغط في أي نقطة على الشاشة وتحريك المؤشر مرورًا بنقطة التقاطع، سيظهر الزوج المرتب (2.5, 1.41)، حيث يمكن استنتاج أن مجموعة الحل هي $\{x \mid x \geq 2.5\}$.



الخطوة 3: استعمال تطبيق القوائم وجداول البيانات .

تحقق من الحل باستعمال تطبيق القوائم وجداول البيانات . أنشئ جدولًا لقيم x بزيادة 0.5 في كل مرة، وذلك بالضغط على المفاتيح: on ، واكتب $y1 = 2^{x-2}$ في العمود الثاني، $y2 = 0.5^{x-3}$ في العمود الثالث واختر مرجع المتغير في كل مرّة. لاحظ أنه لقيم x الأكبر من 2.5 تكون **y2** > **y1**، وهذا يؤكد أن حل المتباينة هو $\{x \mid x \geq 2.5\}$.

تمارين:

استعمل الحاسبة البيانية لحل كل متباينة مما يأتي :

7) $6^{2-x} - 4 < -0.25^{x-2.5}$ $\{x \mid x > 1.8\}$

8) $16^{x-1} > 2^{2x+2}$ $\{x \mid x > 3\}$

9) $3^x - 4 \leq 5^{\frac{x}{2}}$ $\{x \mid x < 2\}$

10) $5^{x+3} \leq 2^{x+4}$ $\{x \mid x \leq -2.2\}$

11) $12^{x-5} \geq 9.32$ $x \geq 5.8983$

12) $12^{4x-7} < 4^{2x+3}$ $x < 3.008$

13) اكتب: وضح لماذا يكون تمثيل نظام من المعادلات بيانيًّا صالحًا لحل معادلات أو متباينات أسية.

لأن حل المعادلة الأسية يعتمد على تمثيل كلٍّ من طرفيها بيانيًّا (نظام من معادلتين)، ثم تقدير الزوج المرتب الذي يمثِّل نقطة التقاطع، والتي تمثل حلًّا للمعادلة الأسية، وبالمثل فإن حل المتباينة الأسية يعتمد على تمثيل متباينتين تمثِّلان طرفَي المتباينة، وإيجاد منطقة الحل المشتركة.

من المحسوس إلى المجرد:

اطلب إلى الطلاب توضيح كيف تتغير مجموعة الحل في النشاط 2 إذا كانت المتباينة $2^{x-2} \leq 0.5^{x-3}$

نشاط 2

- تأكد من فهم الطلاب لماذا نعيد كتابة المسألة على صورة نظام من المتباينات.

تدريب

اطلب إلى الطلاب حل التمارين **7-12**

3 التقويم

التقويم التكويني

استعمل السؤالين **12 ,4** لتقويم مدى إتقان الطلاب لاستعمال الآلة الحاسبة البيانية لحل معادلات أسّية.

1 التركيز

الترابط الرأسي

ما قبل الدرس 2-2

تمثيل الدوال الأسّية بيانيًّا.

الدرس 2-2

حل معادلات أسيّة.

حل متباينات أسيّة.

حل مسائل تتضمن نموًّا أسيًّا واضمحلالًا أسيًّا.

ما بعد الدرس 2-2

تطوير تعريف اللوغاريتمات من خلال استكشاف ووصف العلاقة بين الدوال الأسية ومعكوسها.

2 التدريس

أسئلة التعزيز

اطلب إلى الطلاب قراءة فقرة "لماذا؟".

واسأل:

- ما قيمة x التي تمثّل عام 1430 هـ؟ 5
- ما عدد المشتركين الذي يمكن تمثيله بالقيمة $y = 5.2$؟ 5200000
- كم سيكون عدد المشتركين عام 1432 هـ؟ 19928000 مشترك تقريبًا

حل المعادلات والمتباينات الأسّية
Solving Exponential Equations and Inequalities

فيما سبق: درستُ تمثيل الدوال الأسية بيانيًا. (الدرس 1–2)

والآن:

- أحل معادلات أسية.
- أحل متباينات أسية.
- أحل مسائل تتضمن نموًا أسيًا واضمحلالًا أسيًا.

المفردات:

المعادلة الأسية
exponential equation

الربح المركب
compound interest

المتباينة الأسية
exponential inequality

www.obeikaneducation.com

لماذا؟

تتزايد اشتراكات مواقع الإنترنت بطريقة سريعة، فتأخذ شكل دالة أسية. فإذا كان عدد الاشتراكات في أحد المواقع يُعطى بالمعادلة $y = 2.2(1.37)^x$، حيث x عدد السنوات منذ عام 1425 هـ، و y عدد المشتركين بالملايين.

فيمكنك استعمال المعادلة $y = 2.2(1.37)^x$ لتحديد عدد المشتركين في سنة معينة، أو تحديد السنة التي يكون فيها عدد المشتركين عند مستوى معين.

حل المعادلات الأسية: تظهر المتغيرات في المعادلة الأسية في موقع الأسس.

مفهوم أساسي خاصية المساواة للدوال الأسية

التعبير اللفظي: إذا كان $b > 0$, $b \neq 1$، فإن $b^x = b^y$ إذا وفقط إذا كان $x = y$.

مثال: إذا كان $3^x = 3^5$، فإن $x = 5$. و إذا كان $x = 5$، فإن $3^x = 3^5$.

يمكنك استعمال خاصية المساواة للدوال الأسية لحل معادلات أسية.

مثال 1 حل المعادلات الأسية

حُلّ كل معادلة مما يأتي:

a) $2^x = 8^3$

$2^x = 8^3$	المعادلة الأصلية
$2^x = (2^3)^3$	$8 = 2^3$
$2^x = 2^9$	خاصية قوة القوة
$x = 9$	خاصية المساواة للدوال الأسية

b) $9^{2x-1} = 3^{6x}$

$9^{2x-1} = 3^{6x}$	المعادلة الأصلية
$(3^2)^{2x-1} = 3^{6x}$	$9 = 3^2$
$3^{4x-2} = 3^{6x}$	خاصية قوة القوة
$4x - 2 = 6x$	خاصية المساواة للدوال الأسية
$-2 = 2x$	بطرح $4x$ من كلا الطرفين
$-1 = x$	بقسمة كلا الطرفين على 2

تحقق من فهمك

1A) $4^{2n-1} = 64$ 2

1B) $5^{5x} = 125^{x+2}$ 3

مصادر الدرس 2 – 2

المصدر	دون المتوسط	ضمن المتوسط	فوق المتوسط
دليل المعلم	• تنويع التعليم ص (93)	• تنويع التعليم ص (96 , 94 , 93)	• تنويع التعليم ص (96 , 94)
كتاب التمارين	• ص (12)	• ص (12)	• ص (12)
مصادر المعلم للأنشطة الصفية	• تدريبات إعادة التعليم، ص (10) • تدريبات حل المسألة، ص (12)	• تدريبات حل المسألة، ص (12) • التدريبات الإثرائية، ص (13)	• تدريبات حل المسألة، ص (12) • التدريبات الإثرائية، ص (13)

يمكنك استعمال معلومات عن النمو أو الاضمحلال لكتابة دالة أسية.

مثال 2 من واقع الحياة — كتابة دالة أسّية

علوم: بدأ سلطان تجربة مخبرية بـ 7500 خلية بكتيرية. وبعد أربع ساعات أصبح عدد الخلايا البكتيرية 23000 خلية.

a) اكتب دالة أسية على الصورة $y = ab^x$ تمثل عدد الخلايا البكتيرية y بعد x ساعة إذا استمر تغير عدد الخلايا البكتيرية بالمعدل نفسه مقربًا الناتج إلى أقرب ثلاث منازل عشرية.

في بداية التجربة كان الزمن (x) صفر ساعة ، وعدد الخلايا (y) يساوي 7500 خلية بكتيرية، لذا عوّض هذه القيم لإيجاد المقطع y أو قيمة a .

$y = ab^x$	الدالة الأسية
$7500 = a\,b^0$	بالتعويض عن x بالعدد 0، وعن y بالعدد 7500
$7500 = a$	$b^0 = 1$

وعندما $x = 4$، يصبح عدد الخلايا البكتيرية 23000، عوّض هذه القيم في الدالة الأسية لتحديد قيمة b.

$23000 = 7500 \cdot b^4$	بالتعويض عن x بالعدد 4، وعن y بالعدد 23000، وعن a بالعدد 7500
$3.067 \approx b^4$	بقسمة كلا الطرفين على 7500
$\sqrt[4]{3.067} \approx b$	بإيجاد الجذر الرابع للطرفين
$1.323 \approx b$	باستعمال الحاسبة

الدالة التي تمثل عدد الخلايا البكتيرية هي $y = 7500(1.323)^x$.

b) ما العدد المتوقع للخلايا البكتيرية بعد 12 ساعة؟

$y = 7500(1.323)^x$	المعادلة التي تمثل عدد الخلايا البكتيرية
$= 7500(1.323)^{12}$	بالتعويض عن x بالعدد 12
≈ 215664	باستعمال الحاسبة

سيكون هنالك 215664 خلية بكتيرية تقريبًا بعد 12 ساعة.

تحقق من فهمك

2) إعادة تصنيع: أنتج مصنع 3.2 ملايين عبوة بلاستيكية عام 1426 هـ ، وفي عام 1430 هـ أنتج 420000 عبوة بإعادة تصنيع العبوات التي أنتجها عام 1426 هـ.

2A) مفترضًا أن إعادة التصنيع استمرت بالمعدل نفسه، اكتب دالة أسية على الصورة $y = ab^x$ تمثل عدد العبوات المعاد تصنيعها y بعد x سنة مقربًا الناتج إلى أقرب منزلتين عشريتين. $y = 3200000(0.60)^x$

2B) كم تتوقع أن يكون عدد العبوات المُعادة التصنيع عام 1471 هـ؟ صفر تقريبًا

الربط مع الحياة

قبل إعادة تدوير البلاستيك يتم غسله بمادة الصودا الكاوية المضاف إليها الماء الساخن. ولا ينصح باستعمال العبوات المعاد تدويرها للمواد الغذائية.

تستعمل الدوال الأسية في مسائل تتضمن **الربح المركب**؛ وهو الربح الذي يحسب المبلغ المستثمر (رأس المال) مضافًا إليه أي أرباح سابقة، وليس فقط عن رأس المال كما هو في الربح البسيط.

مفهوم أساسي — الربح المركب

يمكنك حساب الربح المركب باستعمال الصيغة

$$A = P\left(1 + \frac{r}{n}\right)^{nt}$$

حيث A المبلغ الكلي بعد t سنة، P المبلغ الأصلي الذي تم استثماره أو رأس المال ، r معدل الربح السنوي المتوقع، n عدد مرات إضافة الأرباح إلى رأس المال في السنة.

حل المعادلات الأسّية

مثال 1 يبيِّن كيفية حل المعادلات الأسية.

مثال 2 يبيِّن كيفية كتابة دالة أسية لتمثيل موقف حياتي.

مثال 3 يبيِّن كيفية إيجاد الربح المركّب باستعمال دالة أسّية.

مثالان إضافيان

1 حل كلًّا من المعادلتين الآتيتين:

a) $3^x = 9^4$ 8

b) $2^{5x} = 4^{2x-1}$ −2

2 **سكان:** يقدر عدد سكان إحدى المدن عام 1420 هـ بـ 1321045 نسمة، وفي عام 1427 هـ قدّر بـ 1512986نسمة.

a) اكتب دالة أسية يمكن استعمالها لتمثيل عدد السكان. ليكن x عدد السنوات منذ عام 1420 هـ. $y = 1321045(1.0196)^x$

b) تنبأ بعدد سكان تلك المدينة عام 1433 هـ. 1700221

التقويم التكويني

استعمل تدريبات "تحقق من فهمك" بعد كل مثال؛ للتحقق من مدى فهم الطلاب للمفاهيم.

المحتوى الرياضي

حل المعادلات الأسية يمكن حل المعادلات الأسّية البسيطة من خلال إعادة كتابة طرف، أو كلا طرفي المعادلة على أن تكون الأساسات متساوية، وعندئذٍ يمكنك استعمال خاصية المساواة للدوال الأسّية لإيجاد قيم المتغيرات.

تنويع التعليم

دون ضمن

إذا أردت أن يتحقق الطلاب من صحة حلهم للمعادلة،

فذكرهم بتعويض هذا الحل في المعادلة الأصلية؛ للتأكد من أنه يحققها.

مثال إضافي

3 يعطي استثمار ما ربحًا مركبًا معدل نسبته 5.4% سنويًّا، ويتم إضافة الأرباح إلى رأس المال 4 مرات سنويًّا، فإذا تم استثمار مبلغ 40000 ريال، فكم سيصبح المبلغ الكلي بعد 8 سنوات؟

61435.6 ريالًا

حل المتباينات الأسية

مثال 4 يبيِّن كيفية حل المتباينات الأسية.

مثال إضافي

4 حل المتباينة $5^{3-2x} > \frac{1}{625}$

$x < \frac{7}{2}$

التعليم باستعمال التقنيات

مدونة: اطلب إلى الطلاب كتابة وشرح خاصية المساواة للدوال الأسية مع تضمينها أمثلة متنوعة في مدونة الفصل.

مثال 3 الربح المركب

مال: استثمر حمد مبلغ 25000 ريال في مشروع تجاري متوقعًا ربحًا سنويًّا نسبته 4.2%، بحيث تُضاف الأرباح إلى رأس المال كل شهر. ما المبلغ الكلي المتوقع بعد 15 سنة مقربًا إلى أقرب منزلتين عشريتين؟

افهم: أوجد المبلغ الكلي المتوقع بعد 15 سنة.

خطط: بما أنه تتم إضافة الأرباح إلى رأس المال، إذن استعمل صيغة الربح المركب.

$P = 25000, r = 0.042, n = 12, t = 15$

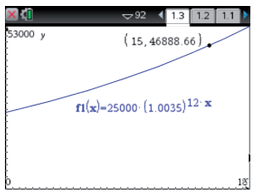
حُلّ:

صيغة الربح المركب: $A = P\left(1 + \frac{r}{n}\right)^{nt}$

$P = 25000, r = 0.042, n = 12, t = 15$: $= 25000\left(1 + \frac{0.042}{12}\right)^{12 \cdot 15}$

باستعمال الحاسبة: ≈ 46888.66

تحقق: مثّل المعادلة المناظرة بيانيًّا $f(x) = 25000(1.0035)^{12x}$، ثم أوجد قيمة y عندما $x = 15$



على الرسم بالضغط على مفتاح menu ثم اختر

8: الهندسة واختر منها 1: النقاط والمستقيمات

ومنها 2: نقطة على المستقيم ثم اضغط على الرسم البياني لتحدد نقطة يظهر الزوج المرتب الذي يمثلها.

اضغط esc ثم حدِّد الإحداثي x للنقطة واكتب 15، سيظهر الإحداثي y المقابل 46888.66، إذن الإجابة صحيحة.

تحقق من فهمك

3) استثمر علي مبلغ 100000 ريال في مشروع تجاري متوقعًا ربحًا سنويًّا نسبته 12%، بحيث تُضاف الأرباح إلى رأس المال مرتين شهريًّا. ما المبلغ الكلي المتوقع بعد 5 سنواتٍ مقربًا الناتج إلى أقرب منزلتين عشريتين؟

تنبيه!

نسب مئوية: تذكر تحويل جميع النسب المئوية إلى كسور عشرية، مثل: $4.2\% = 0.042$

تنبيه!

تقريب الأعداد: يمكنك تقريب الأعداد الظاهرة على الشاشة، بحيث تظهر على الرسم بالشكل المناسب وذلك بالضغط على مفتاح on واختيار 5 الإعدادات ثم اختيار 2: إعدادات المستند. واختيار التقريب المناسب، وستظهر الأعداد بحسب عدد المنازل المطلوبة.

3) 181939.67 ريالًا تقريبًا؛

$p = 100000,$

$r = 0.12,$

$t = 5, n = 24$

$A = 100000\left(1 + \frac{0.12}{24}\right)^{24 \times 5}$

$= 181939.67$

حل المتباينات الأسية: المتباينة الأسية هي متباينة تتضمن عبارة أسية أو أكثر.

مفهوم أساسي خاصية التباين لدالة النمو

التعبير اللفظي: إذا كان $b > 1$، فإن $b^x > b^y$ إذا وفقط إذا كان $x > y$

مثال: إذا كان $2^6 > 2^x$، فإن $6 > x$، وإذا كان $x > 6$، فإن $2^x > 2^6$.

تتحقق هذه الخاصية أيضًا مع رمز التباين $\geq$

مفهوم أساسي خاصية التباين لدالة الاضمحلال

التعبير اللفظي: إذا كان $0 < b < 1$، فإن $b^x > b^y$ إذا وفقط إذا كان $y < x$

مثال: إذا كان $\left(\frac{1}{2}\right)^5 < \left(\frac{1}{2}\right)^x$، فإن $5 > x$، وإذا كان $x < 5$، فإن $\left(\frac{1}{2}\right)^x > \left(\frac{1}{2}\right)^5$.

تتحقق هذه الخاصية أيضًا مع رمز التباين $\geq$

مثال 4 حل المتباينات الأسية

حُلّ المتباينة $16^{2x-3} < 8$

$16^{2x-3} < 8$	المتباينة الأصلية
$(2^4)^{2x-3} < 2^3$	$16 = 2^4, 8 = 2^3$
$2^{8x-12} < 2^3$	خاصية قوة القوة
$8x - 12 < 3$	خاصية التباين للدوال الأسية
$8x < 15$	بجمع 12 للطرفين
$x < \frac{15}{8}$	بقسمة الطرفين على 8

تنويع التعليم

ضمن فوق

توسّع: ساعد الطلاب على تطوير حسهم الاستثماري من خلال توفير مبلغ من المال لاستثماره، واطلب إليهم أن يبحثوا في الإنترنت أو في الصحف عن استثمارات بمعدلات ربح مناسبة. وعليهم أن يسجلوا معلومات موثقة تشمل اسم المشروع الاستثماري، ومعدل نسبة الربح، وزمن إضافة الأرباح إلى رأس المال، والقيود التي يجب الالتزام بها. ثم اطلب إليهم أن يمثّلوا المبلغ الكلي مع مرور الزمن بيانيًّا.

تحقق من فهمك

4A $3^{2x-1} \geq \frac{1}{243}$ $x \geq -2$

4B $2^{x+2} > \frac{1}{32}$ $x > -7$

تدرب وحل المسائل

حُلّ كل معادلة مما يأتي: (مثال 1)

1) $8^{4x+2} = 64$ 0

2) $5^{x-6} = 125$ 9

3) $3^{5x} = 27^{2x-4}$ 12

4) $16^{2y-3} = 4^{y+1}$ $\frac{7}{3}$

5) $2^{6x} = 32^{x-2}$ -10

6) $49^{x+5} = 7^{8x-6}$ $\frac{8}{3}$

7) $81^{a+2} = 3^{3a+1}$ -7

8) $256^{b+2} = 4^{2-2b}$ -1

9) $9^{3c+1} = 27^{3c-1}$ $\frac{5}{3}$

10) $8^{2y+4} = 16^{y+1}$ -4

11) **علوم:** الانقسام هو عملية حيوية يتم فيها انشطار الخلية إلى خليتين مطابقتين تمامًا للخلية الأصلية، وتنقسم إحدى أنواع الخلايا البكتيرية كل 15 دقيقة. (مثال 2)

a اكتب دالة أسّية على الصورة $c = ab^t$ تمثل عدد الخلايا البكتيرية c المتكونة من انقسام خلية واحدة بعد t من الدقائق. $c = 2^{\frac{t}{15}}$

b إذا بدأت خلية بكتيرية واحدة بالانقسام، فكم خلية ستتكون بعد ساعة؟ 16 خلية

12) **مال:** ورث خالد مبلغ 100000 ريال عن والده عام 1430 هـ، واستثمره في مشروع تجاري، وقدّر خالد أن المبلغ المستثمَر سيصبح 169588 ريالًا بحلول عام 1442 هـ. (مثال 2)

a اكتب دالة أسية على الصورة $y = ab^x$ تمثل المبلغ y بدلالة عدد السنوات x منذ عام 1430 هـ. $y = 100000(1.045)^x$

b افترض أن المبلغ استمر في الزيادة بالمعدل نفسه، فكم سيصبح عام 1450 هـ إلى أقرب منزلتين عشريتين؟ 241171.40 ريالًا

13) استثمر حسن مبلغ 70000 ريال متوقعًا ربحًا سنويًّا نسبته 4.3%، بحيث تُضاف الأرباح إلى رأس المال كل شهر. ما المبلغ الكلي المتوقع بعد 7 سنوات إلى أقرب منزلتين عشريتين؟ (مثال 3) 94533.78 ريالًا تقريبًا

14) استثمر ماجد مبلغ 50000 ريال متوقعًا ربحًا سنويًّا نسبته 2.25%، بحيث تُضاف الأرباح إلى رأس المال مرتين شهريًّا. ما المبلغ الكلي المتوقع بعد 6 سنوات إلى أقرب منزلتين عشريتين؟ (مثال 3) 57223.22 تقريبًا

حل كل متباينة مما يأتي: (مثال 4)

15) $4^{2x+6} \leq 64^{2x-4}$ $x \geq 4.5$

16) $25^{y-3} \leq \left(\frac{1}{125}\right)^{y+3}$ $y \leq \frac{-3}{5}$

17) $625 \geq 5^{a+8}$ $a \leq -4$

18) $10^{5b+2} > 1000$ $b > \frac{1}{5}$

19) $\left(\frac{1}{64}\right)^{c-2} < 32^{2c}$ $c > \frac{3}{4}$

20) $\left(\frac{1}{9}\right)^{3t+5} \geq \left(\frac{1}{243}\right)^{t-6}$ $t \leq -40$

اكتب دالة أسية على الصورة $y = ab^x$ للتمثيل البياني المار بكل زوج من النقاط فيما يأتي:

21) $(3, 100)$, $(0, 6.4)$ $y = 6.4(2.5)^x$

22) $(4, 81)$, $(0, 256)$ $y = 256(0.75)^x$

23) $(5, 371293)$, $(0, 128)$ $y = 128(4.926)^x$

24) $(4, 21609)$, $(0, 144)$ $y = 144(3.5)^x$

25) **علوم:** وُضع كوب من الشاي درجة حرارته 90°C في وسطٍ درجة حرارته ثابتة وتساوي 20°C، فتناقصت درجة حرارة الشاي، ويمكن تمثيل درجة حرارة الشاي بعد t دقيقة بالدالة $y(t) = 20 + 70(1.071)^{-t}$.

a أوجد درجة حرارة الشاي بعد 15 دقيقة. 45.02° C تقريبًا

b أوجد درجة حرارة الشاي بعد 30 دقيقة. 28.94° C تقريبًا

c إذا كانت درجة الحرارة المناسبة لشرب الشاي هي 60°C، فهل ستكون درجة حرارة الشاي مساويةً لها أم أقل منها بعد 10 دقائق؟ أقل منها

26) **أشجار:** يتناسب قطر قاعدة جذع شجرة بالسنتمترات طرديًّا مع ارتفاعها بالأمتار مرفوعًا للأس $\frac{3}{2}$، إذا بلغ ارتفاع شجرة 6 m، وقطر قاعدة جذعها 19.1cm، فاكتب معادلة القطر d لقاعدة جذع الشجرة عندما يكون ارتفاعها h متر. $d = 1.3h^{\frac{3}{2}}$

حُلّ كل معادلة أسية مما يأتي: **27)** انظر الهامش.

27) $\left(\frac{1}{2}\right)^{4x+1} = 8^{2x+1}$

28) $\left(\frac{1}{5}\right)^{x-5} = 25^{3x+2}$ $\frac{1}{7}$

29) $216 = \left(\frac{1}{6}\right)^{x+3}$ -6

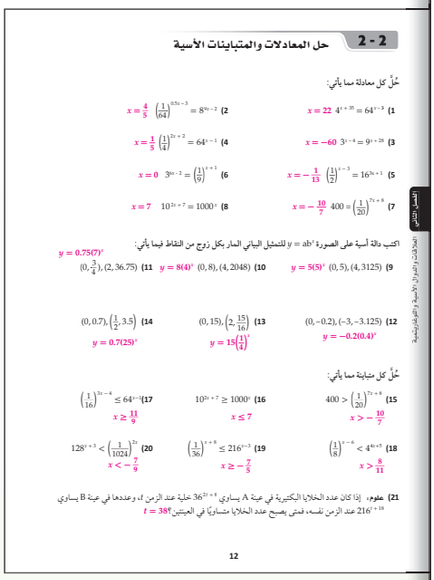
30) $-\frac{4}{13}\left(\frac{1}{8}\right)^{3x+4} = \left(\frac{1}{4}\right)^{-2x+4}$

31) $\frac{11}{8}\left(\frac{2}{3}\right)^{5x+1} = \left(\frac{27}{8}\right)^{x-4}$

32) $\left(\frac{25}{81}\right)^{2x+1} = \left(\frac{729}{125}\right)^{-3x+1}$ 1

تنويع الواجبات المنزلية

المستوى	الأسئلة
دون دون المتوسط	1-20، 26، 29-32، 34، 40-53
ضمن ضمن المتوسط	1-25 (فردي)، 2-6، 27-31 (فردي)، 33-35، 36، 38، 39، 40-53
فوق فوق المتوسط	21-53



2-2 حل المعادلات والمتباينات الأسية

حُلّ كل معادلة مما يأتي:

1) $4^{x+20} = 64^{x-3}$ $x = 22$

2) $\left(\frac{1}{64}\right)^{65x-3} = 8^{9x-2}$ $x = \frac{4}{5}$

3) $3^{x-4} = 9^{x+28}$ $x = -60$

4) $\left(\frac{1}{4}\right)^{2x+2} = 64^{x-1}$ $x = \frac{3}{5}$

5) $\left(\frac{1}{2}\right)^{x-3} = 16^{3x+1}$ $x = -\frac{1}{13}$

6) $\left(\frac{1}{9}\right)^{x+1} = 3^{6x-2}$ $x = 0$

7) $400 = \left(\frac{1}{20}\right)^{2x+8}$ $x = -\frac{10}{7}$

8) $10^{2x+7} = 1000^{x}$ $x = 7$

اكتب دالة أسية على الصورة $y = ab^x$ للتمثيل البياني المار بكل زوج من النقاط فيما يأتي:

9) $(0, 5), (4, 3125)$ $y = 5(5)^x$

10) $(0, 8), (4, 2048)$ $y = 8(4)^x$

11) $(0, \frac{3}{4}), (2, 36.75)$ $y = 0.75(7)^x$

12) $(0, -0.2), (-3, -3.125)$ $y = -0.2(0.4)^x$

13) $(0, 15), \left(2, \frac{15}{16}\right)$ $y = 15\left(\frac{1}{4}\right)^x$

14) $(0, 0.7), \left(\frac{1}{2}, 3.5\right)$ $y = 0.7(25)^x$

حُلّ كل متباينة مما يأتي:

15) $400 > \left(\frac{1}{20}\right)^{2x+8}$ $x > -\frac{10}{7}$

16) $10^{2x+7} \geq 1000^{x}$ $x \leq 7$

17) $\left(\frac{1}{16}\right)^{3x-4} \leq 64^{x-10}$ $x \geq \frac{14}{9}$

18) $\left(\frac{1}{8}\right)^{x-4} < 4^{4x+5}$ $x > \frac{8}{11}$

19) $\left(\frac{1}{36}\right)^{x+5} \leq 216^{x-3}$ $x \geq -\frac{7}{5}$

20) $128^{x+3} < \left(\frac{1}{1024}\right)^{2x}$ $x < -\frac{7}{6}$

21) **علوم:** إذا كان عدد الخلايا البكتيرية في عينة A يساوي 36^{2x+8} خلية عند الزمن t، وعددها في عينة B يساوي 216^{x+16} عند الزمن نفسه، فمتى يصبح عدد الخلايا متساويًا في العينتين؟ $t = 38$

3 التدريب

التقويم التكويني

استعمل الأسئلة **1-20** للتأكد من مدى فهم الطلاب.

ثم استعمل الجدول أسفل هذه الصفحة؛ لتعيين الواجبات المنزلية للطلبة بحسب مستوياتهم.

إجابات:

27) إجابة ممكنة:

$\left(\frac{1}{2}\right)^{4x+1} = 8^{2x+1}$ المعادلة الأصلية

$\left(\frac{1}{2}\right)^{4x+1} = 2^{-4x-1}$ $8 = 2^3$

$2^{-4x-1} = (2^3)^{2x+1}$

$2^{-4x-1} = 2^{6x+3}$ اضرب القوى

$-4x - 1 = 6x + 3$ خاصية المساواة للدوال الأسية

$-10x = 4$ حل المعادلة الخطية

$x = \frac{-4}{10} = -\frac{2}{5}$

تمثيلات متعددة يستعمل الطلاب في السؤال 35 النموذج الحسي وجدول القيم والمعادلة والتحليل لوصف دالة أسّية.

4 التقويم

فهم الرياضيات اطلب إلى الطلاب وصف قيم b الممكنة في تعبير الدالة الأسية على الصورة $y = b^x$.

التقويم التكويني

تحقق من مدى استيعاب الطلاب للمفاهيم الواردة في الدرسين 2-2 ,2-1 بإعطائهم:

الاختبار القصير 1، ص (30)

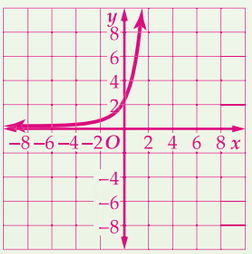
إجابات:

33c) التقدير أكبر من العدد الحقيقي للسكان بـ 375 مليونًا.

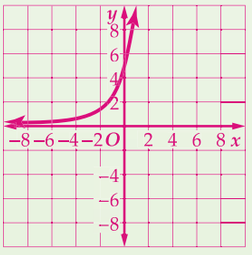
33d) 9.3498 مليارات تقريبًا، وبما أن التنبؤ بعدد السكان عام 2000 كان أكبر من العدد الحقيقي، فقد يكون هذا التنبؤ أكبر مما سيكون عليه في الواقع في ذلك الوقت.

39) صحيحة دائمًا؛ لأن 2^x موجبة لجميع قيم x، بينما $-(8^{20x})$ سالبة لجميع قيم x.

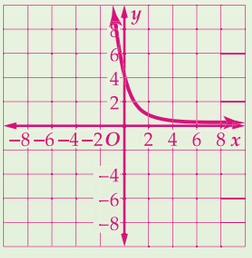
40)



41)



42)



33) **سكان:** بلغ عدد سكان العالم عام 1950م ، 2.556 مليار نسمة، وبحلول عام 1980م أصبح 4.458 مليارات نسمة.

a) اكتب دالة أسية على صورة $y = ab^x$ يمكن أن تمثّل تزايد عدد سكان العالم من عام 1950م إلى عام 1980م بالمليار ، حيث x عدد السنوات منذ عام 1950م (قرّب قيمة b إلى أقرب جزء من عشرة آلاف) $y = 2.556(1.0187)^x$

b) افترض أن تزايد عدد السكان استمر بالمعدل نفسه، فقدّر عدد سكان العالم عام 2000 . 6.455 مليارات تقريبًا

c) إذا كان عدد سكان العالم عام 2000م هو 6.08 مليارات نسمة تقريبًا، فقارن بين تقديرك والعدد الحقيقي للسكان. انظر الهامش

d) استعمل الدالة التي توصلت إليها في فرع a لتقدير عدد سكان العالم عام 2020م. ما دقة تقديرك؟ وضّح إجابتك.

34) **ثقافة مالية:** يُفاضل سعيد بين خيارين للاستثمار الطويل الأمد، ويريد أن يختار أحدهما. انظر ملحق الإجابات. انظر الهامش

a) اكتب دالة كل من الخيار الأول والخيار الثاني للاستثمار.

b) مثّل بالحاسبة البيانية منحنىً يوضح المبلغ الكلي من كل استثمار بعد t سنة.

c) أي الخيارين أفضل في الاستثمار الخيار الأول أم الثاني؟ فسّر إجابتك؟

35) **تمثيلات متعددة:** ستستكشف في هذا التمرين الزيادة المتسارعة في الدوال الأسية . قصَّ ورقة إلى نصفين، وضع بعضهما فوق بعض، ثم قصَّهما معًا إلى نصفين وضع بعضهما فوق بعض، وكرِّر هذه العملية عدة مرات.

a) **حسيًا:** عُدّ قطع الورق الناتجة بعد القص الأول، ثم بعد القص الثاني، والثالث، والرابع. 2. 4. 8. 16

b) **جدوليًا:** دوِّن نتائجك في جدول. انظر ملحق الإجابات.

c) **رمزيًا:** استعمل النمط في الجدول لكتابة معادلة تمثل عدد قطع الورق بعد القص x مرة. $y = 2^x$

d) **تحليليًا:** يُقدر سُمك الورقة الاعتيادية بنحو 0.003in ، اكتب معادلة تمثل سُمك رزمة الورق بعد قصها x مرة. $y = 0.003(2)^x$

e) **تحليليًا:** ما سُمك رزمة من الورق بعد قصها 30 مرة؟ 3221225.47 in تقريبًا

مسائل مهارات التفكير العليا

36) **تحدٍّ:** حُلّ المعادلة الأسية $16^{18} + 16^{18} + 16^{18} + 16^{18} + 16^{18} = 4^x$. 37.1610

37) **مسألة مفتوحة:** اكتب معادلة أسية يكون حلها $x = 2$. إجابة ممكنة: $4^x = 4^2$

38) **برهان:** أثبت أن $27^{2x} \cdot 81^{x+1} = 3^{2x+2} \cdot 9^{4x+1}$. انظر ملحق الإجابات.

39) **تبرير:** حدِّد ما إذا كانت العبارة الآتية صحيحة دائمًا أو صحيحة أحيانًا أو غير صحيحة أبدًا. وضح إجابتك انظر الهامش

$2^x > -(8^{20x})$ لجميع قيم x .

مراجعة تراكمية

مثّل كل دالة مما يأتي بيانيًا: (الدرس 1–2) 40–42) انظر الهامش

40) $y = 2(3)^x$ **41)** $y = 5(2)^x$ **42)** $y = 4\left(\frac{1}{3}\right)^x$

حُلّ كل معادلة مما يأتي: (مهارة سابقة)

43) $\sqrt{x+5} - 3 = 0$ 4 **44)** $\sqrt{3t-5} - 3 = 4$ 18

45) $\sqrt[4]{2x-1} = 2$ 8.5 **46)** $(5x+7)^{\frac{1}{5}} + 3 = 5$ 5

47) $(3x-2)^{\frac{1}{5}} + 6 = 5$ $\frac{1}{3}$ **48)** $(7x-1)^{\frac{1}{3}} + 4 = 2$ −1

أوجد $[h \circ g](x)$, $[g \circ h](x)$ لكل زوج من الدوال الآتية: (الدرس 6–1)

49) $h(x) = 2x - 1$, $g(x) = 3x + 4$
$[g \circ h](x) = 6x+1$, $[h \circ g](x) = |x|$

50) $h(x) = x + 4$, $g(x) = |x|$
$[g \circ h](x) = |x+4|$, $[h \circ g](x) = |x| + 4$

51) أوجد الدالة العكسية للدالة: $f(x) = 2x + 1$ (الدرس 7–1)
$f^{-1}(x) = \frac{x-1}{2}$

تدريب على اختبار

52) ما قيمة x التي تحقق المعادلة $7^{x-1} + 7 = 8$ ؟ C

A −1 B 0
C 1 D 2

53) إذا كانت $f(x) = 5x$ ، فما قيمة $f[f(-1)]$ ؟ A

A −25 B −5
C 5 D 25

تنويع التعليم

ضمن فوق

توسّع: اطلب إلى الطلاب توسعة حل المثال 3 ، وذلك بزيادة عدد مرات إضافة الأرباح إلى المبلغ الأصلي. ولتكن هذه الإضافة يوميًا $(n = 354)$، ثم استكشف ما الذي سيحصل لو تغيرت n إلى عشرات آلاف المرات في العام. لاحظ في هذه الحالة أن المبلغ الكلي يمكن أن يصل إلى الحد الأعلى، وهو 46938.51 ريالًا .

اللوغاريتمات والدوال اللوغاريتمية
Logarithms and Logarithmic Functions

فيما سبق:
درستُ إيجاد الدالة العكسية لدالة. (الدرس 1-7)

والآن:
- أجد قيمة عبارات لوغاريتمية.
- أمثل دوال لوغاريتمية بيانيًا.

المفردات:
اللوغاريتم
logarithm
الدالة اللوغاريتمية
logarithmic function

www.obeikaneducation.com

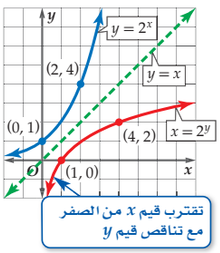
لماذا؟

يُرجِّح كثير من العلماء أن سبب انقراض سلالة الديناصورات هو النيازك التي ضربت الأرض. ويستعمل الفلكيون مقياس باليرمو (Palermo) لتصنيف أجسام الفضاء كالنيازك وغيرها اعتمادًا على مدى تأثيرها في كوكب الأرض. ولجعل المقارنة بين هذه الأجسام أكثر سهولة تم تطوير المقياس باستعمال اللوغاريتمات ، إذ يمكن إيجاد قيمة مقياس باليرمو PS لجسم فضائي من خلال الدالة $R = 10^{PS}$ ، حيث R الخطر النسبي الذي يسببه ذلك الجسم، ويمكن كتابة هذه الدالة بصيغة أخرى تسمى الدالة اللوغاريتمية.

الدوال والعبارات اللوغاريتمية: يمكنك تمثيل الدالة العكسية للدالة الأسية $f(x) = 2^x$ بيانيًّا من خلال تبديل قيم x و y للأزواج المرتبة التي تمثل الدالة.

$y = 2^x$	
x	y
-3	$\frac{1}{8}$
-2	$\frac{1}{4}$
-1	$\frac{1}{2}$
0	1
1	2
2	4
3	8

$x = 2^y$	
x	y
$\frac{1}{8}$	-3
$\frac{1}{4}$	-2
$\frac{1}{2}$	-1
1	0
2	1
4	2
8	3



يظهر من الجدول والتمثيل البياني أعلاه أن الدالة العكسية للدالة $y = 2^x$ هي $x = 2^y$. وبصورة عامة، فإن الدالة العكسية للدالة $y = b^x$ هي $x = b^y$. يسمى المتغير y في المعادلة $x = b^y$ **لوغاريتم** x ، ويكتب عادة على الصورة $y = \log_b x$ ، ويقرأ y تساوي لوغاريتم x للأساس b .

إرشادات للدراسة
تسمى $y = \log_b x$ الصورة اللوغاريتمية، وتسمى $b^y = x$ الصورة الأسية المكافئة لها.

مفهوم أساسي — **اللوغاريتم للأساس b**

التعبير اللفظي: إذا كان x, b عددين موجبين، حيث $b \neq 1$، يرمز للوغاريتم x للأساس b بالرمز $\log_b x$، ويُعرَّف على أنه الأُس y الذي يجعل المعادلة $b^y = x$ صحيحة.

الرموز: افترض أن $b > 0, b \neq 1$ فإن: لكل $x > 0$ يوجد عدد y بحيث

$$\log_b x = y \quad \text{إذا وفقط إذا} \quad b^y = x$$

مثال: $\log_3 27 = y \leftrightarrow 3^y = 27$

1 التركيز

الترابط الرأسي

ما قبل الدرس 2-3
إيجاد الدالة العكسية لدالة.

الدرس 2-3
إيجاد قيمة عبارات لوغاريتمية.
تمثيل دوال لوغاريتمية بيانيًّا.

ما بعد الدرس 2-3
إيجاد حلول معادلات لوغاريتمية باستعمال طرق جبرية.

2 التدريس

أسئلة التعزيز
اطلب إلى الطلاب قراءة فقرة "لماذا؟".

واسأل:
- سمِّ أشياء تسبح في الفضاء بالقرب من الكرة الأرضية؟ إجابة ممكنة: كويكبات، نيازك، مذنبات.
- ما المقصود بمدى التأثير؟ إجابة ممكنة: احتمالية اصطدام مجسم بالأرض.

مصادر الدرس 2 – 3

المصدر	دون المتوسط	ضمن المتوسط	فوق المتوسط
دليل المعلم		• تنويع التعليم ص (98 , 103)	• تنويع التعليم ص (98 , 103)
كتاب التمارين	• ص (13)	• ص (13)	• ص (13)
مصادر المعلم للأنشطة الصفية	• تدريبات إعادة التعليم، ص (14) • تدريبات حل المسألة، ص (16)	• تدريبات حل المسألة، ص (16) • التدريبات الإثرائية، ص (17)	• تدريبات حل المسألة، ص (16) • التدريبات الإثرائية، ص (17)

التعليم باستعمال التقنيات

السبورة التفاعلية عند تقديم اللوغاريتمات للطلبة، استعمل لونًا مختلفًا للأجزاء المتناظرة في جميع الدوال الأسية واللوغاريتمية. فمثلًا استعمل 3 ألوان مختلفة لكل من x, y, b عند بيان أن $\log_b x = y$ تناظر $x = b^y$.

الدوال والعبارات اللوغاريتمية

مثال 1 يبيِّن كيفية التحويل من الصورة اللوغاريتمية إلى الصورة الأسية.

مثال 2 يبيِّن كيفية التحويل من الصورة الأسية إلى الصورة اللوغاريتمية.

المثالان 4 , 3 يبيِّنان كيفية إيجاد قيمة عبارة لوغاريتمية باستعمال تعريف اللوغاريتمات والخصائص الأساسية لها.

التقويم التكويني

استعمل تدريبات "تحقق من فهمك" بعد كل مثال؛ للتحقق من مدى فهم الطلاب للمفاهيم.

مثالان إضافيان

1 اكتب كلًّا من المعادلتين الآتيتين على الصورة الأسية:

a $\log_3 9 = 2$ $9 = 3^2$

b $\log_{10} \frac{1}{100} = -2$ $\frac{1}{100} = 10^{-2}$

2 اكتب كلًّا من المعادلتين الآتيتين على الصورة اللوغاريتمية:

a $5^3 = 125$ $\log_5 125 = 3$

b $27^{\frac{1}{3}} = 3$ $\log_{27} 3 = \frac{1}{3}$

يمكنك استعمال تعريف اللوغاريتمات لكتابة المعادلات اللوغاريتمية على الصورة الأسّية .

تنبيه!

أساس اللوغاريتم:
قد يختلط عليك معرفة أي الأعداد هو الأساس وأيها الأس في المعادلات اللوغاريتمية؛ لذا استعمل لونين مختلفين لكتابة كل منهما في أثناء الحل؛ لمساعدتك على تنظيم حساباتك.

مثال 1 التحويل من الصورة اللوغاريتمية إلى الصورة الأسية

اكتب كل معادلة لوغاريتمية مما يأتي على الصورة الأسية:

a $\log_2 8 = 3$

$\log_2 8 = 3 \rightarrow 8 = 2^3$

b $\log_4 \frac{1}{256} = -4$

$\log_4 \frac{1}{256} = -4 \rightarrow \frac{1}{256} = 4^{-4}$

تحقق من فهمك

1A $\log_4 16 = 2$ $16 = 4^2$

1B $\log_3 729 = 6$ $729 = 3^6$

يمكن استعمال تعريف اللوغاريتمات أيضًا لكتابة المعادلات الأسّية على الصورة اللوغاريتمية.

مثال 2 التحويل من الصورة الأسّية إلى الصورة اللوغاريتمية

اكتب كل معادلة أسّية مما يأتي على الصورة اللوغاريتمية:

a $15^3 = 3375$

$15^3 = 3375 \rightarrow \log_{15} 3375 = 3$

b $4^{\frac{1}{2}} = 2$

$4^{\frac{1}{2}} = 2 \rightarrow \log_4 2 = \frac{1}{2}$

تحقق من فهمك

2A $4^3 = 64$ $\log_4 64 = 3$

2B $125^{\frac{1}{3}} = 5$ $\log_{125} 5 = \frac{1}{3}$

يمكنك استعمال تعريف اللوغاريتم لإيجاد قيمة عبارة لوغاريتمية.

مثال 3 إيجاد قيمة عبارة لوغاريتمية

دون استعمال الآلة الحاسبة، أوجد قيمة كل مما يأتي:

a $\log_{16} 4$

$\log_{16} 4 = y$	بفرض أن العبارة اللوغاريتمة تساوي y
$4 = 16^y$	تعريف اللوغاريتم
$4^1 = 4^{2y}$	$16 = 4^2$
$1 = 2y$	خاصية المساواة للدوال الأسية
$\frac{1}{2} = y$	اقسم كلا الطرفين على 2

لذا فإن $\log_{16} 4 = \frac{1}{2}$.

b $\log_7 \frac{1}{49}$

$\log_7 \frac{1}{49} = y$	بفرض أن العبارة اللوغاريتمة تساوي y
$\frac{1}{49} = 7^y$	تعريف اللوغاريتم
$7^{-2} = 7^y$	$\frac{1}{49} = 7^{-2}$
$-2 = y$	خاصية المساواة للدوال الأسية

لذا فإن $\log_7 \frac{1}{49} = -2$

تحقق من فهمك

3A $\log_3 81$ 4

3B $\log_{\frac{1}{2}} 256$ −8

تنويع التعليم

ضمن فوق

المتعلمون المنطقيون: بعد مناقشة تعريف اللوغاريتمات؛ اكتب المعادلة $y = 2x$ على السبورة، ثم اطلب إلى الطلاب حلها بالنسبة للمتغير x. $x = \frac{1}{2}y$ ، وحل المعادلة $y = x^2$ أيضًا بالنسبة للمتغير x. $x = \pm\sqrt{y}$ والآن اكتب المعادلة $y = 2^x$ على السبورة، واطلب إلى الطلاب حلها بالنسبة للمتغير x. وقد يربك ذلك الطلاب؛ لذا وضِّح لهم أن المعادلة المقصودة هي $x = \log_2 y$ ، وأكِّد لهم أن اللوغاريتم يُعرّف على أنه معكوس دالة أسّية.

الخصائص الأساسية للوغاريتمات: من تعريف الدوال الأسية واللوغاريتمات يمكنك استنتاج بعض الخصائص الأساسية للوغاريتمات.

إرشادات للدراسة

الأس الصفري:

- تذكّر أنه لأي $b \neq 0$ فإن $b^0 = 1$.
- $\log_b 0$ غير معرّف لأن $b^x \neq 0$ لأي قيمة لـ x.

مفهوم أساسي — **الخصائص الأساسية للوغاريتمات**

إذا كان $b > 0$ ، $b \neq 1$ ، x عدد حقيقي ، فإن الخصائص الآتية صحيحة:

الخاصية	التبرير
$\log_b 1 = 0$	$b^0 = 1$
$\log_b b = 1$	$b^1 = b$
$\log_b b^x = x$	$b^x = b^x$
$b^{\log_b x} = x, x > 0$	$\log_b x = \log_b x$

مثال 4 — **استعمال الخصائص الأساسية للوغاريتمات**

دون استعمال الآلة الحاسبة، أوجد قيمة كل مما يأتي إن أمكن:

a) $\log_5 125$

$\log_5 125 = \log_5 5^3$ — $5^3 = 125$

$= 3$ — $\log_b b^x = x$

b) $\log_{10} 0.001$

$\log_{10} 0.001 = \log_{10} 10^{-3}$ — $0.001 = 10^{-3}$

$= -3$ — $\log_b b^x = x$

c) $12^{\log_{12} 4.7}$

$12^{\log_{12} 4.7} = 4.7$ — $b^{\log_b x} = x$

d) $\log_{10}(-5)$

بما أن $f(x) = \log_b x$ معرَّف فقط عندما $x > 0$، فإن $\log_{10}(-5)$ غير معرَّف في مجموعة الأعداد الحقيقية.

تحقق من فهمك

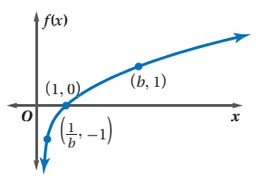
4A) $\log_9 81$ — 2

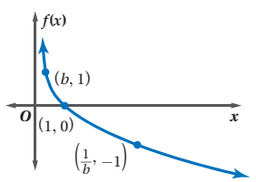
4B) $3^{\log_3 1}$ — 1

تمثيل الدوال اللوغاريتمية بيانيًّا: تُسمى الدالة $f(x) = \log_b x$، حيث $b \neq 1$، وكل من العددين x , b موجبًا **دالة لوغاريتمية**. والتمثيل البياني للدالة $f(x) = \log_b x$ هو التمثيل البياني للدالة الرئيسة (الأم) للدوال اللوغاريتمية.

مفهوم أساسي — **الدالة الرئيسة (الأم) للدوال اللوغاريتمية**

	$f(x) = \log_b x, b > 1$	$f(x) = \log_b x, 0 > b > 1$
الدالة الرئيسة (الأم):		
خصائص منحنى الدالة:	متصل، متباين، متزايد	متصل، متباين، متناقص
المجال:	مجموعة الأعداد الحقيقية الموجبة (R^+)	مجموعة الأعداد الحقيقية الموجبة (R^+)
المدى:	مجموعة الأعداد الحقيقية (R)	مجموعة الأعداد الحقيقية (R)
خط التقارب:	المحور y	المحور y
مقطع المحور x:	1	1





مثالان إضافيان

3) أوجد قيمة $\log_3 243$ — 5

4) أوجد قيمة كل مما يأتي:

a) $\log_8 512$ — 3

b) $22^{\log_{22} 15.2}$ — 15.2

إرشادات للمعلم الجديد

سرعة بما أن الطلاب لم يتعرفوا دوال اللوغاريتمات سابقًا، ويتوقع أن تسبب لهم بعض الإرباك؛ لذا فقد يحتاجون إلى المزيد من الوقت لاستيعاب موضوع هذا الدرس، قبل إكمال باقي دروس الفصل.

المحتوى الرياضي

اللوغاريتمات تُقرأ المعادلة $y = \log_b x$ على النحو الآتي: "y تساوي لوغاريتم x للأساس b"، والأساس b هو دائمًا عدد موجب لا يساوي الواحد. وبما أن المعادلة $y = \log_b x$ مكافئة للمعادلة الأسية $x = b^y$ ، فإن اللوغاريتم هو أسّ، إذْ إنه الأس الذي يُرفع إليه الأساس b ليساوي العدد x.

تمثيل الدوال اللوغاريتمية بيانيًّا

مثال 5 يبيِّن كيفية تمثيل دوال لوغاريتمية بيانيًّا.

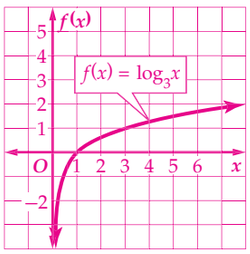
مثال 6 يبيِّن كيفية استعمال التحويلات الهندسية لتمثيل دوال لوغاريتمية بيانيًّا.

مثال 7 يبيِّن كيفية إيجاد معكوس الدالة الأسية، وذلك لحل مثال من واقع الحياة.

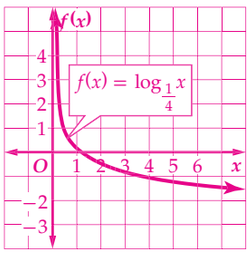
مثال إضافي

5 مثّل كلًّا من الدالتين الآتيتين بيانيًّا:

a $f(x) = \log_3 x$

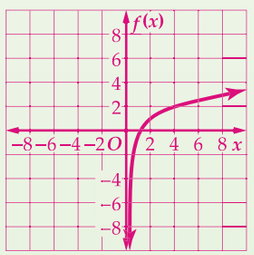


b $f(x) = \log_{\frac{1}{4}} x$

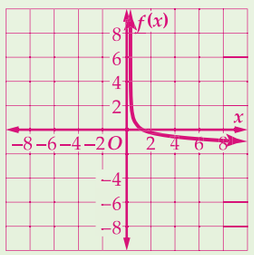


إجابات (تحقق من فهمك):

(5A)



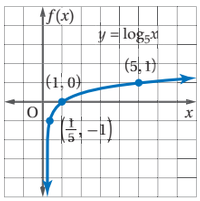
(5B)



مثال 5 تمثيل الدوال اللوغاريتمية بيانيًّا

مثّل كل دالة مما يأتي بيانيًّا:

a $f(x) = \log_5 x$



الخطوة 1: حدّد الأساس.

$b = 5$

الخطوة 2: حدد نقاطًا على التمثيل البياني.

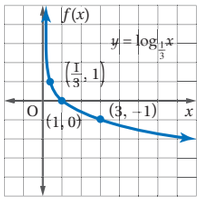
بما أن $5 > 1$، فاستعمل النقاط

$\left(\frac{1}{b}, -1\right), (1, 0), (b, 1)$

أي النقاط $\left(\frac{1}{5}, -1\right), (1, 0), (5, 1)$.

الخطوة 3: مثّل النقاط على المستوى الإحداثي. ثم ارسم المنحنى، ولاحظ أنه متصل ومتزايد، إذ تتزايد $f(x)$ من 0 إلى ما لا نهاية.

b $f(x) = \log_{\frac{1}{3}} x$



الخطوة 1: $b = \frac{1}{3}$

الخطوة 2: $0 < \frac{1}{3} < 1$

لذا استعمل النقاط $\left(\frac{1}{3}, 1\right), (1, 0), (3, -1)$.

الخطوة 3: ارسم المنحنى.

تحقق من فهمك

(5A) $f(x) = \log_2 x$ انظر الهامش.

(5B) $f(x) = \log_{\frac{1}{8}} x$ انظر الهامش.

وتمامًا كما في الدوال الأسية، فإنه يمكنك تطبيق التحويلات لتمثيل الدوال اللوغاريتمية بيانيًّا.

إرشادات للدراسة

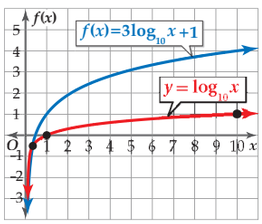
سلوك طرفي التمثيل البياني

لاحظ في المثال 6a أنه مع اقتراب x من موجب مالانهاية فإن $f(x)$ تقترب إلى موجب مالانهاية أيضًا.

مثال 6 تمثيل الدوال اللوغاريتمية بيانيًّا

مثّل كل دالة مما يأتي بيانيًّا:

a $f(x) = 3 \log_{10} x + 1$

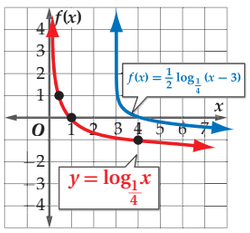


حدِّد نقاط التمثيل البياني للدالة الأم $y = \log_{10} x$. بما أن $10 > 1$ فاستعمل النقاط $(b, 1), (1, 0), (\frac{1}{b}, -1)$، أي النقاط $(10, 1), (1, 0), (\frac{1}{10}, -1)$ والتمثيل البياني للدالة المعطاة هو تحويل للتمثيل البياني للدالة $f(x) = \log_{10} x$.

- $a = 3$: يتسع التمثيل البياني رأسيًّا.
- $h = 0$: لا يوجد انسحاب أفقي.
- $k = 1$: يسحب التمثيل البياني وحدة واحدة إلى أعلى.

b) $f(x) = \frac{1}{2}\log_{\frac{1}{4}}(x-3)$

التمثيل البياني للدالة المعطاة هو تحويل للتمثيل البياني للدالة $f(x) = \log_{\frac{1}{4}} x$.



- $a = \frac{1}{2}$: يضيق التمثيل البياني رأسيًا.
- $h = 3$: يسحب التمثيل البياني 3 وحدات إلى اليمين.
- $k = 0$: لا يوجد انسحاب رأسي.

تحقق من فهمك انظر الهامش

6A) $f(x) = 2\log_3(x-2)$

6B) $f(x) = \frac{1}{4}\log_{\frac{1}{2}}(x+1) - 5$

مثال 7 من واقع الحياة — إيجاد الدوال العكسية للدوال الأسية

هزات أرضية: يقيس مقياس ريختر شدة الهزة الأرضية، وتعادل شدة الهزة الأرضية عند أي درجة 10 أمثال شدة الهزة الأرضية للدرجة التي تسبقها؛ أيْ أن شدة هزة أرضية سجلت 7 درجات على مقياس ريختر تعادل 10 أمثال شدة هزة أرضية سجلت 6 درجات على المقياس نفسه. ويمكن تمثيل شدة الهزة الأرضية بالدالة $y = 10^{x-1}$، حيث x الدرجة على مقياس ريختر.

a) استعمل المعلومات المعطاة في فقرة "الربط مع الحياة" لمعرفة شدة أقوى هزة أرضية في القرن العشرين.

$y = 10^{x-1}$	الدالة الأصلية
$= 10^{9.2-1}$	عوّض 9.2 بدلاً من x
$= 10^{8.2}$	بسّط
$= 158489319.2$	استعمل الحاسبة

b) أوجد معادلة على الصورة $y = \log_{10} x + c$ للدالة العكسية.

بما أن الدالة $y = 10^{x-1}$ متباينة، فإن لها دالة عكسية.

$y = 10^{x-1}$	المعادلة الأصلية
$x = 10^{y-1}$	بدل بين x و y وحل بالنسبة لـ y
$y - 1 = \log_{10} x$	تعريف اللوغاريتمات
$y = \log_{10} x + 1$	أضف العدد 1 لكلا الطرفين

تحقق من فهمك

7) أوجد الدالة العكسية للدالة $y = 0.5^x$. $y = \log_{0.5} x$

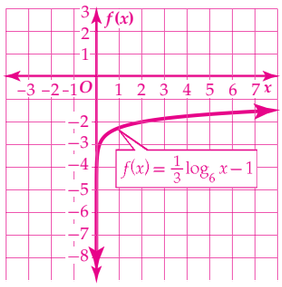
الربط مع الحياة

أقوى هزة أرضية في القرن العشرين ضربت شيلي عام 1960م، وبلغت قوتها 9.2 درجات على مقياس ريختر، ودمرت قرى كاملة، وقتلت آلاف السكان.

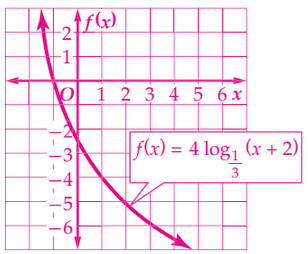
مثالان إضافيان

6 مثّل كلّ دالة مما يأتي بيانيًّا:

a) $f(x) = \frac{1}{3}\log_6 x - 1$



b) $f(x) = 4\log_{\frac{1}{3}}(x+2)$



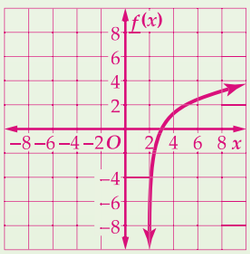
7 **الضغط الجوي:** يُعرّف الضغط الجوي عند سطح الأرض بوحدة أتموسفير واحدة، ويتناقص بنسبة 20% كلما ارتفعنا إلى أعلى 1mi. ويمكن تمثيل الضغط الجوي بالدالة: $P = 0.8^x$، حيث x الارتفاع بالأميال.

a) أوجد الضغط الجوي عند نقطة على ارتفاع 8 mi عن سطح الأرض. 0.168 atm

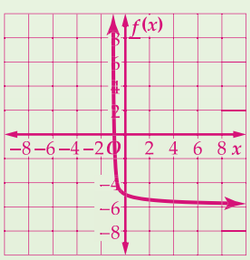
b) أوجد معادلة لمعكوس الدالة P. $P = \log_{0.8} x$

إجابات (تحقق من فهمك):

6A)



6B)



3 التدريب

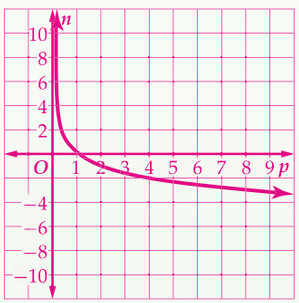
التقويم التكويني

استعمل الأسئلة 1-43 للتأكد من مدى فهم الطلاب.

ثم استعمل الجدول أسفل هذه الصفحة؛ لتعيين الواجبات المنزلية للطلبة بحسب مستوياتهم.

إجابات:

43b)



47a) $S(3) = 30$،
$S(15) = 50$،
$S(63) = 70$

47b) إذا أنفق 3000 ريال على الدعاية والإعلان، فستكون مبيعات الشركة 30000 ريال ، وإذا أنفق 15000 ريال، فستكون مبيعات الشركة 50000 ريال، وإذا أنفق 63000 ريال عليهما، فستكون مبيعات الشركة 70000 ريال.

47d) يتضح من التمثيل البياني أنه كلما زاد المبلغ المنفق على الدعاية والإعلان يقل انحناء المنحنى، ومن الفرع a، لاحظ أيضًا أن زيادة الانفاق على الدعاية من 3 آلاف ريال إلى 15 ألف ريال أدت إلى زيادة المبيعات بمقدار 20 ألف ريال، وأن زيادة الانفاق على الدعاية من 15 ألف ريال إلى 63 ألف ريال أدت إلى زيادة المبيعات بمقدار 20 ألف ريال أيضًا فقط، لذا فإن أثر الدعاية يتناقص عند إنفاق مبالغ كبيرة عليها في هذه الشركة.

تدرب وحل المسائل

اكتب كل معادلة لوغاريتمية مما يأتي على الصورة الأسية: (مثال 1)

1) $\log_8 512 = 3$ $8^3 = 512$ **2)** $\log_5 625 = 4$ $5^4 = 625$

3) $\log_2 16 = 4$ $2^4 = 16$ **4)** $\log_7 343 = 3$ $7^3 = 343$

5) $\log_9 \frac{1}{81} = -2$ $9^{-2} = \frac{1}{81}$ **6)** $\log_3 \frac{1}{27} = -3$ $3^{-3} = \frac{1}{27}$

7) $\log_{12} 144 = 2$ $12^2 = 144$ **8)** $\log_9 1 = 0$ $9^0 = 1$

اكتب كل معادلة أسية مما يأتي على الصورة اللوغاريتمية: (مثال 2)

9) $11^3 = 1331$ $\log_{11} 1331 = 3$ **10)** $16^{\frac{3}{4}} = 8$ $\log_{16} 8 = \frac{3}{4}$

11) $9^{-1} = \frac{1}{9}$ $\log_9 \frac{1}{9} = -1$ **12)** $6^{-3} = \frac{1}{216}$ $\log_6 \frac{1}{216} = -3$

13) $2^8 = 256$ $\log_2 256 = 8$ **14)** $4^6 = 4096$ $\log_4 4096 = 6$

15) $27^{\frac{2}{3}} = 9$ $\log_{27} 9 = \frac{2}{3}$ **16)** $25^{\frac{3}{2}} = 125$ $\log_{25} 125 = \frac{3}{2}$

دون استعمال الآلة الحاسبة، أوجد قيمة كلٍّ مما يأتي: (المثالان 3, 4)

17) $\log_{13} 169$ 2 **18)** $\log_2 \frac{1}{128}$ -7 **19)** $\log_6 1$ 0

20) $\log_4 1$ 0 **21)** $\log_{10} 10$ 1 **22)** $\log_{10} 0.01$ -2

23) $\log_3 \frac{1}{9}$ -2 **24)** $\log_4 \frac{1}{64}$ -3 **25)** $\log_6 216$ 3

26) $\log_{27} 3$ $\frac{1}{3}$ **27)** $\log_{32} 2$ $\frac{1}{5}$ **28)** $\log_{121} 11$ $\frac{1}{2}$

29) $\log_{\frac{1}{5}} 3125$ -5 **30)** $\log_{\frac{1}{8}} 512$ -3 **31)** $\log_{\frac{1}{6}} \frac{1}{216}$ 3

مثّل كل دالة مما يأتي بيانيًّا: (المثالان 5, 6) انظر ملحق الإجابات. **32-41**

32) $f(x) = \log_3 x$ **33)** $f(x) = \log_{\frac{1}{6}} x$

34) $f(x) = 4 \log_4 (x - 6)$ **35)** $f(x) = 2 \log_{\frac{1}{10}} x - 5$

36) $f(x) = 4 \log_2 x + 6$ **37)** $f(x) = \log_{\frac{1}{9}} x$

38) $f(x) = -3 \log_{\frac{1}{12}} x + 2$ **39)** $f(x) = 6 \log_{\frac{1}{8}} (x + 2)$

40) $f(x) = -8 \log_3 (x - 4)$ **41)** $f(x) = \log_{\frac{1}{4}} (x + 1) - 9$

42) علوم: عُد إلى فقرة "لماذا؟" بداية الدرس. أوجد معكوس الدالة اللوغاريتمية المعطاة. (مثال 7) $R = 10^{PS}$

43) تصوير: تمثل الصيغة $n = \log_2 \frac{1}{p}$ درجة زر ضبط الإضاءة في آلة التصوير والمستعملة عند نقص الإضاءة، حيث p نسبة ضوء الشمس في منطقة التقاط الصورة. (مثال 7)

a) أُعدت آلة تصوير خالد لتلتقط الصورة تحت ضوء الشمس المباشر، ولكن الجو كان غائمًا. إذا كانت نسبة الإضاءة في اليوم الغائم تعادل $\frac{1}{4}$ الإضاءة في اليوم المشمس، فأي درجات زر ضبط الإضاءة يجب أن يستعملها خالد لتعويض نقص الإضاءة؟ 2

b) مثّل الدالة بيانيًّا. انظر الهامش.

c) استعمل التمثيل البياني في الفرع **b** لتقدير نسبة إضاءة الشمس إذا قلت درجة زر ضبط الإضاءة 3 درجات. هل يؤدي ذلك إلى زيادة الإضاءة أم نقصانها؟ $\frac{1}{8}$ ؛ نقصان الإضاءة

44) تربية: لقياس مدى احتفاظ الطلاب بالمعلومات، يتم عادة اختبارهم بعد وقت من تعلمها، ويمكن تقدير درجة سلمان في مادة الرياضيات بعد انتهاء الفصل الدراسي باستعمال المعادلة $y(t) = 85 - 6 \log_2 (t + 1)$، حيث t عدد الأشهر التي مضت بعد انتهاء الفصل الدراسي.

a) ما درجة سلمان في نهاية الفصل الدراسي $(t = 0)$ ؟ 85

b) ما درجته بعد مضي 3 أشهر؟ 73

c) ما درجته بعد مضي 15 شهرًا؟ 61

45) مثّل الدالة $f(x) = 15 \log_{14} (x + 1) - 9$ بيانيًّا. انظر ملحق الإجابات

46) تحليليًّا: اكتب معادلة لدالة يكون تمثيلها البياني يشبه التمثيل البياني للدالة $y = \log_3 x$ بعد إزاحتها 4 وحدات إلى اليسار ووحدة إلى أعلى. $y = \log_3 (x + 4) + 1$

47) إعلانات: تزداد المبيعات عادة مع زيادة الإنفاق على الدعاية والإعلان، وتقدر قيمة المبيعات لشركة بآلاف الريالات بالمعادلة، $S(a) = 10 + 20 \log_4 (a + 1)$ ، حيث a المبلغ الذي يتم إنفاقه على الدعاية والإعلان بآلاف الريالات، $a \geq 0$. **a, b, d** انظر الهامش.

a) تعني القيمة $S(0) \approx 10$ أنه إذا لم يُنفق شيء على الدعاية والإعلان، ستكون المبيعات 10000 ريال. أوجد كلًّا من: S (3), S (15), S (63).

b) فسِّر معنى كل من القيم التي أوجدتها في الفرع **a**.

c) مثّل الدالة بيانيًّا. انظر ملحق الإجابات.

d) استعمل التمثيل البياني في الفرع **c** ، وإجابتك في الفرع **a** لتفسير تناقص أثر الدعاية عند إنفاق مبالغ كبيرة عليها.

تنويع الواجبات المنزلية

المستوى	الأسئلة
دون دون المتوسط	1-43، 45، 48، 51-53، 55-71
ضمن ضمن المتوسط	1-47 (فردي)،49، 51-53، 55-71
فوق فوق المتوسط	44-71

48) أحياء: زمن الجيل بالنسبة للخلايا البكتيرية هو الزمن اللازم ليصبح عددها مثليْ ما كان عليه. فإذا كان زمن الجيل G لنوع معين من البكتيريا يُعطى بالصيغة $G = \frac{t}{3.3 \log_b f}$، حيث t الفترة الزمنية، b عدد الخلايا البكتيرية عند بداية التجربة، f عدد الخلايا البكتيرية عند نهاية التجربة.

a) يبلغ زمن الجيل لبكتيريا مجهرية 16 h، ما الزمن الذي تحتاج إليه 4 خلايا بكتيرية من هذا النوع ليصبح عددها 1024 ؟
264 h أو 11 يومًا

b) إذا كان زمن الجيل لنوع من البكتيريا المخبرية 5 h، فما الوقت الذي تحتاج إليه 20 خلية بكتيرية من هذا النوع ليصبح عددها 160000 خلية؟ **66 h أو يومان و 18 h**

c) تتكاثر بكتيريا E.coli بسرعة، بحيث تتكاثر 6 منها لتصبح 1296 خلال 4.4 h . احسب زمن الجيل لبكتيريا E.coli .
20 min أو $\frac{1}{3}$ h

مسائل مهارات التفكير العليا

49) اكتشف المختلف: حدد العبارة المختلفة عن العبارات الثلاث الأخرى؟ فسر إجابتك.

$\log_3 9$	$\log_2 4$	$\log_2 16$	$\log_4 16$

$\log_2 16$؛ لأن قيمته 4، أما قيمة العبارات الأخرى تساوي 2

50) تحدَّ: إذا كان $y = \log_b x$، حيث b, x, y أعداد حقيقية، فإن الصفر ينتمي إلى المجال دائمًا أو أحيانًا أو لا ينتمي أبدًا. وضح إجابتك. **انظر الهامش.**

51) اكتشف الخطأ: يقول فهد: إن التمثيل البياني لجميع الدوال اللوغاريتمية يقطع المحور y في النقطة $(0, 1)$ ؛ لأن أي عدد مرفوع للأس صفر يساوي 1، ولكن سليمان لم يوافقه الرأي. أيهما على صواب؟ فسر إجابتك. **انظر الهامش.**

52) اكتشف الخطأ: أوجدت كل من مها ومريم قيمة $\log_{\frac{1}{7}} 49$، أيٌّ منهما إجابتها صحيحة؟ برر إجابتك. **انظر الهامش.**

مها	مريم
$\log_{\frac{1}{7}} 49 = y$	$\log_{\frac{1}{7}} 49 = y$
$49^y = \frac{1}{7}$	$(\frac{1}{7})^y = 49$
$(7^2)^y = (7)^{-1}$	$(7^{-1})^y = 7^2$
$7^{2y} = (7)^{-1}$	$(7)^{-y} = 7^2$
$2y = -1$	$y = -2$
$y = -\frac{1}{2}$	

53) تبرير: قارن بين كلٍّ من: $\log_9 71$ ، $\log_8 61$ ، $\log_7 51$ دون استعمال الحاسبة، وبيّن أيها الأكبر قيمة. وضّح إجابتك. **انظر الهامش.**

54) مسألة مفتوحة: اكتب عبارة لوغاريتمية على الصورة $y = \log_b x$ لكل من الحالات الآتية: **انظر الهامش.**

a) y تساوي 25

b) y عدد سالب

c) y بين 0 و 1

d) x تساوي 1

55) اكتب: إذا كان $g(x) = a \log_{10}(x - h) + k$ تحويلًا للدالة اللوغاريتمية $\log_{10} x$ ، فاشرح كيفية تمثيل هذا التحويل بيانيًّا. **انظر ملحق الإجابات**

مراجعة تراكمية

مثّل كل دالة مما يأتي بيانيًّا: **(الدرس 1–2) 56–59) انظر ملحق الإجابات.**

56) $y = -\left(\frac{1}{5}\right)^x$ **57)** $y = -2.5(5)^x$

58) $y = 30^{-x}$ **59)** $y = 0.2(5)^{-x}$

حُلّ كل متباينة مما يأتي: **(الدرس 2–2)**

60) $3^{n-2} > 27$ $n > 5$ **61)** $2^{2n} \le \frac{1}{16}$ $n \le -2$

62) $16^n < 8^{n+1}$ $n < 3$ **63)** $32^{5p+2} \ge 16^{5p}$ $p \ge -2$

64) إذا كان $4^{x+2} = 48$ ، فأوجد قيمة 4^x؟ **(الدرس 2-2)** **3**

حُلّ كل معادلة مما يأتي، وتحقق من صحة حلك: **(الدرس 2–2)**

65) $9^x = \frac{1}{81}$ -2 **66)** $2^{6x} = 4^{5x+2}$ -1

67) $49^{3p+1} = 7^{2p-5}$ $-\frac{7}{4}$ **68)** $9^{x^2} = 27^{x^2-2}$ $\pm\sqrt{6}$

تدريب على اختبار

69) ما قيمة x في المعادلة $\log_8 16 = x$؟ **C**

A $\frac{1}{2}$ **B** $\frac{3}{4}$ **C** $\frac{4}{3}$ **D** 2

70) ما قيمة $\log_2 \frac{1}{32}$؟ **D**

A 5 **B** $\frac{1}{5}$ **C** $-\frac{1}{5}$ **D** -5

71) ما مقطع y للدالة الأسية $y = 4^x - 1$ ؟ **A**

A 0 **B** 1 **C** 2 **D** 3

تنويع التعليم

ضمن فوق

توسّع: أشر إلى مسألة القسمة $\frac{32}{4} = 8$ التي يمكن كتابتها على الصورة $\frac{2^5}{2^2} = 2^3$. واسأل الطلاب أن يكتبوا لوغاريتمًا أساسه 2 في كل من المقسوم، والمقسوم عليه، وناتج القسمة، ثم اطلب إليهم أن يكتبوا معادلة تربط بين هذه اللوغاريتمات. $\log_2 32 = 5, \log_2 4 = 2, \log_2 8 = 3, \log_2 32 - \log_2 4 = \log_2 8$

تنبيه!

اكتشف الخطأ ذكِّر الطلاب في السؤال **51** بأن فهدًا لم يفكر إلا في الدوال اللوغاريتمية على الصورة: $f(x) = a \log_b x$.

4 التقويم

تعلم لاحق اطلب إلى الطلاب أن يناقشوا كيف ستساعدهم دراسة اللوغاريتمات في هذا الدرس على حل معادلات لوغاريتمية في الدرس القادم.

التقويم التكويني

تحقق من مدى استيعاب الطلاب للمفاهيم الواردة في الدرس **3-2** بإعطائهم:

الاختبار القصير 2، ص (30)

إجابات:

50) لا ينتمي أبدًا؛ لأنه إذا انتمى الصفر للمجال، ستصبح المعادلة $y = log_b 0$ وعندها $b^y = 0$. ولكن لأي عدد حقيقي b لا يوجد أس حقيقي y بحيث يكون $b^y = 0$

51) سليمان؛ لأن التمثيل البياني للدوال اللوغاريتمية يمر بالنقطة (1,0)، ولا يمر بالنقطة (0,1)

52) مريم؛ استعملت مها تعريف اللوغاريتميات بشكل خاطئ.

53) $\log_7 51$؛ إجابة ممكنة: قيمته أكبر قليلًا من 2، وقيمة $\log_8 61$ أقل من 2 بقليل أيضًا، وقيمة $\log_9 71$ أقل من 2 بقليل.

54a–d) إجابات ممكنة.

54a) $\log_2 33554432 = 25$

54b) $\log_4 \frac{1}{64} = -3$

54c) $\log_2 \sqrt{2} = \frac{1}{2}$

54d) $\log_7 1 = 0$

الدروس من 1-2 إلى 2-3

التقويم التكويني

استعمل اختبار منتصف الفصل؛ للتحقق من مدى فهم الطلاب للأسئلة التي لم يجيبوا عنها بشكل صحيح. اطلب إلى الطلاب مراجعة الدروس المشار إليها بعد كل سؤال.

التقويم الختامي

اختبار منتصف الفصل، ص (32) .

مثّل كل دالة مما يأتي بيانيًّا، وحدد مجالها ومداها: (الدرس 2-1)

1) $f(x) = 3(4)^x$ **(1–4) انظر ملحق الإجابات.**

2) $f(x) = -(2)^x + 5$

3) $f(x) = -0.5(3)^{x+2} + 4$

4) $f(x) = -3\left(\frac{2}{3}\right)^{x-1} + 8$

5) علوم: بدأت تجربة مخبرية بـ 6000 خلية بكتيرية، وبعد ساعتين أصبح عددها 28000 خلية . (الدرس 2-2)

a) اكتب دالة أسية على الصورة $y = ab^x$ يمكن استعمالها لتمثيل عدد الخلايا البكتيرية y بعد x ساعة إذا استمر ازدياد عدد الخلايا البكتيرية بالمعدل نفسه، مقربًا الناتج إلى أقرب 4 منازل عشرية.
$y = 6000(2.16025)^x$

b) ما العدد المتوقع للخلايا البكتيرية بعد 4 ساعات ؟
130667 تقريبًا

6) اختيار من متعدد: أي الدوال الأسية الآتية يمر تمثيلها البياني بالنقطتين (3 , 1000) , (0 , 125) ؟ (الدرس 2-1) D

A $f(x) = 125(3)^x$

B $f(x) = 1000(3)^x$

C $f(x) = 125(1000)^x$

D $f(x) = 125(2)^x$

7) سكان: كان عدد سكان إحدى المدن 45000 نسمة عام 1995م، وتزايد عددهم ليصبح 68000 نسمة عام 2007م. (الدرس 2-2)

a) اكتب دالة أسية على الصورة $y = ab^x$ يمكن استعمالها لتمثيل عدد سكان المدينة y بعد x سنة منذ عام 1995م، مقربًا الناتج إلى أقرب ثلاث منازل عشرية. $f(x) = 45000(1.035)^x$

b) استعمل الدالة لتقدير عدد سكان المدينة عام 2015م.
89540 تقريبًا

حُل كلًّا من المعادلتين الآتيتين: (الدرس 2-2)

8) $11^{2x+1} = 121^{3x}$ $x = \frac{1}{4}$ **9)** $3^{4x-7} = 27^{2x+3}$ -8

حُلّ كل متباينة مما يأتي، وتحقق من صحة حلك: (الدرس 2-2)

10) $5^{2x+3} \le 125$ $x \le 0$

11) $16^{2x+3} < 64$ $x < \frac{-3}{4}$

12) $(\frac{1}{32})^{x+3} \ge 16^{3x}$ $x \le \frac{-15}{17}$

مثّل كل دالة مما يأتي بيانيًّا: (الدرس 2-3) انظر ملحق الاجابات.

13) $f(x) = 3\log_2(x-1)$

14) $f(x) = -4\log_3(x-2) + 5$

15) $f(x) = 2 + \log_4(1+x)$

16) اختيار من متعدد: ما الصورة اللوغاريتمية للمعادلة $(625)^{\frac{1}{4}} = 5$ ؟ (الدرس 2-3) A

A $\log_{625} 5 = \frac{1}{4}$

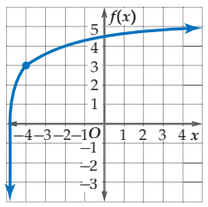
B $\log_5 625 = 4$

C $\log_5 625 = \frac{1}{4}$

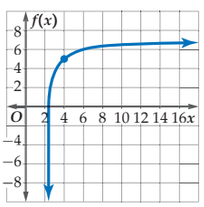
D $\log_{\frac{1}{4}} 5 = 625$

17) اختيار من متعدد: أي التمثيلات البيانية الآتية هو تمثيل الدالة $f(x) = \log_3(x+5) + 3$ البياني؟ (الدرس 2-3) A

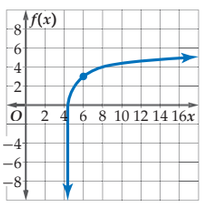
A



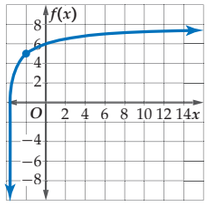
C



B



D



أوجد قيمة كل مما يأتي: (الدرس 2-3)

18) $\log_4 32$ $\frac{5}{2}$

19) $\log_5 5^{12}$ 12

20) $\log_{16} 4$ $\frac{1}{2}$

21) اكتب المعادلة $\log_9 729 = 3$ على الصورة الأسية. (الدرس 2-3)
$9^3 = 729$

مخطط المعالجة

المستوى 1	ضمن المتوسط	المستوى 2	دون المتوسط
إذا	أخطأ بعض الطلاب في 25% تقريبًا من الأسئلة	إذا	أخطأ بعض الطلاب في 50% تقريبًا من الأسئلة
فاختر	أحد المصدرين الآتيين:	فاختر	المصدر الآتي:
كتاب الطالب	الدروس 2-3، 2-2، 2-1	زيارة الموقع	www.obeikaneducation.com
دليل المعلم	مشروع الفصل، ص (80)		

خصائص اللوغاريتمات
Properties of Logarithms

فيما سبق:
درستُ إيجاد قيم عبارات لوغاريتمية. (الدرس 3–2)

والآن:
- أطبق خاصية المساواة للدوال اللوغاريتمية.
- أبسّط عبارات وأجد قيمها باستعمال خصائص اللوغاريتمات.

www.obeikaneducation.com

لماذا؟

المادة	مستوى pH
عصير الليمون	2.1
المخلل	3.5
الطماطم	4.2
القهوة	5.0
الحليب	6.4
الماء النقي	7.0
البيض	7.8

يُعد الاحتفاظ بمستوى معين من الحموضة في الأطعمة أمرًا مهمًّا لبعض الأشخاص الذين يعانون حساسية في المعدة. إذ تحتوي بعض الأطعمة على أحماض أكثر مما تحتوي عليه من القواعد. ويستعمل تدريج pH لقياس درجة الحموضة أو القاعدية، فانخفاضه يدل على حمضية الوسط، وارتفاعه يدل على قاعديته. ويُعد هذا المقياس مثالًا آخر على المقاييس اللوغاريتمية التي تعتمد على قوة العدد 10. فقيمة pH للقهوة تساوي 5 بينما تساوي 7 للماء النقي؛ لذا فإن تركيز أيون القهوة الهيدروجيني (H^+) يعادل 100 مرة تركيزه في الماء النقي.

لأن $pH = -\log_{10}[H^+]$، فإنه يمكنك كتابة المعادلة الآتية:

$$\log_{10}[H^+]_{\text{للقهوة}} + \log_{10}[H^+]_{\text{للماء النقي}} = -\log_{10}[H^+]_{\text{للقهوة}} - pH_{\text{للماء النقي}}$$ والتي تكتب بالشكل :

$$\log_{10}\frac{(H^+)_{\text{للقهوة}}}{(H^+)_{\text{للماء النقي}}} = pH_{\text{للقهوة}} - pH_{\text{للماء النقي}}$$، وذلك باستعمال خاصية القسمة في اللوغاريتمات التي ستتعلمها في هذا الدرس. وبتحويل هذه الصيغة اللوغاريتمية إلى الصيغة الأسية، ثم التعويض، تجد أن:

$$\frac{(H^+)_{\text{للقهوة}}}{(H^+)_{\text{للماء النقي}}} = 10^{7-5} = 10^2 = 100$$

خصائص اللوغاريتمات: تتحقق خاصية المساواة في الدوال اللوغاريتمية كما هو الحال في الدوال الأسية.

مفهوم أساسي — **خاصية المساواة في الدوال اللوغاريتمية**

التعبير اللفظي: إذا كان b عددًا موجبًا حيث $b \neq 1$، فإن $\log_b x = \log_b y$ إذا وفقط إذا كان $x = y$.

مثال: إذا كان $\log_5 x = \log_5 8$، فإن $x = 8$، وإذا كان $x = 8$ فإن $\log_5 x = \log_5 8$

وبما أن اللوغاريتمات ترتبط بالأسس، فيمكنك اشتقاق خصائصها من خصائص الأسس، ويمكنك اشتقاق خاصية الضرب في اللوغاريتمات من خاصية الضرب في الأسس.

مفهوم أساسي — **خاصية الضرب في اللوغاريتمات**

التعبير اللفظي: لوغاريتم حاصل الضرب هو مجموع لوغاريتمات عوامله.

الرموز: إذا كانت x, y, b أعدادًا حقيقية موجبة، حيث $b \neq 1$ فإن:
$\log_b xy = \log_b x + \log_b y$.

مثال: $\log_2 [(5)(6)] = \log_2 5 + \log_2 6$

لإثبات صحة هذه الخاصية، افترض أن $b^m = x$ ، و $b^n = y$، وباستعمال تعريف اللوغاريتمات، فإن $m = \log_b x$, $n = \log_b y$.

$b^m b^n = xy$	عوّض
$b^{m+n} = xy$	خاصية ضرب القوى
$\log_b b^{m+n} = \log_b xy$	خاصية المساواة للدوال اللوغاريتمية
$m + n = \log_b xy$	الخصائص الأساسية للوغاريتمات
$\log_b x + \log_b y = \log_b xy$	عوّض عن m, n بالقيمتين $\log_b x, \log_b y$ على الترتيب

يمكنك استعمال خاصية الضرب في اللوغاريتمات لتقريب قيم عبارات لوغاريتمية.

1 التركيز

الترابط الرأسي

ما قبل الدرس 2-4
إيجاد قيمة عبارات لوغاريتمية.

الدرس 2-4
تطبيق خاصية المساواة للدوال اللوغاريتيمية.
تبسيط عبارات، وإيجاد قيمها باستعمال خصائص اللوغاريتمات.

ما بعد الدرس 2-4
حل معادلات لوغاريتمية باستعمال طرق جبرية.

2 التدريس

أسئلة التعزيز

اطلب إلى الطلاب قراءة فقرة "لماذا؟".

واسأل:
- هل عصير الليمون حمض أم قاعدة؟ حمض
- هل البيض حمض أم قاعدة؟ قاعدة
- كم مرّة تساوي درجة pH للبيض درجته للماء النقي؟ $10^{7.8-7} = 10^{0.8} \approx 6.31$

مصادر الدرس 2 – 4

المصدر	دون المتوسط	ضمن المتوسط	فوق المتوسط
دليل المعلم	• تنويع التعليم ص (108)	• تنويع التعليم ص (108)	• تنويع التعليم ص (110 , 108)
كتاب التمارين	• ص (14)	• ص (14)	• ص (14)
مصادر المعلم للأنشطة الصفية	• تدريبات إعادة التعليم، ص (18) • تدريبات حل المسألة، ص (20)	• تدريبات حل المسألة، ص (20) • التدريبات الإثرائية، ص (21)	• تدريبات حل المسألة، ص (20) • التدريبات الإثرائية، ص (21)

خصائص اللوغاريتمات

مثال 1 يبيِّن كيفية استعمال خاصية الضرب في اللوغاريتمات لتقريب قيم العبارات اللوغاريتمية.

مثال 2 يبيِّن كيفية استعمال خاصية القسمة في اللوغاريتمات؛ لتقريب قيم العبارات اللوغاريتمية.

مثال 1 استعمال خاصية الضرب في اللوغاريتمات

استعمل $\log_4 3 \approx 0.7925$ لتقريب قيمة $\log_4 192$.

$\log_4 192 = \log_4 (4^3 \times 3)$ $192 = 64 \times 3 = 4^3 \times 3$

$= \log_4 4^3 + \log_4 3$ خاصية الضرب في اللوغاريتمات

$= 3 + \log_4 3$ الخصائص الأساسية للوغاريتمات

$\approx 3 + 0.7925 \approx 3.7925$ $\log_4 3 \approx 0.7925$

تحقق من فهمك

1) استعمل $\log_4 2 = 0.5$ لإيجاد قيمة $\log_4 32$. **2.5**

تذكّر أن قسمة القوى ذات الأساس نفسه تكون بطرح الأسس. وخاصية القسمة في اللوغاريتمات شبيهة بها.

افترض أن $b^m = x, b^n = y$ ، إذن $\log_b x = m, \log_b y = n$

$\frac{b^m}{b^n} = \frac{x}{y}$

$b^{m-n} = \frac{x}{y}$ خاصية قسمة القوى

$\log_b b^{m-n} = \log_b \frac{x}{y}$ خاصية المساواة للدوال اللوغاريتمية

$m - n = \log_b \frac{x}{y}$ الخصائص الأساسية للوغاريتمات

$\log_b x - \log_b y = \log_b \frac{x}{y}$ عوّض عن m, n بالقيمتين $\log_b x, \log_b y$ على الترتيب

مفهوم أساسي **خاصية القسمة في اللوغاريتمات**

التعبير اللفظي: لوغاريتم ناتج القسمة يساوي لوغاريتم المقسوم مطروحًا منه لوغاريتم المقسوم عليه.

الرموز: إذا كانت x, y, b أعدادًا حقيقية موجبة، حيث $b \neq 1$ فإن:

$$\log_b \frac{x}{y} = \log_b x - \log_b y$$

مثال: $\log_2 \frac{5}{6} = \log_2 5 - \log_2 6$

مثال 2 استعمال خاصية القسمة في اللوغاريتمات

استعمل $\log_6 5 \approx 0.8982$ لتقريب قيمة $\log_6 7.2$.

$\log_6 7.2 = \log_6 (\frac{36}{5})$ $7.2 = \frac{72}{10} = \frac{36}{5} = \frac{6^2}{5}$

$= \log_6 6^2 - \log_6 5$ خاصية القسمة في اللوغاريتمات

$= 2 - 0.8982$ الخصائص الأساسية للوغاريتمات

$= 1.1018$ $\log_6 5 \approx 0.8982$

تحقق من فهمك

1) استعمل $\log_3 2 \approx 0.63$؛ لتقريب قيمة $\log_3 4.5$. **1.37 تقريبًا**

مثالان إضافيان

1) استعمل $\log_5 2 \approx 0.4307$ لتقريب قيمة $\log_5 250$. 3.4307

2) استعمل $\log_9 3 = 0.5$ ؛ لتقريب قيمة $\log_9 \frac{1}{3}$. -0.5

التعليم باستعمال التقنيات

السبورة التفاعلية قم بحل أمثلة متنوعة على السبورة التفاعلية مستعملاً خصائص مختلفة للوغاريتمات، واحفظ كل مثال في صفحة ملاحظات وعنونها باسم الخاصية التي استعملتها فيه، ثم أرسل هذه الصفحات إلكترونيًّا إلى كل طالب؛ لاتخاذها مصدرًا آخر خارج الفصل.

إرشادات للمعلم الجديد

حل المسألة عند مناقشة خاصية الضرب في اللوغاريتمات، أشر إلى أن اللوغاريتمات المستعملة في المثال تبين أن الخاصية تنطبق على جميع اللوغاريتمات، وليس فقط على تلك التي يمكن تبسيطها.

خصائص اللوغاريتمات

مثال 3 يبيِّن كيفية استعمال خاصية القسمة في اللوغاريتمات لحل مسائل من واقع الحياة.

مثال إضافي

3 **علوم:** أوجد تركيز الهيدروجين في لتر من المطر الحمضي قيمة pH له تساوي 5.5.

$10^{-5.5}$ أو 0.0000032 مول من الهيدروجين

مثال 3 من واقع الحياة — استعمال خاصية القسمة في اللوغاريتمات

علوم: يُعطى الأس الهيدروجيني للمحلول pH بالعلاقة: $\text{pH} = \log_{10} \frac{1}{[H^+]}$ حيث $[H^+]$ يمثل تركيز أيون الهيدروجين بوحدة مول لكل لتر. أوجد تركيز أيون الهيدوجين في لتر من المطر الحمضي قيمة pH له 4.2.

افهم: أُعطي في المسألة صيغة إيجاد pH، وقيمة pH للمطر الحمضي. والمطلوب معرفة تركيز أيون الهيدروجين في لتر من المطر الحمضي.

خطط: اكتب المعادلة وحلها لإيجاد $[H^+]$.

حُلّ:

$\text{pH} = \log_{10} \frac{1}{[H^+]}$	المعادلة الأصلية
$4.2 = \log_{10} \frac{1}{[H^+]}$	$\text{pH} = 4.2$
$4.2 = \log_{10} 1 - \log_{10} [H^+]$	خاصية القسمة في اللوغاريتمات
$4.2 = 0 - \log_{10} [H^+]$	$\log_{10} 1 = 0$
$4.2 = -\log_{10} [H^+]$	بسّط
$-4.2 = \log_{10} [H^+]$	اضرب كلا الطرفين في -1
$10^{-4.2} = [H^+]$	تعريف اللوغاريتم

إذن يوجد $10^{-4.2}$ أو 0.000063 مول من الهيدروجين تقريبًا في اللتر الواحد من المطر الحمضي.

تحقق:

$4.2 = \log_{10} \frac{1}{[H^+]}$	$\text{pH} = 4.2$
$4.2 \stackrel{?}{=} \log_{10} \frac{1}{10^{-4.2}}$	عوّض $[H^+] = 10^{-4.2}$
$4.2 \stackrel{?}{=} \log_{10} 1 - \log_{10} 10^{-4.2}$	خاصية القسمة في اللوغاريتمات
$4.2 \stackrel{?}{=} 0 - (-4.2)$	الخصائص الأساسية للوغاريتمات
$4.2 = 4.2$ ✓	

تحقق من فهمك

3) استعمل الجدول الوارد في فقرة "لماذا؟" وأوجد تركيز أيون الهيدروجين في عصير الليمون. 10^{-12} أو 0.0079 تقريبًا

الربط مع الحياة

المطر الحمضي أكثر حمضية من المطر الطبيعي، حيث يتكون من اختلاط الدخان، وأبخرة المشتقات النفطية وغيرها برطوبة الجو . والمطر الحمضي مسؤول عن التعرية، كما يظهر في الصورة أعلاه.

تذكّر أن قوة القوة توجد بضرب الأسس، وخاصية لوغاريتم القوة شبيهة بها.

مفهوم أساسي — خاصية لوغاريتم القوة

التعبير اللفظي: لوغاريتم القوة يساوي حاصل ضرب الأس في لوغاريتم أساسها.

الرموز: لأي عدد حقيقي m، وأي عددين موجبين x, b ، حيث $b \neq 1$، فإن

$$\log_b x^m = m \log_b x$$

مثال: $\log_2 6^5 = 5 \log_2 6$

ستبرهن خاصية لوغاريتم القوة في السؤال 48

الدرس 4-2 خصائص اللوغاريتمات 107

تقريب العبارات اللوغاريتمية

مثال 4 يبيِّن كيفية استعمال خاصية لوغاريتم القوة لتقريب قيمة العبارات اللوغاريتمية.

مثال إضافي

4 إذا كان $\log_5 6 \approx 1.1133$ ، فقرّب قيمة $\log_5 216$. 3.3399

تبسيط العبارات اللوغاريتمية

مثال 5 يبيِّن كيفية تبسيط عبارات لوغاريتمية باستعمال خصائص اللوغاريتمات.

مثال إضافي

5 احسب قيمة $\log_3 \sqrt[5]{729}$ $\frac{6}{5}$

إرشادات للمعلم الجديد

الحس الرياضي حُث الطلاب على التحقق من إجاباتهم باستعمال التقدير، ففي المثال **4**: بما أن $2^4 = 16$ و $2^5 = 32$؛ لذا فمن المعقول أن يقع $\log_2 25$ بين 4 و 5 .

إرشادات للدراسة

التحقق من الإجابة

يمكنك التحقق من إجابة مثال 4 بإيجاد قيمة $2^{4.6438}$ مستعملاً الحاسبة والإجابة التي ستحصل عليها هي 25 تقريبًا، ولكون $\log_2 25 \approx 4.6438$ فهذا يعني أن $25 \approx 2^{4.6438}$.

مثال 4 استعمال خاصية لوغاريتم القوة

إذا كان $\log_2 5 \approx 2.3219$ ، فقرّب قيمة $\log_2 25$

$\log_2 25 = \log_2 5^2$ $5^2 = 25$

$= 2 \log_2 5$ خاصية لوغاريتم القوة

$\approx 2(2.3219) \approx 4.6438$ $\log_2 5 = 2.3219$

تحقق من فهمك

4) إذا كان $\log_3 7 \approx 1.7712$ ، فقرّب قيمة $\log_3 49$. **3.5424 تقريبًا**

يمكنك استعمال خصائص اللوغاريتمات لتبسيط العبارات اللوغاريتمية.

مثال 5 تبسيط العبارات اللوغاريتمية

دون استعمال الآلة الحاسبة، احسب قيمة $\log_4 \sqrt[5]{64}$.

بما أن أساس اللوغاريتم 4، عبّر عن $\sqrt[5]{64}$ على صورة قوة 4 .

$\log_4 \sqrt[5]{64} = \log_4 64^{\frac{1}{5}}$ $\sqrt[5]{64} = 64^{\frac{1}{5}}$

$= \log_4 (4^3)^{\frac{1}{5}}$ $4^3 = 64$

$= \log_4 4^{\frac{3}{5}}$ خاصية قوة القوة

$= \frac{3}{5} \log_4 4$ خاصية لوغاريتم القوة

$= \frac{3}{5} (1) = \frac{3}{5}$ $\log_b b = 1$

تحقق من فهمك

5A) $\frac{2}{3} \log_6 \sqrt[3]{36}$

5B) $\frac{1}{3} \log_7 \sqrt[6]{49}$

يمكنك استعمال خصائص اللوغاريتمات لإعادة كتابة العبارات اللوغاريتمية من الصورة المختصرة إلى الصورة المطولة، إذ يمكنك تحويل الضرب إلى جمع، والقسمة إلى طرح، والقوى والجذور إلى ضرب.

تنويع التعليم

دون ضمن فوق

المتعلمون الفرديون: بعد مناقشة المثال **(5)** مباشرة، اطلب إلى طالبين إعادة حله معًا دون الرجوع إلى الحل المكتوب، واطلب إليهما تبادل الأدوار في توضيح خطوات الحل، وكذلك مناقشة معقولية حلهما.

كتابة العبارات اللوغاريتمية

مثال 6 يبيِّن كيفية كتابة العبارات اللوغاريتمية بالصورة المطولة.

مثال 7 يبيِّن كيفية كتابة العبارات اللوغاريتمية بالصورة المختصرة.

مثال 6 كتابة العبارات اللوغاريتمية بالصورة المطولة

اكتب كل عبارة لوغاريتمية فيما يأتي بالصورة المطولة:

a $\log_2 12x^5y^{-2}$

العبارة المعطاة هي لوغاريتم حاصل ضرب $12, x^5, y^{-2}$

$\log_2 12x^5y^{-2} = \log_2 12 + \log_2 x^5 + \log_2 y^{-2}$ خاصية الضرب في اللوغاريتمات

$= \log_2 12 + 5\log_2 x - 2\log_2 y$ خاصية لوغاريتم القوة

b $\log_2 a^2 b^{-3} c^{-2}$

$\log_2 a^2 b^{-3} c^{-2} = \log_2 a^2 + \log_2 b^{-3} + \log_2 c^{-2}$ خاصية الضرب في اللوغاريتمات

$= 2\log_2 a - 3\log_2 b - 2\log_2 c$ خاصية لوغاريتم القوة

c $\log_3 \frac{x-1}{\sqrt[5]{3-2x}}$

$\log_3 \frac{x-1}{\sqrt[5]{3-2x}} = \log_3 (x-1) - \log_3 \sqrt[5]{3-2x}$ خاصية القسمة في اللوغاريتمات

$= \log_3 (x-1) - \log_3 (3-2x)^{\frac{1}{5}}$ خاصية لوغاريتم القوة

تحقق من فهمك

6A $\log_{13} 6a^3bc^4$ **6B** $\log_6 5x^3y^7z^{0.5}$ $\log_{13} 6 + 3\log_{13} a + \log_{13} b + 4\log_{13} c$

6C $\log_4 \frac{\sqrt[3]{1-x}}{2x+1}$ $\log_4 (1-x)^{\frac{1}{3}} - \log_4 (2x+1)$

مثال 7 كتابة العبارات اللوغاريتمية بالصورة المختصرة

اكتب كل عبارة لوغاريتمية فيما يأتي بالصورة المختصرة:

a $4\log_3 x - \frac{1}{3}\log_3 (x+6)$

$4\log_3 x - \frac{1}{3}\log_3 (x+6) = \log_3 x^4 - \log_3 (x+6)^{\frac{1}{3}}$ خاصية لوغاريتم القوة

$= \log_3 x^4 - \log_3 \sqrt[3]{x+6}$ $(x+6)^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{x+6}$

$= \log_3 \frac{x^4}{\sqrt[3]{x+6}}$ خاصية القسمة في اللوغاريتمات

$= \log_3 \frac{x^4\sqrt[3]{(x+6)^2}}{x+6}$ بإنطاق المقام

b $0.5\log_7 (x+2) + 6\log_7 2x$

$0.5\log_7 (x+2) + 6\log_7 2x = \log_7 (x+2)^{0.5} + \log_7 (2x)^6$ خاصية لوغاريتم القوة

$= \log_7 \sqrt{x+2} + \log_7 64x^6$ $(x+2)^{0.5} = \sqrt{x+2}, 2^6 = 64$

$= \log_7 64x^6\sqrt{x+2}$ خاصية الضرب في اللوغاريتمات

تحقق من فهمك

7A $-5\log_2 (x+1) + 3\log_2 (6x)$ $\log_2 \frac{216x^3}{(x+1)^5}$

7B $\log_3 (2x-1) - \frac{1}{4}\log_3 (x+1)$ $\log_3 \frac{2x-1}{\sqrt[4]{x+1}}$

تنبيه!

لوغاريتم المجموع

لوغاريتم المجموع أو الفرق لا يساوي مجموع أو فرق اللوغاريتمات، $\log_a (x \pm 4) \neq \log_a x \pm \log_a 4$.

ويمكنك استعمال خصائص اللوغاريتمات السابقة في إعادة كتابة العبارات اللوغاريتمية من الصورة المطولة إلى الصورة المختصرة.

مثالان إضافيان

6 اكتب كل عبارة لوغاريتمية فيما يأتي بالصورة المطولة:

a $\log_3 25a^{-4}b^6$

$2\log_3 5 - 4\log_3 a + 6\log_3 b$

b $\log_7 7^6 x^3y^{-2}$

$6 + 3\log_7 x - 2\log_7 y$

c $\log_5 \frac{3+2x}{\sqrt[7]{1-3x}}$

$\log_5 (3+2x) - \log_5 (1-3x)^{\frac{1}{7}}$

7 اكتب كل عبارة لوغاريتمية فيما يأتي بالصورة المختصرة:

a $2\log_5 y + 0.5\log_5 (x-1)$

$\log_5 y^2\sqrt{x-1}$

b $3\log_2 (x-1)\ 4\log_2 3y$

$\log_2 \frac{(x-1)^3}{81y^4}$

تنويع الواجبات المنزلية

المستوى	الأسئلة
دون دون المتوسط	1-36، 38-41، 46، 47، 48، 66 – 50
ضمن ضمن المتوسط	1-37 (فردي)، 38-46 (زوجي)، 46، 47، 66 – 50
فوق فوق المتوسط	37 – 66

3 التدريب

التقويم التكويني

استعمل الأسئلة **1-36** للتأكد من فهم الطلاب.

ثم استعمل الجدول أسفل هذه الصفحة؛ لتعيين الواجبات المنزلية للطلبة بحسب مستوياتهم.

إجابات :

11) إفرست 26855.44 باسكال، تريسوني 34963.34 باسكال، بونيتي 36028.42 باسكال

24) $\log_9 6 + 3\log_9 x + 5\log_9 y + \log_9 z$

25) $\log_{11} a - 4\log_{11} b + 12\log_{11} c + 7\log_{11} d$

26) $2\log_7 h + 11\log_7 j - 5\log_7 k$

27) $\log_4 10 + 2\log_4 t + \log_4 u - 3\log_4 v$

28) $6\log_5 a - 3\log_5 b + 4\log_5 c$

29) $\log_2 (3x+2) - \frac{1}{7}\log(1-5x)$

30) $\log_5 \frac{x^3}{\sqrt{6-x}} = \log_5 \frac{x^3\sqrt{6-x}}{6-x}$

31) $\log_7 \frac{32x^5\sqrt{(5x+1)^2}}{5x+1} = \log_7 \frac{32x^5}{\sqrt[3]{5x+1}}$

تدرب وحل المسائل

استعمل $\log_4 3 \approx 0.7925$ و $\log_4 5 \approx 1.1610$ لتقريب قيمة كل مما يأتي: **(المثالان 1, 2)**

1) $\log_4 15$ 1.9535 **2)** $\log_4 \frac{5}{3}$ 0.3685

3) $\log_4 \frac{3}{4}$ −0.2075 **4)** $\log_4 0.6$ −0.3685

استعمل $\log_4 2 = 0.5$ ، $\log_4 3 \approx 0.7925$ ، $\log_4 5 \approx 1.1610$ لتقريب قيمة كل مما يأتي: **(المثالان 1, 2)**

5) $\log_4 30$ 2.4535 **6)** $\log_4 20$ 2.1610

7) $\log_4 \frac{2}{3}$ −0.2925 **8)** $\log_4 \frac{4}{3}$ 0.2075

9) $\log_4 9$ 1.5850 **10)** $\log_4 8$ 1.5

11) تسلق الجبال: يتناقص الضغط الجوي مع زيادة الارتفاع، ويمكن إيجاد قيمة الضغط الجوي عند الارتفاع a متر باستعمال العلاقة $a = 15500(5 - \log_{10} P)$ ، حيث P الضغط بالباسكال. أوجد قيمة الضغط الجوي بالباسكال عند قمم الجبال المذكورة في الجدول أدناه. **(مثال 3)** **انظر الهامش.**

القمة الجبلية	الارتفاع (m)
إفرست	8850
تريسوني	7074
بونيتي	6872

إذا كان $\log_3 5 \approx 1.465$ ، $\log_5 7 \approx 1.2091$ ، $\log_6 8 \approx 1.1606$ ، $\log_7 9 \approx 1.1292$ ، فقرّب قيمة كل مما يأتي: **(مثال 4)**

12) $\log_3 25$ 2.93 **13)** $\log_5 49$ 2.4182

14) $\log_6 48$ 2.1606 **15)** $\log_7 81$ 2.2584

16) $\log_6 512$ 3.4818 **17)** $\log_7 729$ 3.3876

احسب قيمة كل عبارة مما يأتي: **(مثال 5)**

18) $\log_5 \sqrt[4]{25}$ $\frac{1}{2}$ **19)** $\log_2 \sqrt[5]{32}$ 1

20) $3\log_7 \sqrt[6]{49}$ 1 **21)** $4\log_2 \sqrt{8}$ 6

22) $50\log_5 \sqrt{125}$ 75 **23)** $\log_3 \sqrt[6]{243}$ $\frac{5}{6}$

24-29) انظر الهامش.

اكتب كل عبارة لوغاريتمية فيما يأتي بالصورة المطولة: **(مثال 6)**

24) $\log_9 6x^3y^5z$ **25)** $\log_{11} ab^{-4}c^{12}d^7$

26) $\log_7 h^2j^{11}k^{-5}$ **27)** $\log_4 10t^2uv^{-3}$

28) $\log_5 a^6b^{-3}c^4$ **29)** $\log_2 \frac{3x+2}{\sqrt[7]{1-5x}}$

اكتب كل عبارة لوغاريتمية فيما يأتي بالصورة المختصرة: **(مثال 7)**

30) $3\log_5 x - \frac{1}{2}\log_5 (6-x)$ **30, 31)** **انظر الهامش.**

31) $5\log_7 (2x) - \frac{1}{3}\log_7 (5x+1)$

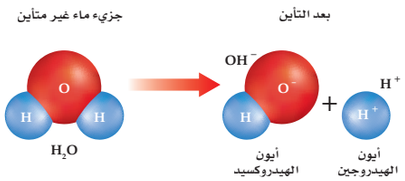
32) $7\log_3 a + \log_3 b - 2\log_3 (8c)$ $\log_3 \frac{a^7b}{64c^2}$

33) $2\log_8 (9x) - \log_8 (2x-5)$ $\log_8 \frac{81x^2}{(2x-5)}$

34) $2\log_6 (5a) + \log_6 b + 7\log_6 c$ $\log_6 25a^2bc^7$

35) $\log_2 x - \log_2 y - 3\log_2 z$ $\log_2 \frac{x}{yz^3}$

36) كيمياء: ثابت التأين للماء K_w هو حاصل ضرب تركيز أيونات الهيدروجين $[H^+]$ في تركيز أيونات الهيدروكسيد $[OH^-]$.



أي أن صيغة ثابت التأين للماء هي $K_w = [H^+][OH^-]$ حيث تشير الأقواس إلى التركيز بالمول لكل لتر.

a) عبّر عن $\log_{10} K_w$ بدلالة $\log_{10} [H^+]$ و $\log_{10} [OH^-]$.

a) $\log_{10} K_w = \log_{10} [H^+] + \log_{10} [OH^-]$

b) بسّط المعادلة في الفرع **a** إذا علمت أن قيمة الثابت K_w هي 1×10^{-14}

$-14 = \log_{10} [H^+] + \log_{10} [OH^-]$

c) إذا كان تركيز أيونات الهيدروجين في عينة من الماء 1×10^{-9} مول لكل لتر ، فما تركيز أيونات الهيدروكسيد؟

1×10^{-5} mol/L

تنويع التعليم

فوق

توسّع: اعرض على الطلاب ما يأتي:

$\log_{10} 3 \approx 0.4771$

$\log_{10} 30 \approx 1.4771$

$\log_{10} 300 \approx 2.4771$

$\log_{10} 3000 \approx 3.4771$

واطلب إليهم توقع قيمة $\log_{10} 30000$. 4.4771

واطلب إليهم أيضًا استعمال خصائص اللوغاريتمات لتوضيح ذلك النمط. **تفسير ممكن: 3 ، 30 ، 300 ، 3000 يمكن كتابتها على الصورة 3×100 ، 3×101 ، 3×102 ، 3×103 على الترتيب، وبعد ذلك يمكن كتابة كل لوغاريتم عشري منها على صورة مجموع لوغاريتمين عشريين ، فمثلًا يمكن كتابة:**

$\log_{10} 3000$ على الصورة $\log_{10} 3 \cdot 10^3$ ونتيجة لذلك فإن:
$\log_{10} (3 \cdot 10^3) = \log_{10} 3 + \log_{10} 10^3 = \log_{10} (3) + 3 = 3.4771$

حدد ما إذا كانت كل عبارة فيما يأتي صحيحة أم خطأ:

37) $\log_8(x-3) = \log_8 x - \log_8 3$ خطأ

38) $\log_5 22x = \log_5 22 + \log_5 x$ صحيحة

39) $\log_{10} 19k = 19\log_{10} k$ خطأ

40) $\log_2 y^5 = 5\log_2 y$ صحيحة

41) $\log_7 \frac{x}{3} = \log_7 x - \log_7 3$ صحيحة

42) $\log_4(z+2) = \log_4 z + \log_4 2$ خطأ

43) $\log_8 p^4 = (\log_8 p)^4$ خطأ

44) $\log_9 \frac{x^2y^3}{z^4} = 2\log_9 x + 3\log_9 y - 4\log_9 z$ صحيحة

45) **هزات أرضية:** يبين الجدول أدناه بعض الهزات الأرضية القوية التي ضربت بعض البلدان، وقوة كل منها على مقياس ريختر. إذا علمت أن قوة الهزة M تُعطى بالعلاقة $M = 1 + \log_{10} x$، حيث تمثل x شدة الهزة الأرضية، فأجب عما يأتي:

السنة	المكان	الدرجة على مقياس ريختر
1939م	تركيا	8.0
1963م	يوغسلافيا	6.0
1970م	البيرو	7.8
1988م	أرمينيا	7.0
2004م	مراكش	6.4

a) أي هزتين كانت شدة إحداهما تعادل 10 أمثال شدة الأخرى؟ وأي هزتين كانت شدة إحداهما تعادل 100 مثل شدة الأخرى؟
45a) انظر الهامش.

b) كم درجة على مقياس ريختر تسجل هزة أرضية إذا كانت شدتها تعادل 1000 مثل شدة هزة يوغسلافيا عام 1963م؟ **9.0 درجات**

46) استعمل خصائص اللوغاريتمات لبرهنة أن $\log_a x = \frac{\log_b x}{\log_b a}$؟
46) انظر الهامش.

مسائل مهارات التفكير العليا

47) **مسألة مفتوحة:** اكتب مثالًا على عبارة لوغاريتمية لكل حالة مما يأتي، ثم عبّر عنه بالصورة المطولة:

a) لوغاريتم حاصل ضرب وقسمة.
إجابة ممكنة: $\log_b \frac{xz}{5} = \log_b x + \log_b z - \log_b 5$

b) لوغاريتم حاصل ضرب وقوة.
إجابة ممكنة: $\log_b m^4p^6 = 4\log_b m + 6\log_b p$

c) لوغاريتم حاصل ضرب وقسمة وقوة. انظر الهامش.

48) **برهان:** استعمل خصائص الأسس لبرهنة خاصية لوغاريتم القوة.
انظر الهامش

49) **تحدٍ:** بسّط العبارة اللوغاريتمية $\log_{\sqrt{a}}(a^2)$ لتجد القيمة العددية الدقيقة لها. انظر الهامش.

50) **اكتشف المختلف:** حدد العبارة المختلفة عن العبارات الثلاث الأخرى، وفسّر إجابتك: انظر الهامش.

$\log_b 24 = \log_b 20 + \log_b 4$	$\log_b 24 = \log_b 2 + \log_b 12$
$\log_b 24 = \log_b 4 + \log_b 6$	$\log_b 24 = \log_b 8 + \log_b 3$

51) استعمل $\log_4 3 \approx 0.7925$، $\log_4 5 \approx 1.1610$ لتقريب قيمة $\log_4 18$ **2.085**

مراجعة تراكمية

استعمل منحنى f لتصف التحويل الهندسي الذي يُنتج منحنى g، ثم مثّل منحنى كل منهما بيانيًّا في كل مما يأتي (الدرس 1-2) انظر ملحق الإجابات.

52) $f(x) = 2^x$; $g(x) = -2^x$

53) $f(x) = 5^x$; $g(x) = 5^{x+3}$

54) $f(x) = \left(\frac{1}{4}\right)^x$; $g(x) = \left(\frac{1}{4}\right)^x - 2$

أوجد قيمة كل مما يأتي: (الدرس 3-2)

55) $\log_{10} 0.001$ **−3** **56)** $\log_4 16^x$ **2x** **57)** $\log_3 27^x$ **3x**

58) **كهرباء:** يمكن حساب كمية التيار الكهربائي I بالأمبير، والتي يستهلكها جهاز باستعمال المعادلة $I = \left(\frac{P}{R}\right)^{\frac{1}{2}}$، حيث P القدرة بالواط، R المقاومة بالأوم. ما كمية التيار الكهربائي التي يستهلكها جهاز ما إذا كانت $P = 120\text{w}$، و $R = 3\Omega$.
قرّب الناتج إلى أقرب عُشر. (مهارة سابقة) **6.3 أمبير تقريبًا**

حدد ما إذا كانت كل دالتين مما يأتي دالة عكسية للأخرى، مع ذكر السبب: (الدرس 1-7)

59) $f(x) = x + 73, g(x) = x - 73$ نعم

60) $g(x) = 7x - 11, h(x) = \frac{1}{7}x + 11$ لا

حُلّ كل معادلة مما يأتي وتحقق من صحة حلك: (الدرس 2-2)

61) $3^{4x} = 3^{3-x}$ $\frac{3}{5}$ **62)** $3^{5x} \cdot 81^{1-x} = 9^{x-3}$ **10**

63) $49^x = 7^{x^2-15}$ **−3, 5** **64)** $\log_2(x+6) = 5$ $x = 26$

تدريب على اختبار

65) ما قيمة $2\log_5 12 - \log_5 8 - 2\log_5 3$؟ **A**

A $\log_5 2$ **B** $\log_5 0.5$
C $\log_5 3$ **D** 1

66) ما المقطع y للدالة اللوغاريتمية $y = \log_2(x+1) + 3$؟ **A**

A 3 **B** 2
C 1 **D** 0

4 التقويم

التقويم التكويني

تحقق من مدى استيعاب الطلاب للمفاهيم الواردة في الدرسين 2-4, 2-3، بإعطائهم اختبارًا قصيرًا.

تعلم لاحق أخبر الطلاب أنهم سيتعلمون في الدرس التالي حل معادلات باستعمال اللوغاريتم العشري (لوغاريتم الأساس 10). واطلب إليهم كتابة رأيهم فيما تعلموه في هذا الدرس وعلاقته بالدرس التالي.

إجابات:

45a) أرمينيا ويوغسلافيا، أو تركيا وأرمينيا؛ تركيا ويوغسلافيا.

46) افترض أن الطرف الأيسر يساوي y أي أن $y = \log_a x$، وهذا يعني أن $x = a^y$، والآن بقي أن تثبت أن الطرف الأيمن يساوي y أيضًا

$$\frac{\log_b x}{\log_b a} = \frac{\log_b a^y}{\log_b a} = y\frac{\log_b a}{\log_b a} = y$$

47c) إجابة ممكنة:

$$\log_b \frac{x^3y^4}{z^5} = 3\log_b x + 4\log_b y - 5\log_b z$$

48)

$$m^p = m^p$$
$$\left(b^{\log_b m}\right)^p = b^{\log_b (m^p)}$$
$$b^{p\log_b m} = b^{\log_b (m^p)}$$
$$\log_b mp = \log_b (m^p)$$
$$p\log_b m = \log_b (m^p)$$

49)

$$\log_{\sqrt{a}}(a^2) = x$$
$$(\sqrt{a})^x = a^2$$
$$\left(a^{\frac{1}{2}}\right)^x = a^2$$
$$a^{\frac{x}{2}} = a^2$$
$$\frac{x}{2} = 2$$
$$x = 4$$

50) $\log_b 24 \neq \log_b 20 + \log_b 4$
جميع العبارات الأخرى تساوي $\log_b 24$

1 التركيز

الترابط الرأسي

ما قبل الدرس 2-5

إيجاد قيمة عبارات لوغاريتمية.

الدرس 2-5

حل معادلات لوغاريتمية.

حل متباينات لوغاريتمية.

ما بعد الدرس 2-5

إيجاد حلول معادلات أسية باستعمال الطرق الجبرية.

2 التدريس

أسئلة التعزيز

اطلب إلى الطلاب قراءة فقرة "لماذا؟".

واسأل:

- ضمن أي فئات مقياس فوجيتا يقع إعصار سرعة الرياح المصاحبة له $100\,\text{mi/h}$؟ F-1
- ما مجال سرعة الرياح المصاحبة لإعصار من الفئة F–4؟ $207–260\ \text{mi/h}$
- كم مرّة وقعت أعاصير من الفئة F-6؟ 0
- ما قيمة d عندما تكون $w = 65\,\text{mi/h}$؟ $d = 1\,\text{mil}$

حل المعادلات والمتباينات اللوغاريتمية
Solving Logarithmic Equations and Inequalites

فيما سبق:
درستُ إيجاد قيمة عبارات لوغاريتمية. (الدرس 4–2)

والآن:
- أحل معادلات لوغاريتمية.
- أحل متباينات لوغاريتمية.

المفردات:
المعادلة اللوغاريتمية
logarithmic equation
المتباينة اللوغاريتمية
logarithmic inequality

www.obeikaneducation.com

لماذا؟

تُقاس شدة الأعاصير بمقياس يُدعى فوجيتا (Fujita)، ويرمز إليه بالرمز F، ويصنِّف هذا المقياس الأعاصير إلى سبع فئات من F–0 إلى F–6 بحسب: سرعة الرياح المصاحبة للإعصار (w) والتي تعطى بالمعادلة $w = 93 \log_{10} d + 65$ حيث تمثل d المسافة التي يقطعها الإعصار بالميل، وطول مساره، وعرضه، وقدرته التدميرية، والفئة F–6 هي فئة أشد الأعاصير تدميرًا.

مقياس F	سرعة الرياح المصاحبة mi/h	القدرة التدميرية
F-0 ضعيف	40-72	تكسر الأغصان
F-1 متوسط	73-112	اهتزاز
F-2 قوي	113-157	تصدع الجدران
F-3 شديد	158-206	اقتلاع الأشجار
F-4 مدمر	207-260	تطاير السيارات
F-5 هائل	261-318	تطاير البيوت
F-6 لا يتصوّر	319-379	لم يحدث هذا المستوى إطلاقًا

إن معرفة المعادلة السابقة تمكنك من إيجاد المسافة التي يقطعها الإعصار بالميل عند أية قيمة لسرعة الرياح المصاحبة معطاة بالميل لكل ساعة.

حل المعادلات اللوغاريتمية: تحتوي **المعادلات اللوغاريتمية** على لوغاريتم واحد أو أكثر. ويمكنك استعمال تعريف اللوغاريتم للمساعدة على حل معادلات لوغاريتمية.

مثال 1 حل معادلات باستعمال تعريف اللوغاريتم

حُلّ المعادلة $\log_{36} x = \frac{3}{2}$، ثم تحقق من صحة حلِّك.

$\log_{36} x = \frac{3}{2}$	المعادلة الأصلية
$x = 36^{\frac{3}{2}}$	تعريف اللوغاريتم
$x = (6^2)^{\frac{3}{2}}$	$36 = 6^2$
$x = 6^3 = 216$	خاصية قوة القوة

التحقق: عوّض عن x بـ 216 في المعادلة الأصلية.

$\log_{36} x \stackrel{?}{=} \frac{3}{2}$	المعادلة الأصلية
$\log_{36} 216 \stackrel{?}{=} \frac{3}{2}$	عوّض 216 بدلًا من x
$\log_{36} (36)(6) \stackrel{?}{=} \frac{3}{2}$	حلّل
$\log_{36} 36 + \log_{36} (36)^{\frac{1}{2}} \stackrel{?}{=} \frac{3}{2}$	خاصيتا ضرب اللوغاريتمات ولوغاريتم القوة
$1 + \frac{1}{2} \stackrel{?}{=} \frac{3}{2}$	بسّط
$\frac{3}{2} = \frac{3}{2}$ ✓	الحل صحيح

تحقق من فهمك

(1A) $\log_9 x = \frac{3}{2}$ 27

(1B) $\log_{16} x = \frac{5}{2}$ 1024

ويمكنك استعمال خاصية المساواة للدوال اللوغاريتمية لحل معادلات لوغاريتمية تحتوي لوغاريتمات في كلا الطرفين.

مصادر الدرس 5 – 2

المصدر	دون المتوسط	ضمن المتوسط	فوق المتوسط
دليل المعلم	• تنويع التعليم ص (113)	• تنويع التعليم ص (116 , 113)	• تنويع التعليم ص (116)
كتاب التمارين	• ص (15)	• ص (15)	• ص (15)
مصادر المعلم للأنشطة الصفية	• تدريبات إعادة التعليم، ص (22) • تدريبات حل المسألة، ص (24)	• تدريبات حل المسألة، ص (24) • التدريبات الإثرائية، ص (25)	• تدريبات حل المسألة، ص (24) • التدريبات الإثرائية، ص (25)

حل المعادلات اللوغاريتمية

مثال 1 يبيِّن كيفية حل معادلات تحتوي لوغاريتمًا واحدًا.

مثال 2 يبيِّن كيفية حل معادلات تحتوي لوغاريتمات في كلا الطرفين.

مثال 3 يبيِّن كيفية حل معادلات باستعمال خاصية الضرب في اللوغاريتمات.

التقويم التكويني

استعمل تدريبات "تحقق من فهمك" بعد كل مثال؛ للتحقق من مدى فهم الطلاب للمفاهيم.

أمثلة إضافية

1 حُلّ المعادلة $\log_4 x = \frac{5}{2}$ 32

2 **مثال على اختبار:** حلّ المعادلة:

$\log_4 x^2 = \log_4(-6x - 8)$ C

A 4 **B** 2

C 4 – و 2– **D** لا يوجد حل

3 حلّ المعادلة

$\log_2(x - 3) + \log_2(x - 2) = \log_2(2x + 24)$

9

إرشادات للدراسة

التعويض

اختصارًا للوقت، يمكنك تعويض كل متغير بقيمته في المعادلة الأصلية للتحقق من صحة الحل.

مثال 2 على اختبار

حُلّ المعادلة $\log_2(x^2 - 4) = \log_2 3x$.

A -2 **B** -1 **C** 2 **D** 4

اقرأ فقرة الاختبار: المطلوب هو إيجاد قيمة x في المعادلة اللوغاريتمية.

حل فقرة الاختبار:

$\log_2(x^2 - 4) = \log_2 3x$	المعادلة الأصلية
$x^2 - 4 = 3x$	خاصية المساواة للدوال اللوغاريتمية
$x^2 - 3x - 4 = 0$	اطرح $3x$ من كلا الطرفين
$(x - 4)(x + 1) = 0$	حلّل إلى العوامل
$x + 1 = 0$ أو $x - 4 = 0$	خاصية الضرب الصفري
$x = -1$ أو $x = 4$	حُل كل معادلة

التحقق: عوِّض بكل من القيمتين في المعادلة الأصلية.

$x = -1$	$x = 4$
$\log_2[(-1)^2 - 4] \stackrel{?}{=} \log_2 3(-1)$	$\log_2(4^2 - 4) \stackrel{?}{=} \log_2 3(4)$
$\log_2(-3) = \log_2(-3)$ ✗	$\log_2 12 = \log_2 12$ ✓

بما أن $\log_2(-3)$ غير معرف، فالإجابة -1 مرفوضة، والإجابة الصحيحة هي D

تحقق من فهمك

2) حُلّ المعادلة $\log_3(x^2 - 15) = \log_3 2x$. C

A -3 **B** -1 **C** 5 **D** 15

ويمكنك استعمال خصائص اللوغاريتمات في حل المعادلات اللوغاريتمية.

إرشادات للدراسة

تحديد الحلول الدخيلة

يمكن تحديد الحلول الدخيلة من خلال إيجاد مجال المعادلة، ففي مثال3 مجال $\log_6 x$ هو $x>0$، بينما مجال $\log_6(x-9)$ هو $x>9$؛ لذا يكون مجال المعادلة هو $x>9$، وبما أن $-3 \neq 9$ فإن $x=-3$ ليس حلًا للمعادلة.

مثال 3 حل معادلات باستعمال خاصية الضرب في اللوغاريتمات

حُلّ المعادلة $\log_6 x + \log_6(x - 9) = 2$، ثم تحقق من صحة حلك.

$\log_6 x + \log_6(x - 9) = 2$	المعادلة الأصلية
$\log_6 x(x - 9) = 2$	خاصية الضرب في اللوغاريتمات
$x(x - 9) = 6^2$	تعريف اللوغاريتم
$x^2 - 9x - 36 = 0$	بسّط ثم اطرح 36 من كلا الطرفين
$(x - 12)(x + 3) = 0$	حلّل
$x + 3 = 0$ أو $x - 12 = 0$	خاصية الضرب الصفري
$x = -3$ $\quad x = 12$	حُل كل معادلة

تنويع التعليم

دون ضمن

إذا احتاج بعض الطلاب إلى مساعدة في تحديد مواقع الأعداد في الصورتين الأسية واللوغاريتمية المتكافئتين للمعادلات،

فاطلب إليهم عمل ملصقات ملونة تظهر عدة معادلات متكافئة بالصورتين الأسية واللوغاريتمية مثل $2^3 = 8$, $\log_2 8 = 3$، واقترح عليهم أن يستعملوا لونًا مختلفًا لكل من الأعداد 2, 3, 8 .

حل المتباينات اللوغاريتمية

مثال 4 يبيِّن كيفية حل متباينات تتضمن عبارة لوغاريتمية واحدة.

مثال 5 يبيِّن كيفية حل متباينات تتضمن عبارتين لوغاريتميتين لهما الأساس نفسه.

مثالان إضافيان

4 حُلّ المتباينة $\log_6 x > 3$.

$\{x|x > 216\}$

5 حل المتباينة

$\log_7(2x + 8) > \log_7(x + 5)$.

$\{x|x > -3\}$

التحقق:

$\log_6 x + \log_6 (x - 9) = 2$

$\log_6 (-3) + \log_6 (-3 - 9) \stackrel{?}{=} 2$

$\log_6 (-3) + \log_6 (-12) \stackrel{?}{=} 2$

بما أن $\log_6 (-3)$ و $\log_6 (-12)$ غير معرفين فإن -3 حل مرفوض.

$\log_6 x + \log_6 (x - 9) = 2$

$\log_6 12 + \log_6(12 - 9) \stackrel{?}{=} 2$

$\log_6 12 + \log_6 3 \stackrel{?}{=} 2$

$\log_6 (12 \cdot 3) \stackrel{?}{=} 2$

$\log_6 36 \stackrel{?}{=} 2$

$2 = 2$ ✓

وبذلك يكون الحل هو $x = 12$.

تحقق من فهمك

3A $2 \log_7 x = \log_7 27 + \log_7 3$ 9

3B $\log_6 x + \log_6 (x + 5) = 2$ 4

حل المتباينات اللوغاريتمية: **المتباينة اللوغاريتمية** هي متباينة تتضمن عبارة لوغاريتمية أو أكثر، ويمكن استعمال الخاصية الآتية لحل متباينات لوغاريتمية تتضمن عبارة لوغاريتمية واحدة.

مفهوم أساسي — خاصية التباين للدوال اللوغاريتمية

إذا كان $b > 1$, $x > 0$ و $\log_b x > y$ ، فإن $x > b^y$

إذا كان $b > 1$ و $\log_b x < y$ ، فإن $x < b^y$

تتحقق هذه الخاصية أيضًا إذا احتوت المتباينة رمزي التباين $\leq$ ، $\geq$

مثال 4 — حل متباينات تتضمن عبارة لوغاريتمية واحدة

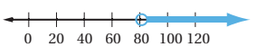
حُلّ المتباينة $\log_3 x > 4$ ، ثم تحقق من صحة حلك.

$\log_3 x > 4$

$x > 3^4$ — المتباينة الأساسية

$x > 81$ — خاصية التباين للدوال اللوغاريتمية؛ بسّط

إذن مجموعة الحل هي $\{x \mid x > 81 , x \in \mathbb{R}\}$



التحقق: عوّض بعدد أقل من 81، وعدد أكبر من 81 في المتباينة الأصلية.

$x = 9$

$\log_3 9 \stackrel{?}{>} 4$

$2 > 4$ ✗

$x = 243$

$\log_3 243 \stackrel{?}{>} 4$

$5 > 4$ ✓

إذن الحل صحيح.

إرشادات للدراسة

حل المعادلة اللوغاريتمية: عند حل متباينة لوغاريتمية يستثنى قيم المتغير التي لا يكون اللوغاريتم عندها معرّفًا.

تحقق من فهمك

حل كل متباينة مما يأتي، ثم تحقق من صحة حلك.

4A $\log_4 x \geq 3$ $\{x \mid x \geq 64\}$

4B $\log_2 x < 4$ $\{x \mid 0 < x < 16\}$

114 الفصل 2 العلاقات والدوال الأسية واللوغاريتمية

يمكنك استعمال الخاصية الآتية لحل متباينات تتضمن عبارتين لوغاريتميتين لهما الأساس نفسه في كلا الطرفين.

استثن من حلّك القيم التي ينتج عن تعويضها في المتباينة الأصلية أخذ اللوغاريتم لأعداد أقل من أو تساوي الصفر.

مفهوم أساسي **خاصية التباين للدوال اللوغاريتمية**

الرموز: إذا كان $b > 1$ ، فإن $\log_b x > \log_b y$ إذا وفقط إذا كان $x > y$

$x > 0, y > 0$

مثال: إذا كان $\log_6 x > \log_6 35$ ، فإن $x > 35$.

تتحقق هذه الخاصية أيضًا إذا احتوت المتباينة رمزي التباين $\leq$ ، $\geq$

مـثال 5 **حل متباينات تتضمن عبارتين لوغاريتميتين لهما الأساس نفسه**

حل المتباينة $\log_4 (x + 3) > \log_4 (2x + 1)$ ، ثم تحقق من صحة حلك.

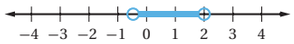
$\log_4 (x + 3) > \log_4 (2x + 1)$ المتباينة الأساسية

$x + 3 > 2x + 1$ خاصية التباين للدوال اللوغاريتمية

$2 > x$ اطرح $x + 1$ من كلا الطرفين

ثم استثن قيم x التي تجعل $x + 3 \leq 0$ أو $2x + 1 \leq 0$ ($x \leq -3$ أو $x \leq -\frac{1}{2}$)

إذن مجموعة الحل هي $\left\{x \mid -\frac{1}{2} < x < 2, x \in \mathbb{R}\right\}$.



التحقق: عوّض بعدد يقع بين 2 ، $-\frac{1}{2}$ ، وآخر يقع خارج الفترة $(2$ ، $-\frac{1}{2})$.

$x = 1$

$\log_4 (1+3) \stackrel{?}{>} \log_4 (2+1)$

$\log_4 4 \stackrel{?}{>} \log_4 3$

$\log_4 4 > \log_4 3$ ✓ الدالة اللوغاريتمية متزايدة عندما تكون قيمة الأساس أكبر من 1

$x = 3$

$\log_4 (3+3) \stackrel{?}{>} \log_4 (2\times3+1)$

$\log_4 6 \stackrel{?}{>} \log_4 7$

$\log_4 6 > \log_4 7$ ✗ الدالة اللوغاريتمية متزايدة عندما تكون قيمة الأساس أكبر من 1

إذن الحل صحيح.

تحقق من فهمك

5) حل المتباينة $\log_5 (2x + 1) \leq \log_5 (x + 4)$ ، ثم تحقق من صحة حلك. $\left\{x \mid -\frac{1}{2} < x \leq 3\right\}$

التعليم باستعمال التقنيات

تسجيل مرئي اطلب إلى الطلاب العمل في مجموعات ثنائية لإعداد عرض مرئي (Video) يتعلق بكيفية حل معادلة لوغاريتمية. وتحقق من أنهم يفسرون كل خطوة في عملهم، وبخاصة كيفية إعادة كتابة المعادلة اللوغاريتمية على صورة معادلة أسّية.

تنويع الواجبات المنزلية

المستوى	الأسئلة
دون دون المتوسط	1-27، 32، 35، 36، 38-51
ضمن ضمن المتوسط	1-27 (فردي)، 29، 30، 31، 32، 34، 35-37، 38-51
فوق فوق المتوسط	28-51

3 التدريب

التقويم التكويني

استعمل الأسئلة 1-27 للتأكد من فهم الطلاب.

ثم استعمل الجدول أسفل هذه الصفحة؛ لتعيين الواجبات المنزلية للطلبة بحسب مستوياتهم.

تمثيلات متعددة يستعمل الطلاب في السؤال 29 الآلة الحاسبة البيانية TI-nspire، والتحليل الجبري والمنطقي للمقارنة بين التمثيلات البيانية للدوال اللوغاريتمية.

4 التقويم

بطاقة مكافأة اطلب إلى الطلاب كتابة شرح طريقة حل معادلات لوغاريتمية على الصورة $\log_8 n = \frac{7}{3}$ خطوة خطوة على ورقة، وأن يسلموا إجاباتهم قبل مغادرتك غرفة الصف.

التقويم التكويني

تحقق من مدى استيعاب الطلاب للمفاهيم الواردة في الدرسين 2-5, 2-4 بإعطائهم:

الاختبار القصير 3، ص (31)

تدرب وحل المسائل

حُلّ كل معادلة مما يأتي، ثم تحقق من صحة حلّك: (مثال 1)

1) $\log_8 x = \frac{4}{3}$ 16

2) $\log_{16} x = \frac{3}{4}$ 8

3) $\log_{81} x = \frac{3}{4}$ 27

4) $\log_{25} x = \frac{5}{2}$ 3125

5) $\log_8 \frac{1}{2} = x$ $-\frac{1}{3}$

6) $\log_6 \frac{1}{36} = x$ -2

7) $\log_x 32 = \frac{5}{2}$ 4

8) $\log_x 27 = \frac{3}{2}$ 9

حُلّ كل معادلة مما يأتي، ثم تحقق من صحة حلك: (المثالان 2, 3)

9) $5 \log_2 x = \log_2 32$ 2

10) $3 \log_2 x = \log_2 8$ 2

11) $\log_4 48 - \log_4 n = \log_4 6$ 8

12) $\log_3 2x + \log_3 7 = \log_3 28$ 2

13) $\log_2 (4x) + \log_2 5 = \log_2 40$ 2

14) $\log_7 (x-3) + \log_7 (x-2) = \log_7 (2x+24)$ 9

15) $\log_2 n = \frac{1}{3} \log_2 27 + \log_2 36$ 108

16) $3 \log_{10} 8 - \frac{1}{2} \log_{10} 36 = \log_{10} x$ $85\frac{1}{3}$

حُلّ كل متباينة مما يأتي ، ثم تحقق من صحة حلّك: (مثال 4)

17) $\log_5 x > 3$ $\{x \mid x > 125\}$

18) $\log_8 x \le -2$ $\left\{x \mid 0 < x \le \frac{1}{64}\right\}$

19) $\log_6 x < -3$ $\left\{x \mid 0 < x < \frac{1}{216}\right\}$

20) $\log_4 x \ge 4$ $\{x \mid x \ge 256\}$

21) $\log_3 x \ge -4$ $\{x \mid x \ge \frac{1}{81}\}$

22) $\log_2 x \le -2$ $\left\{x \mid 0 < x \le \frac{1}{4}\right\}$

حُلّ كل متباينة مما يأتي ثم تحقق من صحة حلك: (مثال 5)

23) $\log_4 (2x+5) \le \log_4 (4x-3)$ $\{x \mid x \ge 4\}$

24) $\log_8 (2x) > \log_8 (6x-8)$ $\left\{x \mid 2 > x > \frac{4}{3}\right\}$

25) $\log_2 (4x-6) > \log_2 (2x+8)$ $\{x \mid x > 7\}$

26) $\log_7 (x+2) \ge \log_7 (6x-3)$ $\{x \mid 0.5 < x \le 1\}$

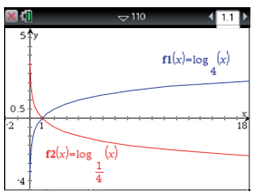
27) **صوت:** يعطى ارتفاع الصوت L بالصيغة $L = 10 \log_{10} R$، حيث R هي شدة الصوت. احسب شدة صوت منبه ارتفاع صوته 80 ديسبل. 10^8

28) **علوم:** تُقاس قوة الهزات الأرضية بمقياس لوغاريتمي ذي درجات يُسمى مقياس ريختر، وتُعطى قوة الهزة الأرضية M بالمعادلة $M = 1 + \log_{10} x$، حيث x تمثل شدة الهزة الأرضية.

a) كم تبلغ شدة هزة أرضية سجلت 7 درجات على مقياس ريختر؟ 10^6 أو 1000000

b) كم مرة تبلغ شدة هزة أرضية قوتها 8 درجات بمقياس ريختر مقارنة بشدة هزة أرضية قوتها 5 درجات على المقياس نفسه؟ 10^3 أو 1000 مرة أكبر

29) **تمثيلات متعددة:** ستكتشف في هذه المسألة العلاقة بين الدالتين $y = \log_4 x$, $y = \log_{\frac{1}{4}} x$. (29a-29c) انظر ملحق الإجابات.



a) **تحليليًا:** قارن بين منحنيي الدالتين من حيث خطوط التقارب ومقاطع المحور x؟

b) **لفظيًا:** صف العلاقة بين منحنيي الدالتين.

c) **تحليليًا:** صف العلاقة بين كل من الدالتين $y = \log_4 x$ و $y = -1(\log_4 x)$ وما مجال ومدى كل منهما؟

30) **علوم:** تُعطى سرعة الرياح w بالميل لكل ساعة قرب مركز الإعصار بالمعادلة $w = 93 \log_{10} d + 65$، حيث d المسافة التي يقطعها الإعصار بالميل.

a) اكتب المعادلة بصورة أسية. $d = 10^{\frac{w-65}{93}}$

b) ما سرعة الرياح قرب مركز إعصار قطع مسافة 525 ميلًا؟ 317.975 mi/h

تنويع التعليم

ضمن فوق

توسّع: اطلب إلى الطلاب أن يجدوا قيمتي $\log_3 1$, $\log_3 9$. 0 ,2 ، ثم يتوقعوا قيمة $\log_3 (\frac{1}{9})$. وبعد تنفيذ عملية التوقع اطلب إليهم أن يتحققوا مما إذا كان رفع العدد 3 إلى القيمة المتنبأ بها يساوي $\frac{1}{9}$ أم لا. ثم اطلب إليهم توقع قيمة $\log_3 (\frac{1}{n})$. $-\log_3 n$

31) صوت: تُعطى العلاقة بين شدة الصوت بالواط لكل متر مربع I وعدد وحدات الديسبل β بالمعادلة $\beta = 10 \log_{10}\left(\frac{I}{10^{-12}}\right)$.

a) أوجد عدد وحدات الديسبل لصوت شدته 1واط لكل متر مربع، وكذلك لصوت شدته 10^{-2} واط لكل متر مربع. **120, 100**

b) إذا كانت شدة الصوت 1 واط لكل متر مربع تعادل 100 مرة من شدة الصوت الذي مقداره 10^{-2} واط لكل متر مربع، فهل تضاعف عدد وحدات الديسبل بمقدار 100مرة؟ **انظر الهامش.**

مسائل مهارات التفكير العليا

32) اكتشف الخطأ: تقوم لينا وريم بحل المتباينة $\log_2 x \geq -2$. أي منهما حلها صحيح؟ **انظر الهامش.**

لينا	ريم
$\log_2 x \geq -2$	$\log_2 x \geq -2$
$x \leq 2^{-2}$	$x \geq 2^{-2}$
$0 < x \leq \frac{1}{4}$	$x \geq \frac{1}{4}$

33) تحدٍّ: أوجد قيمة $\log_3 27 + \log_9 27 + \log_{27} 27 + \log_{81} 27 + \log_{243} 27$ **$6\frac{17}{20}$**

34) تبرير: نص خاصية التباين للدوال اللوغاريتمية هو: إذا كان $b > 1$، فإن $\log_b x > \log_b y$ إذا وفقط إذا كان $x > y$. كيف يصبح نص الخاصية إذا كان $0 < b < 1$، وضّح إجابتك. **انظر الهامش.**

35) اكتب: وضح العلاقة بين مجال ومدى الدالة اللوغاريتمية ومجال ومدى الدالة الأسيّة المناظرة لها. **انظر الهامش.**

36) مسألة مفتوحة: أعطِ مثالًا على معادلة لوغاريتمية ليس لها حل. **انظر الهامش.**

37) تبرير: ضع خطًّا تحت التعبير الذي يجعل الجملة صحيحة، مع ذكر السبب: (علمًا بأن جميع المعادلات اللوغاريتمية المذكورة على الصورة $y = \log_b x$).

a) إذا كان أساس اللوغاريتم أكبر من 1 وتقع قيمة x بين 0, 1 ، فإن قيمة y تكون (أصغر من ، أكبر من، مساوية لـ) الصفر.

b) إذا كان أساس اللوغاريتم بين 0, 1 وقيمة x أكبر من 1، فإن قيمة y تكون (أصغر من ، أكبر من، مساوية لـ) الصفر.

c) المعادلة $y = \log_b 0$ (لا حل لها، لها حل واحد، لها عدد لا نهائي من الحلول) بالنسبة لـ b.

d) المعادلة $y = \log_b 1$ (لا حل لها، لها حل واحد، لها عدد لا نهائي من الحلول) بالنسبة لـ b.

38) اكتب: فسّر لماذا يقطع منحنى أي دالة لوغاريتمية على الصورة $y = \log_b x$ المحور x عند النقطة (0 , 1) ولا يقطع المحور y. **انظر الهامش.**

مراجعة تراكمية

حُلّ كلًّا مما يأتي، وتحقق من صحة حلك: (الدرس 2-2)

39) $3^{3x-2} > 81$ **$x > 2$**

40) $3^{4x-7} = 27^{2x+3}$ **$x = -8$**

41) $8^{x-4} = 2^{4-x}$ **$x = 4$**

أوجد قيمة كل عبارة مما يأتي: (الدرس 2-3)

42) $\log_4 256$ **4**

43) $\log_2 \frac{1}{8}$ **-3**

44) $\log_6 216$ **3**

45) $\log_7 2401$ **4**

بسّط كلًّا مما يأتي. مفترضًا أن أيًّا من المتغيرات لا يساوي الصفر: (مهارة سابقة)

46) $x^5 \cdot x^3$ **x^8**

47) $(2p^2n)^3$ **$8p^6n^3$**

48) $\frac{x^4y^6}{xy^2}$ **x^3y^4**

49) $\left(\frac{c^9}{d^7}\right)^0$ **1**

تدريب على اختبار

50) أي الدوال الأسية الآتية يمر تمثيلها البياني بالنقطتين $(0, -10), (4, -160)$؟ **A**

A $f(x) = -10(2)^x$

B $f(x) = 10(2)^x$

C $f(x) = -10(4)^x$

D $f(x) = 10(4)^x$

51) أي مما يأتي يمثل حلًّا للمعادلة $\log_4 x - \log_4 (x-1) = \frac{1}{2}$؟ **D**

A $-\frac{1}{2}$ **C** -2

B $\frac{1}{2}$ **D** 2

تنبيه!

اكتشف الخطأ ذكّر الطلاب عند حل السؤال **32** بأن هناك فرقًا بين عملية رفع عدد إلى أسس سالبة، وضرب عدد في -1، كذلك ضرورة استثناء قيم المتغير التي لا يكون اللوغاريتم عندها معرفًا.

إجابات:

31b) إجابة ممكنة: من الفرع a أعلاه، عدد وحدات الديسبل لصوت شدته 1 واط لكل متر مربع هو 120، وعدد وحدات الديسبل لصوت شدته 10^{-2} واط لكل متر مربع هو 100؛ لذا فإن عدد وحدات الديسبل يزداد بمقدار 20 وحدة فقط.

32) إجابة ممكنة: ريم؛ لأن لينا عكست إشارة المتباينة.

34) إجابة ممكنة: إذا كان $0 < b < 1$ فإن $\log_b x > \log_b y$ إذا وفقط إذا $x < y$؛ انعكست إشارة المتباينة؛ لأن الكسر الأصغر من 1 يكون أصغر عند رفعه لقوة أكبر.

35) الدالة اللوغاريتمية على الصورة $y = \log_b x$ هي الدالة العكسية للدالة الأسية من الصورة $y = b^x$ ، ومجال أحدهما يساوي مدى الأخرى، كما أن مدى أحدهما يساوي مجال الدالة الأخرى.

36) إجابة ممكنة:

$\log_3(x+4) = \log_3(3x+12)$

38) مقطع المحور y للدالة الأسية $y = b^x$ هو (0, 1)، وعند قلب الإحداثيين x, y فإن المقطع y يتغير إلى مقطع المحور x عند النقطة (1, 0)، وبما أنه لا يوجد مقطع المحور x عند النقطة (0, 1) للدالة الأسية، فإنه لن يكون هناك نقطة تناظرها (0, 1) للدالة اللوغاريتمية على المحور y، وهذا يعني أنه منحنى الدالة اللوغاريتمية لا يقطع المحور y.

1 التركيز

الترابط الرأسي

ما قبل الدرس 2-6

تبسيط عبارات لوغاريتمية وحل المعادلات الوغاريتمية باستعمال خصائص اللوغاريتمات.

الدرس 2-6

حل معادلات ومتباينات أسية باستعمال اللوغاريتمات العشرية.

إيجاد قيمة عبارات لوغاريتمية باستعمال صيغة تغيير الأساس.

ما بعد الدرس 2-6

تحليل موقف أو مسألة حياتية ممثلة بدالة أسّية وحلها.

2 التدريس

أسئلة التعزيز

اطلب إلى الطلاب قراءة فقرة "لماذا؟".

واسأل:

- كيف تُقارن بين درجة مقياس ريختر لهزة عظمى، وهزة خفيفة؟ ضعف الدرجة
- كم مرة تعادل شدة الهزة العظمى من الهزة الخفيفة؟ 10000 مرة
- صف تأثير هزة شدتها 10^8 على المناطق السكنية؟ تدمير كبير جدًّا في مناطق شاسعة جدًّا تصل إلى مئات الأميال.

2-6 اللوغاريتمات العشرية
Common Logarithms

فيما سبق:
درستُ تبسيط عبارات لوغاريتمية وحل معادلات لوغاريتمية باستعمال خصائص اللوغاريتمات.
(الدروس من 3–2 إلى 5–2)

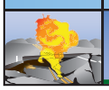
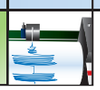
والآن:
- أحل معادلات ومتباينات أسية باستعمال اللوغاريتمات العشرية.
- أجد قيمة عبارات لوغاريتمية باستعمال صيغة تغيير الأساس.

المفردات:
اللوغاريتم العشري
common logarithm
صيغة تغيير الأساس
Change of Base Formula

www.obeikaneducation.com

لماذا؟

يستعمل علماء الهزات الأرضية مقياس ريختر لقياس قوة الهزات الأرضية أو شدتها، ويتم تحديد قوة الهزة الأرضية بحساب لوغاريتم شدة الهزة المسجلة بجهاز السيزموجراف (seismographs).

درجة مقياس ريختر	1	2	3	4	5	6	7	8
الشدة	10^1 مايكرو	10^2 ضعيفة	10^3 ضعيفة	10^4 خفيفة	10^5 متوسطة	10^6 قوية	10^7 قوية جدًا	10^8 عظمى
التأثير في المناطق السكنية.	لا يشعر بها، ولكن يتم تسجيلها.	عادة لا يشعر بها، ولكن تتأرجح بعض المعلقات.	يشعر بها، ولكن لا تحدث أضرارًا أو قليلة الأضرار.	يشعر بها، وتحدث أضرارًا بسيطة.	تدمير بسيط للمباني في منطقة محدودة.	تدمير في منطقة قد تصل مساحتها إلى $100\ mi^2$.	قوة تدمير كبيرة في مناطق شاسعة.	تدمير كبير جدًا في مناطق شاسعة جدًا تصل إلى مئات الأميال.
								

يستعمل مقياس ريختر لوغاريتمات الأساس 10 لحساب قوة الهزة الأرضية، فمثلًا تُعطى قوة هزة أرضية سجلت 6.4 درجات على مقياس ريختر بالمعادلة $6.4 = 1 + \log_{10} x$ ، حيث x شدة الهزة الأرضية.

اللوغاريتمات العشرية: لعلك لاحظت أن دالة لوغاريتم الأساس 10 على الصورة "$y = \log_{10} x$" تستعمل في كثير من التطبيقات. وتُسمى لوغاريتمات الأساس 10 **اللوغاريتمات العشرية**، وتُكتب دون كتابة الأساس 10.

$$\log_{10} x = \log x,\ x > 0$$

تحتوي معظم الحاسبات العلمية $\log x$ كونه أمرًا أساسيًّا، ويستعمل المفتاح LOG لإيجاد قيمته.

قراءة الرياضيات
اللوغارتيم العشري
عند كتابة اللوغاريتم دون أساس، فإن ذلك يعني أن الأساس هو 10 أي أن $\log x$ تعني $\log_{10} x$.

مثال 1 إيجاد قيمة اللوغاريتم العشري

استعمل الحاسبة لإيجاد قيمة كل مما يأتي مقربًا إلى أقرب جزء من عشرة آلاف:

a $\log 5$

اضغط على المفاتيح: LOG 5 ENTER تجد أن:

$\log 5 \approx 0.6990$

b $\log 0.3$

اضغط على المفاتيح: LOG 0.3 ENTER تجد أن:

$\log 0.3 \approx -0.5229$

تحقق من فهمك

1A $\log 7$ **0.8451**

1B $\log 0.5$ **−0.3010**

مصادر الدرس 2 – 6

المصدر	دون المتوسط	ضمن المتوسط	فوق المتوسط
دليل المعلم		• تنويع التعليم ص (123 , 120)	• تنويع التعليم ص (123 , 120)
كتاب التمارين	• ص (16)	• ص (16)	• ص (16)
مصادر المعلم للأنشطة الصفية	• تدريبات إعادة التعليم، ص (26) • تدريبات حل المسألة، ص (28)	• تدريبات حل المسألة، ص (28) • التدريبات الإثرائية، ص (29)	• تدريبات حل المسألة، ص (28) • التدريبات الإثرائية، ص (29)

اللوغاريتمات العشرية

مثال 1 يبيِّن كيفية استعمال الحاسبة لإيجاد قيمة اللوغاريتم العشري.

مثال 2 يبيِّن كيفية استعمال معكوس اللوغاريتم أو الصيغة الأسية لحل معادلات لوغاريتمية في التطبيقات الحياتية.

مثال 3 يبيِّن كيفية حل معادلات أسية باستعمال اللوغاريتمات العشرية.

مثال 4 يبيِّن كيفية حل متباينات أسية باستعمال اللوغاريتمات العشرية.

التقويم التكويني

استعمل تدريبات "تحقق من فهمك" بعد كل مثال؛ للتحقق من مدى فهم الطلاب للمفاهيم.

أمثلة إضافية

1. استعمل الآلة الحاسبة لإيجاد قيمة كل مما يأتي مقربًا إلى أقرب جزء من عشرة آلاف:

   a) $\log 6$ 0.7782 تقريبًا

   b) $\log 0.35$ -0.4559 تقريبًا

2. **محركات نفاثة:** عُد إلى المثال 2. يمكن أن تصل شدة صوت المحرك النفاث إلى ما يقارب 125 dB، فكم مرة تساوي شدة ذلك الصوت من شدة أدنى صوت تسمعه أذن الإنسان؟

   $10^{12.5}$ أو 3×10^{12} تقريبًا، أي 3 ترليونات تقريبًا.

3. حل المعادلة: $5^x = 62$.

   2.5643 تقريبًا

ترتبط اللوغاريتمات العشرية ارتباطًا وثيقًا بقوى العدد 10. تذكّر أن اللوغاريتم هو أس، فمثلًا في المعادلة $y = \log x$، y هو الأس الذي يرفع إليه العدد 10 للحصول على قيمة x.

$$\log x = y \quad \longleftrightarrow \quad 10^y = x$$
$$\log 1 = 0 \quad \longleftrightarrow \quad 10^0 = 1$$
$$\log 10 = 1 \quad \longleftrightarrow \quad 10^1 = 10$$
$$\log 10^m = m \quad \longleftrightarrow \quad 10^m = 10^m$$

تستعمل اللوغاريتمات العشرية لقياس ارتفاع الصوت.

الربط مع الحياة

الديسبل (dB) هو وحدة قياس ارتفاع الصوت، على سبيل المثال: 90–100dB تعادل ارتفاع صوت الرعد، 140dB تعادل ارتفاع صوت إطلاق صاروخ إلى الفضاء.

مثال 2 من واقع الحياة — حل معادلات لوغاريتمية

شدة الصوت: يقاس ارتفاع الصوت L بالديسبل، ويُعطى بالقانون $L = 10 \log \frac{I}{m}$، حيث I شدة الصوت، m أدنى حدًّا من شدة الصوت تسمعها أذن الإنسان. إذا سُمع صوت ما ارتفاعه 66.6 dB تقريبًا. فكم مرة تساوي شدة هذا الصوت شدة أدنى صوت تسمعه أذن الإنسان إذا كانت $m = 1$؟

$L = 10 \log \frac{I}{m}$	المعادلة الأصلية
$66.6 = 10 \log \frac{I}{1}$	$L = 66.6,\ m = 1$
$6.66 = \log I$	اقسم كل طرف على 10 ثم التبسيط
$I = 10^{6.66}$	الصورة الأسية
$I \approx 4570882$	استعمل الحاسبة

شدة هذا الصوت تساوي 4570000 مرة تقريبًا من شدة أدنى صوت تسمعه أذن الإنسان.

تحقق من فهمك

2) هزات أرضية: ترتبط كمية الطاقة E مقيسة بوحدة الإيرج التي تطلقها الأرض مع قوة الهزة الأرضية على مقياس ريختر M بالمعادلة $\log E = 11.8 + 1.5M$. استعمل المعادلة لتجد كمية الطاقة التي تطلقها الأرض عند هزة أرضية بقوة 9 درجات على مقياس ريختر. 2×10^{25} إيرج تقريبًا

إرشادات للدراسة

وحدة الجول: تذكر أن الجول هو وحدة قياس الطاقة، وكذلك الإيرج، حيث 1 إيرج $= 4^{-7}$ جول

إذا كان من الصعب كتابة طرفي المعادلة الأسّية بدلالة الأساس نفسه، فإنه يمكنك حلها بأخذ اللوغاريتم العشري لكلا الطرفين.

مثال 3 — حل معادلات أسّية باستعمال اللوغاريتم العشري

حُلّ المعادلة $4^x = 19$ وقرّب الناتج إلى أقرب جزء من عشرة آلاف.

$4^x = 19$	المعادلة الأصلية
$\log 4^x = \log 19$	خاصية المساواة للدوال اللوغاريتمية
$x \log 4 = \log 19$	خاصية لوغاريتم القوة
$x = \frac{\log 19}{\log 4}$	اقسم كلا الطرفين على $\log 4$
$x \approx 2.1240$	استعمل الحاسبة

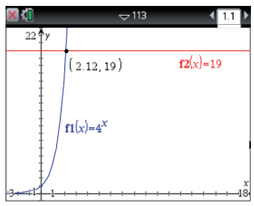
الحل هو 2.1240 تقريبًا.

الدرس 6-2 اللوغاريتمات العشرية 119

تحقق: يمكنك التحقق من الإجابة بيانيًّا باستعمال ميزة **نقاط التقاطع** في الحاسبة البيانية TI–nspire.

مثّل المعادلة $f1(x) = 4^x$ والمستقيم $f2(x) = 19$ بيانيًّا على الشاشة نفسها. ثم أوجد نقطة تقاطع التمثيلين البيانيين بالضغط على مفتاح menu، ثم اختر 6: تحليل الرسم البياني واختر منها 4: نقاط التقاطع، ثم اضغط في أي نقطة على الشاشة، وحرّك المؤشر مرورًا بنقطة التقاطع، سيظهر الزوج المرتب (2.12, 19).

الإحداثي x لنقطة التقاطع قريب من الإجابة التي تم إيجادها جبريًّا. ✓



تحقق من فهمك

3A $3^x = 15$ **2.4650 تقريبًا**

3B $6^x = 42$ **2.0860 تقريبًا**

يمكنك استعمال استراتيجيات حل المعادلات الأسّية لحل متباينات أسّية.

مثال 4 **حل متباينات أسّية باستعمال اللوغاريتم العشري**

حُلَّ المتباينة $3^{5y} < 7^{y-2}$، وقرّب الناتج إلى أقرب جزء من عشرة آلاف.

$3^{5y} < 7^{y-2}$	المتباينة الأصلية
$\log 3^{5y} < \log 7^{y-2}$	خاصية التباين للدوال اللوغاريتمية
$5y \log 3 < (y-2) \log 7$	خاصية لوغاريتم القوة
$5y \log 3 < y \log 7 - 2 \log 7$	خاصية التوزيع
$5y \log 3 - y \log 7 < -2 \log 7$	اطرح $y \log 7$ من كلا الطرفين
$y(5 \log 3 - \log 7) < -2 \log 7$	خاصية التوزيع
$1.5405y < -2 \log 7$	$5 \log 3 - \log 7 = 1.5405$
$y < \frac{-2 \log 7}{5 \log 3 - \log 7}$	اقسم كلا الطرفين على 1.5405
$\{y \mid y < -1.0972, y \in R\}$	استعمل الحاسبة

التحقق: اختبر $y = -2$

$3^{5y} < 7^{y-2}$	المتباينة الأصلية
$3^{5(-2)} \stackrel{?}{<} 7^{(-2)-2}$	$y = -2$
$3^{-10} \stackrel{?}{<} 7^{-4}$	بسّط
$\frac{1}{59049} < \frac{1}{2401}$ ✓	خاصية الأس السالب

إرشادات للدراسة

حل المتباينات

تذكّر أن تعكس اتجاه رمز التباين عند ضرب كلا طرفي المتباينة في عدد سالب أو قسمتهما عليه. وبما أن $5 \log 3 - \log 7 > 0$ فلا يجب عكس اتجاه رمز التباين.

تحقق من فهمك

4A $3^{2x} \geq 6^{x+1}$ $\{x \mid x \geq 4.4190\}$

4B $4^y < 5^{2y+1}$ $\{y \mid y > -0.8782\}$

المحتوى الرياضي

اللوغاريتم العشري تُسمّى لوغاريتمات الأساس 10 باللوغاريتمات العشرية. فعندما لا يكتب أساس اللوغاريتم فالمقصود هو الأساس 10، ويمكنك إيجاد قيمة عبارة لوغاريتمية لأي أساس باستعمال صيغة تغيير الأساس، وذلك بتحويله إلى تعبير يحتوي لوغاريتمات عشرية.

مثال إضافي

4 حل المتباينة $3^{7x} > 2^{5x-3}$، وقرّب الناتج إلى أقرب جزء من عشرة آلاف.

$\{x \mid x > -0.4922\}$

إرشادات للمعلم الجديد

تبرير عند مناقشة الطلاب في صيغة تغيير الأساس، أشر إلى أنه لا يشترط تغيير الأساس إلى الأساس 10، ولكنه الأساس الأكثر شيوعًا.

التعليم باستعمال التقنيات

السبورة التفاعلية اعرض على السبورة القالب: $\log_{\square} \square = \frac{\log_{\square} \square}{\log_{\square} \square}$، وعوّض قيمًا في اللوغاريتم إلى يسار المعادلة؛ لتوضيح صيغة تغيير الأساس، ويمكن عمل هذا أيضًا مع خصائص الضرب والقسمة والقوة.

تنويع التعليم

ضمن فوق

المتعلمون المنطقيون: ذكّر الطلاب بأن معادلة مثل $4^x = 19$، والتي وردت في المثال **3** يمكن إعادة كتابتها على الصورة اللوغاريتمية $x = \log_4 19$، ومع أنه لا يمكن إيجاد قيمة هذا اللوغاريتم بشكل مباشر، إلا أنه يمكن استعمال صيغة تغيير الأساس للحصول على قيمة x وتساوي 2.1240 تقريبًا.

صيغة تغيير الأساس: يمكنك استعمال **صيغة تغيير الأساس** لكتابة عبارات لوغاريتمية مكافئة لأخرى بأساس مختلف.

مفهوم أساسي — صيغة تغيير الأساس

الرموز: لأي أعداد موجبة n, b, a، حيث $a \neq 1$ و $b \neq 1$،

$$\log_a n = \frac{\log_b n}{\log_b a}$$

$\log_b n$ ← لوغارتيم العدد الأصلي للأساس b

$\log_b a$ ← لوغارتيم الأساس القديم للأساس b

مثال:

$$\log_3 11 = \frac{\log_5 11}{\log_5 3}$$

لإثبات صيغة تغيير الأساس، افرض أن $\log_a n = x$.

$a^x = n$	تعريف اللوغاريتم
$\log_b a^x = \log_b n$	خاصية المساواة للدوال اللوغاريتمية
$x \log_b a = \log_b n$	خاصية لوغاريتم القوة
$x = \frac{\log_b n}{\log_b a}$	اقسم كلا الطرفين على $\log_b a$
$\log_a n = \frac{\log_b n}{\log_b a}$	$x = \log_a n$

يمكنك استعمال صيغة تغيير الأساس لإيجاد قيمة عبارة لوغاريتمية تحتوي لوغاريتمات مختلفة الأساس، وذلك بتحويل جميع اللوغاريتمات إلى لوغاريتمات عشرية.

مثال 5 — استعمال صيغة تغيير الأساس

اكتب $\log_3 20$ بدلالة اللوغاريتم العشري، ثم أوجد قيمته مقربًا إلى أقرب جزء من عشرة آلاف.

$$\log_3 20 = \frac{\log_{10} 20}{\log_{10} 3}$$ صيغة تغيير الاساس

$$\approx 2.7268$$ استعمل الحاسبة

تحقق من فهمك

5) اكتب $\log_6 8$ بدلالة اللوغاريتم العشري، ثم أوجد قيمته مقربًا إلى أقرب جزء من عشرة آلاف.

5) $\frac{\log_{10} 8}{\log_{10} 6} \approx 1.1606$

تاريخ الرياضيات

الخوارزمي

هو أبو عبدالله محمد بن موسى الخوارزمي (848م–780م) لُقّب بأبي الجبر، وهو عالم عربي، أسس علم الجبر ووضع أسسه وابتكر حساب اللوغاريتمات.

صيغة تغيير الأساس

المثالان 5 , 4 يبيِّنان كيفية تحويل العبارات اللوغاريتمية إلى عبارات لوغاريتمية عشرية باستعمال صيغة تغيير الأساس.

مثال إضافي

5 اكتب $\log_5 140$ باستعمال اللوغاريتم العشري، ثم احسب قيمته مقربة إلى أقرب جزء من عشرة آلاف.

$\log_5 140 = \frac{\log_{10} 140}{\log_{10} 5} \approx 3.0704$

6 **أحياء:** يعرّف الزمن اللازم لأحد أنواع الحيوانات ليصبح عدد تجمعه مثلي عدده الأصلي فترة حياة الجيل، ويعطى بالصيغة $G = \frac{t}{2.5 \log_b d}$، حيث b العدد الأصلي، d العدد النهائي، t الزمن اللازم للتكاثر، و G فترة حياة الجيل. إذا كانت فترة حياة الجيل لهذا النوع 6 سنوات، فما زمن التكاثر t اللازم لـ 5 أفراد ليصبح عددهم 3125؟ 75 سنة

3 التدريب

التقويم التكويني

استعمل الأسئلة **1-32** للتأكد من فهم الطلاب.

ثم استعمل الجدول أسفل هذه الصفحة؛ لتعيين الواجبات المنزلية للطلبة بحسب مستوياتهم.

مثال 6 استعمال صيغة تغيير الأساس

حواسيب: البرامج الحاسوبية عبارة عن مجموعة من التعليمات تسمى خوارزميات، ولتنفيذ مهمة في برنامج حاسوبي يجب تحليل ترميز الخوارزمية، ويعطى الزمن اللازم بالثواني R لتحليل خوارزمية مكونة من n خطوة بالصيغة $R = \log_2 n$. حدد الزمن اللازم لتحليل خوارزمية مكونة من **240** خطوة.

$R = \log_2 n$ المعادلة الأصلية

$= \log_2 240$ $n = 240$

$= \frac{\log 240}{\log 2}$ صيغة تغيير الأساس

≈ 7.9 بسّط

الزمن اللازم لتحليل خوارزمية مكونة من 240 خطوةيساوي 7.9 ثوانٍ تقريبًا.

تحقق من فهمك

6) حدد الزمن اللازم لتحليل خوارزمية مكونة من 160خطوة. **7.32**

تدرب وحل المسائل

استعمل الحاسبة لإيجاد قيمة كل مما يأتي مقربًا إلى أقرب جزء من عشرة آلاف: (مثال 1)

1) $\log 5$ **0.6990** **2)** $\log 21$ **1.3222** **3)** $\log 0.4$ **−0.3979**

4) $\log 3$ **0.4771** **5)** $\log 11$ **1.0414** **6)** $\log 3.2$ **0.5051**

7) $\log 8.2$ **0.9138** **8)** $\log 0.9$ **−0.0458** **9)** $\log 0.04$ **−1.3979**

10) علوم: ترتبط كمية الطاقة E المقيسة بوحدة الإيرج التي تطلقها الأرض مع قوة الهزة على مقياس ريختر M بالمعادلة $\log E = 11.8 + 1.5M$. استعمل المعادلة لإيجاد كمية الطاقة التي تطلقها الأرض عند هزة أرضية بقوة 8.5 درجات على مقياس ريختر. (مثال 2) **3.55×10^{24} إيرج**

11) صوت: أغلق حسن نوافذ سيارته فانخفض ارتفاع الصوت من 85 dB إلى 73 dB، إذا علمت أن ارتفاع الصوت L بالديسبل يُعطى بالعلاقة $L = 10 \log \frac{I}{m}$. حيث I شدة الصوت، m أدنى حد من شدة الصوت تسمعها أذن الإنسان. (مثال 2)

a) فكم مرّة من شدة أدنى صوت تسمعه أذن الإنسان تساوي شدة الصوت قبل إغلاق نوافذ السيارة إذا كانت $m = 1$؟ **316227766 مرة تقريبًا**

b) كم مرةً من شدة أدنى صوت تسمعه أذن الإنسان تساوي شدة الصوت بعد إغلاق نوافذ السيارة؟ أوجد نسبة انخفاض شدة الصوت بعد إغلاق النوافذ. **19952623 مرة تقريبًا ؛ 93.7% تقريبًا**

حُلّ كل معادلة مما يأتي، وقرّب الناتج إلى أقرب جزء من عشرة آلاف: (مثال 3)

12) $6^x = 40$ **2.0588**

13) $2.1^{a+2} = 8.25$ **0.8442**

14) $7^{x^2} = 20.42$ **±1.2451**

15) $11^{b-3} = 5^b$ **9.1237**

16) $8^x = 40$ **1.7740**

17) $9^{b-1} = 7^b$ **8.7429**

18) $15^{x^2} = 110$ **±1.3175**

19) $2^y = \sqrt{3^{y-1}}$ **−3.8188**

تنويع الواجبات المنزلية

المستوى	الأسئلة
دون دون المتوسط	1-32 ، 36 ، 38 ، 39، 42-48
ضمن ضمن المتوسط	1-33 فردي ، 35 ، 36 ، 38 ، 39 ، 40-48
فوق فوق المتوسط	33-48

حل كلًّا مما يأتي، وقرِّب الناتج إلى أقرب جزء من عشرة آلاف:
(مثال 4)

20) $5^{4n} > 33$ $\{n \mid n > 0.5431\}$ **21)** $6^{p-1} \le 4^p$ $\{p \mid p \le 4.4190\}$

22) $4^y \le 3^{y-1}$ $\{y \mid y \ge -3.8188\}$ **23)** $5^{p-2} \ge 2^p$ $\{p \mid p \ge 3.5129\}$

24) $2^{4x} \le 20$ $\{x \mid x \le 1.0805\}$ **25)** $6^{3n} > 36$ $\{n \mid n > 0.6667\}$

اكتب كلًّا مما يأتي بدلالة اللوغاريتم العشري، ثم أوجد قيمته مقربًا إلى أقرب جزء من عشرة آلاف: (مثال 5) **26-31)** انظر الهامش.

26) $\log_3 7$ **27)** $\log_2 16$

28) $\log_4 9$ **29)** $\log_3 21$

30) $\log_5 (2.7)^2$ **31)** $\log_7 \sqrt{5}$

32) شحن: اشترت إحدى شركات خدمة الشحن سيارة شحن جديدة بسعر 168000 ريال. افترض أن $t = \log_{(1-r)} \frac{V}{P}$ ، حيث t الزمن بالسنوات الذي مر منذ الشراء، P سعر الشراء، V السعر الحالي، r المعدل السنوي لانخفاض السعر. (مثال 6) **سنتان**

a) إذا كان السعر الحالي للشاحنة 120000 ريال، وانخفض سعرها بمعدل 15% سنويًّا، فما الزمن الذي مر منذ شرائها لأقرب سنة؟

b) إذا كان السعر الحالي للشاحنة 102000 ريال، وانخفض سعرها بمعدل 10% سنويًّا، فما الزمن الذي مر منذ شرائها لأقرب سنة؟
5 سنوات

33) علوم البيئة: يقوم مهندس بيئي بفحص مياه الشرب في أحد الآبار الجوفية؛ للتأكد من عدم تلوثها بمادة الزرنيخ، والتي يُقدر معدلها الطبيعي في ماء الشرب بـ 0.025 ppm (حيث ppm تعني جزءًا من المليون)، كما أن الرقم الهيدروجيني pH لمادة الزرنيخ يجب أن يقل عن 9.5، حتى يكون الماء صالحًا للشرب.

a) إذا كان تركيز أيون الهيدروجين في الماء 1.25×10^{-11}، فهل يعني ذلك ارتفاع الرقم الهيدروجيني لمادة الزرنيخ علمًا بأن قانون تركيز أيون الهيدروجين هو $\text{pH} = -\log [H^+]$ ؟
نعم؛ لأن 10.9 > 9.5

b) إذا وجد المهندس 1mg من الزرنيخ في عينة حجمها 3L من ماء بئر، فهل هذا الماء صالح للشرب؟ **لا**
(إرشاد: 1 kg من الماء يعادل 1L تقريبًا. $1 \text{ ppm} = 1 \text{ mg/kg}$)

c) ما تركيز أيون الهيدروجين الذي يقابل الرقم الهيدروجيني $\text{pH} = 9.5$ والذي يجعل الماء غير صالح للشرب؟
3.16×10^{-10}

34) هزات أرضية: يمكن تحديد قوة الهزة الأرضية على مقياس ريختر M باستعمال المعادلة $M = \frac{2}{3} \log \frac{E}{10^{4.4}}$، حيث E كمية الطاقة الزلزالية التي تطلقها الأرض عند حدوث الهزة الأرضية مقيسة بوحدة الجول.

a) استعمل خصائص اللوغاريتمات لتكتب المعادلة بالصورة المطولة. $M = \frac{2}{3}(\log E - 4.4)$

b) أطلقت الأرض طاقة زلزالية مقدارها 7.94×10^{11} جول عند حدوث هزة أرضية. كم قوة الهزة الأرضية على مقياس ريختر؟ **5**

c) أطلقت الأرض طاقة زلزالية مقدارها 4.47×10^{12} جول عند حدوث زلزال ألوم رول في كاليفورنيا عام 2007م. كما أطلقت الأرض طاقة زلزالية مقدارها 1.58×10^{18} جول عند حدوث زلزال انكورج في ألاسكا عام 1964. كم مرّة تفوق قوة زلزال أنكورج قوة زلزال ألوم روك على مقياس ريختر؟ **1.67**

d) بصورة عامة، لا يمكن الشعور بالهزة الأرضية إلاّ إذا بلغت قوتها 3 درجات على مقياس ريختر أو أكثر. ما الطاقة الزلزالية بالجول التي تطلقها الأرض عند حدوث هزة أرضية لها هذه القوة على مقياس ريختر؟ 7.94×10^8 جول

35) تمثيلات متعددة: ستحل في هذه المسألة المعادلة الأسية $4^x = 13$.

a) جدوليًّا: أدخل الدالة $y = 4^x$ في الحاسبة البيانية وأنشئ جدول قيم للدالة، وذلك بتغيير قيم x بمقدار 0.1 في كل مرة. وابحث عن قيمتين تقع بينهما قيمة x المقابلة للقيمة $y = 13$ في الجدول. **الحل يقع بين 1.8 و 1.9**

b) بيانيًّا: مثّل بيانيًّا المعادلة $y = 4^x$ والمستقيم $y = 13$ على الشاشة نفسها، واستعمل أمر intersect لإيجاد نقطة تقاطع التمثيلين البيانيين. **(1.85, 13)**

c) عدديًّا: حُلّ المعادلة جبريًّا. هل طريقتا الحل تعطيان النتيجة نفسها؟ فسّر إجابتك. **انظر الهامش.**

تمثيلات متعددة يستعمل الطلاب في السؤال 35 الآلة الحاسبة البيانية والجبر لحل معادلة أسية بطريقتين، بيانيًّا وجبريًّا ويقارنون النتائج.

4 التقويم

تعلم سابق اطلب إلى الطلاب كتابة كيف ساعدتهم معرفة خصائص اللوغاريتمات على حل معادلات أسية.

التقويم التكويني

تحقق من مدى استيعاب الطلاب للمفاهيم الواردة في الدرس 6-2 بإعطائهم:

الاختبار القصير 4، ص (31)

إجابات:

26) $\frac{\log 7}{\log 3} \approx 1.7712$

27) $\frac{\log 16}{\log 2} = 4$

28) $\frac{\log 9}{\log 4} \approx 1.5850$

29) $\frac{\log 21}{\log 3} \approx 2.7712$

30) $\frac{\log 7.29}{\log 5} \approx 1.2343$

31) $\frac{\log \sqrt{5}}{\log 7} \approx 0.4135$

35c) نعم جميع الطرق تعطي النتيجة نفسها 1.85؛ لأنك بدأت من المعادلة نفسها وإن لم يكن كذلك فقد ارتكبت بعض الأخطاء.

تنويع التعليم

ضمن فوق

توسّع: ذكّر الطلاب بأنه يمكن استعمال القانون $A = P\left(1 + \frac{r}{n}\right)^{nt}$ لإيجاد المبلغ الكلي من استثمار مبلغ ما بربح مركب. واطلب إليهم استعمال اللوغاريتمات لإيجاد عدد السنوات التي يتطلبها استثمار مبلغ 50000 ريال ليصبح 80000 ريال إذا كان معدل نسبة الربح 5%، ويتم إضافته إلى رأس المال شهريًّا. 9.42 سنوات تقريبًا

تنبيه!

اكتشف الخطأ ذكّر الطلاب في السؤال **36** بأن خاصية لوغاريتم القوة: $\log_b m^p = p \log_b m$ ، p تمثل أسًّا لِـ m.

إجابات :

36) بلال؛ لأن خالد نسي أن يضرب في العدد 3 عند أخذ اللوغاريتم لكل طرف.

38) إجابة ممكنة:
$\log_b x = \frac{\log x}{\log b} = \frac{1}{\log b} \log x$ ؛ لذا اللوغاريتم ذو الأساس b هو حاصل ضرب ثابت في اللوغاريتم العشري المناظر له. عندما $b>1$، فإن منحنى f يتمدد أو يتقلص رأسيًّا. ومثال ذلك إذا كان $b=2$ فإن المنحنى يتمدد ولكن عندما $b=25$، فإن المنحنى يتقلص. وعندما $b<1$، فبالإضافة إلى التمدد أو التقلص الرأسي فإن المنحنى منعكس حول المحور x.

40) اللوغاريتمات: هي أسس. ولحل معادلات لوغاريتمية: اكتب كلًّا من الطرفين بالصورة الأسية، وحلها باستعمال خاصية المعكوس للأسس واللوغاريتمات. ولحل معادلات أسية: استعمل خاصية المساواة للدوال اللوغاريتمية وخاصية القوة في اللوغاريتمات.

مسائل مهارات التفكير العليا

36) **اكتشف الخطأ:** حَلَّ كل من بلال وخالد المعادلة الأسية $4^{3p} = 10$. أيهما كانت إجابته صحيحة؟ فسِّر إجابتك. انظر الهامش.

بلال

$4^{3p} = 10$

$\log 4^{3p} = \log 10$

$3p \log 4 = \log 10$

$p = \frac{\log 10}{3 \log 4}$

خالد

$4^{3p} = 10$

$\log 4^{3p} = \log 10$

$p \log 4 = \log 10$

$p = \frac{\log 10}{\log 4}$

37) **تحدَّ:** حل المعادلة $\log_{\sqrt{a}} 3 = \log_a x$ لتجد قيمة x . وفسّر كل خطوة. انظر ملحق الإجابات.

38) **اكتب:** منحنى $g(x) = \log_b x$ هو في حقيقة الأمر تحويل هندسي لمنحنى $f(x) = \log x$. استعمل صيغة تغيير الأساس لتجد التحويل الهندسي الذي يربط بين هذين المنحنيين. ثم اشرح تأثير اختلاف قيم b على منحنى اللوغاريتم العشري . انظر الهامش.

39) **برهان:** أوجد قيمة كل من $\log_3 27$ و $\log_{27} 3$. واكتب تخمينًا حول العلاقة بين $\log_a b, \log_b a$ ، وبرهن تخمينك. انظر ملحق الإجابات.

40) **اكتب:** فسِّر العلاقة بين الأسس واللوغاريتمات، وضمّن تفسيرك أمثلة شبيهة بتلك التي توضح كيفية حل معادلات لوغاريتمية باستعمال الأسس، وحل معادلات أسية باستعمال اللوغاريتمات. انظر الهامش.

مراجعة تراكمية

حُلّ كل معادلة مما يأتي، وتحقق من صحة حلك: (الدرس 2-5)

41) $\log_5 7 + \frac{1}{2} \log_5 4 = \log_5 x$ **14**

42) $2 \log_2 x - \log_2 (x+3) = 2$ **6**

43) $\log_6 48 - \log_6 \frac{16}{5} + \log_6 5 = \log_6 5x$ **15**

حُلّ كل متباينة مما يأتي، وتحقق من صحة حلك: (الدرس 2-5)

44) $\log_8 (3y-1) < \log_8 (y+5)$ $\frac{1}{3} < y < 3$

45) $\log_9 (9x+4) \le \log_9 (11x-12)$ $\{x \mid x \ge 8\}$

46) افترض أن هناك 3500 طائر من نوع مهدد بالانقراض في العالم، وأن عددها يتناقص بنسبة 5% في السنة.
تستعمل المعادلة اللوغاريتمية $t = \log_{0.95} \frac{p}{3500}$ لتقدير عدد السنوات t ليصبح عدد هذا النوع من الطيور p طائرًا. بعد كم سنة يصبح عدد الطيور من هذا النوع 3000 طائر؟ (الدرس 2-5) **C**

A سنتان

B 5 سنوات

C 3 سنوات

D 8 سنوات

تدريب على اختبار

47) أي العبارات الآتية تمثل $f[g(x)]$ إذا كان $f(x) = x^2 + 4x + 3, g(x) = x - 5$؟ **B**

A $x^2 + 4x - 2$

B $x^2 - 6x + 8$

C $x^2 - 9x + 23$

D $x^2 - 14x + 6$

48) أي مما يأتي يمثِّل حلًّا للمعادلة $27 \left(\frac{3}{5}\right)^{x+1} = 125$؟ **F**

A -4

B -2

C 2

D 4

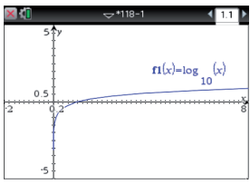
124 الفصل 2 العلاقات والدوال الأسية واللوغاريتمية

حل المعادلات والمتباينات اللوغاريتمية
Solving Logarithmic Equations and Inqualites

لقد قمت بحل معادلات لوغاريتمية جبريًّا، ويمكنك أيضًا حلها بيانيًّا أو باستعمال جدول.

فالحاسبة البيانية TI–nspire تحتوي على $y = \log_{10} x$ باعتباره أمرًا أساسيًّا.

اضغط على المفاتيح: enter) x log on لعرض التمثيل البياني للدالة $y = \log_{10} x$، ويمكن أيضًا تمثيل الدوال اللوغارتمية بأساسات لا تساوي عشرة من دون استعمال صيغة تغيير الأساس، وذلك باستعمال أوامر مباشرة لكتابة الدالة اللوغاريتمية.



نشاط 1

استعمل الحاسبة البيانية TI–nspire؛ لحل المعادلة: $\log_2 (6x - 8) = \log_3 (20x + 1)$.

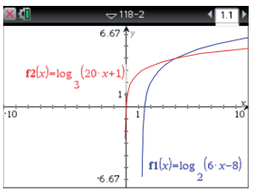
الخطوة 1: تمثيل طرفَي المعادلة بيانيًّا.

مثّل كل طرف بيانيًّا على أنه دالة مستقلة.

أدخل $\log_2 (6x - 8)$ لتكون f1، و $\log_3 (20x + 1)$ لتكون f2.

ثم مثّل المعادلتين بيانيًّا، وذلك بالضغط على المفاتيح:

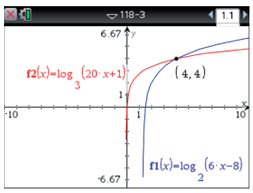
log on ctrl 10^x $\log_2 (6x - 8)$ enter tab ctrl 10^x $\log_3 (20x + 1)$ enter



الخطوة 2: استعمال ميزة **نقاط التقاطع**

استعمل ميزة 4: نقاط التقاطع في قائمة 6: تحليل الرسم البياني، لتقدير إحداثيّ الزوج المرتب لنقطة تقاطع التمثيلين البيانيين.

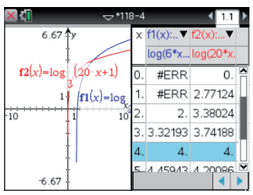
اضغط على مفتاح menu واختر 6: تحليل الرسم البياني واختر منها 4: نقاط التقاطع، ثم اضغط في أي نقطة على الشاشة وحرّك المؤشر مرورًا بنقطة التقاطع، سيظهر الزوج المرتب (4, 4)، وحيث إن الإحداثي x لنقطة التقاطع يساوي 4؛ إذن حل المعادلة يساوي 4



الخطوة 3: استعمل خاصية **الجدول** لتتحقق من الحلّ.

تحقق من صحة حلّك باستعمال خاصية **الجدول** وذلك بالضغط على مفتاح menu واختيار 7: الجدول ثم اختيار 1: اظهار الجدول في شاشة جانبية (Ctrl + T)

اختبر قيم الجدول لتجد قيمة x التي تتساوى عندها قيم y للتمثيلين البيانيين وهي $x = 4$، عند القيمة $x = 4$، تكون قيمتا y للدالتين متساويتين؛ لذا فإن حل المعادلة يساوي 4.



تمارين:

استعمل الحاسبة البيانية TI–nspire لحل كل معادلة فيما يأتي، ثم تحقق من صحة حلك:

1) $\log_2 (3x + 2) = \log_3 (12x + 3)$ — 0, 2

2) $\log_6 (7x + 1) = \log_4 (4x - 4)$ — 5

3) $\log_2 3x = \log_3 (2x + 2)$ — 0.7 تقريبًا

4) $\log_{10} (1 - x) = \log_5 (2x + 5)$ — −1.5 تقريبًا

5) $\log_4 (3x + 7) = \log_3 (5x - 6)$ — 3

6) $\log_3 (3x - 5) = \log_3 (x + 7)$ — 6

7) $\log_5 (2x + 1) = \log_4 (3x - 2)$ — 2

8) $\log_2 2x = \log_4 (x + 3)$ — 1

1 التركيز

الهدف استعمال الحاسبة البيانية TI–nspire لحل معادلات ومتباينات لوغاريتمية.

المواد اللازمة

- الحاسبة البيانية TI–nspire .

إرشادات التدريس

أشر إلى أنه باستعمال مفتاح **log** يمكن إيجاد اللوغاريتم للأعداد أو العبارات. وذكّر الطلاب بأنه من المفيد وضع العبارات بين أقواس.

2 التدريس

العمل في مجموعات متعاونة

وزّع الطلاب في مجموعات ثنائية أو ثلاثية متفاوتة القدرات، ثم اطلب إلى كل مجموعة إكمال النشاط، وحل التمارين 1-4.

نشاط 1

- تأكد أن الطلاب قادرون على استعمال الجداول في الحاسبة لإيجاد قيمة x التي تكون عندها قيمتا y متساويتين.
- اطلب إلى الطلاب تعويض الحل في المعادلة الأصلية للتحقق من صحته.

تدريب اطلب إلى الطلاب حل التمارين 5-8.

نشاط 2

- تأكد من فهم الطلاب للحاجات لكتابة المتباينة كنظام من المتباينات.
- تأكد أن الطلاب قادرون على استعمال الجداول في الحاسبة لإيجاد قيمة x التي تكون عندها قيم y غير معرّفة، وكذلك قيم x التي عندها قيمتا y متساويتان.

تدريب اطلب إلى الطلاب حل التمارين 13-16.

3 التقويم

التقويم التكويني

استعمل السؤالين 4, 10 لتقويم مدى إتقان الطلاب لاستعمال الآلة الحاسبة البيانية لحل معادلات ومتباينات لوغاريتمية.

وبطريقة مشابهة، يمكنك استعمال الحاسبة البيانيّة TI–nspire لحل متباينات لوغاريتمية

نشاط 2

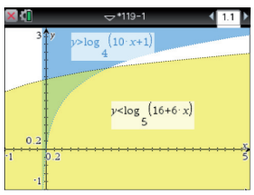
استعمل الحاسبة البيانية TI–nspire؛ لحل المتباينة اللوغاريتمية: $\log_4(10x+1) < \log_5(16+6x)$.

الخطوة 1: تمثيل المتباينات المناظرة

أعد كتابة المسألة على صورة نظام من المتباينات.

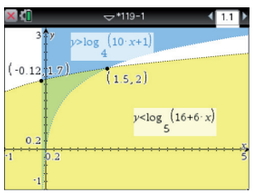
المتباينة الأولى هي $y < \log_4(10x+1)$، أو $y > \log_4(10x+1)$،

والمتباينة الثانية هي $y < \log_5(16+6x)$، ثم مثّلها بالضغط على المفاتيح:



on del > ctrl 10^x $\log_4(10x-1)$ enter tab del < $\log_5(16+6x)$ enter

الخطوة 2: تحديد مجموعة الحل

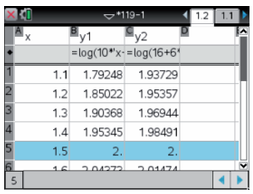


الحد الأيسر لمجموعة الحل هو عندما تكون المتباينة الأولى غير معروفة، وهي كذلك عندما $10x+1 \le 0$.

$$10x+1 \le 0$$
$$10x \le -1$$
$$x \le -\frac{1}{10}$$

استعمل ميزة **نقاط التقاطع** لإيجاد الحد الأيمن، وذلك بالضغط على مفتاح menu واختيار 6:تحليل الرسم البياني ومنها 4:نقاط التقاطع ثم اضغط في أي نقطة على الشاشة وحرّك المؤشر مرورًا بنقطة التقاطع، سيظهر الزوج المرتب (1.5, 2)، ويمكنك استنتاج أن مجموعة الحل هي $\{x \mid -0.1 < x < 1.5\}$.

الخطوة 3: استعمال ميزة تطبيق القوائم وجداول البيانات للتحقق من الحل.



ابدأ الجدول عند -0.1، واستعرض قيم x بزيادة 0.1 كل مرة، وحرك المؤشر باحثًا في الجدول.

اضغط على المفاتيح: on ، واكتب $y1 = \log_4(10x+1)$ في العمود الثاني، $y2 = \log_5(16+6x)$ في العمود الثالث، واختر مرجع المتغير في كل مرّة، سترى أن قيم الجدول تؤكد أن مجموعة حل المتباينة هي: $\{x \mid -0.1 < x < 1.5\}$.

تمارين:

استعمل الحاسبة البيانيّة TI-nspire؛ لحل كل متباينة مما يأتي، ثم تحقق من صحة حلّك:

9) $\log_7 x < -1$ $\{x \mid 0 < x < \frac{1}{7}\}$

10) $\log_5(12x+5) \le \log_5(8x+9)$ $\{x \mid \frac{-5}{12} < x \le 1\}$

11) $\log_3(7x-6) < \log_3(4x+9)$ $\{x \mid \frac{6}{7} < x < 5\}$

12) $\log_5(3-2x) \ge \log_5(4x+1)$ $\{x \mid \frac{-1}{4} < x \le \frac{1}{3}\}$

13) $\log_4(9x+1) > \log_3(18x-1)$ $\{x \mid 0.06 < x < 0.17\}$

14) $\log_3(3x-5) \ge \log_3(x+7)$ $\{x \mid x \ge 6\}$

15) $\log_5(2x+1) < \log_4(3x-2)$ $\{x \mid x > 2\}$

16) $\log_2 2x \le \log_4(x+3)$ $\{x \mid 0 < x \le 1\}$

من المحسوس إلى المجرد

اطلب إلى الطلاب توضيح كيف تتغير مجموعة الحل في نشاط 2 إذا كانت المتباينة $\log_4(10x+1) > \log_5(10+6x)$

ملخص الفصل

المفاهيم الأساسية

الدوال الأسية (الدرسان 2-2 , 2-1)

- تكون الدوال الأسية على الصورة $y = ab^x$ ، حيث $a \neq 0, b > 0 , b \neq 1$.
- خاصية المساواة للدوال الأسية: إذا كان b عددًا موجبًا، حيث $b \neq 1$ ، فإن $b^x = b^y$ إذًا وفقط إذا كان $x = y$.
- خاصية التباين للدوال الأسية: إذا كان $b > 1$، فإن $b^x > b^y$ إذا وفقط إذا كان $x > y$.
- الدالة الأسية $f(x) = b^x, b > 1$ دالة نمو أسي.
- الدالة الأسية $f(x) = b^x, 0 < b < 1$ دالة اضمحلال أسي.

اللوغاريتمات والدوال اللوغاريتمية (الدرس 2-3)

- إذا كان $b > 0, b \neq 1, x > 0$ فإن الصورة الأسية للمعادلة اللوغاريتمية $y = \log_b x$ هي $b^y = x$ ، والصورة اللوغاريتمية للمعادلة الأسية $b^y = x$ هي $\log_b x = y$

خصائص اللوغاريتمات (الدرس 2-4)

- خاصية المساواة للدوال اللوغاريتمية: إذا كان b عددًا موجبًا، حيث $b \neq 1$ ، فإن $\log_b x = \log_b y$ إذا وفقط إذا كان $x = y$.
- الضرب والقسمة: إذا كانت x, y, b أعدادًا حقيقية موجبة، حيث $b \neq 1$ فإن:
$\log_b xy = \log_b x + \log_b y$ وَ
$\log_b \frac{x}{y} = \log_b x - \log_b y$
- لوغاريتم القوة: لأي عدد حقيقي m، وأي عددين موجبين x, b حيث $b \neq 1$ فإن: $\log_b x^m = m \log_b x$.
- صيغة تغيير الأساس: $\log_a n = \frac{\log_b n}{\log_b a}$
- خاصية التباين للدوال اللوغاريتمية: إذا كان $b > 1$، فإن $\log_b x > \log_b y$ إذا وفقط إذا كان $x > y$ وَ $\log_b x < \log_b y$ إذا وفقط إذا كان $x < y$

اللوغاريتم العشري (الدرس 2-6)

- اللوغاريتم العشري هو اللوغاريتم الذي أساسه 10 .

المفردات

الدالة الأسية ص 82
النمو الأسي ص 83
عامل النمو ص 83
الاضمحلال الأسي ص 84
عامل الاضمحلال ص 84
المعادلة الأسية ص 92
الربح المركب ص 93
المتباينة الأسية ص 94
اللوغاريتم ص 97
الدالة اللوغاريتمية ص 99
المعادلة اللوغاريتمية ص 112
المتباينة اللوغاريتمية ص 114
اللوغاريتم العشري ص 118
صيغة تغيير الأساس ص 121

اختبر مفرداتك

اختر المفردة المناسبة من القائمة أعلاه لإكمال كل جملة فيما يأتي:

1) الدالة التي على الصورة $f(x) = b^x$، حيث $b > 1$ تسمى دالة النمو الأسي .

2) في المعادلة $x = b^y$. المتغير y يسمى لوغاريتم x للأساس b .

3) يسمى اللوغاريتم ذو الأساس 10 اللوغاريتم العشري .

4) المعادلة الأسية هي معادلة يظهر فيها المتغير على صورة أس.

5) يمكنك باستعمال صيغة تغيير الأساس كتابة عبارات لوغاريتمية مكافئة للوغاريتم بأساس مختلف.

6) يُسمى الأساس $1 - r$ في الدالة الأسية $A(t) = a(1 - r)^t$ عامل الاضمحلال.

7) تُسمى الدالة $y = \log_b x$، حيث $b > 0, b \neq 1$ دالة لوغاريتمية

التقويم التكويني

المفردات

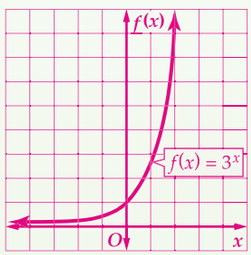
يشير رقم الصفحة بعد كل مفردة إلى الصفحة التي وردت فيها المفردة لأول مرة. فإذا واجه الطلاب صعوبة في حلّ الأسئلة 1–7 فنبّههم إلى أنه يمكنهم استعمال هذه الصفحات لتذكّر هذه المفردات.

التقويم الختامي

اختبار المفردات، ص (23) .

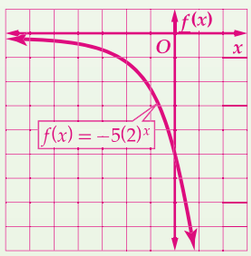
إجابات :

8)



المجال = جميع الأعداد الحقيقية
المدى = $\{f(x) \mid f(x) > 0\}$

9)



المجال = جميع الأعداد الحقيقية
المدى = $\{f(x) \mid f(x) < 0\}$

مراجعة الدروس

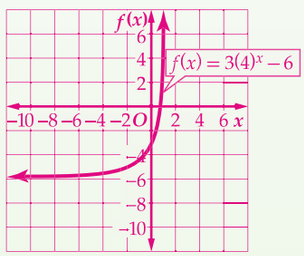
مراجعة إذا كانت الأمثلة المعطاة غير كافية لمراجعة المواضيع التي تناولتها الأسئلة، فذكّر الطلاب بمرجع الصفحات الذي يدلهم أين يراجعون تلك المواضيع في كتابهم المقرر.

نموذج التوقع

اطلب إلى الطلاب تعبئة نموذج التوقع للفصل 2 ص (27)، وناقشهم حول تغيّر إجاباتهم بعد إتمام دراسة الفصل عمّا كانت عليه عند بدايته.

إجابات :

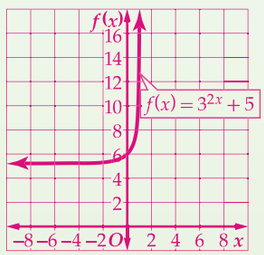
(10



المجال = مجموعة الأعداد الحقيقية

المدى = $\{f(x) \mid f(x) > -6\}$

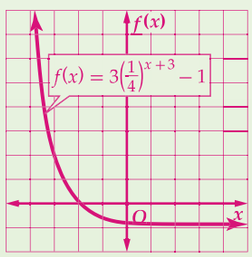
(11



المجال = مجموعة الأعداد الحقيقية

المدى = $\{f(x) \mid f(x) > 5\}$

(12



المجال = مجموعة الأعداد الحقيقية

مراجعة الدروس

2-1 الدوال الأسية (الصفحات 89 - 82)

مثّل كل دالة مما يأتي بيانيًا، وحدد مجالها ومداها: انظر الهامش.

8) $f(x) = 3^x$

9) $f(x) = -5(2)^x$

10) $f(x) = 3(4)^x - 6$

11) $f(x) = 3^{2x} + 5$

12) $f(x) = 3\left(\frac{1}{4}\right)^{x+3} - 1$

13) $f(x) = \frac{3}{5}\left(\frac{2}{3}\right)^{x-2} + 3$

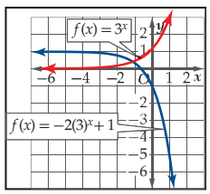
14) **سكان:** يبلغ عدد سكان مدينة ما 120000 نسمة، وقد بدأ العدد بالتناقص بمعدل 3% سنويًا. $f(t) = 120000(0.97)^t$

a) اكتب دالة تمثل عدد سكان المدينة بعد t سنة.

b) كم سيكون عدد السكان بعد 10 سنوات؟ **88491 تقريبًا**

مثال 1

مثّل الدالة $f(x) = -2(3)^x + 1$ بيانيًا، وحدد مجالها ومداها.



المجال هو مجموعة الأعداد الحقيقية.

المدى هو $\{f(x) \mid f(x) < 1\}$

2-2 حل المعادلات والمتباينات الأسية (الصفحات 96 - 92)

حُلّ كل معادلة أو متباينة مما يأتي:

15) $16^x = \frac{1}{64}$ **$-\frac{3}{2}$**

16) $3^{4x} = 9^{3x+7}$ **-7**

17) $64^{3n} = 8^{2n-3}$ **$-\frac{3}{4}$**

18) $8^{3-3y} = 256^{4y}$ **$\frac{9}{41}$**

19) $9^{x-2} > \left(\frac{1}{81}\right)^{x+2}$ **$x > -\frac{2}{3}$**

20) $27^{3x} \le 9^{2x-1}$ **$x \le -\frac{2}{5}$**

21) **بكتيريا:** بدأت عينة خلايا بكتيرية بـ 5000 خلية. وبعد 8 ساعات أصبح عددها 28000 خلية تقريبًا.

a) اكتب دالة أسية تمثل عدد الخلايا البكتيرية بعد x ساعة إذا استمر تغير عدد الخلايا بالمعدل نفسه مقربًا الناتج إلى أقرب ثلاث منازل عشرية. $y = 5000(1.240)^x$

b) ما عدد الخلايا البكتيرية المتوقعة بعد 32h؟ **4880496 تقريبًا**

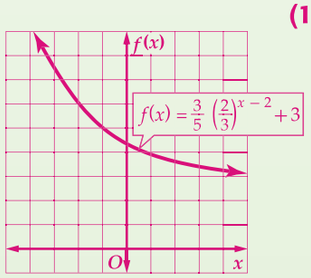
مثال 2

حُلّ المعادلة $4^{3x} = 32^{x-1}$.

$4^{3x} = 32^{x-1}$	المعادلة الأصلية
$(2^2)^{3x} = (2^5)^{x-1}$	أعد الكتابة لتوحيد الأساس
$2^{6x} = 2^{5x-5}$	بسّط
$6x = 5x - 5$	خاصية المساواة للأسس
$x = -5$	بسّط

الحل هو -5 .

(13 المدى = $\{f(x) \mid f(x) > -1\}$



المجال = مجموعة الأعداد الحقيقية

المدى = $\{f(x) \mid f(x) > 3\}$

مراجعة حل المسائل

إذا احتاج الطلاب إلى تدريبات إضافية على حل المسألة، فذكّرهم بخطوات حل المسألة وناقشهم فيها، وقدّم لهم مزيدًا من التدريبات على ورقة عمل.

2-3 اللوغاريتمات والدوال اللوغاريتمية (الصفحات 103 - 97)

22) اكتب $\log_2 \frac{1}{16} = -4$ على الصورة الأسية. $2^{-4} = \frac{1}{16}$

23) اكتب $10^2 = 100$ على الصورة اللوغاريتمية. $\log_{10} 100 = 2$

أوجد قيمة كل مما يأتي:

24) $\log_4 256$ 4 **25)** $\log_2 \frac{1}{8}$ -3

مثّل الدالتين الآتيتين بيانيًّا: **26-27)** انظر الهامش.

26) $f(x) = 2 \log_{10} x + 4$ **27)** $f(x) = \frac{1}{6} \log_{\frac{1}{3}} (x - 2)$

مثال 3

أوجد قيمة $\log_2 64$.

$\log_2 64 = y$	افرض أن العبارة تساوي y
$64 = 2^y$	تعريف اللوغاريتم
$2^6 = 2^y$	$64 = 2^6$
$6 = y$	خاصية المساواة للدوال الأسية

إذن $\log_2 64 = 6$.

2-4 خصائص اللوغاريتمات (الصفحات 111 - 105)

استعمل $\log_5 2 \approx 0.4307$, $\log_5 16 \approx 1.7227$ لتقريب قيمة كل مما يأتي:

28) $\log_5 8$ 1.292 **29)** $\log_5 64$ 2.5841

30) $\log_5 4$ 0.8614 **31)** $\log_5 \frac{1}{8}$ -1.292

32) $\log_5 \frac{1}{2}$ -0.4307

اكتب كل عبارة لوغاريتمية مما يأتي بالصورة المطولة:

33) $\log_3 2x^5 y^2 z^3$ **34)** $\log_5 ab^{-3} c^4 d^{-2}$

اكتب كل عبارة لوغاريتمية مما يأتي بالصورة المختصرة:

35) $3 \log_2 x^2 - \frac{1}{3} \log_2 (x - 4)$

36) $2 \log_2 (z - 1) - \log_2 (2z - 1)$

37) هزات أرضية: تقاس قوة الهزة الأرضية بمقياس لوغاريتمي يُسمى مقياس ريختر، وتعطى قوة الهزة M بالمعادلة $M = 1 + \log_{10} x$، حيث x شدة الهزة الأرضية. كم مرة تعادل شدةُ هزة أرضية سجّلت 10 درجات على مقياس ريختر شدةَ هزة أرضية أخرى سجّلت 7 درجات على المقياس نفسه؟ 1000 مرة

مثال 4

استعمل $\log_5 2 \approx 0.4307$, $\log_5 16 \approx 1.7227$ لتقريب قيمة $\log_5 32$.

$\log_5 32 = \log_5 (16 \times 2)$	$32 = 16 \times 2$
$= \log_5 16 + \log_5 2$	خاصية الضرب في اللوغاريتمات
$\approx 1.7227 + 0.4307$	استعمل الحاسبة
≈ 2.1534	بسّط

مثال 5

اكتب $\log_3 x^2 y^{-4} z$ بالصورة المطولة:

العبارة هي لوغاريتم حاصل ضرب x^2, y^{-4}, z

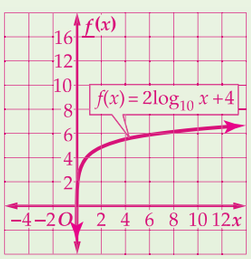
$\log_3 x^2 y^{-4} z$

$= \log_3 x^2 + \log_3 y^{-4} + \log_3 z$ خاصية الضرب في اللوغاريتمات

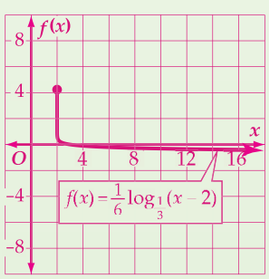
$= 2 \log_3 x - 4 \log_3 y + \log_3 z$ خاصية لوغاريتم القوة

إجابات:

26)



27)



33) $\log_3 2 + 5 \log_3 x + 2 \log_3 y + 3 \log_3 z$

34) $\log_5 a - 3 \log_5 b + 4 \log_5 c - 2 \log_5 d$

35) $\log_2 \frac{x^6}{\sqrt[3]{x - 4}}$

36) $\log_2 \frac{(z - 1)^2}{2z - 1}$

إجابات:

40) $\{x \mid 0 < x < 64\}$

41) $\{x \mid 0 < x < \frac{1}{125}\}$

2-5 حل المعادلات والمتباينات اللوغاريتمية (الصفحات 117 - 112)

حُلّ كل معادلة أو متباينة مما يأتي إن أمكن، ثم تحقق من صحة حلك:

38) $\log_{16} x = \frac{3}{2}$ **64**

39) $\log_2 \frac{1}{64} = x$ **−6**

40) $\log_4 x < 3$

41) $\log_5 x < -3$

42) $\log_9 (3x - 1) = \log_9 (4x)$ **لا يوجد حل.**

43) $\log_2 (x^2 - 18) = \log_2 (-3x)$ **−6**

44) $\log_3 (3x + 4) \le \log_3 (x - 2)$ **لا يوجد حل.**

45) **صوت:** استعمل القانون $L = 10 \log_{10} R$ ، حيث L ارتفاع الصوت، R الشدة النسبية للصوت لإيجاد كم مرة يعادل ارتفاع أصوات 20 شخصًا يتكلمون في الوقت نفسه مقارنة بارتفاع صوت شخص واحد. على فرض أن ارتفاع صوت الشخص الواحد يساوي 80 dB . **361.6 مرة**

مثال 6

حُلّ المعادلة $\log_3 3x + \log_3 4 = \log_3 36$، ثم تحقق من صحة حلك.

$\log_3 3x + \log_3 4 = \log_3 36$	المعادلة الأصلية
$\log_3 3x(4) = \log_3 36$	خاصية الضرب في اللوغاريتمات
$3x(4) = 36$	خاصية المساواة للدوال اللوغاريتمية
$12x = 36$	اضرب
$x = 3$	اقسم كلا الطرفين على 12

التحقق:

$\log_3 3x + \log_3 4 \stackrel{?}{=} \log_3 36$

$\log_3 3\times3 + \log_3 4 \stackrel{?}{=} \log_3 36$

$\log_3 9 + \log_3 4 \stackrel{?}{=} \log_3 36$

$\log_3 (9 \times 4) \stackrel{?}{=} \log_3 36$

$\log_3 36 \stackrel{?}{=} \log_3 36$

الحل صحيح.

مثال 7

حُلّ المتباينة $\log_{27} x < \frac{2}{3}$، ثم تحقق من صحة حلك.

$\log_{27} x < \frac{2}{3}$	المتباينة الأصلية
$x < 27^{\frac{2}{3}}$	خاصية التباين للدوال اللوغاريتمية
$x < 9$	بسّط

إذن مجموعة الحل هي $\{x \mid x < 9, x \in R\}$

التحقق:

عوض بعدد أقل من 9، وعدد أكبر من 9 في المتباينة الأصلية

$x = 1$	$x = 27$
$\log_{27} 1 \stackrel{?}{<} \frac{2}{3}$	$\log_{27} 27 \stackrel{?}{<} \frac{2}{3}$
$0 \stackrel{?}{<} \frac{2}{3}$	$1 \stackrel{?}{<} \frac{2}{3}$
$0 < \frac{2}{3}$ ✓	$1 < \frac{2}{3}$ ✗

2-6 اللوغاريتمات العشرية (الصفحات 124 - 118)

حُلّ كل معادلة أو متباينة مما يأتي، وقرّب الناتج إلى أقرب جزء من عشرة آلاف.

46) $3^x = 15$ $x \approx 2.4650$

47) $6^{x^2} = 28$ $x \approx \pm 1.3637$

48) $8^{m+1} = 30$ $m \approx 0.6356$

49) $12^{r-1} = 7^r$ $r \approx 4.6102$

50) $3^{5n} > 24$ $n > 0.5786$

51) $5^{x+2} \leq 3^x$ $x \leq -6.3013$

52) اكتب كلًّا مما يأتي بدلالة اللوغاريتم العشري، ثم أوجد قيمته مقربًا إلى أقرب جزء من عشرة آلاف.

a) $\log_4 11$ $1.7297 \approx \frac{\log 11}{\log 4}$

b) $\log_2 15$ $3.9069 \approx \frac{\log 15}{\log 2}$

53) مال: استثمر خالد مبلغ 10000 ريال في مشروع تجاري، وتوقع ربحًا سنويًّا نسبته 5%، وتضاف الأرباح إلى رأس المال كل 4 أشهر. استعمل القانون $A = P(1 + \frac{r}{n})^{nt}$، حيث A المبلغ الكلي بعد t سنة، P المبلغ الأصلي الذي تم استثماره أو رأس المال، r معدّل الربح السنوي، n عدد مرات إضافة الأرباح إلى رأس المال في السنة.

a) كم يكون الزمن المتوقع ليصبح المبلغ الكلي 15000 ريال؟ 8 سنوات تقريبًا

b) كم يكون الزمن المتوقع ليصبح المبلغ الكلي مثلي المبلغ الأصلي؟ 14 سنة تقريبًا

مثال 8

حُلّ المعادلة: $5^{3x} = 7^{x+1}$، وقرّب الناتج إلى أقرب جزء من عشرة آلاف.

$5^{3x} = 7^{x+1}$	المعادلة الأصلية
$\log 5^{3x} = \log 7^{x+1}$	خاصية المساواة للدوال اللوغاريتمية
$3x \log 5 = (x+1) \log 7$	خاصية القوة للوغاريتمات
$3x \log 5 = x \log 7 + \log 7$	خاصية التوزيع
$3x \log 5 - x \log 7 = \log 7$	اطرح $x \log 7$ من كلا الطرفين
$x(3 \log 5 - \log 7) = \log 7$	أخرج x عامل مشترك
$x = \frac{\log 7}{3 \log 5 - \log 7}$	اقسم كلا الطرفين على $3 \log 5 - \log 7$
$x \approx 0.6751$	استعمل الحاسبة

الفصل 2 دليل الدراسة والمراجعة 131

إجابة:

60b) لا؛ إجابة ممكنة:

$$10 \log_{10} \left(\frac{2I}{10^{-12}}\right) =$$

$$10 \log_{10} \frac{I}{10^{-12}} + \log_{10} 2$$

$$\neq 2 \times 10 \log_{10}$$

تطبيقات ومسائل

54) أسعار: تزداد أسعار السلع سنويًّا؛ بسبب ما يسمى التضخم. ونتيجة لذلك، يزداد سعر إحدى السلع بمعدل 4.5% سنويًّا، ويُعطى سعر هذه السلعة بالدالة $M(t)=275(1.045)^t$، حيث t عدد السنوات بعد عام 1422هـ (الدرس 1-2)

a) كم كان سعر السلعة عام 1422هـ؟ **275**

b) إذا استمر تضخم سعر السلعة بمعدل 4.5% سنويًّا، فكم سيكون سعرها عام 1437هـ تقريبًا؟ **532 ريالًا**

55) سيارات: ينخفض سعر سيارة جديدة سنويًّا بدءًا من لحظة شرائها، ويُعطى سعر هذه السيارة بعد t سنة من شرائها بالمعادلة $f(t) = 80000(0.8)^t$. (الدرس 2-2)

a) ما معدل انخفاض سعر السيارة سنويًّا؟ **20%**

b) متى يصبح سعر السيارة مساويًا لنصف سعرها الأصلي؟ **بعد 3.11 سنة**

56) استثمار: ورثت فاطمة عن والدها مبلغ 250000 ريال، واستثمرته في مشروع، وتزايد كما في الجدول أدناه: (الدرس 2-2)

السنة	المبلغ (ريال)
1412 هـ	250000
1420 هـ	329202
1425 هـ	390989

a) اكتب دالة أسية يمكن استعمالها لإيجاد المبلغ الكلي بعد t سنة من الاستثمار. $A(t) = 250000(1.035)^t$

b) إذا استمر تزايد المبلغ بالمعدل نفسه، ففي أي سنة يصبح المبلغ الكلي 500000 ريال تقريبًا؟ **1432 هـ**

57) كيمياء: يُعطى عدد السنوات t اللازمة لاضمحلال الكمية الأصلية N_0 جرام من مادة مشعة لتصبح N جرام بالمعادلة $t = \frac{16 \log_{10} \frac{N}{N_0}}{\log_{10} \frac{1}{2}}$ (الدرس 2-3)

a) بشكل تقريبي، بعد كم سنة تقريبًا يضمحل 100g من المادة المشعة لتصبح 30g؟ **28 سنة**

b) ما النسبة التقريبية لما يتبقى من 100g بعد 40 سنة؟ **18%**

58) زلازل: مقياس ريختر هو نظام عددي لتحديد قوة الزلازل. وتعتمد درجة مقياس ريختر R على الطاقة الصادرة عن الزلزال E بوحدة الكيلوواط لكل ساعة. وتُعطى R بالعلاقة: $R = 0.67 \cdot \log_{10}(0.37E) + 1.46$ (الدرس 2-5)

a) أوجد قيمة R لزلزال أصدر 1000000 كيلو واط في الساعة. **5.2**

b) قدّر كمية الطاقة الصادرة عن زلزال قوّته 7.5 على مقياس ريختر. **2.8×10^9 kWh**

59) أحياء: يعرّف زمن الجيل G بأنه الزمن اللازم ليصبح عدد فصيلة نادرة من الحيوانات مثلي ما كان عليه، ويُعطى بالصيغة $G = \frac{t}{2.5 \log_b d}$، حيث b العدد الأصلي، d العدد النهائي، t الفترة الزمنية. إذا كان زمن الجيل لهذه الفصيلة 6 سنوات، ويوجد الآن من هذه الفصيلة 5 حيوانات، فما الفترة الزمنية اللازمة ليصبح عدد حيوانات هذه الفصيلة 3125 حيوانًا؟ (الدرس 2-5) **75 سنة**

60) صوت: تُعطى العلاقة بين شدة الصوت بالواط لكل متر مربع (I)، وعدد وحدات الديسبل β بالمعادلة $\beta = 10 \log_{10} \frac{I}{10^{-12}}$ (الدرس 2-6)

a) حدّد شدة الصوت إذا كان عدد وحدات الديسبل 100. **1×10^{-2}**

b) قارنت سميرة الصوت في الفرع a مع صوت آخر عدد وحدات الديسبل فيه 50 ديسبل ، فاستنتجت أن شدّة الصوت الثاني تساوي نصف شدّة الصوت الأول. هل استنتاجها صحيح؟ برّر إجابتك. **انظر الهامش.**

c) صوت شدّته 1×10^{-8} واط لكل متر مربع. كم يزيد عدد وحدات الديسبل إذا ضوعفت شدته؟ **3.01 dB**

61) مال: السعر الأصلي لسلعة 8000 ريال، وازداد سعرها باستمرار؛ بسبب التضخم بطريقة الربح المركب حتى بلغ 12000 ريال بعد 5 سنوات. (الدرس 2-6)

a) إذا كان معدل التضخم 6% سنويًّا، فبعد كم سنة يصبح سعر السلعة 12000 ريال ؟ **حوالي 6.8 سنوات**

b) ما معدل التضخم الذي يصبح عنده سعر السلعة 12000 ريال بعد 5 سنوات؟ **8.1% تقريبًا**

مثّل كل دالة مما يأتي بيانيًّا، وحدد مجالها ومداها: انظر الهامش.

1) $f(x) = 3^{x-3} + 2$

2) $f(x) = 2\left(\frac{3}{4}\right)^{x+1} - 3$

حُلّ كل معادلة أو متباينة مما يأتي، وقرّب الناتج إلى أقرب أربع منازل عشرية كلما لزم ذلك:

3) $8^{c+1} = 16^{2c+3}$ $c = -\frac{9}{5}$

4) $9^{x-2} > \left(\frac{1}{27}\right)^{x}$ $x > \frac{4}{5}$

5) $2^{a+3} = 3^{2a-1}$ $a \approx 2.1130$

6) $\log_2 (x^2 - 7) = \log_2 6x$ $x = 7$

7) $\log_5 x > 2$ $x > 25$

8) $\log_3 x + \log_3 (x - 3) = \log_3 4$ $x = 4$

9) $6^{n-1} \le 11^{n}$ $n \le -2.9560$

استعمل $\log_5 2 \approx 0.4307$, $\log_5 11 \approx 1.4899$ ، لتقريب قيمة كل مما يأتي إلى أقرب جزء من عشرة آلاف:

10) $\log_5 44$ 2.3513

11) $\log_5 \frac{11}{2}$ 1.0592

12) **سكان:** كان عدد سكان مدينة ما قبل 10 أعوام 150000 نسمة، ثم تزايد بعد ذلك عددهم بمعدل ثابت كل سنة، ليصبح الآن 185000 نسمة.

a) $y = 150000\ (1.0212)^x$

b) كم يصبح عدد السكان بعد 25 سنة؟ 253431 نسمة تقريبًا

13) اكتب $\log_9 27 = \frac{3}{2}$ على الصورة الأسية. $9^{\frac{3}{2}} = 27$

14) **اختيار من متعدد:** ما قيمة $\log_4 \frac{1}{64}$؟ A

A -3 C $\frac{1}{3}$

B $-\frac{1}{3}$ D 3

15) **زراعة:** تمثّل المعادلة $y = 3962520(0.98)^x$ تراجع عدد المزارع في بلد ما، حيث x عدد الأعوام منذ عام 1380 هـ، y عدد المزارع.

a) كيف يمكنك أن تعرف أن عدد المزارع يتناقص؟ $b < 1$

b) بأي نسبة يتناقص عدد المزارع؟ 2%

c) تنبأ بعد كم سنة يصبح عدد المزارع مليون مزرعة. 68 سنة تقريبًا

16) **توفير:** استثمر سلمان مبلغ 75000 ريال في مشروع تجاري متوقعًا ربحًا سنويًّا نسبته 9% ، بحيث يتم إضافة الأرباح إلى رأس المال شهريًّا .

a) ما المبلغ الكلي المتوقع بعد 5 سنوات؟ 117426 ريالًا تقريبًا

b) بعد كم سنة يتوقع أن يصبح المبلغ الكلي مثلي المبلغ المستثمر عند البداية؟ 8 سنوات تقريبًا

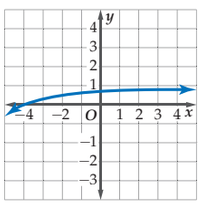
c) بعد كم سنة يتوقع أن يصبح المبلغ الكلي 100000 ريال؟ 3.2 سنوات تقريبًا

17) **اختيار من متعدد:** ما حل المعادلة $\log_4 16 - \log_4 x = \log_4 8$؟ C

A $\frac{1}{2}$ C 2

B 4 D 8

18) **اختيار من متعدد:** أي الدوال الآتية لها التمثيل البياني أدناه؟ C



A $y = \log_{10} (x - 5)$

B $y = 5 \log_{10} x$

C $y = \log_{10} (x + 5)$

D $y = -5 \log_{10} x$

19) اكتب العبارة اللوغاريتمية $-2 \log_3 x + 6 \log_3 (z - 2) + \log_3 t^2$ بالصورة المختصرة. $\log_3 \frac{t^2 (z-2)^6}{x^2}$

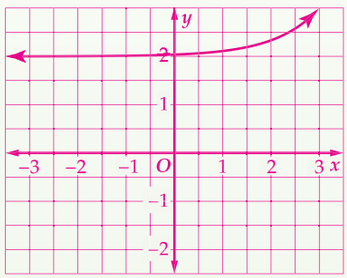
المعالجة:

بناء على نتائج اختبار الفصل استعمل مخطط المعالجة في مراجعة المفاهيم التي لاتزال تشكل تحديًا للطلاب.

اختبار الفصل: نماذج متعددة ص (34–42) .

إجابات:

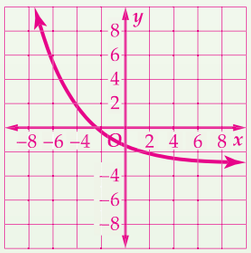
1)



المجال = {جميع الأعداد الحقيقية}

المدى = $\{f(x) \mid f(x) > 2\}$

2)



المجال = {جميع الأعداد الحقيقية}

المدى = $\{f(x) \mid f(x) > -3\}$

مخطط المعالجة

المستوى 1	ضمن المتوسط	المستوى 2	دون المتوسط
إذا	أخطأ بعض الطلاب في 25% أو أقل تقريبًا من الأسئلة،	إذا	أخطأ بعض الطلاب في 50% تقريبًا من الأسئلة،
فاختر	أحد المصادر الآتية:	فاختر	المصدر الآتي:
كتاب الطالب	الدروس 2-1, 2-2, 2-3, 2-4, 2-5, 2-6	زيارة الموقع	www.obeikaneducation.com
دليل المعلم	مشروع الفصل، ص (80)		
زيارة الموقع	www.obeikaneducation.com		

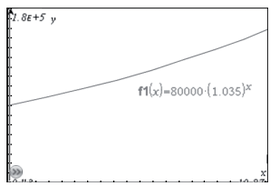
الدرس 1-2، ص (17-15)

3) تحقق من فهمك

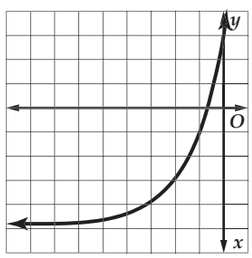
نجد دالة النمو الأسي

$a = 80000$ ، $r = 0.035$

$y = 80000\ (1.03\ 5)^t$

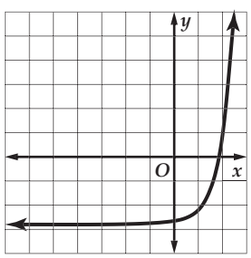


5A



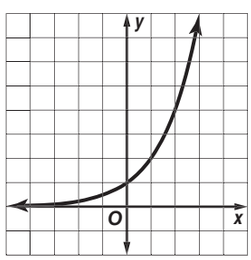
المجال = مجموعة الأعداد الحقيقية (R)،
المدى = $\{y \mid y > -5\}$

5B



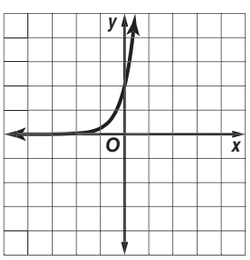
المجال = مجموعة الأعداد الحقيقية (R)،
المدى = $\{y \mid y > -3\}$

1)



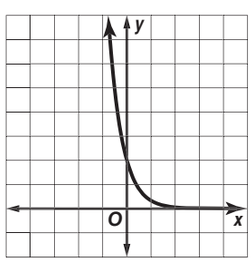
1؛ المجال = مجموعة الأعداد الحقيقية (R)
المدى = $\{y \mid y > 0\}$
$2^{1.5} \approx 2.8$

2)



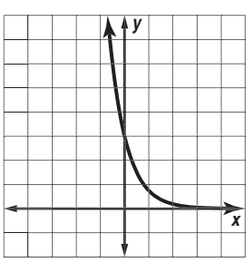
2؛ المجال = مجموعة الأعداد الحقيقية (R)
المدى = $\{y \mid y > 0\}$
$2(8)^{-0.5} \approx 0.7$

3)



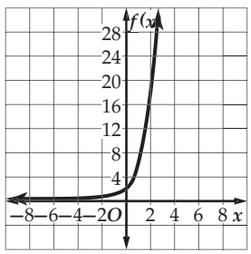
2؛ المجال = مجموعة الأعداد الحقيقية (R)
المدى = $\{y \mid y > 0\}$
$2\left(\frac{1}{6}\right)^{1.5} \approx 0.1$

4)



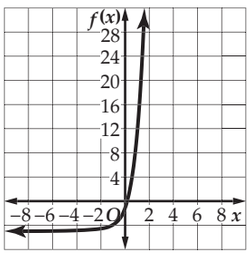
3؛ المجال = مجموعة الأعداد الحقيقية (R)
المدى = $\{y \mid y > 0\}$
$3\left(\frac{1}{4}\right)^{0.5} = 1.5$

7)



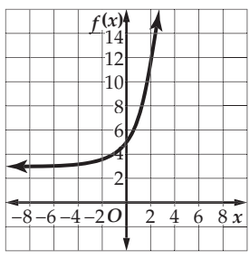
المجال = مجموعة الأعداد الحقيقية (R)،
المدى = $\{f(x) \mid f(x) > 0\}$

8)



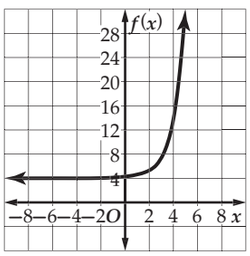
المجال = مجموعة الأعداد الحقيقية (R)،
المدى = $\{f(x) \mid f(x) > -5\}$

9)



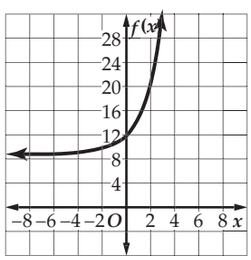
المجال = مجموعة الأعداد الحقيقية (R)،
المدى = $\{f(x) \mid f(x) > 3\}$

10)



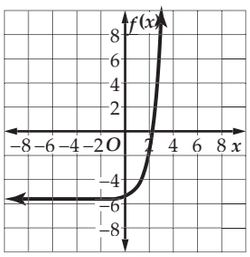
المجال = مجموعة الأعداد الحقيقية (R)،
المدى = $\{f(x) \mid f(x) > 4\}$

11)



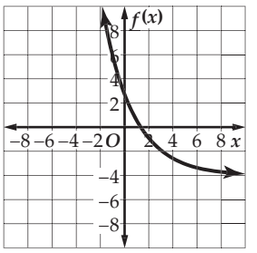
المجال = مجموعة الأعداد الحقيقية (R)،
المدى = $\{f(x) \mid f(x) > 8\}$

12)



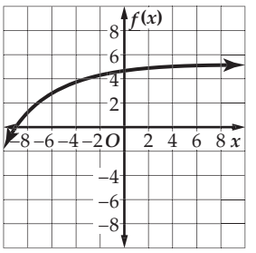
المجال = مجموعة الأعداد الحقيقية (R)،
المدى = $\{f(x) \mid f(x) > -6\}$

13)



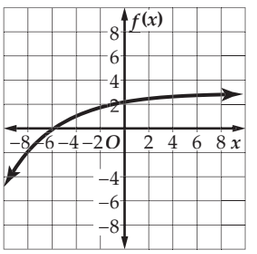
المجال = مجموعة الأعداد الحقيقية (R)،
المدى = $\{f(x) \mid f(x) > -4\}$

14)



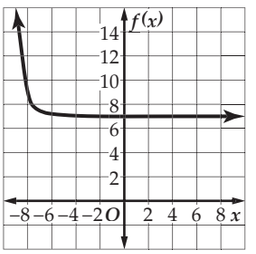
المجال = مجموعة الأعداد الحقيقية (R)،
المدى = $\{f(x) \mid f(x) < 5\}$

15)



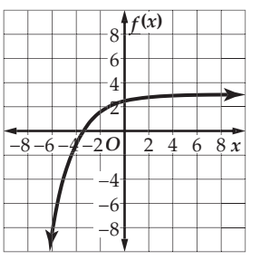
المجال = مجموعة الأعداد الحقيقية (R)،
المدى = $\{f(x) \mid f(x) < 3\}$

16)



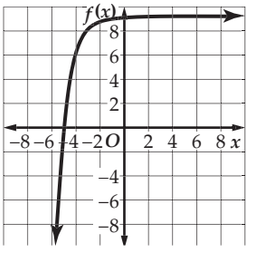
المجال = مجموعة الأعداد الحقيقية (R)،
المدى = $\{f(x) \mid f(x) > 7\}$

17)



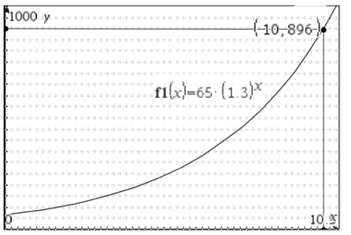
المجال = مجموعة الأعداد الحقيقية (R)،
المدى = $\{f(x) \mid f(x) < 3\}$

18)



المجال = مجموعة الأعداد الحقيقية (R)،
المدى = $\{f(x) \mid f(x) < 9\}$

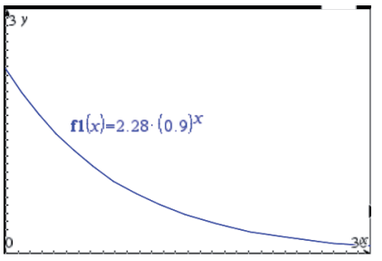
19)



$y = 65(1.3)^t$

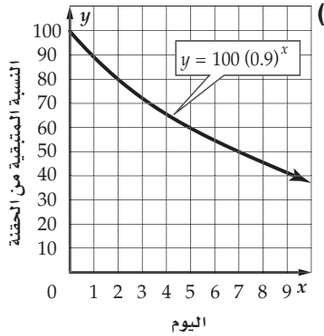
$y \approx 896$

21a)

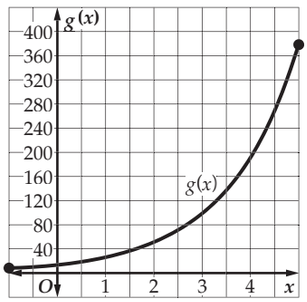


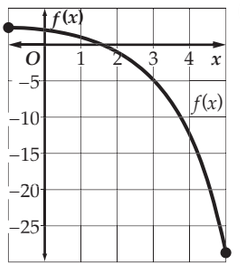
21b) يمثل المقطع $P(x)$ عدد الهواتف العمومية في العام x منذ عام 1420 هـ، وخط التقارب هو المحور x، وسيتناقص عدد الهواتف العمومية ليقترب من 0 ولن يصل إليه، وذلك منطقي؛ لأنه ستكون هنالك حاجة دائمًا للهواتف العمومية.

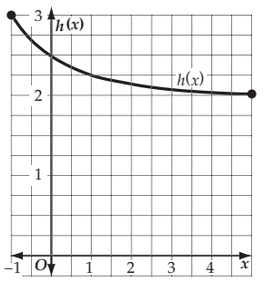
22a)



26a)







26b) إجابة ممكنة: $f(x)$؛ تمثيل الدالة $f(x)$ البياني هو انعكاس حول محور يوازي المحور x.

26c) إجابة ممكنة: $f(x)$ و $g(x)$ دالتا نمو أسي، على حين أن $h(x)$ دالة اضمحلال أسي؛ القيم المطلقة للمخرجات متزايدة لدوال النمو الأسي ومتناقصة لدوال الاضمحلال.

29a) صحيحة دائمًا؛ إجابة ممكنة: مجال الدالة الأسية هو مجموعة الأعداد الحقيقية، لذا $(0, y)$ دائمًا موجودة.

29b) صحيحة أحيانًا؛ إجابة ممكنة. التمثيل البياني للدالة الأسية يقطع المحور x عندما $k < 0$.

29c) صحيحة أحيانًا؛ إجابة ممكنة: الدالة ليست أسية إذا كانت $b = 1$ أو $b = -1$.

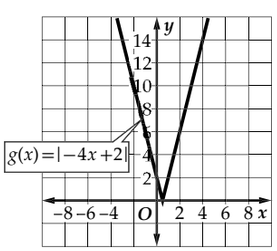
30) ماجد؛ أهمل عمر الضرب في إشارة السالب.

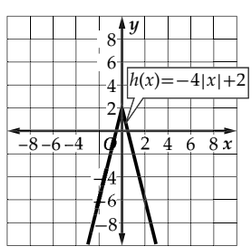
(33) إجابة ممكنة: الدالة الرئيسية (الأم) هي $g(x) = b^x$ يتسع تمثيلها البياني رأسيًّا إذا كانت $|a| > 1$ ، ويضيق رأسيًّا إذا كانت $|a| < 1$، ثم يتبعها انسحاب للتمثيل البياني k وحدة إلى أعلى إذا كانت قيمة k موجبة، و $|k|$ وحدة للأسفل إذا كانت k سالبة، ثم يتبعه انسحاب h وحدة يمينًا إذا كانت h موجبة وَ $|h|$ وحدة يسارًا إذا كانت h سالبة.

(34) الدالة f تتزايد على $(-\infty, -3)$ ، ثم تتناقص على $(-3, 1)$، وتتزايد على $(1, \infty)$.

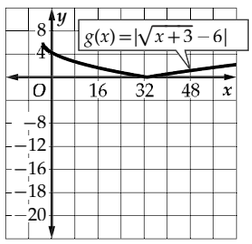
(35) الدالة f تتزايد على $(-\infty, -4)$، ثم تتزايد على $(-4, \infty)$.

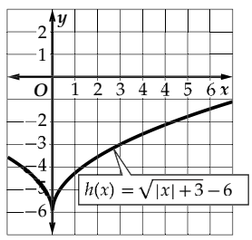
(36)





(37)





(38) المجال : $(f+g)(x) = x^2 - x + 9; (-\infty, \infty)$

المجال : $(f-g)(x) = x^2 - 3x - 9; (-\infty, \infty)$

المجال : $(f \cdot g)(x) = x^3 + 7x^2 - 18x; (-\infty, \infty)$

المجال : $(\frac{f}{g})(x) = \frac{x^2 - 2x}{x + 9}$; $\{x \mid x \neq -9, x \in \mathrm{R}\}$

(39) المجال : $(f+g)(x) = \frac{x}{x+1} + x^2 - 1$; $\{x \mid x \neq -1, x \in \mathrm{R}\}$

المجال : $(f-g)(x) = \frac{x}{x+1} + x^2 - 1$; $\{x \mid x \neq -1, x \in \mathrm{R}\}$

المجال : $(f \cdot g)(x) = x^2 - x$; $\{x \mid x \neq -1, x \in \mathrm{R}\}$

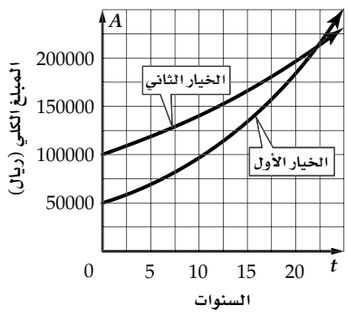
المجال : $(\frac{f}{g})(x) = \frac{x}{(x-1)(x+1)^2}$; $\{x \mid x \neq \pm 1, x \in \mathrm{R}\}$

الدرس 2-2 ، ص (96)

(34a) $A = 50000\left(\frac{4.065}{4}\right)^{4t}$

$$A = 50000\left[\left(\frac{12.042}{12}\right)^{12t} + \left(\frac{52.023}{52}\right)^{52t}\right]$$

(34b)



(34c) إجابة ممكنة:

خلال أول 22 سنة يكون الخيار الثاني أفضل؛ لأن المبلغ المتجمع منه أكبر من المبلغ المتجمع من الخيار الأول.

وبعد 22 سنة يصبح الخيار الأول أفضل لأن المبلغ المتجمع منه أكبر من المبلغ المتجمع من الخيار الثاني.

(35b)

عدد مرات القص	عدد القطع
1	2
2	4
3	8
4	16

(38)

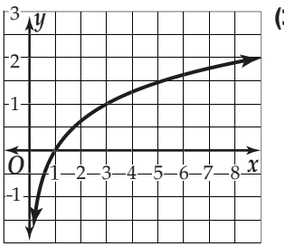
الطرف الأيسر	$27^{2x} \cdot 81^{x+1}$
$3^3 = 27, 3^4 = 81$	$= (3^3)^{2x} \cdot (3^4)^{x+1}$
قوة القوة	$= 3^{6x} \cdot 3^{4x+4}$
حاصل ضرب القوى	$= 3^{10x+4}$

الطرف الأيمن	$3^{2x+2} \cdot 9^{4x+1}$
$3^2 = 9$	$= 3^{2x+2} \cdot (3^2)^{4x+1}$
قوة القوة	$= 3^{2x+2} \cdot 3^{8x+2}$
حاصل ضرب القوى	$= 3^{10x+4}$

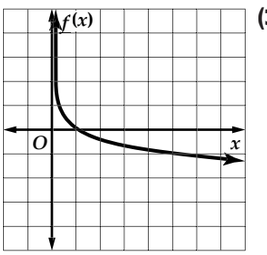
وبما أن الطرفين يساويان المقدار نفسه فالطرفان متساويان.

الدرس 3-2، ص (102,103)

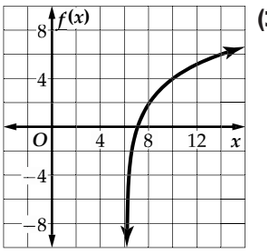
(32



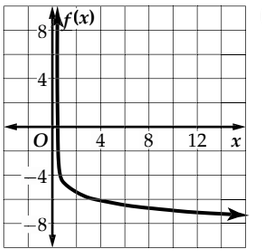
(33



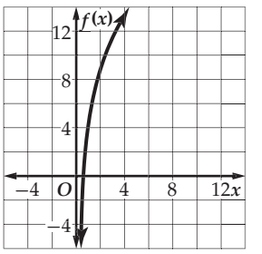
(34



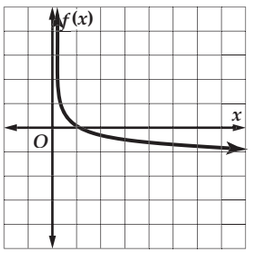
(35



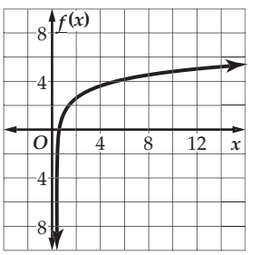
(36



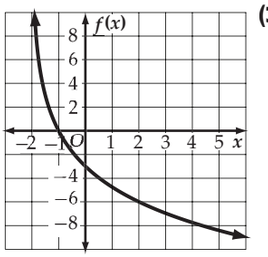
(37



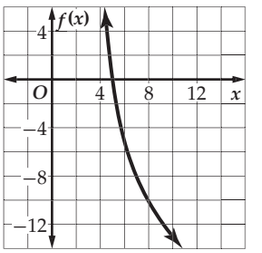
(38



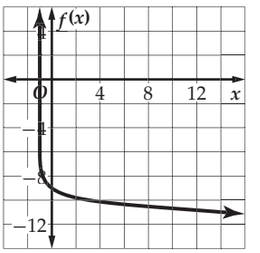
(39



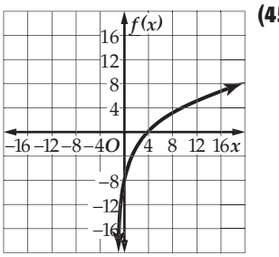
(40



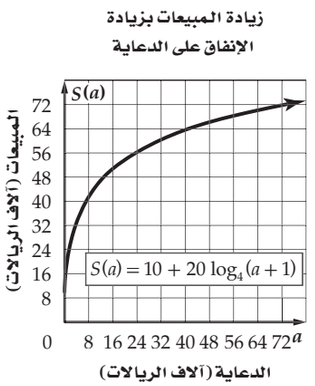
(41



(45



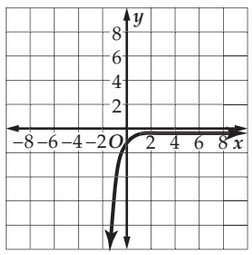
(47c



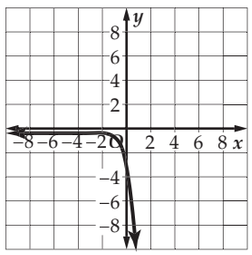
55) إجابة ممكنة:

- إذا كانت $a < 0$، فإن التمثيل البياني ينعكس حول المحور x.
- إذا كانت $|a| > 1$، فإن التمثيل البياني يتسع رأسيًّا، وإذا كانت $0 < |a| < 1$، فإن التمثيل البياني يضيق رأسيًّا.
- يسحب التمثيل البياني h وحدة إلى اليمين إذا كانت $h > 0$، ويسحب $|h|$ وحدة إلى اليسار إذا كانت h سالبة.
- يسحب التمثيل البياني k وحدة إلى أعلى إذا كانت $k > 0$، ويسحب $|k|$ وحدة إلى أسفل إذا كانت $k < 0$.

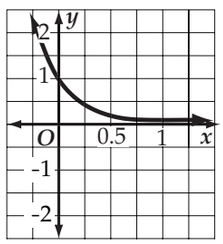
(56



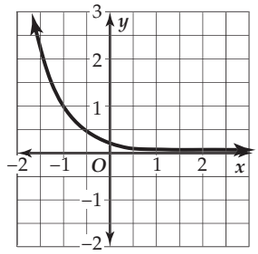
(57



(58

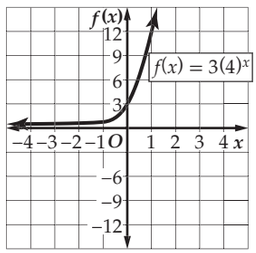


(59



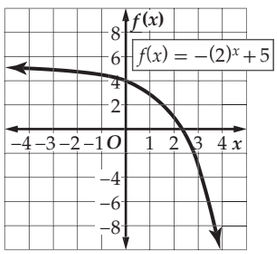
اختبار منتصف الفصل، ص (104)

1)



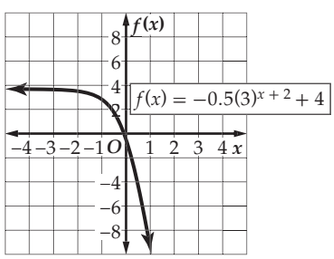
المجال = مجموعة الأعداد الحقيقية (R)، المدى = $\{f(x) \mid f(x) > 0\}$

2)



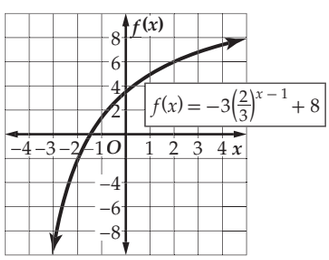
المجال = مجموعة الأعداد الحقيقية (R)، المدى = $\{f(x) \mid f(x) < 5\}$

3)



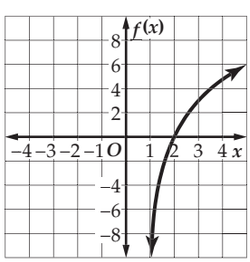
المجال = مجموعة الأعداد الحقيقية (R)، المدى = $\{f(x) \mid f(x) < 4\}$

4)

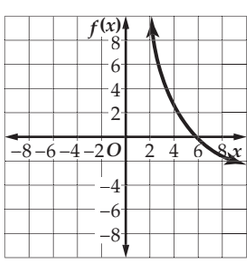


المجال = مجموعة الأعداد الحقيقية (R)، المدى = $\{f(x) \mid f(x) < 8\}$

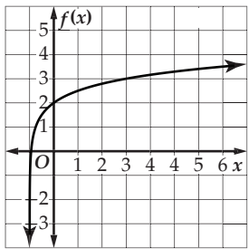
13)



14)

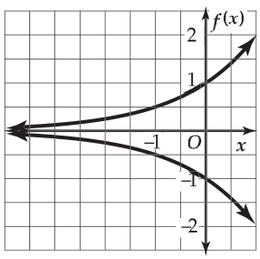


15)

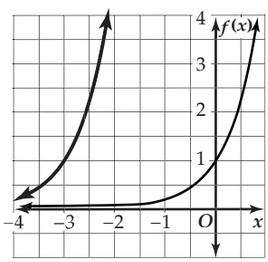


الدرس 4-2، ص (111)

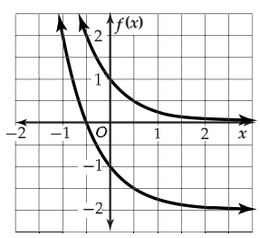
52) انعكاس حول المحور x.



53) انسحاب إلى اليسار 3 وحدات.



54) انسحاب إلى أسفل وحدتان.



الدرس 5-2، ص (116)

29a) التمثيلان البيانيان متشابهان، من حيث إن خط التقارب لكل منهما المحور y، ومقطع المحور x لهما 1.

29b) التمثيلان البيانيان يمثلان انعكاسًا لبعضهما بعضًا حول المحور x.

29c) التمثيلان البيانيان يمثلان انعكاسًا لبعضهما بعضًا حول المحور x؛ المجال $= \{x|x>0\}$، المدى = مجموعة الأعداد الحقيقية.

الدرس 6-2، ص (124)

41)

$\log_{\sqrt{a}} 3 = \log_a x$	المعادلة الأصلية
$\frac{\log_a 3}{\log_a \sqrt{a}} = \log_a x$	صيغة تغيير الأساس
$\frac{\log_a 3}{\frac{1}{2}} = \log_a x$	$\sqrt{a} = a^{\frac{1}{2}}$
$2 \log_a 3 = \log_a x$	بضرب كلٍّ من البسط والمقام في العدد 2
$\log_a 3^2 = \log_a x$	خاصية لوغاريتم القوة
$3^2 = x$	خاصية المساواة للدوال اللوغاريتمية
$9 = x$	بالتبسيط

43) $\log_3 27 = 3$ و $\log_{27} 3 = \frac{1}{3}$؛

تخمين: $\log_a b = \frac{1}{\log_b a}$

برهان:

$\log_a b \stackrel{?}{=} \frac{1}{\log_b a}$	العبارة الأصلية
$\frac{\log_b b}{\log_b a} \stackrel{?}{=} \frac{1}{\log_b a}$	صيغة تغيير الأساس
$\frac{1}{\log_b a} = \frac{1}{\log_b a}$	$\log_b b = 1$