الفصل 3 ملاحظات

مشروع الفصل

مهن إلكترونية

يستعمل الطلاب ما تعلموه حول المتطابقات والمعادلات المثلثية لإجراء مقابلات مع أشخاص يستعملون حساب المثلثات في مهنهم.

- اطلب إلى الطلاب العمل في مجموعات ثلاثية أو رباعية، وشجعهم على عمل أبحاث تتناول مهنًا ذات علاقة بالتيار الكهربائي المتردد، مثل الهندسة الكهربائية، أو هندسة الحاسوب.
- شجع الطلاب على إجراء مقابلات شخصية أو عبر الهاتف مع أشخاص يعملون في هذه المهن، على أن يستفسروا منهم عن طريقة استعمال حساب المثلثات في مهنهم. واطلب إليهم إحضار أمثلة ممن تتم مقابلته شخصيًّا إذا أمكن ذلك.
- اطلب إلى كل مجموعة إعداد تقرير يلخص طريقة استعمال حساب المثلثات مهنة الشخص الذي قابلوه.
- اعرض تقارير الطلاب متضمنة صورًا في لوحة الفصل بعنوان "مهن إلكترونية".

المفردات: قدّم مفردات الفصل مستعملًا الخطوات الآتية:

تعريف: المتطابقة المثلثية هي معادلة تحتوي على دالة مثلثية صحيحة لجميع قيم المتغيّر.

مثال: المتطابقة $\sin(-\theta) = -\sin\theta$ هي إحدى متطابقات الدوال الفردية.

سؤال: اكتب متطابقة مثلثية أخرى تعلمتها. تختلف إجابات الطلاب.

الفصل 3 المتطابقات والمعادلات المثلثية
Trigonometric Identities and Equations

فيما سبق:

درستُ الدوال المثلثية، وتمثيلاتها البيانية.

والآن:

- أثبت صحة المتطابقات المثلثية وأستعملها.
- أستعمل المتطابقات المثلثية لمجموع زاويتين والفرق بينهما.
- أستعمل المتطابقات المثلثية لضعف الزاوية ونصفها.
- أحلّ معادلات مثلثية.

لماذا؟

إلكترونيات: تستعمل الموجات الراديوية في العديد من الأجهزة الإلكترونية كالتلفاز والهاتف النقال وغيرها. ويمكن تمثيل الموجات الراديوية بالدوال المثلثية، بحيث يمكن إيجاد قدرة الجهاز باستعمال معادلة مثلثية.

قراءة سابقة: اكتب قائمة بما تعرفه عن الدوال المثلثية، ثم تنبأ بما ستتعلمه في هذا الفصل.

134 الفصل 3 المتطابقات والمعادلات المثلثية

قراءة سابقة

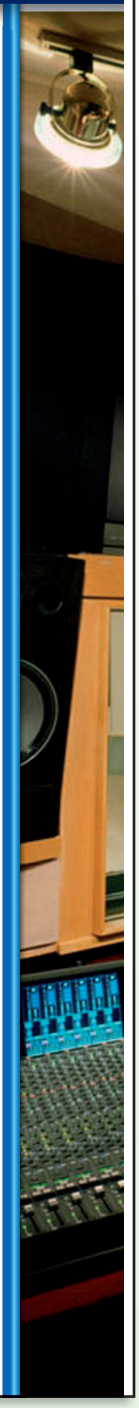
شجع الطلاب على الإعداد المسبق لكل درس بطريقة جيدة تتم من خلال قراءته قراءة سريعة مرة، وأخرى متأنية، وأعطهم الوقت الكافي؛ لمناقشة ما يحتويه الدرس من أفكار ومفردات أساسية، واطلب إليهم كتابة استفساراتهم التي لم يتوصلوا إلى الإجابة عنها، وما صعب عليهم فهمه؛ وذلك لمناقشتها في أثناء تقديم الدرس.

تنويع التعليم

نموذج بناء المفردات، ص (47) .

يكمل الطلاب هذا النموذج بكتابة تعريف كل مفردة جديدة تظهر لهم في أثناء دراسة الفصل أو مثال عليها، ويستفيدون من ذلك في أثناء المراجعة والاستعداد لاختبار الفصل.

التهيئة للفصل 3



تشخيص الاستعداد: هناك بديلان للتأكد من المتطلبات السابقة.

البديل 1

أجب عن أسئلة الاختبار السريع الآتي:

اختبار سريع

حلّل كل عبارة فيما يأتي تحليلًا تامًّا، وإذا لم يكن ذلك ممكنًا فاكتب "أولية". **(1–4) انظر الهامش.**

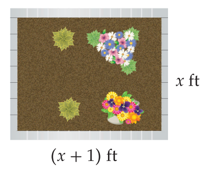
1) $-16a^2 + 4a$
2) $5x^2 - 20$
3) $4x^2 - x + 6$
4) $2y^2 - y - 15$

5) **هندسة:** مساحة قطعة ورقية مستطيلة الشكل هي: $(x^2 + 6x + 8)\ \mathrm{cm}^2$. إذا كان طول القطعة: $(x + 4)\ \mathrm{cm}$، فما عرضها؟ $\mathbf{(x + 2)\ cm}$

حُلّ كلًّا من المعادلات الآتية باستعمال التحليل:

6) $x^2 + 6x = 0$ $\{-6, 0\}$
7) $x^2 + 2x - 35 = 0$ $\{-7, 5\}$
8) $x^2 - 9 = 0$ $\{-3, 3\}$
9) $x^2 - 7x + 12 = 0$ $\{3, 4\}$

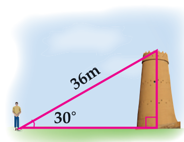
10) **حدائق:** قامت ليلى بتخصيص حوض مستطيل الشكل لزراعة الورود في منزلها. إذا علمت أن مساحة الحوض $42\ \mathrm{ft}^2$، وبعديه عددان صحيحان، فأوجد قيمة x الممكنة. **6**



أوجد القيمة الدقيقة لكل دالة مثلثية فيما يأتي:

11) $\sin 45°$ $\frac{\sqrt{2}}{2}$
12) $\cos 225°$ $-\frac{\sqrt{2}}{2}$
13) $\tan 150°$ $-\frac{\sqrt{3}}{3}$
14) $\sin 120°$ $\frac{\sqrt{3}}{2}$

15) **قصر المصمك:** يقف سلمان أمام برج قصر المصمك التاريخي كما في الشكل المجاور. ما ارتفاع البرج؟ **18 m**



البديل 2

أسئلة تهيئة إضافية على الموقع www.obeikaneducation.com

مراجعة المفردات

الحل الدخيل (extraneous solution):
الحل الذي لا يحقق المعادلة الأصلية.

الزاوية الربعية (quadrantal angle):
زاوية في الوضع القياسي بحيث يقع ضلع الانتهاء لها على أحد المحورين x أو y.

الزاوية المرجعية (reference angle):
إذا كانت θ زاوية غير ربعية مرسومة في الوضع القياسي، فإن زاويتها المرجعية θ هي الزاوية الحادة المحصورة بين ضلع انتهاء الزاوية θ والمحور x، ويمكن استعمالها؛ لإيجاد قيم الدوال المثلثية لأي زاوية θ.

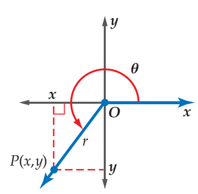
دائرة الوحدة (unit circle):
هي دائرة مرسومة في المستوى الإحداثي، ومركزها نقطة الأصل، وطول نصف قطرها وحدة واحدة.

الدالة الدورية (periodic function):
هي دالة تمثيلها البياني عبارة عن تكرار نمط على فترات منتظمة متتالية.

النسبة المثلثية (trigonometric ratio):
نسبة تقارن بين طولي ضلعين في المثلث القائم الزاوية.

الدوال المثلثية للزوايا (trigonometric functions of general angles):
لتكن θ زاوية مرسومة في الوضع القياسي، وتقع النقطة $P(x, y)$ على ضلع انتهائها. باستعمال نظرية فيثاغورس يمكن إيجاد r (المسافة من النقطة P إلى نقطة الأصل) باستعمال الصيغة $r = \sqrt{x^2 + y^2}$. وتكون الدوال المثلثية الست للزاوية θ معرفة كما يأتي:

$$\sin \theta = \frac{y}{r} \qquad \cos \theta = \frac{x}{r}$$
$$\tan \theta = \frac{y}{x}, x \neq 0 \qquad \csc \theta = \frac{r}{y}, y \neq 0$$
$$\sec \theta = \frac{r}{x}, x \neq 0 \qquad \cot \theta = \frac{x}{y}, y \neq 0$$



المعالجة

استعمل نتائج الاختبار السريع ومخطط المعالجة أدناه لمساعدتك على تحديد مستوى المعالجة المناسب. كما تساعد العبارة "إذا...فقم" في المخطط على تحديد المستوى المناسب للمعالجة، واقتراح مصادر لكل مستوى.

مخطط المعالجة

المستوى 1 — ضمن المتوسط

إذا أخطأ بعض الطلاب في حل ما لا يزيد على 25% تقريبًا من الأسئلة.

فقم بمراجعة الطلاب في النسب المثلثية الأساسية وحسابها عندما تكون الزوايا مقيسة بالدرجات وبالراديان.

زيارة الموقع www.obeikaneducation.com

المستوى 2 — دون المتوسط

إذا أخطأ بعض الطلاب في حل 50% تقريبًا من الأسئلة.

فقم بتحديد أخطائهم، ووضع أنشطة علاجية لذلك.

زيارة الموقع www.obeikaneducation.com

تنويع التعليم

قائمة اطلب إلى الطلاب عمل قائمة بالتعريفات الواردة، وكتابة مثال على كل منها في أثناء دراستهم للفصل؛ لاستعمالها وسيلة مراجعة لاختبار الفصل.

إجابات:

1) $-4a(4a-1)$
2) $5(x+2)(x-2)$
3) أولية
4) $(2y+5)(y-3)$

3-1 ملاحظات الدرس

1 التركيز

الترابط الرأسي

ما قبل الدرس 1–3

إيجاد قيم الدوال المثلثية.

الدرس 1–3

استعمال المتطابقات المثلثية لإيجاد النسب المثلثية.

استعمال المتطابقات المثلثية لتبسيط العبارات.

ما بعد الدرس 1–3

إثبات صحة المتطابقات المثلثية.

استعمال المتطابقات المثلثية في حل المعادلات المثلثية.

2 التدريس

أسئلة التعزيز

اطلب إلى الطلاب قراءة فقرة "لماذا؟".

واسأل:

- ما المتغيرات التي تظهر في بسط العبارة التي في الطرف الأيمن من صيغة الإضاءة؟ وفي المقام؟ شدة إضاءة المصدر، شدة الاستضاءة، والمسافة.
- ماذا تساوي النسبة $\sec\theta$ في مثلث قائم الزاوية؟ $\sec\theta = \frac{\text{الوتر}}{\text{المجاور}}$
- ما متطابقة المقلوب للنسبة المثلثية: $\sec\theta$؟ $\frac{1}{\cos\theta}, \cos\theta \neq 0$

3-1 المتطابقات المثلثية

Trigonometric Identities

فيما سبق:

درستُ كيفية إيجاد قيم الدوال المثلثية. (مهارة سابقة)

والآن:

- أستعمل المتطابقات المثلثية لإيجاد قيم النسب المثلثية.
- أستعمل المتطابقات المثلثية لتبسيط العبارات.

المفردات:

المتطابقة identity

المتطابقة المثلثية trigonometric identity

المتطابقات النسبية quotient identities

متطابقات المقلوب resiprocal identities

متطابقات فيثاغورس pythagorean identities

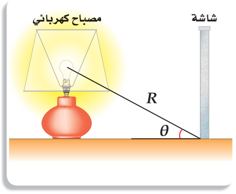
متطابقات الزاويتين المتتامتين cofunction identities

متطابقات الدوال الزوجية والدوال الفردية odd-even identities

www.obeikaneducation.com

لماذا؟

تُسمّى كمية الضوء الساقطة من مصدر ضوئي على سطح، الاستضاءة (E). وتقاس الاستضاءة بوحدة قدم / شمعة، وترتبط بالمسافة R مقيسة بالأقدام بين المصدر الضوئي والسطح بالعلاقة $\sec\theta = \frac{I}{ER^2}$، حيث I شدة إضاءة المصدر مقيسة بالشمعة، و θ هي الزاوية بين شعاع الضوء والمستقيم العمودي على السطح، وتستعمل هذه العلاقة في التطبيقات الضوئية والبصرية كالإضاءة والتصوير.



المتطابقات المثلثية الأساسية: تكون المعادلة **متطابقة** إذا تساوى طرفاها لجميع قيم المتغيرات فيها. فمثلًا: $x^2 - 9 = (x+3)(x-3)$ متطابقة؛ لأن طرفيها متساويان لجميع قيم x، و**المتطابقة المثلثية** هي متطابقة تحوي دوال مثلثية. وإذا وجدت مثالًا مضادًّا يثبت خطأ المعادلة، فالمعادلة عندئذٍ لا تكون متطابقة.

مفهوم أساسي: المتطابقات المثلثية الأساسية

المتطابقات النسبية:

$\tan\theta = \frac{\sin\theta}{\cos\theta}, \cos\theta \neq 0$ $\qquad$ $\cot\theta = \frac{\cos\theta}{\sin\theta}, \sin\theta \neq 0$

متطابقات المقلوب:

$\sin\theta = \frac{1}{\csc\theta}, \csc\theta \neq 0$ $\qquad$ $\csc\theta = \frac{1}{\sin\theta}, \sin\theta \neq 0$

$\cos\theta = \frac{1}{\sec\theta}, \sec\theta \neq 0$ $\qquad$ $\sec\theta = \frac{1}{\cos\theta}, \cos\theta \neq 0$

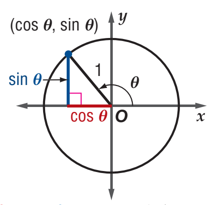
$\tan\theta = \frac{1}{\cot\theta}, \cot\theta \neq 0$ $\qquad$ $\cot\theta = \frac{1}{\tan\theta}, \tan\theta \neq 0$

متطابقات فيثاغورس:

$\cos^2\theta + \sin^2\theta = 1$

$\tan^2\theta + 1 = \sec^2\theta$

$\cot^2\theta + 1 = \csc^2\theta$



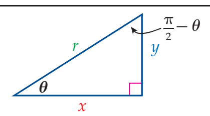
حسب نظرية فيثاغورس $\cos^2\theta + \sin^2\theta = 1$

متطابقات الزاويتين المتتامتين:

$\sin\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = \cos\theta$

$\cos\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = \sin\theta$

$\tan\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = \cot\theta$



$\sin\theta = \frac{y}{r} = \cos\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right)$

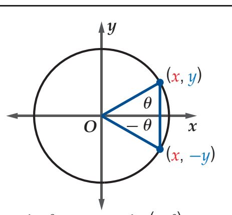
$\tan\theta = \frac{y}{x} = \cot\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right)$

متطابقات الدوال الزوجية والدوال الفردية:

$\sin(-\theta) = -\sin\theta$

$\cos(-\theta) = \cos\theta$

$\tan(-\theta) = -\tan\theta$



$\sin\theta = y$ $\qquad$ $\sin(-\theta) = -y$

$\cos\theta = x$ $\qquad$ $\cos(-\theta) = x$

إرشادات للدراسة

متطابقات الزاويتين المتتامتين:

يمكن كتابة متطابقات الزاويتين المتتامتين بالدرجات كما يلي:

$\sin(90° - \theta) = \cos\theta$

مصادر الدرس 1 – 3

المصدر	دون المتوسط	ضمن المتوسط	فوق المتوسط
دليل المعلم	• تنويع التعليم ص (137)	• تنويع التعليم ص (137 , 140)	• تنويع التعليم ص (138 , 140)
كتاب التمارين	• ص (17)	• ص (17)	• ص (17)
مصادر المعلم للأنشطة الصفية	• تدريبات إعادة التعليم، ص (6) • تدريبات حل المسألة، ص (8)	• تدريبات حل المسألة، ص (8) • التدريبات الإثرائية، ص (9)	• تدريبات حل المسألة، ص (8) • التدريبات الإثرائية، ص (9)

يمكنك استعمال المتطابقات الأساسية، والمطابقة $\cot\theta = \frac{\cos\theta}{\sin\theta}$ ؛ لإيجاد القيم الدقيقة للدوال المثلثية، كما يمكنك إيجاد قيم تقريبية لها باستعمال الحاسبة البيانية.

مثال 1 استعمال المتطابقات المثلثية

a) أوجد القيمة الدقيقة لـ $\cos\theta$، إذا كان $\sin\theta = \frac{1}{4}$، $90° < \theta < 180°$.

$\cos^2\theta + \sin^2\theta = 1$ متطابقات فيثاغورس

$\cos^2\theta = 1 - \sin^2\theta$ اطرح $\sin^2\theta$ من كلا الطرفين

$\cos^2\theta = 1 - \left(\frac{1}{4}\right)^2$ عوّض $\frac{1}{4}$ بدلاً من $\sin\theta$

$\cos^2\theta = 1 - \frac{1}{16}$ بإيجاد مربع العدد $\frac{1}{4}$

$\cos^2\theta = \frac{15}{16}$ اطرح

$\cos\theta = \pm\frac{\sqrt{15}}{4}$ خذ الجذر التربيعي لكلا الطرفين

وبما أن θ تقع في الربع الثاني، فإن $\cos\theta$ تكون سالبة ، ولذلك فإن $\cos\theta = -\frac{\sqrt{15}}{4}$.

التحقق: استعمل الحاسبة لإيجاد الإجابة التقريبية.

الخطوة 1: أوجد $\text{Arcsin}\,\frac{1}{4}$.

$\sin^{-1}\frac{1}{4} \approx 14.48°$ استعمل الحاسبة

لأن $90° < \theta < 180°$ ، فإن $\theta \approx 180° - 14.48° = 165.52°$.

الخطوة 2: أوجد $\cos\theta$

عوض عن θ بـ $165.52°$.

$\cos 165.52° \approx -0.97$

الخطوة 3: قارن الإجابة مع القيمة الدقيقة.

$-\frac{\sqrt{15}}{4} \overset{?}{\approx} -0.97$

$-0.968 \approx -0.97$ ✓

b) أوجد القيمة الدقيقة لـ $\csc\theta$ إذا كان $270° < \theta < 360°$; $\cot\theta = -\frac{3}{5}$

$\cot^2\theta + 1 = \csc^2\theta$ متطابقات فيثاغورس

$\left(-\frac{3}{5}\right)^2 + 1 = \csc^2\theta$ عوّض $-\frac{3}{5}$ بدلاً من $\cot\theta$

$\frac{9}{25} + 1 = \csc^2\theta$ بإيجاد مربع العدد $-\frac{3}{5}$

$\frac{34}{25} = \csc^2\theta$ $\quad \frac{9}{25} + 1 = \frac{9}{25} + \frac{25}{25} = \frac{34}{25}$

$\pm\frac{\sqrt{34}}{5} = \csc\theta$ خذ الجذر التربيعي للطرفين.

وبما أن θ تقع في الربع الرابع، فإن $\csc\theta$ سالبة، ولذلك $\csc\theta = -\frac{\sqrt{34}}{5}$.

تحقق من فهمك

1A) أوجد القيمة الدقيقة لـ $\sin\theta$ إذا كان $\cos\theta = \frac{1}{3}$ ، $270° < \theta < 360°$. $-\frac{2\sqrt{2}}{3}$

1B) أوجد القيمة الدقيقة لـ $\sec\theta$ إذا كان $\sin\theta = -\frac{2}{7}$ ، $180° < \theta < 270°$. $-\frac{7\sqrt{5}}{15}$

إرشادات للدراسة

الأرباع: يساعدك الجدول أدناه على تذكر أي النسب المثلثية موجبة، وأيها سالبة في كل ربع من الأرباع: 1,2,3,4 .

الدالة	+	−
$\sin\theta$	1 , 2	3 , 4
$\cos\theta$	1 , 4	2 , 3
$\tan\theta$	1 , 3	2 , 4
$\csc\theta$	1 , 2	3 , 4
$\sec\theta$	1 , 4	2 , 3
$\cot\theta$	1 , 3	2 , 4

المتطابقات المثلثية الأساسية

مثال 1 يبيّن كيفية إيجاد قيم دالة مثلثية لزاوية معينة في ربع محدد.

التقويم التكويني

استعمل تدريبات " تحقق من فهمك " بعد كل مثال؛ للتحقق من مدى فهم الطلاب للمفاهيم.

مثال إضافي

1 a) أوجد القيمة الدقيقة لـ $\tan\theta$. إذا كان $\sec\theta = -2$، $180° < \theta < 270°$. $\tan\theta = \sqrt{3}$

b) أوجد القيمة الدقيقة لـ $\sin\theta$. إذا كان $\cos\theta = -\frac{1}{2}$، $90° < \theta < 180°$. $\sin\theta = \frac{\sqrt{3}}{2}$

تنويع التعليم

دون ضمن

إذا واجه الطلاب صعوبة في فهم المتطابقات المثلثية،

فقم بتشجيعهم على العمل في مجموعات من ثلاثة طلاب، واطلب إلى كل مجموعة اختيار إحدى المتطابقات المثلثية الأساسية الموجودة في إطار "مفهوم أساسي" والعمل معًا للتحقق من صحتها، مستعملين تعريفات الجيب، وجيب التمام، والظل بدلالة أضلاع المثلث القائم الزاوية.

تبسط العبارات:

مثال 2 يبيِّن كيفية تبسيط عبارة بكتابتها على صورة دالة مثلثية واحدة إن أمكن.

مثال 3 يبيِّن تبسيط عبارة من واقع الحياة تتضمن دوال مثلثية.

مثالان إضافيان

2 بسّط العبارة :
$\cos^2\theta . \sin\theta (\csc\theta - \sin\theta)$

3 **استضاءة** ارجع إلى فقرة "لماذا؟" في بداية الدرس.

a) حل المعادلة $\sec\theta = \frac{I}{ER^2}$ بالنسبة لـ R .

$R = \sqrt{\frac{I\cos\theta}{E}}$

b) هل المعادلة في **a** مكافئة للمعادلة $\frac{1}{R^2} = \frac{E}{I\sec\theta}$ ؟ **لا**

المحتوى الرياضي

المتطابقات: يجب على الطلاب أن يتذكروا جيدًا المتطابقات النسبية، ومتطابقات المقلوب، ومتطابقات فيثاغورس. وعلى الرغم من أن تذكر المتطابقات الأخرى مفيد إلا أنه يمكن اشتقاقها من المتطابقات الأساسية.

التعليم باستعمال التقنيات

مدونة : اطلب إلى الطلاب كتابة مدونة تتضمن المتطابقات المثلثية الأساسية، وصيغًا من هذا الفصل.

تبسيط العبارات المثلثية : تبسيط العبارات الرياضية التي تحتوي على الدوال المثلثية، يعني إيجاد قيمة عددية للعبارة ، أو كتابتها بدلالة دالة مثلثية واحدة فقط، إن أمكن.

إرشادات للدراسة

تبسيط العبارة المثلثية
عند تبسيط العبارات المثلثية يكون من الأسهل عادة أن تُكتب حدود العبارة جميعها بدلالة: الجيب$(\sin\theta)$ و/أو بدلالة جيب التمام $(\cos\theta)$.

مثال 2 تبسيط العبارة المثلثية

بسّط العبارة : $\frac{\sin\theta\csc\theta}{\cot\theta}$.

$$\frac{\sin\theta\csc\theta}{\cot\theta} = \frac{\sin\theta\frac{1}{\sin\theta}}{\frac{1}{\tan\theta}} \qquad \csc\theta = \frac{1}{\sin\theta},\ \cot\theta = \frac{1}{\tan\theta}$$

$$= \frac{1}{\frac{1}{\tan\theta}} \qquad \frac{\sin\theta}{\sin\theta} = 1$$

$$= \frac{1}{1}\cdot\frac{\tan\theta}{1} = \tan\theta \qquad \frac{a}{b}\div\frac{c}{d} = \frac{a}{b}\cdot\frac{d}{c}$$

تحقق من فهمك

2A) $\frac{\tan^2\theta\csc^2\theta - 1}{\sec^2\theta}$ $\sin^2\theta$

2B) $\frac{\sec\theta}{\sin\theta}(1-\cos^2\theta)$ $\tan\theta$

تاريخ الرياضيات

الفراعنة القدماء هم أول من عرف حساب المثلثات، وساعدهم ذلك على بناء الأهرامات الثلاثة، ثم طوّره علماء المسلمين من بعدهم ووضعوا الأسس الحديثة له ، وأصبح علمًا مستقلًا بذاته، وكان من أوائل المؤسسين له : أبو عبدالله البتاني، والزرقلي ، ونصير الدين الطوسي.

تبسيط العبارات المثلثية يمكن أن يكون مفيدًا في حل مسائل من واقع الحياة.

مثال 3 من واقع الحياة إعادة كتابة الصيغ الرياضية

الاستضاءة: ارجع إلى فقرة "لماذا؟" في بداية الدرس.

a) حل المعادلة $\sec\theta = \frac{I}{ER^2}$ بالنسبة لـ E.

$$\sec\theta = \frac{I}{ER^2} \qquad \text{المعادلة الأصلية}$$

$$E\sec\theta = \frac{I}{R^2} \qquad E \text{ اضرب كلا الطرفين في}$$

$$E\frac{1}{\cos\theta} = \frac{I}{R^2} \qquad \sec\theta = \frac{1}{\cos\theta}$$

$$E = \frac{I\cos\theta}{R^2} \qquad \cos\theta \text{ اضرب كلا الطرفين في}$$

b) هل المعادلة في الفرع **a** تكافئ المعادلة $R^2 = \frac{I\tan\theta\cos\theta}{E}$ ؟ فسِّر إجابتك.

$$R^2 = \frac{I\tan\theta\cos\theta}{E} \qquad \text{المعادلة الأصلية}$$

$$ER^2 = I\tan\theta\cos\theta \qquad E \text{ اضرب كلا الطرفين في}$$

$$E = \frac{I\tan\theta\cos\theta}{R^2} \qquad R^2 \text{ اقسم كلا الطرفين على}$$

$$E = \frac{I\frac{\sin\theta}{\cos\theta}\cos\theta}{R^2} \qquad \tan\theta = \frac{\sin\theta}{\cos\theta}$$

$$E = \frac{I\sin\theta}{R^2} \qquad \text{بسّط}$$

المعادلتان غير متكافئتين؛ فالمعادلة $R^2 = \frac{I\tan\theta\cos\theta}{E}$ تبسّط إلى: $E = \frac{I\sin\theta}{R^2}$ ، بينما المعادلة في الفرع **(a)** هي: $E = \frac{I\cos\theta}{R^2}$.

تحقق من فهمك

3) تعلم أن مقدار العزم (τ) يساوي حاصل ضرب القوة (F) في ذراعها، ويعطى بالمعادلة. $\tau = Fr\sin\theta$
أعد كتابة المعادلة السابقة بدلالة (F). $F = \frac{\tau}{r\sin\theta}$

تنويع التعليم

فوق

توسّع: يهتم الطلاب ذوو المستوى فوق المتوسط على الأغلب بتعلم كيفية نشوء بعض الأفكار الرياضية؛ لذا زوّدهم بمعلومات حول تاريخ الرياضيات تتضمن إسهامات العلماء المسلمين.

تدرب وحل المسائل

أوجد القيمة الدقيقة لكل من النسب المثلثية الآتية: (مثال 1)

1) $\tan \theta$ ، إذا كان $\cot \theta = 2$ ، $0° < \theta < 90°$ $\frac{1}{2}$

2) $\csc \theta$ ، إذا كان $\cos \theta = \frac{2}{3}$ ، $0° < \theta < 90°$ $\frac{3\sqrt{5}}{5}$

3) $\sin \theta$ ، إذا كان $\cos \theta = \frac{5}{13}$ ، $270° < \theta < 360°$ $-\frac{12}{13}$

4) $\sec \theta$ ، إذا كان $\tan \theta = -1$ ، $270° < \theta < 360°$ $\sqrt{2}$

5) $\tan \theta$ ، إذا كان $\sec \theta = -3$ ، $180° < \theta < 270°$ $2\sqrt{2}$

6) $\csc \theta$ ، إذا كان $\cot \theta = \frac{1}{4}$ ، $180° < \theta < 270°$ $\frac{-\sqrt{17}}{4}$

7) $\cos \theta$ ، إذا كان $\sin \theta = \frac{4}{5}$ ، $90° < \theta < 180°$ $\frac{-3}{5}$

8) $\cot \theta$ ، إذا كان $\sec \theta = -\frac{9}{2}$ ، $\sin \theta < 0$ $\frac{2\sqrt{77}}{77}$

بسّط كل عبارة مما يأتي: (مثال 2)

9) $\tan \theta \cos^2 \theta$ $\sin \theta \cos \theta$

10) $\csc^2 \theta - \cot^2 \theta$ 1

11) $\frac{\cos \theta \csc \theta}{\tan \theta}$ $\cot^2 \theta$

12) $\sec \theta \tan^2 \theta + \sec \theta$ $\sec^3 \theta$

13) $\sin \theta (1 + \cot^2 \theta)$ $\csc \theta$

14) $\sin\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right)\sec \theta$ 1

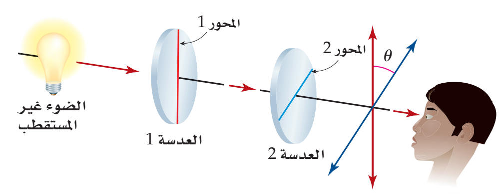
15) $\frac{\cos(-\theta)}{\sin(-\theta)}$ $-\cot \theta$

16) $(1 + \sin \theta)(1 - \sin \theta)$ $\cos^2 \theta$

17) $2 - 2\sin^2 \theta$ $2\cos^2 \theta$

18) $\csc \theta - \cos \theta \cot \theta$ $\sin \theta$

19) **بصريات:** عندما يمر الضوء من خلال عدسة مستقطبة للضوء، فإن شدة الضوء المار بهذه العدسة سيقل بمقدار النصف، ثم إذا مرّ الضوء بعدسة أخرى بحيث يكون محور هذه العدسة يصنع زاوية قياسها θ مع محور العدسة الأولى، فإن شدة الضوء تقل مرة أخرى. يمكننا إيجاد شدة الضوء باستعمال الصيغة $I = I_0 - \frac{I_0}{\csc^2 \theta}$ ، حيث I_0 شدة الضوء القادمة من العدسة الأولى المستقطبة، I هي شدة الضوء الخارجة من العدسة الثانية، θ الزاوية بين محوري العدستين. (مثال 3)



a) بسّط الصيغة بدلالة $\cos \theta$ $I = I_0 \cos^2 \theta$

b) استعمل الصيغة المبسطة؛ لمعرفة شدة الضوء المار بالعدسة الثانية بدلالة شدة الضوء قبل المرور بها إذا كان محور العدسة الثانية يصنع زاوية قياسها 30° مع محور العدسة الأولى.

27b) $I = \frac{3}{4} I_0$؛ شدة الضوء تساوي ثلاثة أرباع شدة الضوء قبل المرور بالعدسة الثانية.

20) **الشمس:** ترتبط قدرة كل جسم على امتصاص الطاقة بعامل e يُسمّى قابلية الامتصاص للجسم. ويمكن حساب قابلية الامتصاص باستعمال العلاقة $e = \frac{W \sec \theta}{AS}$ ، حيث W معدل امتصاص جسم الإنسان للطاقة من الشمس، و S مقدار الطاقة المنبعثة من الشمس بالواط لكل متر مربّع، و A المساحة السطحية المعرّضة لأشعة الشمس، و θ الزاوية بين أشعة الشمس والخط العمودي على الجسم.

a) حل المعادلة بالنسبة لـ W. $W = eAS \cos \theta$

b) أوجد W إذا كانت $e = 0.80 , \theta = 40° , A = 0.75$ ، $S = 1000 \text{ W/m}^2$. (قرّب إلى أقرب جزء من مئة). $459.63W$

21) **تمثيلات متعددة:** في هذه المسألة، سوف تستعمل الحاسبة البيانية ؛ لتحدد ما إذا كانت معادلة ما تمثّل متطابقة مثلثية أم لا . هل تُمثّل المعادلة: $\tan^2 \theta - \sin^2 \theta = \tan^2 \theta \sin^2 \theta$ متطابقة؟

a) **جدوليًا:** أكمل الجدول الآتي.

θ	0°	30°	45°	60°
$\tan^2 \theta - \sin^2 \theta$	0	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{9}{4}$
$\tan^2 \theta \sin^2 \theta$	0	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{9}{4}$

b) **بيانيًا:** استعمل الحاسبة البيانية لتمثل كلًّا من طرفي المعادلة $\tan^2 \theta - \sin^2 \theta = \tan^2 \theta \sin^2 \theta$ كدالة ، بيانيًّا. انظر الهامش.

c) **تحليليًا:** "إذا كان التمثيلان البيانيان لدالتين متطابقين ؛ فإن المعادلة تمثّل متطابقة". هل التمثيلان البيانيان في الفرع **(b)** متطابقان؟ نعم

d) **تحليليًا:** استعمل الحاسبة البيانية لمعرفة ما إذا كانت المعادلة: $\sec^2 x - 1 = \sin^2 x \sec^2 x$ تمثّل متطابقة أم لا . (تأكد أنّ الحاسبة البيانية بنظام الدرجات) نعم

22) **التزلّج على الجليد:** يتزلّج شخص كتلته m في اتجاه أسفل هضبة ثلجية بزاوية قياسها θ درجة وبسرعة ثابتة. عند تطبيق قانون نيوتن في مثل هذه الحالة ينتج نظام المعادلات الآتي:

$\mu_k = \tan \theta$

$F_n - mg \cos \theta = 0 , mg \sin \theta - \mu_k F_n = 0$ ، حيث g تسارع الجاذبية الأرضية، و F_n القوة العمودية المؤثّرة في المتزلج، و μ_k معامل الاحتكاك. استعمل هذا النظام لتكتب μ_k كدالة في θ.

تمثيلات متعددة

يستعمل الطلاب جدول القيم إضافة إلى الحاسبة البيانية في السؤال 21، لتحديد ما إذا كانت المعادلة المعطاة تمثّل متطابقة أم لا .

3 التدريب

التقويم التكويني

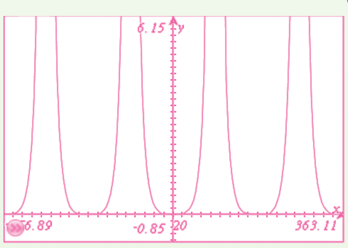
استعمل الأسئلة 1-17 للتأكد من فهم الطلاب. ثم استعمل الجدول أسفل هذه الصفحة؛ لتعيين الواجبات المنزلية للطلاب بحسب مستوياتهم.

إرشادات للمعلم الجديد

النسب المثلثية: يمكنك استعمال التعريفات الأساسية لكل من الجيب، وجيب التمام، والظل بوصفها نسبة تعتمد على الضلع المقابل، والضلع المجاور، والوتر في المثلث القائم الزاوية لتوضيح أن $\frac{\sin \theta}{\cos \theta} = \tan \theta$.

إجابة:

21b)



تنويع الواجبات المنزلية

المستوى	الأسئلة
دون المتوسط	1–17، 22، 27–40
ضمن المتوسط	1–17 (فردي)، 18–22، 24–40
فوق المتوسط	18–40

بسّط كلًّا مما يأتي:

23) $\dfrac{\cos\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)-1}{1+\sin(-\theta)}$ **-1**

24) $\dfrac{\sec\theta\sin\theta+\cos\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)}{1+\sec\theta}$ **$\sin\theta$**

مسائل مهارات التفكير العليا

25) **اكتشف الخطأ:** تحاور سعيد وأحمد حول معادلة في الواجب المنزلي، فقال سعيد: إنها متطابقة، حيث جرَّب 10 قيم للمتغير وحققت جميعها المعادلة فعلًا، بينما قال أحمد: إنها ليست متطابقة، حيث استطاع إيجاد قيمة للمتغير لا تتحقق عندها المعادلة. أيهما كانت إجابته صحيحة؟ فسِّر إجابتك. **انظر الهامش.**

26) **تحدٍّ:** أوجد مثالًا مضادًّا يبيّن أنّ: $1-\sin x=\cos x$ ليست متطابقة. **إجابة ممكنة: $x=45°$**

27) **تبرير:** وضِّح كيف يمكن إعادة كتابة معادلة الاستضاءة الموجودة في فقرة "لماذا؟" في بداية الدرس، على الصورة: $\cos\theta=\frac{ER^2}{I}$. **انظر الهامش.**

28) **اكتب:** بيّن كيف تستعمل نظرية فيثا غورس لإثبات صحة المتطابقة: $\cos^2\theta+\sin^2\theta=1$. **انظر الهامش.**

29) **برهان:** برهن أنّ $\tan(-a)=-\tan a$ تمثّل متطابقة. **انظر الهامش.**

30) **مسألة مفتوحة:** اكتب عبارتين تكافئ كل منهما العبارة: $\tan\theta\sin\theta$ **انظر الهامش.**

31) **تبرير:** بيِّن كيف يمكنك استعمال القسمة لإعادة كتابة المتطابقة $\sin^2\theta+\cos^2\theta=1$ على الصورة: $1+\cot^2\theta=\csc^2\theta$ **أقسم جميع الحدود على $\sin^2\theta$**

32) **اكتشف الخطأ:** بسّط كل من علاء وسامي المقدار $\dfrac{\sin^2\theta}{\cos^2\theta+\sin^2\theta}$ كما يأتي. أيهما كانت إجابته صحيحة؟ برِّر إجابتك. **سامي؛ لأن علاءً استعمل العلاقة الخاطئة $\frac{a}{b+c}=\frac{a}{c}+\frac{a}{b}$**

علاء

$$\frac{\sin^2\theta}{\cos^2\theta+\sin^2\theta}$$
$$=\frac{\sin^2\theta}{\cos^2\theta}+\frac{\sin^2\theta}{\sin^2\theta}$$
$$=\tan^2\theta+1$$
$$=\sec^2\theta$$

سامي

$$\frac{\sin^2\theta}{\cos^2\theta+\sin^2\theta}$$
$$=\frac{\sin^2\theta}{1}$$
$$=\sin^2\theta$$

مراجعة تراكمية

أوجد قيمة كلٍّ ممّا يأتي، اكتب قياس الزاوية بالراديان، وقرّب الناتج إلى أقرب جزء من مئة إذا لزم. (مهارة سابقة)

33) $\mathrm{Cos}^{-1}\left(-\frac{1}{2}\right)$ **$\frac{2}{3}\pi=2.09$**

34) $\tan\left(\mathrm{Cos}^{-1}\frac{6}{7}\right)$ **0.60**

35) $\sin\left(\mathrm{Arctan}\frac{\sqrt{3}}{3}\right)$ **0.5**

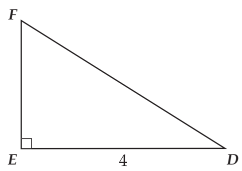
36) $\cos\left(\mathrm{Arcsin}\frac{3}{5}\right)$ **0.8**

37) أوجد قيمة K التي تجعل الدالة: $f(x)=\begin{cases}K+x^2, & x<5\\ 3x+2, & x\geq 5\end{cases}$ متصلة عند $x=5$. (الدرس 3-1) **$K=-8$**

38) حل المعادلة: $2^x=32^{x-2}$. (الدرس 2-2) **$x=2.5$**

تدريب على اختبار

39) في الشكل أدناه، إذا كان $\cos D=0.8$، فما طول $\overline{DF}$؟ **A**



A 5   C 3.2

B 4   D 10

40) إذا كان $\sin x=m$ وَ $0<x<90°$، فما قيمة $\tan x$؟ **B**

A $\dfrac{1}{m^2}$

B $\dfrac{m\sqrt{1-m^2}}{1-m^2}$

C $\dfrac{1-m^2}{m}$

D $\dfrac{m}{1-m^2}$

تنبيه!

اكتشف الخطأ: يتعين على الطلاب في السؤال 25، أن يعرفوا أن حل أحمد هو الصحيح؛ لذا اشرح لهم أنه لا يمكن استعمال البرهان الاستقرائي لإثبات صحة المتطابقة. لكن أي مثال مضاد يعد كافيًا لإثبات أن المعادلة لا تمثل متطابقة.

وعليهم أن يعرفوا أيضًا في السؤال 32، أن جواب سامي هو الصحيح؛ لأن $\cos^2\theta+\sin^2\theta=1$. وهكذا يكون حل علاء خطأً؛ لأن $\frac{a}{b+c}\neq\frac{a}{b}+\frac{a}{c}$. بيِّن للطلاب أنه عند تبسيط العبارات المثلثية فإنهم يستعملون الخصائص نفسها كما يبسّطون أي عبارة نسبية.

4 التقويم

تعلم لاحق: اطلب إلى الطلاب إلقاء نظرة على الدرس 3-2 اللاحق، واطلب إليهم تحديد كيف يمكن أن يساعدهم الدرس الحالي على فهم الدرس اللاحق.

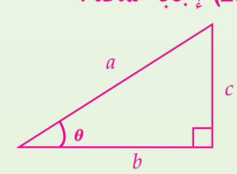
إجابات:

25) أحمد؛ لم يبرهن سعيد صحة المتطابقة عند جميع قيم θ، وقد يكون هناك قيم أخرى لا تحقق المعادلة.

27) $\sec\theta=\frac{I}{ER^2}$

$$\frac{1}{\cos\theta}=\frac{I}{ER^2}$$
$$I\cos\theta=ER^2$$
$$\cos\theta=\frac{ER^2}{I}$$

28) إجابة ممكنة:



$$\sin^2\theta+\cos^2\theta=$$
$$\frac{c^2}{a^2}+\frac{b^2}{a^2}=$$
$$\frac{c^2+b^2}{a^2}=$$
$$\frac{a^2}{a^2}=1$$

تنويع التعليم

ضمن فوق

توسّع: اسأل الطلاب: هل يمكن دائمًا تبسيط أي عبارة مثلثية بكتابتها على صورة دالة مثلثية واحدة؟ واطلب إليهم أن يكتبوا مثالًا إذا كان ذلك غير ممكن، أو يوضحوا لماذا يكون ذلك ممكنًا.

29) $\tan(-a)=\dfrac{\sin(-a)}{\cos(-a)}$

$$=\frac{-\sin a}{\cos a}$$
$$=-\frac{\sin a}{\cos a}$$
$$=-\tan a$$

30) إجابة ممكنة:

$\dfrac{\sin^2\theta}{\cos\theta}$, $\sin^2\theta\sec\theta$

3-2 إثبات صحة المتطابقات المثلثية
Verifying Trigonometric Identities

فيما سبق:

درست كيفية استعمال المتطابقات لإيجاد قيم العبارات المثلثية وتبسيطها. (الدرس 3-1)

والآن:

- أثبت صحة المتطابقة المثلثية بتحويل أحد طرفيها إلى الآخر.
- أثبت صحة المتطابقة المثلثية بتحويل كلا طرفيها إلى العبارة نفسها.

www.obeikaneducation.com

لماذا؟

عندما ركض عبدالله في مسار دائري نصف قطره R، لاحظ أن جسمه لا يكون عموديًّا على الأرض، بل يميل عن الخط العمودي بزاوية حادّة غير سالبة هي θ تُسمى زاوية الميل، ويمكن وصفها بالمعادلة: $\tan\theta = \frac{v^2}{gR}$، حيث g تسارع الجاذبية الأرضية، و v سرعة العداء.

كما توجد معادلات أخرى يمكن أن تصف زاوية الميل بدلالة دوال مثلثية أخرى، كالمعادلة: $\sin\theta = \frac{v^2}{gR}\cos\theta$، حيث $0 \le \theta \le 90°$.

هل تختلف هاتان المعادلتان كليًّا عن بعضهما بعضًا، أم أنهما صيغتان للعلاقة نفسها؟

تحويل أحد طرفي المتطابقة: يمكن استعمال المتطابقات المثلثية الأساسية بالإضافة إلى تعريف الدوال المثلثية لإثبات صحّة المتطابقات. وجدير بالذكر أن إثبات صحة المتطابقة المثلثية، يعني إثبات صحتها لقيم θ جميعها.

مفهوم أساسي — **إثبات صحة متطابقة من خلال تحويل أحد طرفيها**

بسِّط أحد طرفي المتطابقة حتى يصبح الطرفان متساويين. وفي العادة يكون من الأسهل البدء بالطرف الأكثر تعقيدًا.

مثال 1 — **إثبات صحة المتطابقة من خلال تحويل أحد طرفيها**

أثبت أن المعادلة $\frac{\sin^2\theta}{1-\cos\theta} = 1+\cos\theta$ تمثِّل متطابقة.

$\frac{\sin^2\theta}{1-\cos\theta}$	الطرف الأيسر
$= \frac{\sin^2\theta}{1-\cos\theta} \cdot \frac{1+\cos\theta}{1+\cos\theta}$	اضرب كلًّا من البسط والمقام في $1+\cos\theta$
$= \frac{\sin^2\theta(1+\cos\theta)}{1-\cos^2\theta}$	$(1+\cos\theta)(1-\cos\theta) = 1-\cos^2\theta$
$= \frac{\sin^2\theta\,(1+\cos\theta)}{\sin^2\theta}$	$\sin^2\theta = 1-\cos^2\theta$
$= 1+\cos\theta$ ✓	اقسم كلًّا من البسط والمقام على $\sin^2\theta$

ويساوي الطرف الأيمن من المعادلة.

إرشادات للدراسة

إثبات صحة متطابقة

توجد حلول أخرى لإثبات أن الطرف الأيسر يساوي الطرف الأيمن في المثال رقم (1).

تحقق من فهمك

1) $\cot^2\theta - \cos^2\theta = \cot^2\theta\cos^2\theta$. انظر الهامش.

3-2 ملاحظات الدرس

1 التركيز

الترابط الرأسي

ما قبل الدرس 3-2

استعمال المتطابقات لإيجاد قيم العبارات المثلثية وتبسيطها.

الدرس 3-2

إثبات صحة المتطابقات المثلثية بتحويل طرف من المعادلة إلى الشكل الموجود في الطرف الآخر.

إثبات صحة المتطابقات المثلثية من خلال تحويل كلا طرفي المعادلة إلى العبارة نفسها.

ما بعد الدرس 3-2

استعمال متطابقات النسب المثلثية لمجموع زاويتين والفرق بينهما لإثبات صحة متطابقات مثلثية أخرى أو تبسيطها.

2 التدريس

أسئلة التعزيز

اطلب إلى الطلاب قراءة فقرة "لماذا؟".

واسأل:

- أيّ المتغيرات يظهر في بسط الطرف الأيمن من معادلة زاوية الميلان؟ وأيها يظهر في المقام؟ v في البسط، R , g في المقام
- كيف تستطيع التعبير عن $\tan\theta$ بدلالة $\sin\theta$ و $\cos\theta$؟ $\tan\theta = \frac{\sin\theta}{\cos\theta}$
- هل $\frac{\sin\theta}{\cos\theta}$ يساوي $\frac{v^2}{gR}$ أو $\frac{gR}{v^2}$؟ $\frac{v^2}{gR}$

إجابة (تحقق من فهمك):

1) $\cot^2\theta - \cos^2\theta =$

$\frac{\cos^2\theta}{\sin^2\theta} - \cos^2\theta =$

$\cos^2\theta\left(\frac{1}{\sin^2\theta} - 1\right) =$

$\cos^2\theta(\csc^2\theta - 1)$

$\cot^2\theta\cos^2\theta$

مصادر الدرس 3-2

المصدر	دون المتوسط	ضمن المتوسط	فوق المتوسط
دليل المعلم	• تنويع التعليم ص (142)	• تنويع التعليم ص (142)	• تنويع التعليم ص (142 , 144)
كتاب التمارين	• ص (18)	• ص (18)	• ص (18)
مصادر المعلم للأنشطة الصفية	• تدريبات إعادة التعليم، ص (10) • تدريبات حل المسألة، ص (12)	• تدريبات حل المسألة، ص (12) • التدريبات الإثرائية، ص (13)	• تدريبات حل المسألة، ص (12) • التدريبات الإثرائية، ص (13)

التقويم التكويني

استعمل تدريبات "تحقق من فهمك" بعد كل مثال؛ للتحقق من مدى فهم الطلاب للمفاهيم.

تحويل أحد طرفي المعادلة:

مثال 1 يبيِّن كيفية إثبات صحة متطابقة من خلال تحويل أحد طرفيها.

مثال 2 يبيِّن كيفية إيجاد عبارة تكافئ عبارة مثلثية معطاة.

مثالان إضافيان

1 أثبت صحة المتطابقة $\csc\theta \cos\theta \tan\theta = 1$.

الطرف الأيسر $\csc\theta \cos\theta \tan\theta$

$= \frac{1}{\sin\theta} \cdot \cos\theta \cdot \frac{\sin\theta}{\cos\theta}$ $\quad \csc\theta = \frac{1}{\sin\theta}, \tan\theta = \frac{\sin\theta}{\cos\theta}$

$= 1$ ✓

ويساوي الطرف الأيمن

2 تدريب على اختبار:

أي مما يأتي يكافئ العبارة $\frac{\csc\theta}{\cos\theta} - \tan\theta$؟ A

A $\cot\theta$ **C** 0

B $\frac{1-\sin\theta}{\cos^2\theta}$ **D** $\cos^2\theta$

عند حل أسئلة الاختيار من متعدد في المتطابقات، يمكنك تعزيز إجابتك عدديًّا، وذلك باختيار قيمة لـ θ. وتعويضها في العبارة التي يمثلها البديل الذي اخترته، ثم مقارنتها بقيمة العبارة الواردة في نص السؤال، ولكن ذلك لايمكن أن يكون بديلًا عن تحويل العبارة المعطاة حتى تطابق أحد البدائل.

مثال 2 على اختبار

أي مما يأتي يكافئ العبارة $\frac{\cos\theta \csc\theta}{\tan\theta}$؟

A $\cot\theta$ **C** $\cot^2\theta$

B $\csc\theta$ **D** $\csc^2\theta$

اقرأ فقرة الاختبار

المطلوب إيجاد عبارة مكافئة للعبارة الأصلية. لاحظ أن جميع البدائل المعطاة تتضمّن إما $\cot\theta$ أو $\csc\theta$. لذا اعمل على أن تستبدل بالدوالّ دوالّ مثلثية أخرى.

حُلّ فقرة الاختبار

حوّل العبارة المعطاة حتى تطابق إحدى البدائل.

$\frac{\cos\theta \csc\theta}{\tan\theta} = \frac{\cos\theta \frac{1}{\sin\theta}}{\frac{\sin\theta}{\cos\theta}}$ $\quad \csc\theta = \frac{1}{\sin\theta}, \tan\theta = \frac{\sin\theta}{\cos\theta}$

$= \frac{\frac{\cos\theta}{\sin\theta}}{\frac{\sin\theta}{\cos\theta}}$ اضرب

$= \frac{\cos\theta}{\sin\theta} \cdot \frac{\cos\theta}{\sin\theta}$ اقلب المقام واضربه بالبسط

$= \cot\theta \cdot \cot\theta$ $\quad \cot\theta = \frac{\cos\theta}{\sin\theta}$

$= \cot^2\theta$ اضرب

الجواب هو C.

تحقق من فهمك

2) أي مما يأتي يكافئ العبارة $\tan^2\theta(\cot^2\theta - \cos^2\theta)$؟ C

A $\cot^2\theta$ **C** $\cos^2\theta$

B $\tan^2\theta$ **D** $\sin^2\theta$

تنبيه!

تبسيط الطرفين

تشبه عملية إثبات صحة المتطابقة، عملية التحقق من حل المعادلة. ومن هنا يمكنك استعمال عملية التحقق في تبسيط أحد الطرفين أو كليهما للحصول على العبارة ذاتها.

إرشادات للاختبار

التأكد من الإجابات

كي تتحقق من صحة حلك اختر قيمة لـ θ، وعوّضها في العبارة الجديدة، ثم قارنها بإجابتك عند تعويض قيمة θ في العبارة الأصلية.

تنويع التعليم

دون ضمن فوق

المتعلمون المتفاعلون وزِّع الطلاب في مجموعات ثنائية، ثم اطلب إليهم العمل معًا لإثبات صحة بعض المتطابقات في الأسئلة 10–1. وأن يسجلوا الاستراتيجيات التي وجدوها مفيدة، و يقارنوا بين قائمة استراتيجياتهم والقائمة المقترحة في نهاية هذه الصفحة من كتاب الطالب. واسألهم: أيّ الاستراتيجيات ثبت نجاحها؟ وأيها فشل؟ ولماذا؟

تحويل طرفي المتطابقة: في بعض الأحيان يكون من الأسهل أن تُحوِّل كل طرف في المتطابقة بصورة منفصلة إلى صورة مشتركة. والاقتراحات الآتية ربما تكون مفيدة في إثبات صحة المتطابقات المثلثية:

مفهوم أساسي — اقتراحات لإثبات صحة المتطابقات

- بسِّط العبارة بالإفادة من المتطابقات المثلثية الأساسية.
- حلّل أو اضرب كلًا من البسط والمقام بالعبارة المثلثية نفسها.
- اكتب كل طرف بدلالة كل من الجيب، وجيب التمام فقط. ثم بسّط كل طرف قدر المستطاع.
- لا تنفذ أي عملية (جمع، طرح، ضرب، قسمة) على طرفي المعادلة التي يطلب إثبات أنها متطابقة؛ لأن خصائص المساواة لا تنطبق على المتطابقات كما تنطبق على المعادلات.

مثال 3 إثبات صحة المتطابقات من خلال تحويل كلا طرفيها

أثبت أن المعادلة $\cos\theta\cot\theta = \csc\theta - \sin\theta$ تمثِّل متطابقة.

نبسِّط الطرف الأيسر

$$\cos\theta\cot\theta = \cos\theta\cdot\frac{\cos\theta}{\sin\theta} \qquad \cot\theta = \frac{\cos\theta}{\sin\theta}$$

$$= \frac{\cos^2\theta}{\sin\theta} \qquad \text{اضرب}$$

نبسِّط الطرف الأيمن

$$\csc\theta - \sin\theta = \frac{1}{\sin\theta} - \sin\theta \qquad \csc\theta = \frac{1}{\sin\theta}$$

$$= \frac{1-\sin^2\theta}{\sin\theta} \qquad \text{اطرح}$$

$$= \frac{\cos^2\theta}{\sin\theta} \qquad \sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$$

بما أن الطرفين يساويان المقدار نفسه، فالطرفان متساويان.

تحقق من فهمك

3) $\csc^2\theta - \cot^2\theta = \cot\theta\tan\theta$. انظر الهامش.

تدرب وحل المسائل

(1-10, 12-23) انظر ملحق الإجابات.

أثبت أن كل معادلة مما يأتي تمثِّل متطابقة: (مثال 1)

1) $\cos^2\theta + \tan^2\theta\cos^2\theta = 1$

2) $\cot\theta(\cot\theta + \tan\theta) = \csc^2\theta$

3) $1 + \sec^2\theta\sin^2\theta = \sec^2\theta$

4) $\sin\theta\sec\theta\cot\theta = 1$

5) $\frac{1-\cos\theta}{1+\cos\theta} = (\csc\theta - \cot\theta)^2$

6) $\frac{1-2\cos^2\theta}{\sin\theta\cos\theta} = \tan\theta - \cot\theta$

7) $\tan\theta = \frac{\sec\theta}{\csc\theta}$

8) $\cos\theta = \sin\theta\cot\theta$

9) $(\sin\theta - 1)(\tan\theta + \sec\theta) = -\cos\theta$

10) $\cos\theta\cos(-\theta) - \sin\theta\sin(-\theta) = 1$

11) **اختيار من متعدد:** أي عبارة مما يأتي تكافئ العبارة $\frac{\tan^2\theta + 1}{\tan^2\theta}$؟ (مثال 2) D

A $\sin^2\theta$ C $\cos^2\theta$

B $\tan^2\theta$ D $\csc^2\theta$

تنويع الواجبات المنزلية

المستوى	الأسئلة
دون دون المتوسط	1-15، 25-40، 44، 46-47، 49-57
ضمن ضمن المتوسط	1-15 (فردي)، 18-40 (زوجي)، 42–47 ، 49-57
فوق فوق المتوسط	16-57

التعليم باستعمال التقنيات

السبورة التفاعلية: حلّ أمثلة على السبورة واحتفظ بملاحظات حولها. ثم ضع ملاحظاتك عند نهاية الحصة على موقع الصف الإلكتروني، فقد يساعد ذلك الطلاب على التركيز على الدروس بدلًا من كتابة الملاحظات حول كل خطوة من خطوات الإثبات.

تحويل طرفي المتطابقة:

مثال 3 يبيِّن كيفية إثبات صحة متطابقة مثلثية من خلال تحويل كل طرف من طرفيها إلى صيغة مشتركة.

مثال إضافي

3 أثبت أن المعادلة

$$\csc\theta + \sec\theta = \frac{1+\cot\theta}{\cos\theta}$$

تمثل متطابقة.

$$\csc\theta + \sec\theta \stackrel{?}{=} \frac{1+\cot\theta}{\cos\theta}$$

$$\frac{1}{\sin\theta} + \frac{1}{\cos\theta} \stackrel{?}{=} \frac{1+\frac{\cos\theta}{\sin\theta}}{\cos\theta}$$

$$\frac{\cos\theta + \sin\theta}{\sin\theta\cos\theta} \stackrel{?}{=} \frac{\sin\theta\left(1+\frac{\cos\theta}{\sin\theta}\right)}{\sin\theta\cos\theta}$$

$$\frac{\cos\theta + \sin\theta}{\sin\theta\cos\theta} = \frac{\sin\theta + \cos\theta}{\sin\theta\cos\theta} \checkmark$$

3 التدريب

التقويم التكويني:

استعمل الأسئلة 1–15 للتأكد من فهم الطلاب.

ثم استعمل الجدول أسفل هذه الصفحة؛ لتعيين الواجبات المنزلية للطلاب بحسب مستوياتهم.

إجابة (تحقق من فهمك):

3) $\csc^2\theta - \cot^2\theta \stackrel{?}{=} \cot\theta\tan\theta$

$$\frac{1}{\sin^2\theta} - \frac{\cos^2\theta}{\sin^2\theta} \stackrel{?}{=} \frac{\cos\theta}{\sin\theta}\cdot\frac{\sin\theta}{\cos\theta}$$

$$\frac{1-\cos^2\theta}{\sin^2\theta} \stackrel{?}{=} 1$$

$$\frac{\sin^2\theta}{\sin^2\theta} \stackrel{?}{=} 1$$

$$1 = 1 \checkmark$$

تمثيلات متعددة

يستعمل الطلاب في السؤال 43 التمثيل البياني والتحليل، ليتوصلوا إلى الصيغة العامة لحل المعادلة المثلثية $2\sin x = 1$.

4 التقويم

تعلم سابق: اطلب إلى الطلاب كتابة كيف ساعدهم تعلّم المتطابقات المثلثية الأساسية في الدرس (1-3) في إثبات صحة متطابقات أكثر تعقيدًا في درس اليوم.

التقويم التكويني

تحقق من مدى استيعاب الطلاب للمفاهيم الواردة في الدرسين 1-3، 2-3 بإعطائهم:

الاختبار القصير 1، ص (49)

إجابات:

41) $y = -\dfrac{gx^2}{2v_0^2}(1+\tan^2\theta) + x\tan\theta$

44) $\sin^2\theta - \cos^2\theta = 2\sin^2\theta$؛ لأن باقي المعادلات هي متطابقات فيثاغورس وهذه المعادلة ليست منها.

46) إجابة ممكنة: هل استعملت المتطابقة $\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$؟

47) إجابة ممكنة: لأنهما أكثر دالتين مثلثتين شيوعًا.

48) بما أن α, β زاويتان متتامتان فإن

$\cos^2\alpha + \cos^2\beta =$

$= \cos^2\alpha + \cos^2(90-\alpha)$

$= \cos^2\alpha + \sin^2\alpha$

$= 1$

أثبت أن كل معادلة مما يأتي تمثّل متطابقة: (مثال 3)

12) $\sec\theta - \tan\theta = \dfrac{1-\sin\theta}{\cos\theta}$

13) $\dfrac{1+\tan\theta}{\sin\theta+\cos\theta} = \sec\theta$

14) $\sec\theta\csc\theta = \tan\theta + \cot\theta$

15) $\sin\theta + \cos\theta = \dfrac{2\sin^2\theta - 1}{\sin\theta - \cos\theta}$

16) $(\sin\theta+\cos\theta)^2 = \dfrac{2+\sec\theta\csc\theta}{\sec\theta\csc\theta}$

17) $\dfrac{\cos\theta}{1-\sin\theta} = \dfrac{1+\sin\theta}{\cos\theta}$

18) $\csc\theta - 1 = \dfrac{\cot^2\theta}{\csc\theta+1}$

19) $\csc^2\theta - \cot^2\theta = \sec^2\theta - \tan^2\theta$

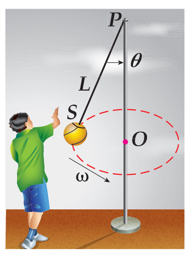
20) $\sin\theta\cos\theta\tan\theta + \cos^2\theta = 1$

21) $\sec\theta - \cos\theta = \tan\theta\sin\theta$

22) $\csc^2\theta = \cot^2\theta + \sin\theta\csc\theta$

23) $\dfrac{\sec\theta - \csc\theta}{\csc\theta\sec\theta} = \sin\theta - \cos\theta$

24) **ألعاب:** يُبيّن الشكل المجاور إحدى الألعاب. فعندما تدور الكرة حول العمود بسرعة زاوية ω (الإزاحة الزاويّة مقسومة على الزمن المستغرق)، فإنها تكوّن مع الحبل شكلًا مخروطيًّا. إذا علمت أن العلاقة بين طول الحبل L والزاوية θ المحصورة بين الحبل والعمود تُعطى بالصيغة: $L = \dfrac{g\sec\theta}{\omega^2}$، حيث g تساوي الجاذبية الأرضية ويساوي $9.8/s^2$، فهل الصيغة $L = \dfrac{g\tan\theta}{\omega^2\sin\theta}$ هي أيضًا تُمثّل العلاقة بين L, θ؟ وضح إجابتك. نعم؛ للتوضيح انظر إجابات الطلاب.



25) **جري:** مضمار سباق نصف قطره 16.7 m. إذا ركض أحد العدّائين في هذا المضمار، وكان جيب زاوية ميله θ يساوي $\frac{1}{4}$، فأوجد سرعة العدّاء.

إرشاد: أوجد $\cos\theta$ أولًا، ثم استعمل صيغة زاوية الميل الواردة في فقرة "لماذا؟". 6.5 m/s

بسّط كلًّا من العبارات الآتية، لتحصل على الناتج 1 أو -1:

26) $\cot(-\theta)\tan(-\theta)$ 1

27) $\sin\theta\csc(-\theta)$ -1

28) $\sin^2(-\theta) + \cos^2(-\theta)$ 1

29) $\sec(-\theta)\cos(-\theta)$ 1

30) $\sec^2(-\theta) - \tan^2(-\theta)$ 1

31) $\cot(-\theta)\cot\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)$ -1

32) $\cos(-\theta)\sec\theta$ 1

33) $\sin(-\theta)\csc\theta$ -1

بسّط كلًّا مما يأتي إلى قيمة عددية، أو إلى دالة مثلثية أساسية:

34) $\dfrac{\tan\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)\csc\theta}{\csc^2\theta}$ $\cos\theta$

35) $\dfrac{1+\tan\theta}{1+\cot\theta}$ $\tan\theta$

36) $\dfrac{\sec^2\theta - \tan^2\theta}{\cos^2 x + \sin^2 x}$ 1

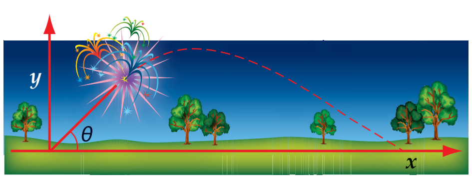
37) $\tan\theta\cos\theta$ $\sin\theta$

38) $\cot\theta\tan\theta$ 1

39) $\sec\theta\sin\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)$ 1

40) $(\sec^2\theta + \csc^2\theta) - (\tan^2\theta + \cot^2\theta)$ 2

41) **فيزياء:** عند إطلاق الألعاب النارية من سطح الأرض، فإن ارتفاع الألعاب y والإزاحة الأفقية x ترتبطان بالعلاقة: $y = \dfrac{-gx^2}{2v_0^2\cos^2\theta} + \dfrac{x\sin\theta}{\cos\theta}$، حيث v_0 هي السرعة الابتدائية للمقذوفات، θ زاوية الإطلاق، g تسارع الجاذبية الأرضية. أعد كتابة هذه العلاقة بحيث لا تظهر فيها نسب مثلثية سوى $\tan\theta$. انظر الهامش.



المحتوى الرياضي

تحويل طرف أو طرفي المعادلة: يمكن إثبات صحة متطابقة بتحويل أحد طرفي المعادلة أو كليهما في الوقت نفسه. وربما يفضل بعض الطلاب تحويل أحد الطرفين تجنبًا للتشويش.

تنويع التعليم

فوق

توسّع: المعادلة $\sin x + \cos x = 1$ ليست متطابقة، مما يعني أنها ليست صحيحة لكل قيم x؛ لذا أوجد قيم x التي تجعل هذه المعادلة صحيحة. $0° + k \cdot 360°$ (أو) $90° + k \cdot 360°$، حيث k أي عدد صحيح.

42) **إلكترونيات:** عند مرور تيار متردّد من خلال مقاومة R، فإن القدرة P بعد t من الثواني تُعطى بالصيغة: $P = I_0{}^2 R \sin^2 2\pi f t$، حيث f التردد، I_0 أعلى قيمة للتيار.

a) اكتب صيغة للقدرة بدلالة $\cos^2 2\pi f t$.

b) اكتب صيغة للقدرة بدلالة $\csc^2 2\pi f t$. $P = \frac{I_0{}^2 R}{\csc^2 2\pi f t}$

$P = I_0{}^2 R(1 - \cos^2 2\pi f t)$ (42a

43) **تمثيلات متعددة:** في هذه المسألة، ستكتشف طريقة حل معادلة مثل $2\sin x = 1$.

a) **جبريًا:** أعد كتابة المعادلة السابقة بحيث تكون $\sin x$ فقط في أحد الطرفين. $\sin x = \frac{1}{2}$ (43a

b) **بيانيًا:** مستعملًا الحاسبة البيانية، مثّل كلًّا من طرفي المعادلة التي أوجدتها في الفرع **(a)** بيانيًا كدالة في المجال $0 \le x < 2\pi$ وفي المستوى الإحداثي نفسه. ثم حدد جميع نقاط التقاطع بينهما، وأوجد قيم x بالراديان.

c) **بيانيًا:** مستعملًا الحاسبة البيانية، مثّل كلًّا من طرفي المعادلة التي أوجدتها في الفرع **(a)** بيانيًا باستعمال الحاسبة البيانية، كدالة في المجال $-2\pi < x < 2\pi$ وفي المستوى الإحداثي نفسه، ثم حدد جميع نقاط التقاطع بينهما، وأوجد قيم x بالراديان.

d) **لفظيًا:** خمّن الصيغة العامة لحلول المعادلة. وضح إجابتك.

43b-d انظر ملحق الإجابات.

مسائل مهارات التفكير العليا

44) **اكتشف المختلف:** حدّد المعادلة المختلفة عن المعادلات الثلاث الأخرى. وضح إجابتك. انظر الهامش

$\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$	$1 + \cot^2\theta = \csc^2\theta$
$\sin^2\theta - \cos^2\theta = 2\sin^2\theta$	$\tan^2\theta + 1 = \sec^2\theta$

45) **تبرير:** بيّن لماذا تُعدّ $\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$ متطابقة، ولكن $\sin\theta = \sqrt{1 - \cos\theta}$ ليست متطابقة. مثال مضاد: $30°, 45°$

46) **اكتب سؤالًا:** يجد زميلك صعوبة في برهنة متطابقة مثلثية تتضمن قوى دوال مثلثية. اكتب سؤالًا قد يساعده في ذلك.

46-47) انظر الهامش.

47) **اكتب:** اكتب موضحًا لماذا يُفضل إعادة كتابة المتطابقات المثلثية بدلالة الجيب $(\sin\theta)$ وجيب التمام $(\cos\theta)$ في معظم الأحيان.

48) **تحدٍّ:** إذا علمت أن α, β زاويتان متتامتان، فبرهن أن: $\cos^2\alpha + \cos^2\beta = 1$. انظر الهامش.

49) **تبرير:** برهن صحة متطابقتي فيثاغورس الثانية والثالثة. انظر ملحق الإجابات.

مراجعة تراكمية

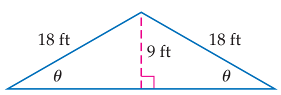
أوجد القيمة الدقيقة لكل مما يأتي: (الدرس 3-1)

50) $\sin\theta$، إذا كان $\cos\theta = \frac{2}{3}$، $0° < \theta < 90°$ $\frac{\sqrt{5}}{3}$

51) $\csc\theta$، إذا كان $\cos\theta = -\frac{3}{5}$، $90° < \theta < 180°$ $\frac{5}{4}$

52) $\cos\theta$، إذا كان $\sec\theta = \frac{5}{3}$، $270° < \theta < 360°$ $\frac{3}{5}$

53) **هندسة معمارية:** يمثّل الشكل أدناه سقف منزل مغطى بالقرميد. أوجد θ. (مهارة سابقة) $30°$



بسّط العبارتين الآتيتين. (الدرس 3-1)

54) $\sin\theta\cos\theta(1 + \cot^2\theta)$ $\cot\theta$

55) $\frac{\sin^4\theta - \cos^4\theta}{\sin^2\theta - \cos^2\theta}$ 1

تدريب على اختبار

56) **اختيار من متعدد:** أي مما يأتي لا يكافئ $\cos\theta$، حيث $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$؟ D

A $\frac{\cos\theta}{\cos^2\theta + \sin^2\theta}$

B $\frac{1 - \sin^2\theta}{\cos\theta}$

C $\cot\theta\sin\theta$

D $\tan\theta\csc\theta$

57) **سؤال ذو إجابة قصيرة:** أثبت أن المعادلة التالية تمثّل متطابقة:
$\sin^3\theta\cos\theta + \cos^3\theta\sin\theta = \sin\theta\cos\theta$

انظر ملحق الإجابات.

الدرس 2-3 إثبات صحة المتطابقات المثلثية 145

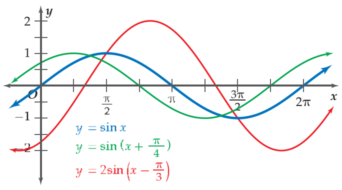
3-3 المتطابقات المثلثية لمجموع زاويتين والفرق بينهما
Sum and Difference of Angles Identities

فيما سبق:
درستُ إيجاد قيم الدوال المثلثية للزوايا. (مهارة سابقة)

والآن:
- أجد قيم الجيب، وجيب التمام باستعمال المتطابقات المثلثية لمجموع زاويتين والفرق بينهما.
- أثبت صحة المتطابقات المثلثية باستعمال متطابقات المجموع والفرق.

www.obeikaneducation.com

لماذا؟



هل استعملت مزود الإنترنت اللاسلكي وفقدت الإشارة بينما كنت تستعمله؟ تُسبِّب الموجات التي تمر من المكان نفسه، وفي الوقت نفسه تداخلًا.

ويحدث التداخل عندما تتلاقى موجتان فينتج عن ذلك موجة سعتها قد تكون أكبر من سعة كل من الموجتين المكونتين لها أو أصغر منهما.

متطابقات المجموع والفرق: لاحظ أن المعادلة الثانية الموضحة في الشكل المجاور، تتضمّن جمع الزاويتين x ، $\frac{\pi}{4}$. وفي الغالب يكون من المفيد استعمال المتطابقات المثلثية لمجموع زاويتين أو الفرق بينهما في إيجاد القيم المثلثية لزوايا محدّدة. فمثلًا يمكننا إيجاد القيمة الدقيقة لـ $\sin 15°$ من خلال إيجاد: $\sin (60° - 45°)$.

مفهوم أساسي — متطابقات المجموع والفرق

متطابقات المجموع	متطابقات الفرق
$\sin (A + B) = \sin A \cos B + \cos A \sin B$	$\sin (A - B) = \sin A \cos B - \cos A \sin B$
$\cos (A + B) = \cos A \cos B - \sin A \sin B$	$\cos (A - B) = \cos A \cos B + \sin A \sin B$
$\tan (A + B) = \dfrac{\tan A + \tan B}{1 - \tan A \tan B}$	$\tan (A - B) = \dfrac{\tan A - \tan B}{1 + \tan A \tan B}$

مثال 1 إيجاد القيم المثلثية

دون استعمال الآلة الحاسبة، أوجد القيمة الدقيقة لكل مما يأتي:

a) $\sin 105°$

بما أن مجموع الزاويتين $45°$ و $60°$ يساوي $105°$، وكلًّا منهما زاوية خاصة معلومة قيم الدوال المثلثية لها، لذا يمكن استعمالهما لإيجاد قيمة $\sin 105°$ ؛ وذلك باستعمال المتطابقة:

$$\sin (A + B) = \sin A \cos B + \cos A \sin B$$

$$\sin 105° = \sin (60° + 45°) \qquad A = 60°, B = 45°$$

$$= \sin 60° \cos 45° + \cos 60° \sin 45° \qquad \text{متطابقة المجموع}$$

$$= \left(\frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}\right) \qquad \text{عوّض}$$

$$= \frac{\sqrt{6}}{4} + \frac{\sqrt{2}}{4} = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4} \qquad \text{بسّط}$$

b) $\cos (-120°)$

اختر زاويتين من الزوايا الخاصة، بحيث يكون الفرق بينهما $-120°$ ، ثم استعمل المتطابقة:

$$\cos (A - B) = \cos A \cos B + \sin A \sin B$$

$$\cos (-120°) = \cos (60° - 180°) \qquad A = 60°, B = 180°$$

$$= \cos 60° \cos 180° + \sin 60° \sin 180° \qquad \text{متطابقة الفرق}$$

$$= \frac{1}{2} \cdot (-1) + \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot 0 \qquad \text{عوّض}$$

$$= -\frac{1}{2} \qquad \text{بسّط}$$

تحقق من فهمك

1A) $\sin 15°$ $\quad \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}$

1B) $\cos (-15°)$ $\quad \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}$

إرشادات للدراسة

كوّن قائمة: كوّن قائمة بقياسات الزوايا الناتجة عن جمع أو طرح زاويتين من الزوايا الخاصة بين $0°$ ، $360°$، حيث تستطيع إيجاد النسب المثلثية لكثير منها باستعمال متطابقات المجموع والفرق. استعمل هذه القائمة مرجعًا لك.

1 التركيز

الترابط الرأسي

ما قبل الدرس 3-3

إيجاد قيم الدوال المثلثية للزوايا.

الدرس 3-3

إيجاد قيم الجيب وجيب التمام باستعمال المتطابقات المثلثية لمجموع زاويتين والفرق بينهما.

إثبات صحة المتطابقات المثلثية باستعمال متطابقات المجموع والفرق.

ما بعد الدرس 3-3

استعمال المتطابقات المثلثية لضعف الزاوية ونصفها.

2 التدريس

أسئلة التعزيز

اطلب إلى الطلاب قراءة فقرة "لماذا؟".

واسأل:

- أين سمعت كلمة "تداخل" أيضًا؟ إجابة ممكنة: التلفاز والمذياع.
- كيف ترتبط الدوال المثلثية بترددات جهاز التلفاز؟ يمكن أن تمثل هذه الترددات بدوال مثلثية.
- اكتب بعض الطرق التي تستعملها لتجنب فقد الإشارة من جهاز التلفاز. إجابة ممكنة: تغيير التردد، إغلاق أي مصدر قد يصدر موجات تتداخل مع موجات جهاز التلفاز.

مصادر الدرس 3 – 3

المصدر	دون المتوسط	ضمن المتوسط	فوق المتوسط
دليل المعلم		• تنويع التعليم ص (147 , 149)	• تنويع التعليم ص (147 , 149)
كتاب التمارين	• ص (19)	• ص (19)	• ص (19)
مصادر المعلم للأنشطة الصفية	• تدريبات إعادة التعليم، ص (14) • تدريبات حل المسألة، ص (16)	• تدريبات حل المسألة، ص (16) • التدريبات الإثرائية، ص (17)	• تدريبات حل المسألة، ص (16) • التدريبات الإثرائية، ص (17)

بإمكانك استعمال متطابقات مجموع زاويتين والفرق بينهما؛ لحلّ مسائل وتطبيقات من واقع الحياة.

مثال 2 من واقع الحياة — استعمال متطابقات المجموع والفرق

كهرباء: يمر تيار كهربائي متردد في إحدى الدوائر الكهربائية، وتُعطى شدة هذا التيار c بالأمبير بعد t ثانية بالصيغة $c = 3 \sin 165t$ ، حيث قياس الزاوية بالدرجات.

a) أعد كتابة الصيغة، باستعمال مجموع زاويتين.

$c = 3 \sin 165°t$ — الصيغة الأصلية

$= 3 \sin (120°t + 45°t)$ — $120°t + 45°t = 165°t$

b) استعمل المتطابقة المثلثية لمجموع زاويتين ؛ لإيجاد القيمة الدقيقة لشدة التيار بعد ثانية واحدة.

$c = 3 \sin (120°t + 45°t)$ — المعادلة بحسب الفرع a

$= 3 \sin (120° + 45°)$ — $t = 1$

$= 3[\sin 120° \cos 45° + \cos 120° \sin 45°]$ — متطابقة المجموع

$= 3\left[\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) + \left(-\frac{1}{2}\right)\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\right]$ — عوّض مستعملاً الزاوية المرجعية $(\theta = 60°)$

$= 3\left(\frac{\sqrt{6}}{4} - \frac{\sqrt{2}}{4}\right)$ — اضرب

$= \frac{3\sqrt{6} - 3\sqrt{2}}{4}$ — بسّط

إذن شدة التيار بعد ثانية واحدة يساوي $\frac{3\sqrt{6} - 3\sqrt{2}}{4}$ أمبير.

تحقق من فهمك:

إذا كانت شدة التيار c تُعطى بالصيغة $c = 2 \sin 285°t$ ، فأجب عما يأتي:

2A) أعد كتابة الصيغة، باستعمال الفرق بين زاويتين. $2 \sin (315t - 30t)$

2B) استعمل المتطابقة المثلثية للفرق بين زاويتين ؛ لإيجاد القيمة الدقيقة لشدة التيار بعد ثانية واحدة. $\frac{-\sqrt{6} - \sqrt{2}}{2}$

الربط مع الحياة

يسمى جهاز قياس شدة التيار الأميتر (Ammeter)، والأميتر كلمة مركبة من أمبير وهي وحدة قياس شدة التيار، وميتر وهو المقياس.

إثبات صحة المتطابقات المثلثية: تستعمل المتطابقات المثلثية لمجموع زاويتين والفرق بينهما أيضًا في إثبات صحة المتطابقات.

مثال 3 — إثبات صحة المتطابقات المثلثية

أثبت أن كل معادلة مما يأتي تمثّل متطابقة:

a) $\cos (90° - \theta) = \sin \theta$

$\cos (90° - \theta)$ — الطرف الأيسر

$= \cos 90° \cos \theta + \sin 90° \sin \theta$ — متطابقة الفرق

$= 0 \cdot \cos \theta + 1 \cdot \sin \theta$ — عوّض

$= \sin \theta$ ✓ — بسّط

وهو الطرف الأيمن من المتطابقة.

متطابقات المجموع والفرق

مثال 1 يبيِّن كيفية استعمال المتطابقات المثلثية لمجموع زاويتين وطرحهما لإيجاد القيم الدقيقة للعبارات المثلثية.

مثال 2 يبيِّن كيفية استعمال المتطابقة المثلثية للفرق بين زاويتين لحل مسائل من واقع الحياة.

التقويم التكويني

استعمل تدريبات "تحقق من فهمك" بعد كل مثال؛ للتحقق من مدى فهم الطلاب للمفاهيم.

مثالان إضافيان

1 أوجد القيمة الدقيقة لكلٍّ مما يأتي:

a) $\sin 75°$ $\frac{\sqrt{2} + \sqrt{6}}{4}$

b) $\cos (-75°)$ $\frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}$

2 **إلكترونيات:** يمر تيار كهربائي متردد في دائرة كهربائية، وتُعطى شدة التيار c بالأمبير بعد t ثانية بالصيغة $c = 4 \sin 255 t$ ، حيث تقاس الزاوية بالدرجات.

a) أعد كتابة الصيغة باستعمال المتطابقات المثلثية لمجموع زاويتين. $C = 4 \sin (210 t + 45 t)$

b) استعمل المتطابقة المثلثية لمجموع زاويتين؛ لإيجاد القيمة الدقيقة لشدة التيار بعد ثانية واحدة. $(-\sqrt{2} - \sqrt{6})$ أمبير

تنويع التعليم

ضمن فوق

المتعلمون اللغويون: اطلب إلى الطلاب تحديد أوجه الشبه وأوجه الاختلاف بين متطابقات النسب المثلثية لمجموع زاويتين من جهة، ومتطابقات النسب المثلثية لناتج طرح زاويتين من جهة أخرى. ثم اطلب إليهم كتابة جمل قصيرة لوصف نتائجهم.

التعليم باستعمال التقنيات

الكاميرا التوثيقية اختر مجموعة من الطلاب، واطلب إليهم أن يوضحوا كيفية استعمال متطابقات المجموع ومتطابقات الفرق من خلال أمثلة متعددة، وتوثيق ذلك باستعمال الكاميرا التوثيقية.

إثبات صحة المتطابقات المثلثية

مثال 3 يبيِّن كيفية استعمال متطابقات النسب المثلثية لمجموع زاويتين والفرق بينهما؛ لإثبات صحة متطابقات مثلثية.

مثال إضافي

3 أثبت أن كل معادلة من المعادلتين الآتيتين تمثل متطابقة:

a) $\cos(360° - \theta) = \cos\theta$

$\cos(360° - \theta) \stackrel{?}{=} \cos\theta$

$\cos 360° \cos\theta + \sin 360° \sin\theta \stackrel{?}{=} \cos\theta$

$1 \cdot \cos\theta + 0 \cdot \sin\theta \stackrel{?}{=} \cos\theta$

$\cos\theta = \cos\theta$ ✓

b) $\cos(\pi - \theta) = -\cos\theta$

$\cos(\pi - \theta) \stackrel{?}{=} -\cos\theta$

$\cos\pi \cos\theta + \sin\pi \sin\theta \stackrel{?}{=} -\cos\theta$

$-1 \cdot \cos\theta + 0 \cdot \sin\theta \stackrel{?}{=} -\cos\theta$

$-\cos\theta = -\cos\theta$ ✓

3 التدريب

التقويم التكويني

استعمل الأسئلة 1–15 للتأكد من فهم الطلاب.

ثم استعمل الجدول أسفل هذه الصفحة؛ لتعيين الواجبات المنزلية للطلاب حسب مستوياتهم.

إجابات :

21) $\csc\frac{5\pi}{12}$

إجابة ممكنة: $= \dfrac{1}{\sin\frac{5\pi}{12}}$

$= \dfrac{1}{\sin\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{6}\right)}$

$= \dfrac{1}{\sin\frac{\pi}{4}\cos\frac{\pi}{6} + \cos\frac{\pi}{4}\sin\frac{\pi}{6}}$

$= \dfrac{1}{\frac{\sqrt{2}}{2} \times \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} \times \frac{1}{2}}$

$= \dfrac{1}{\frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}}$

$= \dfrac{4}{\sqrt{6} + \sqrt{2}} \times \dfrac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{\sqrt{6} - \sqrt{2}}$

$= \dfrac{4(\sqrt{6} - \sqrt{2})}{6 - 2}$

$= \sqrt{6} - \sqrt{2}$

---

b) $\sin\left(\theta + \frac{\pi}{2}\right) = \cos\theta$

$\sin\left(\theta + \frac{\pi}{2}\right)$ الطرف الأيسر

$= \sin\theta\cos\frac{\pi}{2} + \cos\theta\sin\frac{\pi}{2}$ متطابقة المجموع

$= \sin\theta \cdot 0 + \cos\theta \cdot 1$ عوِّض

$= \cos\theta$ ✓ بسِّط

وهو الطرف الأيمن من المتطابقة.

3A) $\sin(90° - \theta)$

$= \sin 90° \cos\theta - \cos 90° \sin\theta$

$= 1\cos\theta - 0\sin\theta$

$= \cos\theta$

3B) $\tan\left(\frac{\pi}{4} + \theta\right)$

$= \dfrac{\tan\frac{\pi}{4} + \tan\theta}{1 - \tan\frac{\pi}{4}\tan\theta} = \dfrac{1 + \tan\theta}{1 - \tan\theta}$

✓ تحقق من فهمك

3A) $\sin(90° - \theta) = \cos\theta$

3B) $\tan\left(\frac{\pi}{4} + \theta\right) = \dfrac{1 + \tan\theta}{1 - \tan\theta}$

تدرب وحل المسائل

دون استعمال الآلة الحاسبة، أوجد القيمة الدقيقة لكل مما يأتي: (مثال 1)

1) $\cos 165°$ $\quad -\dfrac{\sqrt{2} + \sqrt{6}}{4}$

2) $\cos 105°$ $\quad \dfrac{\sqrt{2} - \sqrt{6}}{4}$

3) $\cos 75°$ $\quad \dfrac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}$

4) $\cos\frac{\pi}{12}$ $\quad \dfrac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}$

5) $\sin 135°$ $\quad \dfrac{\sqrt{2}}{2}$

6) $\sin(-210°)$ $\quad \dfrac{1}{2}$

7) $\cos 135°$ $\quad \dfrac{-\sqrt{2}}{2}$

8) $\tan 195°$ $\quad 2 - \sqrt{3}$

9) **كهرباء:** يمر تيار كهربائي متردِّد في دائرة كهربائية، وتعطى شدة هذا التيار c بالأمبير بعد t ثانية بالصيغة $c = 2\sin(120° t)$. (مثال 2)

a) أعد كتابة الصيغة، باستعمال مجموع زاويتين. **9a) إجابة ممكنة:** $c = 2\sin(90t + 30t)$

b) استعمل المتطابقة المثلثية لمجموع زاويتين؛ لإيجاد القيمة الدقيقة لشدة التيار بعد ثانية واحدة. $\sqrt{3}$ أمبير

أثبت أن كل معادلة مما يأتي تمثِّل متطابقة: (مثال 3) **(10–15) انظر ملحق الإجابات.**

10) $\sin(90° + \theta) = \cos\theta$

11) $\cos\left(\frac{3\pi}{2} - \theta\right) = -\sin\theta$

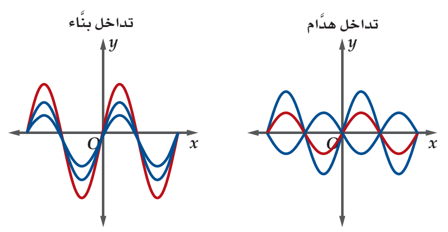
12) $\tan\left(\theta + \frac{\pi}{2}\right) = -\cot\theta$

13) $\sin(\theta + \pi) = -\sin\theta$

14) $\cos\left(\frac{\pi}{2} + \theta\right) = -\sin\theta$

15) $\tan(\theta + 45°) = \dfrac{1 + \tan\theta}{1 - \tan\theta}$

16) **إلكترونيات:** ارجع إلى فقرة "لماذا؟" في بداية الدرس. عندما تتلاقى موجتان وتنتج موجة سعتها أكبر من سعة كل من الموجتين يكون التداخل بناءً، وبعكس ذلك يكون هدَّامًا.



إذا علمت أن كلًّا من الدالتين:

$y_1 = 10\sin(2t + 210°)$, $y_2 = 10\sin(2t + 30°)$.

تمثل موجة، فأوجد مجموع الدالتين، وفسِّر معناه بالنسبة للموجتين. **0، تداخل هدام**

دون استعمال الآلة الحاسبة، أوجد القيمة الدقيقة لكل مما يأتي:

17) $\tan 165°$ $\quad -2 + \sqrt{3}$

18) $\sec 1275°$ $\quad \sqrt{2} - \sqrt{6}$

19) $\sin 735°$ $\quad \dfrac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}$

20) $\tan\frac{23\pi}{12}$ $\quad -2 + \sqrt{3}$

21) $\csc\frac{5\pi}{12}$ $\quad$ انظر الهامش.

22) $\cot\frac{113\pi}{12}$ $\quad 2 - \sqrt{3}$

23) بيِّن أنه يمكن كتابة المقدار $\dfrac{\sin A + \tan\theta\cos A}{\cos A - \tan\theta\sin A}$ على الصورة $\tan(A + \theta)$، حيث A, θ زاويتان حادتان. **انظر ملحق الإجابات.**

تنويع الواجبات المنزلية

المستوى	الأسئلة
دون المتوسط	1–15، 19، 20، 25، 26، 29، 32–44
ضمن المتوسط	1–15 (فردي)، 16–22، 24، 25–29 (فردي)، 32–44
فوق المتوسط	16–44

24) **تمثيلات متعددة:** في هذه المسألة، سوف تثبت عدم صحة الفرضية: $\sin(A+B) = \sin A + \sin B$.

a) **جدوليًا:** أكمل الجدول. (b, c انظر ملحق الإجابات.

A	B	sin A	sin B	sin (A + B)	sin A + sin B
30°	90°	$\frac{1}{2}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{3}{2}$
45°	60°	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}$	$\frac{\sqrt{2}+\sqrt{3}}{2}$
90°	30°	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{3}{2}$

b) **بيانيًا:** افترض أن B أقل من A بـ $15°$ دائمًا، واستعمل الحاسبة البيانية لتمثل كلًّا من: $y = \sin(x + x - 15°)$، $y = \sin x + \sin(x - 15°)$ على الشاشة نفسها.

c) **تحليليًا:** حدّد ما إذا كانت $\sin(A+B) = \sin A + \sin B$ متطابقة أم لا. فسِّر إجابتك.

أثبت أن كل معادلة مما يأتي تمثِّل متطابقة: (25–28 انظر ملحق الإجابات.

25) $\sin(A+B) = \dfrac{\tan A + \tan B}{\sec A \sec B}$

26) $\cos(A+B) = \dfrac{1 - \tan A \tan B}{\sec A \sec B}$

27) $\sec(A-B) = \dfrac{\sec A \sec B}{1 + \tan A \tan B}$

28) $\sin(A+B)\sin(A-B) = \sin^2 A - \sin^2 B$

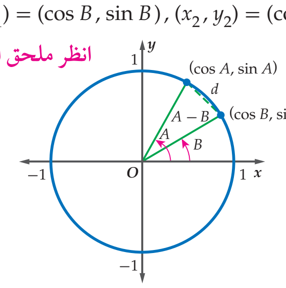
مسائل مهارات التفكير العليا

29) **تبرير:** بسّط العبارة الآتية، دون إيجاد مفكوك المجموع أو الفرق. $\sin(-2\theta)$

$\sin\left(\frac{\pi}{3} - \theta\right)\cos\left(\frac{\pi}{3} + \theta\right) - \cos\left(\frac{\pi}{3} - \theta\right)\sin\left(\frac{\pi}{3} + \theta\right)$

30) **تحدٍّ:** اشتق المتطابقة $\cot(A+B)$ بدلالة $\cot A, \cot B$. انظر ملحق الإجابات.

31) **برهان:** الشكل أدناه، يُبيِّن الزاويتين A, B في الوضع القياسي في دائرة الوحدة. استعمل قانون المسافة؛ لإيجاد قيمة d، حيث $(x_1, y_1) = (\cos B, \sin B)$، $(x_2, y_2) = (\cos A, \sin A)$ انظر ملحق الإجابات.



32) **اكتب:** استعمل المعلومات المعطاة في فقرة "لماذا؟" في بداية الدرس وفي السؤال 16؛ لتشرح كيف تُستعمل المتطابقات المثلثية لمجموع زاويتين والفرق بينهما؛ لوصف التداخل في الأمواج اللاسلكية في شبكة الإنترنت. موضحًا الفرق بين التداخل البنّاء والتداخل الهدّام. انظر إجابات الطلاب.

33) **مسألة مفتوحة:** في النظرية الآتية: إذا كانت A, B, C زوايا في مثلث، فإن $\tan A + \tan B + \tan C = \tan A \tan B \tan C$ اختر قيمًا لكلٍّ من A, B, C. وتحقق من صحة المساواة لكل القيم التي تختارها. انظر الهامش.

مراجعة تراكمية

بسّط كلًّا من العبارتين الآتيتين: (الدرس 3–1)

34) $\sin\theta\csc\theta - \cos^2\theta$ $\sin^2\theta$

35) $\cos^2\theta\sec\theta\csc\theta$ $\cot\theta$

أوجد القيمة الدقيقة لكل مما يأتي: (الدرس 3–1)

36) $\sec\theta$، إذا كان $\tan\theta = \frac{1}{2}$، $0° < \theta < 90°$ $\frac{\sqrt{5}}{2}$

37) $\cos\theta$، إذا كان $\sin\theta = -\frac{2}{3}$، $180° < \theta < 270°$ $\frac{-\sqrt{5}}{3}$

38) $\csc\theta$، إذا كان $\cot\theta = -\frac{7}{12}$، $90° < \theta < 180°$ $\frac{\sqrt{193}}{12}$

39) $\sin\theta$، إذا كان $\cos\theta = \frac{3}{4}$، $270° < \theta < 360°$ $-\frac{\sqrt{7}}{4}$

40) $\tan\theta$، إذا كان $8\cos\theta - 5 = 0$، $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$ $\frac{\sqrt{39}}{5}$

أثبت أن كلًّا من المعادلتين الآتيتين تمثِّل متطابقة: (الدرس 3–2)

41) $\dfrac{\sin\theta}{\tan\theta} + \dfrac{\cos\theta}{\cot\theta} = \cos\theta + \sin\theta$ (41, 42 انظر الهامش.

42) $\sec\theta(\sec\theta - \cos\theta) = \tan^2\theta$

تدريب على اختبار

43) ما القيمة الدقيقة للعبارة: B

$\sin(60° + \theta)\cos\theta - \cos(60° + \theta)\sin\theta$؟

A $\frac{1}{2}$ C $\frac{2}{\sqrt{3}}$

B $\frac{\sqrt{3}}{2}$ D $\sqrt{3}$

44) **سؤال ذو إجابة قصيرة:** إذا كان $\cos\theta + 0.3 = 0$، حيث $\pi < \theta < \frac{3\pi}{2}$، فأوجد القيمة الدقيقة لـ $\cot\theta$. $\frac{3\sqrt{91}}{91}$

تمثيلات متعددة

يستعمل الطلاب في السؤال 24 المعلومات المنظمة في جدول، بالإضافة إلى الحاسبة البيانية لإثبات عدم صحة فرضية حول المتطابقات المثلثية.

4 التقويم

بطاقة مكافأة: اطلب إلى الطلاب وضع قائمة بالزوايا التي تقع قياساتها بين: °0 و °360 والتي يستطيعون إيجاد نسبها المثلثية بسهولة باستعمال النسب المثلثية لمجموع زاويتين وطرحهما. ثم اطلب إليهم الاحتفاظ بالقائمة؛ لتكون مرجعًا لهم عند التحضير للاختبارات.

التقويم التكويني

تحقق من مدى استيعاب الطلاب للمفاهيم الواردة في الدرس 3–3 بإعطائهم:

الاختبار القصير 2، ص (49)

إجابات:

33) إجابة ممكنة:

$A = 35°, B = 60°, C = 85°$

$0.7002 + 1.7321 + 11.4301$

$\stackrel{?}{=} (0.7002)(1.7321)(11.4301)$

$13.86 = 13.86$ ✓

41) $\dfrac{\sin\theta}{\tan\theta} + \dfrac{\cos\theta}{\cot\theta} \stackrel{?}{=} \cos\theta + \sin\theta$

$\dfrac{\sin\theta}{\frac{\sin\theta}{\cos\theta}} + \dfrac{\cos\theta}{\frac{\cos\theta}{\sin\theta}} \stackrel{?}{=} \cos\theta + \sin\theta$

$\sin\theta \cdot \dfrac{\cos\theta}{\sin\theta} + \cos\theta \cdot \dfrac{\sin\theta}{\cos\theta} \stackrel{?}{=}$

$\cos\theta + \sin\theta$

$\cos\theta + \sin\theta = \cos\theta + \sin\theta$ ✓

42) $\sec\theta(\sec\theta - \cos\theta) \stackrel{?}{=} \tan^2\theta$

$\dfrac{1}{\cos\theta}\left(\dfrac{1}{\cos\theta} - \cos\theta\right) \stackrel{?}{=} \tan^2\theta$

$\dfrac{1}{\cos^2\theta} - 1 \stackrel{?}{=} \tan^2\theta$

$\sec^2\theta - 1 \stackrel{?}{=} \tan^2\theta$

$\tan^2\theta = \tan^2\theta$ ✓

تنويع التعليم

ضمن فوق

توسّع: أخبر الطلاب أن $\sin 20° \approx 0.3420$. واطلب إليهم أن يستعملوا هذه المعلومة لإيجاد كل من $\sin 65°$، $\cos 65°$. 0.9063, 0.42 26

الفصل 3 اختبار منتصف الفصل

الدروس من 1-3 إلى 3-3

التقويم التكويني

استعمل اختبار منتصف الفصل؛ للتحقق من مدى فهم الطلاب للأسئلة التي لم يجيبوا عنها بشكل صحيح. اطلب إلى الطلاب مراجعة الدروس المشار إليها بعد كل سؤال.

التقويم الختامي

اختبار منتصف الفصل، ص (51) .

الفصل 3 اختبار منتصف الفصل

الدروس من 1–3 إلى 3–3

بسّط كل عبارة مما يأتي: (الدرس 1–3)

1) $\csc\theta\cot\theta\sec\theta$ **$\csc\theta$**

2) $\frac{1-\cos^2\theta}{\sin^2\theta}$ **1**

3) $\frac{1}{\cos\theta}-\frac{\sin^2\theta}{\cos\theta}$ **$\cos\theta$**

4) $\cos\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)\csc\theta$ **1**

أوجد القيمة الدقيقة لكلٍّ مما يأتي: (الدرس 1–3)

5) $\sin\theta$، إذا كان $\cos\theta=\frac{3}{5}$، $0°<\theta<90°$ **$\frac{4}{5}$**

6) $\csc\theta$، إذا كان $\cot\theta=-\frac{1}{2}$، $270°<\theta<360°$ **$-\frac{\sqrt{5}}{2}$**

7) $\tan\theta$، إذا كان $\sec\theta=\frac{4}{3}$، $0°<\theta<90°$ **$\frac{\sqrt{7}}{3}$**

8) **اختيار من متعدد:** أي مما يأتي يكافئ العبارة: $\frac{\cos\theta}{1-\sin^2\theta}$ ؟ (الدرس 3-1) **D**

A $\cos\theta$ C $\tan\theta$

B $\csc\theta$ D $\sec\theta$

9) **مدينة ألعاب:** ركب سلمان لعبة الأحصنة الدوّارة في مدينة الألعاب. إذا كان طول قطر دائرة هذه اللعبة 16m، وظل زاوية ميل سلمان تُعطى بالعلاقة $\tan\theta=\frac{v^2}{gR}$، حيث R نصف قطر المسار الدائري، v السرعة بالمتر لكل ثانية، g تسارع الجاذبية الأرضية ويساوي $9.8\ m/s^2$. (الدرس 2–3)

a) إذا كان جيب زاوية ميل سلمان يساوي $\frac{1}{5}$، فأوجد زاوية ميله. **11.5° تقريبًا**

b) أوجد سرعة دوران اللعبة؟ **4m/s تقريبًا**

أثبت أن كل معادلة مما يأتي تمثّل متطابقة: (الدرس 2–3) **(10-13) انظر ملحق الإجابات.**

10) $\cot^2\theta+1=\frac{\cot\theta}{\cos\theta\cdot\sin\theta}$

11) $\frac{\cos\theta\csc\theta}{\cot\theta}=1$

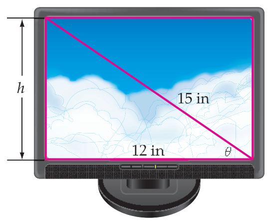
12) $\frac{\sin\theta\tan\theta}{1-\cos\theta}=(1+\cos\theta)\sec\theta$

13) $\tan\theta(1-\sin\theta)=\frac{\cos\theta\sin\theta}{1+\sin\theta}$

14) **حاسوب:** تُصنَّف شاشات الحاسوب عادة وفقًا لطول قطرها. استعمل الشكل أدناه للإجابة عما يأتي: (الدرس 1–3)

a) أوجد قيمة h. **9 in**

b) بيّن أن $\cot\theta=\frac{\cos\theta}{\sin\theta}$ **انظر ملحق الإجابات.**



(15–17) انظر ملحق الإجابات.

أثبت أن كل معادلة مما يأتي تمثّل متطابقة: (الدرس 2–3)

15) $\frac{\sin\theta\cdot\sec\theta}{\sec\theta-1}=(\sec\theta+1)\cot\theta$

16) $\sin^2\theta\cdot\tan^2\theta=\tan^2\theta-\sin^2\theta$

17) $\cot\theta(1-\cos\theta)=\frac{\cos\theta\cdot\sin\theta}{1+\cos\theta}$

أوجد القيمة الدقيقة لكلٍّ مما يأتي: (الدرس 3–3)

18) $\cos 105°$ **$\frac{\sqrt{2}-\sqrt{6}}{4}$**

19) $\sin(-135°)$ **$-\frac{\sqrt{2}}{2}$**

20) $\tan 15°$ **$2-\sqrt{3}$**

21) $\cot 75°$ **$2-\sqrt{3}$**

22) **اختيار من متعدد:** ما قيمة $\cos\frac{5\pi}{12}$ ؟ (الدرس 3–3) **C**

A $\sqrt{2}$ C $\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$

B $\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{2}$ D $\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$

23) أثبت أن المعادلة الآتية تمثّل متطابقة: (الدرس 2–3)

$\cos 30°\cos\theta+\sin 30°\sin\theta=\sin 60°\cos\theta+\cos 60°\sin\theta$

انظر ملحق الإجابات.

مخطط المعالجة

المستوى 1	ضمن المتوسط	المستوى 2	دون المتوسط
إذا	أخطأ بعض الطلاب في 25% أو أقل تقريبًا من الأسئلة	إذا	أخطأ بعض الطلاب في 50% تقريبًا من الأسئلة
فاختر	أحد المصادر الآتية:	فاختر	المصدر الآتي:
كتاب الطالب	الدروس 3-1 , 3-2 , 3-3	زيارة الموقع	www.obeikaneducation.com
دليل المعلم	مشروع الفصل، ص (134)		
زيارة الموقع	www.obeikaneducation.com		

3-4 ملاحظات الدرس

1 التركيز

الترابط الرأسي

ما قبل الدرس 3-4

إيجاد قيم الجيب وجيب التمام باستعمال المتطابقات المثلثية لمجموع زاويتين والفرق بينهما.

الدرس 3-4

إيجاد قيم الجيب، وجيب التمام باستعمال المتطابقات المثلثية لضعف الزاوية.

إيجاد قيم الجيب، وجيب التمام باستعمال المتطابقات المثلثية لنصف الزاوية.

ما بعد الدرس 3-4

حل معادلات مثلثية.

2 التدريس

أسئلة التعزيز

اطلب إلى الطلاب قراءة فقرة "لماذا؟".

واسأل:

- ما الفرق بين $\sin 2\theta$ و $\sin^2\theta$؟ فسّر إجابتك. $\sin 2\theta$ تمثّل جيب الزاوية التي تساوي مثلي الزاوية θ، في حين تمثل $\sin^2\theta$ مربّع قيمة $\sin\theta$.
- هل التعبير عن $\frac{H}{D}$ بصورة دالة بدلالة θ يتضمن المتغير v؟ لا، عند التبسيط، يمكن اختصار $\frac{v^2}{v^2} = 1$.
- هل تتضمن العبارة $\frac{H}{D}$ المتغير g؟ فسّر إجابتك. لا، قيمة $\frac{1}{2g} \div \frac{1}{g}$ هي $\frac{1}{2}$؛ لذا لا يحتوي التعبير على المتغير g.

3-4 المتطابقات المثلثية لضعف الزاوية ونصفها

Double-Angle and Half-Angle Identities

فيما سبق:

درستُ إيجاد قيم الجيب وجيب التمام باستعمال المتطابقات المثلثية لمجموع زاويتين والفرق بينهما. (الدرس 3-3)

والآن:

- أجد قيم الجيب، وجيب التمام باستعمال المتطابقات المثلثية لضعف الزاوية.
- أجد قيم الجيب وجيب التمام باستعمال المتطابقات المثلثية لنصف الزاوية.

www.obeikaneducation.com

لماذا؟

تستعمل النوافير مضخات تضخ الماء بزوايا محددة فتصنع أقواسًا. ويعتمد مسار الماء على سرعة الضخ وزاويته. فعندما يتم ضخ الماء في الهواء بسرعة v ، وزاوية مع الخط الأفقي مقدارها θ، فإن المعادلتين الآتيتين تحددان المسافة الأفقية D ، وأقصى ارتفاع H :

$D = \frac{v^2}{g}\sin 2\theta,\ H = \frac{v^2}{2g}\sin^2\theta$ ، حيث تمثل g تسارع الجاذبية الأرضية.

إذا علمت أن نسبة H إلى D تساعد في تحديد ارتفاع النافورة ، وعرضها. فعبّر عن النسبة $\frac{H}{D}$ كدالة في θ.

المتطابقات المثلثية لضعف الزاوية: من المفيد أحيانًا أن يكون لديك متطابقات تساعدك على إيجاد قيمة دالة مثلثية لضعف الزاوية.

مفهوم أساسي — المتطابقات المثلثية لضعف الزاوية

المتطابقات الآتية صحيحة لقيم θ جميعها:

$$\sin 2\theta = 2\sin\theta\cos\theta$$

$$\cos 2\theta = \cos^2\theta - \sin^2\theta$$
$$\cos 2\theta = 2\cos^2\theta - 1$$
$$\cos 2\theta = 1 - 2\sin^2\theta$$

$$\tan 2\theta = \frac{2\tan\theta}{1-\tan^2\theta}$$

ستبرهن هذه الصيغ في السؤال 30

مثال 1 المتطابقات المثلثية لضعف الزاوية

أوجد القيمة الدقيقة لـ $\sin 2\theta$ إذا كان $\sin\theta = \frac{2}{3}$ ، $0° < \theta < 90°$.

حيث إن $\sin 2\theta = 2\sin\theta\cos\theta$ ، فإننا نجد $\cos\theta$ أولًا.

الخطوة 1: استعمل المتطابقة $\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$ ؛ لإيجاد $\cos\theta$.

$\cos^2\theta = 1 - \sin^2\theta$ — $\cos^2\theta + \sin^2\theta = 1$

$\cos^2\theta = 1 - \left(\frac{2}{3}\right)^2$ — $\sin\theta = \frac{2}{3}$

$\cos^2\theta = \frac{5}{9}$ — اطرح

$\cos\theta = \pm\frac{\sqrt{5}}{3}$ — خذ الجذر التربيعي للطرفين

وبما أن θ تقع في الربع الأول، فإن $\cos\theta$ موجب أي $\cos\theta = \frac{\sqrt{5}}{3}$.

الخطوة 2: أوجد $\sin 2\theta$.

$\sin 2\theta = 2\sin\theta\cos\theta$ — متطابقة ضعف الزاوية

$= 2\left(\frac{2}{3}\right)\left(\frac{\sqrt{5}}{3}\right)$ — $\sin\theta = \frac{2}{3}, \cos\theta = \frac{\sqrt{5}}{3}$

$= \frac{4\sqrt{5}}{9}$ — اضرب

تحقق من فهمك

1) أوجد القيمة الدقيقة لِـ $\sin 2\theta$ ، إذا كان $\cos\theta = -\frac{1}{3}$ ، $90° < \theta < 180°$. $\frac{-4\sqrt{2}}{9}$

مصادر الدرس 3-4

المصدر	دون المتوسط	ضمن المتوسط	فوق المتوسط
دليل المعلم	• تنويع التعليم ص (152)	• تنويع التعليم ص (152)	• تنويع التعليم ص (154)
كتاب التمارين	• ص (20)	• ص (20)	• ص (20)
مصادر المعلم للأنشطة الصفية	• تدريبات إعادة التعليم، ص (18) • تدريبات حل المسألة، ص (20)	• تدريبات حل المسألة، ص (20) • التدريبات الإثرائية، ص (21)	• تدريبات حل المسألة، ص (20) • التدريبات الإثرائية، ص (21)

151 الدرس 3-4 المتطابقات المثلثية لضعف الزاوية ونصفها

مثال 2 المتطابقات المثلثية لضعف الزاوية

أوجد القيمة الدقيقة لكلٍّ مما يأتي علمًا بأن $\sin\theta = \frac{2}{3}; 0° < \theta < 90°$:

a) $\cos 2\theta$

بما أن قيمة كل من $\cos\theta, \sin\theta$ معلومة من المثال 1، فإننا نستطيع أن نستعمل متطابقات جيب تمام ضعف الزاوية. وسوف نستعمل المتطابقة $\cos 2\theta = 1 - 2\sin^2\theta$.

$\cos 2\theta = 1 - 2\sin^2\theta$ — متطابقة ضعف الزاوية

$= 1 - 2\left(\frac{2}{3}\right)^2 = \frac{1}{9}$ — $\sin\theta = \frac{2}{3}$

b) $\tan 2\theta$

الخطوة 1: أوجد $\tan\theta$ ؛ كي تستعمل متطابقة $\tan 2\theta$.

$\tan\theta = \frac{\sin\theta}{\cos\theta}$ — تعريف دالة الظل

$= \frac{\frac{2}{3}}{\frac{\sqrt{5}}{3}}$ — $\sin\theta = \frac{2}{3}, \cos\theta = \frac{\sqrt{5}}{3}$

$= \frac{2}{\sqrt{5}} = \frac{2\sqrt{5}}{5}$ — بالقسمة وإنطاق المقام

الخطوة 2: أوجد $\tan 2\theta$.

$\tan 2\theta = \frac{2\tan\theta}{1 - \tan^2\theta}$ — متطابقة ضعف الزاوية

$= \frac{2\left(\frac{2\sqrt{5}}{5}\right)}{1 - \left(\frac{2\sqrt{5}}{5}\right)^2}$ — $\tan\theta = \frac{2\sqrt{5}}{5}$

$= \frac{2\left(\frac{2\sqrt{5}}{5}\right)}{\frac{25}{25} - \frac{20}{25}}$ — ربّع المقام

$= \frac{\frac{4\sqrt{5}}{5}}{\frac{1}{5}}$ — بسّط

$= \frac{4\sqrt{5}}{5} \cdot \frac{5}{1} = 4\sqrt{5}$ — $\frac{a}{b} \div \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \cdot \frac{d}{c}$

تحقق من فهمك

أوجد القيمة الدقيقة لكلٍّ مما يأتي علمًا بأن $\cos\theta = -\frac{1}{3}; 90° < \theta < 180°$:

2A) $\cos 2\theta$ $\quad -\frac{7}{9}$

2B) $\tan 2\theta$ $\quad \frac{4\sqrt{2}}{7}$

إرشادات للدراسة

اشتقاق الصيغ

يمكنك استعمال متطابقة $\sin(A+B)$ في إيجاد جيب ضعف الزاوية θ ، أو $\sin 2\theta$ ، كما يمكنك استعمال متطابقة $\cos(A+B)$ في إيجاد جيب تمام ضعف الزاوية θ ، أو $\cos 2\theta$.

المتطابقات المثلثية لنصف الزاوية: من المفيد في بعض الأحيان، أن يكون لديك متطابقة ؛ لإيجاد قيمة دالة مثلثية لنصف الزاوية.

مفهوم أساسي المتطابقات المثلثية لنصف الزاوية

المتطابقات الآتية صحيحة لقيم θ جميعها:

$$\sin\frac{\theta}{2} = \pm\sqrt{\frac{1-\cos\theta}{2}} \qquad \cos\frac{\theta}{2} = \pm\sqrt{\frac{1+\cos\theta}{2}} \qquad \tan\frac{\theta}{2} = \pm\sqrt{\frac{1-\cos\theta}{1+\cos\theta}},\ \cos\theta \neq -1$$

ستبرهن هذه الصيغ في السؤال 31

المتطابقات المثلثية لضعف الزاوية

المثالان 2 ,1 يبيِّنان كيفية إيجاد القيمة الدقيقة لعبارة ما باستعمال المتطابقات المثلثية لضعف الزاوية.

التقويم التكويني

استعمل تدريبات "تحقق من فهمك" بعد كل مثال للتحقق من مدى فهم الطلاب للمفاهيم.

مثالان إضافيان

1 أوجد القيمة الدقيقة لـ $\cos 2\theta$ إذا كان $\sin\theta = \frac{3}{4}; 0 < \theta < 90°$.
-0.125

2 أوجد القيمة الدقيقة لكلٍّ مما يأتي، علمًا بأن $\cos\theta = \frac{4}{5}; 0° < \theta < 90°$.

a) $\tan 2\theta$ $\quad \frac{24}{7}$

b) $\sin 2\theta$ $\quad \frac{24}{25}$

إرشادات للمعلم الجديد

الحسّ الرياضي: ذكّر الطلاب بالمتطابقة $\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$، وأن هناك صيغتين أخريين نحصل عليهما من هذه المتطابقة وذلك بطرح $\sin^2\theta$ أو $\cos^2\theta$ من كلا الطرفين. وذكّرهم أيضًا أن $\cos 2\theta$ ثلاث صيغ؛ وذلك لوجود 3 صيغ مختلفة للمتطابقة $\cos^2\theta + \sin^2\theta = 1$.

تنويع التعليم

دون ضمن

المتعلمون المتفاعلون قدِّم في هذا الدرس آخر المتطابقات المثلثية في هذا الفصل. وزِّع الطلاب في مجموعات صغيرة، واطلب إليهم عمل بطاقات لجميع المتطابقات، وكتابة طرف المتطابقة الأيسر على بطاقة وطرفها الأيمن على بطاقة أخرى، ثم يقومون بخلط البطاقات، ووضعها مقلوبة على الطاولة، ثم اطلب إليهم أن يلعبوا لعبة الذاكرة بقلب البطاقات حتى الحصول على طرفي كل متطابقة.

152 الفصل 3 المتطابقات والمعادلات المثلثية

إرشادات للدراسة

اختيار الإشارة
أول خطوة في الحل، هي تحديد الربع الذي يقع فيه ضلع الانتهاء للزاوية $\frac{\theta}{2}$. وعندها تستطيع أن تحدد الإشارة.

مثال 3 المتطابقات المثلثية لنصف الزاوية

a) أوجد القيمة الدقيقة لِـ $\cos\frac{\theta}{2}$، علمًا بأن $\sin\theta = -\frac{4}{5}$، θ تقع في الربع الثالث.

$\cos^2\theta = 1 - \sin^2\theta$	استعمل متطابقة فيثاغورس
$\cos^2\theta = 1 - \left(-\frac{4}{5}\right)^2$	$\sin\theta = -\frac{4}{5}$
$\cos^2\theta = 1 - \frac{16}{25}$	$\left(-\frac{4}{5}\right)^2 = \frac{16}{25}$
$\cos^2\theta = \frac{9}{25}$	اطرح
$\cos\theta = \pm\frac{3}{5}$	خُذ الجذر التربيعي لكلا الطرفين

بما أن θ تقع في الربع الثالث، فإن $\cos\theta = -\frac{3}{5}$.

$\cos\frac{\theta}{2} = \pm\sqrt{\frac{1+\cos\theta}{2}}$	متطابقة نصف الزاوية
$= \pm\sqrt{\frac{1-\frac{3}{5}}{2}}$	$\cos\theta = -\frac{3}{5}$
$= \pm\sqrt{\frac{1}{5}}$	بسِّط
$= \pm\frac{1}{\sqrt{5}}\cdot\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{5}} = \pm\frac{\sqrt{5}}{5}$	بإنطاق المقام

بما أن θ تقع بين $180°$ وَ $270°$، فإن $\frac{\theta}{2}$ تقع بين $90°$ وَ $135°$. إذن، $\cos\frac{\theta}{2} = -\frac{\sqrt{5}}{5}$.

b) دون استعمال الآلة الحاسبة، أوجد القيمة الدقيقة لِـ $\cos 67.5°$. $g = 978 + 5.17\sin^2 L - 0.007\sin^2 L$

$\cos 67.5° = \cos\frac{135°}{2}$	$67.5° = \frac{135°}{2}$
$= \sqrt{\frac{1+\cos 135°}{2}}$	$\cos\frac{\theta}{2} = \pm\sqrt{\frac{1+\cos\theta}{2}}$، $67.5°$ في الربع الأول، فالقيمة موجبة
$= \sqrt{\frac{1-\frac{\sqrt{2}}{2}}{2}}$	$\cos 135 = \frac{\sqrt{2}}{2}$
$= \sqrt{\frac{\frac{2}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}}{2}}$	$1 = \frac{2}{2}$
$= \sqrt{\frac{\frac{2-\sqrt{2}}{2}}{2}}$	اطرح
$= \sqrt{\frac{2-\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{1}{2}}$	$\frac{a}{b}\div\frac{c}{d} = \frac{a}{b}\cdot\frac{d}{c}$
$= \sqrt{\frac{2-\sqrt{2}}{4}}$	اضرب
$= \frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{\sqrt{4}}$	$\sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$
$= \frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}$	بسِّط

تحقق من فهمك

3) أوجد القيمة الدقيقة لِـ $\sin\frac{\theta}{2}$، علمًا بأن $\sin\theta = \frac{2}{3}$، θ تقع في الربع الثاني. $\frac{\sqrt{18+6\sqrt{5}}}{6}$

المحتوى الرياضي

اشتقاق الصيغ: تُعَدُّ صيغ الدوال المثلثية لضعف الزاوية حالات خاصة من الصيغ التي تم دراستها في الدرس السابق. ويمكن الحصول على صيغ الدوال المثلثية لضعف الزاوية من خلال افتراض تساوي قيمتي الزاويتين A، B في الصيغ المثلثية لمجموع زاويتين.

متطابقات نصف الزاوية

مثال 3 يبيِّن كيفية استعمال متطابقات نصف الزاوية لإيجاد القيمة الدقيقة للدّالة المثلثية لزاوية موجودة في ربع محدد.

مثال 4 يبيِّن كيفية تبسيط معادلة تحتوي على عبارات مثلثية.

مثال 5 يبيِّن كيفية إثبات صحة متطابقات مثلثية باستعمال متطابقات النسب المثلثية لضعف الزاوية.

مثال إضافي

3 a) أوجد القيمة الدقيقة لِـ $\cos\frac{\theta}{2}$، علمًا أن $\sin\theta = \frac{3}{5}$، θ تقع في الربع الثاني. $\frac{\sqrt{10}}{10}$ أو $\sqrt{\frac{1}{10}}$

b) أوجد القيمة الدقيقة لـ $\sin 165°$. $\frac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{2}$

تنبيه!

تجنب الأخطاء: ركز على "إرشادات للدراسة" الموجودة في الهامش بجانب المثال 3، حيث إن معرفة الإشارة المناسبة للجواب في بداية الحسابات تساعد بعض الطلاب على تجنّب نسيان هذه الخطوة عند الانتهاء من حساباتهم.

التعليم باستعمال التقنيات

تسجيل مرئي: وزِّع الطلاب في مجموعات، وزوِّد كل مجموعة بمسألة تتناول إما متطابقات ضعف الزاوية أو متطابقات نصف الزاوية. واطلب إلى كل مجموعة تسجيل عرضٍ مرئي يبينون خلاله كيفية اختيار الصيغة المناسبة لحل المسألة، محاولاً تنويع مسائل الطلاب قدر الإمكان.

مثال 4 من واقع الحياة التبسيط باستعمال المتطابقات المثلثية لضعف الزاوية

نوافير: ارجع إلى المعلومات الموجودة في فقرة "لماذا؟" بداية الدرس. وأوجد $\frac{H}{D}$.

$$\frac{H}{D} = \frac{\frac{v^2}{2g}\sin^2\theta}{\frac{v^2}{g}\sin 2\theta}$$ المعادلة الأصلية

$$= \frac{\frac{v^2\sin^2\theta}{2g}}{\frac{v^2\sin 2\theta}{g}}$$ بسّط كلًا من البسط والمقام

$$= \frac{v^2\sin^2\theta}{2g}\cdot\frac{g}{v^2\sin 2\theta}$$ $\frac{a}{b}\div\frac{c}{d}=\frac{a}{b}\cdot\frac{d}{c}$

$$= \frac{\sin^2\theta}{2\sin 2\theta}$$ بسّط

$$= \frac{\sin^2\theta}{4\sin\theta\cos\theta}$$ $\sin 2\theta = 2\sin\theta\cos\theta$

$$= \frac{1}{4}\cdot\frac{\sin\theta}{\cos\theta}$$ بسّط

$$= \frac{1}{4}\tan\theta$$ $\frac{\sin\theta}{\cos\theta} = \tan\theta$

الربط مع الحياة

نافورة الملك فهد هي أحد معالم الجمال في مدينة جدة، فقد أقيمت على جزيرة قرابة الشاطئ، وتضخ الماء رأسيًا إلى ارتفاع 312m .

تحقق من فهمك

يعطى تسارع الجاذبية الأرضية عند مستوى سطح البحر (بالسنتمتر لكل ثانية تربيع) تقريبًا بالصيغة: $g = 978 + 5.17\sin^2 L - 0.014\sin L\cos L$، حيث L تمثل زاوية دائرة العرض

4A) بسِّط هذه العلاقة مستعملًا المتطابقات المثلثية لضعف الزاوية. $g = 978 + 5.17\sin^2 L - 0.007\sin 2L$

4B) استعمل الصيغة المبسطة التي أوجدتها في الفرع 4A، واحسب قيمة g عندما $L = 45°$. 980.578

تذكر أنك تستطيع استعمال المتطابقات المثلثية لمجموع زاويتين والفرق بينهما في إثبات صحة المتطابقات. كما يمكنك استعمال المتطابقات المثلثية لضعف الزاوية ونصفها في إثبات صحة المتطابقات أيضًا.

مثال 5 إثبات صحة المتطابقات

أثبت أن المعادلة $\frac{\cot\theta - 1}{\cot\theta + 1} = \frac{\cos 2\theta}{1 + \sin 2\theta}$ تمثّل متطابقة.

$$\frac{\cot\theta - 1}{\cot\theta + 1}$$ الطرف الأيمن

$$= \frac{\frac{\cos\theta}{\sin\theta} - 1}{\frac{\cos\theta}{\sin\theta} + 1}$$ $\cot\theta = \frac{\cos\theta}{\sin\theta}$

$$= \frac{\cos\theta - \sin\theta}{\cos\theta + \sin\theta}$$ اضرب كلًا من البسط والمقام في $\sin\theta$

$$= \frac{\cos\theta - \sin\theta}{\cos\theta + \sin\theta}\cdot\frac{\cos\theta + \sin\theta}{\cos\theta + \sin\theta}$$ اضرب في $\frac{\cos\theta + \sin\theta}{\cos\theta + \sin\theta} = 1$

$$= \frac{\cos^2\theta - \sin^2\theta}{\cos^2\theta + 2\cos\theta\sin\theta + \sin^2\theta}$$ اضرب

$$= \frac{\cos^2\theta - \sin^2\theta}{1 + 2\cos\theta\sin\theta}$$ $\cos^2\theta + \sin^2\theta = 1$

$$= \frac{\cos 2\theta}{1 + \sin 2\theta}\ \checkmark$$ $\cos^2\theta - \sin^2\theta = \cos 2\theta;\ 2\cos\theta\sin\theta = \sin 2\theta$

وهو الطرف الأيسر؛ أي أن المعادلة تمثّل متطابقة.

تحقق من فهمك

5) $4\cos^2 x - \sin^2 2x = 4\cos^4 x$. انظر الهامش.

مثالان إضافيان

4 نافورة: ارجع إلى فقرة "لماذا؟" في بداية الدرس. وأوجد $\frac{D}{H}$.

$4\cot\theta$ أو $\frac{4}{\tan\theta}$

5 أثبت أن المعادلة $\sin\theta(\cos^2\theta - \cos 2\theta) = \sin^3\theta$ تمثل متطابقة.

$\sin\theta(\cos^2\theta - \cos 2\theta) \stackrel{?}{=} \sin^3\theta$

$\sin\theta[\cos^2\theta - (\cos^2\theta - \sin^2\theta)] \stackrel{?}{=} \sin^3\theta$

$\sin\theta(\cos^2\theta - \cos^2\theta + \sin^2\theta) \stackrel{?}{=} \sin^3\theta$

$\sin\theta(\sin^2\theta) \stackrel{?}{=} \sin^3\theta$

$\sin^3\theta = \sin^3\theta\ \checkmark$

إجابة (تحقق من فهمك):

5) $4\cos^2 x - \sin^2 2x \stackrel{?}{=} 4\cos^4 x$

$4\cos^2 x - 4\sin^2 x\cos^2 x \stackrel{?}{=} 4\cos^4 x$

$4\cos^2 x(1 - \sin^2 x) \stackrel{?}{=} 4\cos^4 x$

$4\cos^2 x\cos^2 x \stackrel{?}{=} 4\cos^4 x$

$4\cos^4 x = 4\cos^4 x\ \checkmark$

تنويع التعليم

فوق

توسّع: اطلب إلى الطلاب كتابة $\sin 4\theta$ بدلالة $\sin\theta$ و $\cos\theta$.

إجابة ممكنة: $\sin 4\theta = 4\sin\theta\cos\theta - 8\sin^3\theta\cos\theta$

تدرب وحل المسائل

أوجد القيمة الدقيقة لكلٍّ من $\sin 2\theta, \cos 2\theta, \sin\frac{\theta}{2}, \cos\frac{\theta}{2}$ إذا كان: (الأمثلة 1-3) (1-7) انظر الهامش.

1) $\sin\theta = \frac{1}{4}; 0° < \theta < 90°$

2) $\sin\theta = \frac{4}{5}; 90° < \theta < 180°$

3) $\cos\theta = \frac{3}{5}; 270° < \theta < 360°$

4) $\tan\theta = -\frac{8}{15}; 90° < \theta < 180°$

5) $\sin\theta = \frac{2}{3}; 90° < \theta < 180°$

6) $\sin\theta = -\frac{15}{17}; \pi < \theta < \frac{3\pi}{2}$

7) $\tan\theta = -2; \frac{\pi}{2} < \theta < \pi$

أوجد القيمة الدقيقة لكل مما يأتي:

8) $\sin\frac{\pi}{8}$ $\quad \frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}$

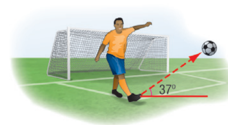
9) $\cos 15°$ $\quad \frac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{2}$

10) $\sin 75°$ $\quad \frac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{2}$

11) $\tan 165°$ $\quad -\sqrt{7-4\sqrt{3}}$

12) $\tan\frac{5\pi}{12}$ $\quad \sqrt{7+4\sqrt{3}}$

13) **كرة قدم:** ركل لاعب كرة قدم كرة بزاوية قياسها 37° مع سطح الأرض، وبسرعة ابتدائية متجهة مقدارها 52 ft/s. إذا كان المسافة الأفقية d التي تقطعها الكرة تُعطى بالصيغة $d = \frac{2v^2\sin\theta\cos\theta}{g}$. حيث g تسارع الجاذبية الأرضية ويساوي $32\,ft/s^2$، وَ v تُمثّل السرعة الابتدائية المتجهة. (مثال 4)



$d = \frac{v^2 \sin 2\theta}{g}$

a) بسِّط الصيغة مستعملًا المتطابقات المثلثية لضعف الزاوية.

b) ما المسافة الأفقية d التي تقطعها الكرة باستعمال الصيغة المبسّطة؟ 81 ft تقريبًا

أثبت أن كل معادلة مما يأتي تمثّل متطابقة: (مثال 5) (14-15) انظر الهامش.

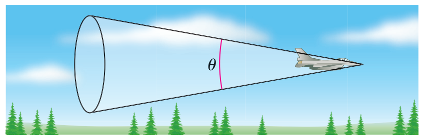
14) $\tan\theta = \frac{1-\cos 2\theta}{\sin 2\theta}$

15) $\tan\frac{\theta}{2} = \frac{\sin\theta}{1+\cos\theta}$

16) $\tan 2\theta = \frac{2}{\cot\theta - \tan\theta}$ (16-17) انظر ملحق الإجابات.

17) $\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2} = \frac{\sin\theta}{2}$

18) **عدد ماخ:** ترتبط زاوية رأس المخروط الذي تشكّله الأمواج الصوتية الناتجة عن اختراق الطائرة لحاجز الصوت بعدد ماخ M (نسبة إلى عالم الفيزياء النمساوي ماخ) وفق العلاقة $\sin\frac{\theta}{2} = \frac{1}{M}$.



a) عبِّر عن قيمة العدد M بدلالة دالة جيب التمام. (a $\sqrt{\frac{1-\cos\theta}{2}} = \frac{1}{M}$

b) إذا كان $\cos\theta = \frac{17}{18}$ ، فاستعمل العبارة التي وجدتها في a لحساب قيمة عدد ماخ. 6

19) **إلكترونيات:** يمر تيار متردد في دائرة كهربائية. إذا كانت شدة التيار الكهربائي I بالأمبير عند الزمن t ثانية هي $I_0 \sin t\theta$ ، فإن القدرة P المرتبطة بالمقاومة R تُعطى بالصيغة: $P = I_0^2 R \sin^2 t\theta$. عبّر عن القدرة بدلالة $\cos 2t\theta$. $P = \frac{1}{2}I_0^2 R - \frac{1}{2}I_0^2 R\cos 2t\theta$

20) **كرة قدم:** ركل حسن كرة قدم عدة مرات بسرعة متجهة ابتدائية مقدارها 95 ft/s . برهن أن المسافة الأفقية التي قطعتها الكرة متساوية لكل من الزاويتين $\theta = 45° + A, \theta = 45° - A$. استعمل الصيغة المعطاة في التمرين 13 . انظر ملحق الإجابات.

أوجد القيم الدقيقة لكلٍّ من $\sin 2\theta, \cos 2\theta, \tan 2\theta$ ، إذا كان:

21) $\cos\theta = \frac{4}{5}; 0° < \theta < 90°$ $\quad \frac{24}{25}, \frac{7}{25}, \frac{24}{7}$

22) $\sin\theta = \frac{1}{3}; 0 < \theta < \frac{\pi}{2}$ $\quad \frac{4\sqrt{2}}{9}, \frac{7}{9}, \frac{4\sqrt{2}}{7}$

23) $\tan\theta = -3; 90° < \theta < 180°$ $\quad -\frac{3}{5}, -\frac{4}{5}, \frac{3}{4}$

24) $\sec\theta = -\frac{4}{3}; 90° < \theta < 180°$ $\quad \frac{-3\sqrt{7}}{8}, \frac{1}{8}, -3\sqrt{7}$

25) $\cot\theta = \frac{3}{2}; 180° < \theta < 270°$ $\quad \frac{12}{13}, \frac{5}{13}, \frac{12}{5}$

26) **تمثيلات متعددة:** ستستكشف في هذه المسألة كيفية إيجاد متطابقة مثلثية اعتمادًا على التمثيل البياني للدوال المثلثية. انظر ملحق الإجابات.

a) **بيانيًا:** استعمل الحاسبة البيانية لتمثيل الدالة $f(\theta) = 4\left(\sin\theta\cos\frac{\pi}{4} - \cos\theta\sin\frac{\pi}{4}\right)$ بيانيًا في الفترة $-2\pi \le \theta \le 2\pi$.

b) **تحليليًا:** اعتمد على التمثيل البياني في (a) لتخمين دالة بدلالة الجيب تطابق $f(\theta)$. ثم أثبت صحتها جبريًا.

c) **بيانيًا:** استعمل الحاسبة البيانية لتمثيل الدالة $g(\theta) = \cos^2\left(\theta - \frac{\pi}{3}\right) - \sin^2\left(\theta - \frac{\pi}{3}\right)$ بيانيًا في الفترة $-2\pi \le \theta \le 2\pi$.

d) **تحليليًا:** اعتمد على التمثيل البياني في (c) لتخمين دالة بدلالة جيب التمام تطابق $g(\theta)$. ثم أثبت صحتها جبريًا.

تنويع الواجبات المنزلية

المستوى	الأسئلة
دون المتوسط (دون)	1–17، 20، 22، 25، 27، 29–44
ضمن المتوسط (ضمن)	1–17 (فردي)، 18–26 (زوجي)، 27، 29–44
فوق المتوسط (فوق)	18–44

3 التدريب

التقويم التكويني

استعمل الأسئلة من 1–17 للتأكد من فهم الطلاب.

ثم استعمل الجدول أسفل هذه الصفحة؛ لتعيين الواجبات المنزلية للطلاب بحسب مستوياتهم.

تمثيلات متعددة يستعمل الطلاب في السؤال 26 التمثيل البياني لإيجاد متطابقات مثلثية وذلك باستعمال الحاسبة البيانية.

إجابات:

1) $\frac{\sqrt{15}}{8}, \frac{7}{8}, \frac{\sqrt{8-2\sqrt{15}}}{4}, \frac{\sqrt{8+2\sqrt{15}}}{4}$

2) $\frac{-24}{25}, \frac{-7}{25}, \frac{2\sqrt{5}}{5}, \frac{\sqrt{5}}{5}$

3) $\frac{-24}{25}, \frac{-7}{25}, \frac{\sqrt{5}}{5}, \frac{-2\sqrt{5}}{5}$

4) $\frac{-240}{289}, \frac{161}{289}, \frac{4\sqrt{17}}{17}, \frac{\sqrt{17}}{17}$

5) $\frac{-4\sqrt{5}}{9}, \frac{1}{9}, \frac{\sqrt{6}\sqrt{3+\sqrt{5}}}{6}, \frac{\sqrt{6}\sqrt{3-\sqrt{5}}}{6}$

6) $\frac{240}{289}, -\frac{161}{289}, \frac{5\sqrt{34}}{34}, -\frac{3\sqrt{34}}{34}$

7) $\frac{-4}{5}, \frac{-3}{5}, \sqrt{\frac{\sqrt{5}+1}{2\sqrt{5}}}, \sqrt{\frac{\sqrt{5}-1}{2\sqrt{5}}}$

14)

$$\tan\theta \stackrel{?}{=} \frac{1-\cos 2\theta}{\sin 2\theta}$$

$$\stackrel{?}{=} \frac{1-(1-2\sin^2\theta)}{2\sin\theta\cos\theta}$$

$$\stackrel{?}{=} \frac{2\sin^2\theta}{2\sin\theta\cos\theta}$$

$$\stackrel{?}{=} \frac{\sin\theta}{\cos\theta}$$

$$= \tan\theta ✓$$

15)

$$\tan\frac{\theta}{2} \stackrel{?}{=} \frac{\sin\theta}{1+\cos\theta}$$

$$\tan\frac{\theta}{2} \stackrel{?}{=} \frac{\sin 2\left(\frac{\theta}{2}\right)}{1+\cos 2\left(\frac{\theta}{2}\right)}$$

$$\tan\frac{\theta}{2} \stackrel{?}{=} \frac{2\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}}{1+2\cos^2\frac{\theta}{2}-1}$$

$$\tan\frac{\theta}{2} \stackrel{?}{=} \frac{2\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}}{2\cos^2\frac{\theta}{2}}$$

$$\tan\frac{\theta}{2} \stackrel{?}{=} \frac{\sin\frac{\theta}{2}}{\cos\frac{\theta}{2}}$$

$$\tan\frac{\theta}{2} \stackrel{?}{=} \tan\frac{\theta}{2} ✓$$

تنبيه!

اكتشف الخطأ: يتعين على الطلاب في السؤال 27 أن يعرفوا أن سعيدًا أخطأ عندما عوض عن $\frac{\sqrt{2}}{4}-\frac{\sqrt{6}}{4}$ بـ $\frac{\sqrt{4}}{4}$، كما أن سلمان أخطأ أيضًا عندما عوض عن $\cos 30°$ بـ $\frac{1}{2}$ بدلًا من $\frac{\sqrt{3}}{2}$؛ لذا بيّن للطلاب أن الخطوتين $\sin 15° = \sin(45° - 30°)$، $\sin 15° = \sin\frac{30°}{2}$ صحيحتان. ولكن خطوة سعيد الرابعة يجب أن تكون $\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$، وخطوات سلمان بعد السطر الأول يجب أن تكون

$$\sin\frac{30°}{2} = \sqrt{\frac{1-\frac{\sqrt{3}}{2}}{2}} = \sqrt{\frac{2-\sqrt{3}}{4}} = \frac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{2}$$

4 التقويم

فهم الرياضيات اطلب إلى الطلاب توضيح كيفية تحديد إن كانت المسألة تتضمن استعمال المتطابقة المثلثية لضعف الزاوية أو المتطابقة المثلثية لنصف الزاوية.

التقويم التكويني

تحقق من مدى استيعاب الطلاب للمفاهيم الواردة في الدرس 4–3 بإعطائهم:

الاختبار القصير 3، ص (50)

مسائل مهارات التفكير العليا

انظر ملحق الإجابات

27) **اكتشف الخطأ:** يحاول سعيد وسلمان حساب القيمة الدقيقة لـ $\sin 15°$. هل إجابة أيٍّ منهما صحيحة؟ برِّر إجابتك.

سعيد

$\sin(A-B) = \sin A \cos B - \cos A \sin B$

$\sin(45-30) = \sin 45 \cos 30 - \cos 45 \sin 30$

$= \frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{1}{2}$

$= \frac{\sqrt{4}}{4}$

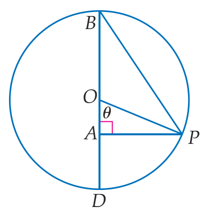
سلمان

$\sin\frac{A}{2} = \sqrt{\frac{1-\cos A}{2}}$

$\sin\frac{30}{2} = \sqrt{\frac{1-\frac{1}{2}}{2}}$

$= 0.5$

28) **تحدٍّ:** استعمل دائرة الوحدة أدناه، والشكل المرسوم داخلها، لتبرهن أن: $\tan\frac{1}{2}\theta = \frac{\sin\theta}{1+\cos\theta}$. انظر الهامش



29) **اكتب:** اكتب فقرة مختصرة تبين الشروط اللازم توافرها؛ كي تستعمل كلًّا من المتطابقات الثلاث لـ $\cos 2\theta$. انظر ملحق الإجابات.

30) **برهان:** استعمل الصيغة $\sin(A+B)$ لاشتقاق صيغة لـ $\sin 2\theta$، واستعمل الصيغة $\cos(A+B)$ لاشتقاق صيغة لـ $\cos 2\theta$. انظر ملحق الإجابات

31) **تبرير:** اشتقّ المتطابقات المثلثية لنصف الزاوية من المتطابقات المثلثية لضعف الزاوية. انظر ملحق الإجابات

32) **مسألة مفتوحة:** ضرب لاعب جولف كرة عدة مرات بسرعة ابتدائية مقدارها 115 ft/s، ولنفترض أن المسافة d التي قطعتها الكرة في كل مرة تُعطى بالصيغة $d = \frac{2v^2 \sin\theta\cos\theta}{g}$. فسِّر لماذا تكون المسافة العظمى عندما $\theta = 45°$. $(g = 32\ ft/s^2)$ انظر الهامش

مراجعة تراكمية

أثبت أن كل معادلة مما يأتي تمثِّل متطابقة: (الدرس 3–2) انظر الهامش

33) $\cot\theta + \sec\theta = \frac{\cos^2\theta + \sin\theta}{\sin\theta\cos\theta}$

34) $\sin^2\theta + \tan^2\theta = (1-\cos^2\theta) + \frac{\sec^2\theta}{\csc^2\theta}$

35) $(\sin\theta - \cos\theta)^2 = 1 - 2\sin\theta\cos\theta$

أوجد القيمة الدقيقة لكلٍّ ممّا يأتي: (الدرس 3–3)

36) $\sin 135°$ $\frac{\sqrt{2}}{2}$

37) $\cos 105°$ $\frac{\sqrt{2}-\sqrt{6}}{4}$

38) $\sin 285°$ $\frac{-\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$

39) $\cos 210°$ $-\frac{\sqrt{3}}{2}$

40) $\sin(-240°)$ $\frac{\sqrt{3}}{2}$

41) $\cos(-120°)$ $-\frac{1}{2}$

42) أوجد القيمة الدقيقة لـ $\cos 78° \cos 18° + \sin 78° \sin 18°$. (الدرس 3–3) $\frac{1}{2}$

تدريب على اختبار

43) أوجد القيمة الدقيقة لـ $\tan\frac{\theta}{2}$ إذا كان $\cos\theta = \frac{\sqrt{3}}{2}; 0 < \theta < 90°$. **A**

للتوضيح انظر ملحق الإجابات

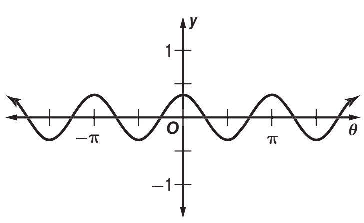
A $2-\sqrt{3}$

B $\sqrt{3}-2$

C $\frac{\sqrt{3}}{3}$

D $\sqrt{3}$

44) معادلة الدالة الممثَّلة بيانيًّا في الشكل أدناه هي: **B**



A $y = 3\cos 2\theta$

B $y = \frac{1}{3}\cos 2\theta$

C $y = 3\cos\frac{1}{2}\theta$

D $y = \frac{1}{3}\cos\frac{1}{2}\theta$

إجابات:

28) الزاوية $\angle PBD$ هي زاوية محيطية تقابل القوس نفسه الذي تقابله الزاوية المركزية $\angle POD$؛ لذا فإن $m\angle PBD = \frac{1}{2} m\angle POD$، وباستعمال المثلث القائم، تجد أن

$$\tan\frac{1}{2}\theta = \frac{PA}{BA} = \frac{PA}{1+OA} = \frac{\sin\theta}{1+\cos\theta}$$

32) $d = \frac{2v^2\sin\theta\cos\theta}{g} = \frac{v^2\sin 2\theta}{g}$

وتكون أكبر قيمة للمقدار $\frac{v^2\sin 2\theta}{g}$ عندما $\sin 2\theta = 1$ ويتحقق هذا عندما $2\theta = 90°$ وبالتالي فإن $\theta = 45°$

33)

$\cot\theta + \sec\theta \stackrel{?}{=} \frac{\cos^2\theta + \sin\theta}{\sin\theta\cos\theta}$

$\cot\theta + \sec\theta \stackrel{?}{=} \frac{\cos^2\theta}{\sin\theta\cos\theta} + \frac{\sin\theta}{\sin\theta\cos\theta}$

$\cot\theta + \sec\theta \stackrel{?}{=} \frac{\cos\theta}{\sin\theta} + \frac{1}{\cos\theta}$

$\cot\theta + \sec\theta = \cot\theta + \sec\theta$

34)

$\sin^2\theta + \tan^2\theta \stackrel{?}{=} (1-\cos^2\theta) + \frac{\sec^2\theta}{\csc^2\theta}$

$\sin^2\theta + \tan^2\theta \stackrel{?}{=} \sin^2\theta + \frac{\sec^2\theta}{\csc^2\theta}$

$\sin^2\theta + \tan^2\theta \stackrel{?}{=} \sin^2\theta + \frac{1}{\cos^2\theta} \div \frac{1}{\sin^2\theta}$

$\sin^2\theta + \tan^2\theta \stackrel{?}{=} \sin^2\theta + \frac{\sin^2\theta}{\cos^2\theta}$

$\sin^2\theta + \tan^2\theta \stackrel{?}{=} \sin^2\theta + \tan^2\theta$ ✓

35)

$(\sin\theta - \cos\theta)^2 \stackrel{?}{=} 1 - 2\sin\theta\cos\theta$

$\sin^2\theta + \cos^2\theta - 2\sin\theta\cos\theta \stackrel{?}{=} 1 - 2\sin\theta\cos\theta$

$1 - 2\sin\theta\cos\theta \stackrel{?}{=} 1 - 2\sin\theta\cos\theta$ ✓

استكشاف 3-5

معمل الحاسبة البيانية:

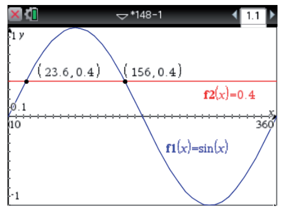
حل المعادلات المثلثية

Solving Trigonometric Equations

التمثيل البياني للدالة المثلثية مكوّن من النقط التي إحداثياتها تحقّق الدالة. ولحل المعادلة المثلثية، تحتاج إلى إيجاد قيم المتغيّر التي تحقّق المعادلة جميعها. بإمكانك استعمال الحاسبة البيانية TI–nspire؛ لحل المعادلات باستعمال التمثيل، وذلك بتمثيل كلٍّ من طرفي المعادلة بوصفها دالة على حدة، ثم إيجاد نقاط التقاطع.

نشاط 1 معادلة مثلثية بحلول حقيقية

استعمل الحاسبة البيانية لحلّ المعادلة $\sin x = 0.4$، إذا كانت $0° \le x < 360°$.



الخطوة 1: تمثيل الدالتين بيانيًّا

- اضبط الحاسبة على نظام الدرجات بالضغط على مفتاح on ثم 5: الإعدادات ومنها 2: إعدادات المستند ثم الزاوية: درجة
- أعد كتابة المعادلة على شكل دالتين $f1(x) = \sin x,\ f2(x) = 0.4$.
- مثّل الدالتين بيانيًّا بالضغط على المفاتيح:

on ↓ trig sin x enter tab 0.4 enter

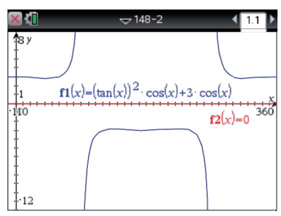
- حدد فترة الرسم المطلوبة بالضغط على menu واختر منها 4: تكبير/تصغير النافذة ثم 1: إعدادات النافذة
وحدد القيمة الصغرى لـ x بـ °0، والقيمة العظمى لـ x بـ °360،
كذلك حدد القيمة الصغرى لـ y بـ 1−، والقيمة العظمى لـ y بـ 1

الخطوة 2: تحديد الحلول

استعمل ميزة **نقاط التقاطع** في إيجاد قيم تقريبية للحلول بالضغط على مفتاح menu واختر منها 6: تحليل الرسم البياني ثم اختر 4: نقاط التقاطع، واضغط في أي نقطة على الشاشة وحرك المؤشر مرورًا بكل نقاط التقاطع في $0° \le x < 360°$، ستكون الحلول هي: $x \approx 23.6°$, $x \approx 156.0°$

نشاط 2 معادلة مثلثية ليس لها حلول حقيقية

استعمل الحاسبة البيانية لحلّ المعادلة: $\tan^2 x \cos x + 3 \cos x = 0$، إذا كانت $0° \le x < 360°$.



الخطوة 1: تمثيل الدالتين بيانيًّا

- أعد كتابة المعادلة على شكل دالتين، $f1(x) = \tan^2 x \cos x + 3 \cos x,\ f2(x) = 0$.
- مثّل الدالتين بيانيًّا بالضغط على المفاتيح:

on ↓ (trig tan x ^ 2 ▶ ▶ trig cos x + 3 trig cos x enter tab 0 enter

الخطوة 2: تحديد الحلول

هاتان الدّالتان لا تتقاطعان؛ لذلك ليس للمعادلة: $\tan^2 x \cos x + 3 \cos x = 0$ حلول حقيقية.

تمارين:

استعمل الحاسبة البيانية لحل المعادلات الآتية لقيم x جميعها الموضحة بجانب كلٍّ منها:

1) $\sin x = 0.7;\ 0° \le x < 360°$ **44.4°, 135.6°**
2) $\tan x = \cos x;\ 0° \le x < 360°$ **38.17°, 141.8°**
3) $3 \cos x + 4 = 0.5;\ 0° \le x < 360°$ **لا يوجد حلول حقيقية**
4) $0.25 \cos x = 3.4;\ -720° \le x < 720°$ **لا يوجد حلول حقيقية**
5) $\sin 2x = \sin x;\ 0° \le x < 360°$ **0°, 60°, 180°, 300°**
6) $\sin 2x - 3 \sin x = 0;\ -360° \le x < 360°$ **−360°, −180°, 0°, 180°**

ملاحظات الدرس

استكشاف 3-5

1 التركيز

الهدف: استعمال الحاسبة البيانية لحل المعادلات المثلثية.

المواد اللازمة

الآلة الحاسبة البيانية TI — nspire.

إرشادات التدريس

في النشاط 1 يمكن إيجاد الحلول التقريبية باستعمال ميزة Trace. وعلى أية حال فإن ميزة Intersection Point (s) تعطي حلولًا أكثر دقة في معظم المواقف. ذكّر الطلاب باستعمال الأوامر المناسبة لتمثيلاتهم.

2 التدريس

العمل في مجموعات متعاونة

وزّع الطلاب في مجموعات ثنائية متفاوتة القدرات يساعد بعضهم بعضًا على تصحيح أخطاء الضغط على المفاتيح، ثم اطلب إليهم إكمال تنفيذ النشاطين 1, 2 وحل التمرين 1.

واسأل:

- كيف ترتبط حلول المعادلات بنقط تقاطع المنحنيات؟ الحلول هي قيم x لنقط التقاطع.
- كيف يمكنك أن تحدّد عدم وجود حل للمعادلة؟ منحنيا f1 و f2 لا يتقاطعان.

تدريب. اطلب إلى الطلاب حل التمارين 6–2.

3 التقويم

التقويم التكويني

استعمل السؤال 6 لتقويم مدى فهم الطلاب لطريقة تأثير فترات قيم x في الحلول.

من المحسوس إلى المجرد

أسأل الطلاب حول الطريقة التي يؤثر فيها تحديد فترة مختلفة أو عدم وجود فترة في حلول التمارين 6–1.

3-5 ملاحظات الدرس

1 التركيز

الترابط الرأسي

ما قبل الدرس 3-5

إثبات صحة متطابقات مثلثية.

الدرس 3-5

حل معادلات مثلثية.

تمييز الحلول الدخيلة للمعادلات المثلثية.

ما بعد الدرس 3-5

استعمال حساب المثلثات لحل مسائل من واقع الحياة.

2 التدريس

أسئلة التعزيز

اطلب إلى الطلاب قراءة فقرة "لماذا؟".

واسأل:

- ما المسافة التي تقطعها نقطة على العجلة في الدورة الواحدة؟ 40π أو 125.66 مترًا تقريبًا.
- ما المسافة التي يقطعها أيُّ موقع على العجلة في دقيقة واحدة؟ 60π، أو 188.5 مترًا تقريبًا.
- ما قيمة $20\cos 3\pi t$ عندما $t = 0$؟ 20

3-5 حل المعادلات المثلثية
Solving Trigonometric Equations

فيما سبق:

درستُ المتطابقات المثلثية. (الدروس من 2–3 إلى 3–4)

والآن:

- أحل المعادلات المثلثية.
- أميز الحلول الدخيلة للمعادلات المثلثية.

المفردات:

المعادلات المثلثية
trigonometric equations

www.obeikaneducation.com

لماذا؟

عند ركوبك عجلة دوارة قطرها 40 m، وتدور بمعدل 1.5 دورة كل دقيقة. فإنه يمكن تمثيل ارتفاع مقعدك فوق سطح الأرض، بالأمتار بعد t دقيقة بالمعادلة:
$h = 21 - 20\cos 3\pi t$.

بعد كم دقيقة من بدء حركة العجلة يكون مقعدك على ارتفاع 31 m عن سطح الأرض للمرة الأولى؟

حل المعادلات المثلثية: درست نوعًا خاصًّا من المعادلات المثلثية هو المتطابقات. والمتطابقات المثلثية معادلات تكون صحيحة للقيم جميعها التي يكون عندها المتغير معرّفًا. وفي هذا الدرس سوف تتعلم حل **المعادلات المثلثية** التي تكون صحيحة عند قيم محدّدة للمتغير.

إرشادات للدراسة

حل المعادلات المثلثية حل معادلة مثلثية يعني إيجاد قيم المتغير جميعها التي تحقق المعادلة.

مثال 1 حل المعادلات على فترة معطاة

حُلّ كلًّا من المعادلتين الآتيتين:

a) $\sin\theta\cos\theta - \frac{1}{2}\cos\theta = 0$ ، إذا كانت $0 \le \theta \le 180°$.

$\sin\theta\cos\theta - \frac{1}{2}\cos\theta = 0$ المعادلة الأصلية

$\cos\theta\left(\sin\theta - \frac{1}{2}\right) = 0$ حلّل

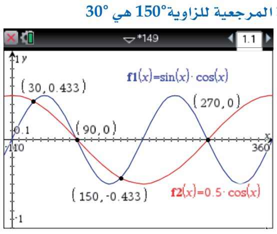
$\cos\theta = 0$ أو $\sin\theta - \frac{1}{2} = 0$ خاصية الضرب الصفري

$\theta = 90°$ أو $270°$ ، $\sin\theta = \frac{1}{2}$

$\theta = 30°$ أو $150°$ الزاوية المرجعية للزاوية °150 هي °30

الحلول هي °150 ,°90 ,°30 فقط؛ لأن $0 \le \theta \le 180°$

التحقق يمكنك التحقق من صحة الحل بالتمثيل البياني لكلٍّ من:
$y = \sin\theta\cos\theta,\ y = \frac{1}{2}\cos\theta$ على المستوى الإحداثي نفسه، ثم إيجاد نقاط تقاطع التمثيلين البيانيين. بإمكانك أن تلاحظ أنه يوجد عدد لا نهائي من هذه النقاط، ولكننا نهتم بالنقاط الموجودة في الفترة بين °0 وَ °180 فقط.



b) $2\sin^2\theta - 3\sin\theta - 2 = 0$ ، إذا كان $0 \le \theta \le 2\pi$

$2\sin^2\theta - 3\sin\theta - 2 = 0$ المعادلة الأصلية

$(\sin\theta - 2)(2\sin\theta + 1) = 0$ حلّل

$2\sin\theta + 1 = 0$ أو $\sin\theta - 2 = 0$ خاصية الضرب الصفري

$2\sin\theta = -1$ ، $\sin\theta = 2$

$\sin\theta = -\frac{1}{2}$

$\theta = \frac{7\pi}{6}, \frac{11\pi}{6}$

$\sin\theta = 2$ ليس لها حل؛ لأن كل قيمة من قيم $\sin\theta$ يجب أن تقع في الفترة $[-1, 1]$

لذلك يكون للمعادلة حلّان هما : $\frac{7\pi}{6}, \frac{11\pi}{6}$

مصادر الدرس 3 – 5

المصدر	دون المتوسط	ضمن المتوسط	فوق المتوسط
دليل المعلم	• تنويع التعليم ص (160)	• تنويع التعليم ص (160)	
كتاب التمارين	• ص (21)	• ص (21)	• ص (21)
مصادر المعلم للأنشطة الصفية	• تدريبات إعادة التعليم، ص (22) • تدريبات حل المسألة، ص (24)	• تدريبات حل المسألة، ص (24) • التدريبات الإثرائية، ص (25)	• تدريبات حل المسألة، ص (24) • التدريبات الإثرائية، ص (25)

التحقق:

$$2\sin^2\theta - 3\sin\theta - 2 = 0$$
$$2\sin^2\left(\frac{7\pi}{6}\right) - 3\sin\left(\frac{7\pi}{6}\right) - 2 \stackrel{?}{=} 0$$
$$2\left(\frac{1}{4}\right) - 3\left(-\frac{1}{2}\right) - 2 \stackrel{?}{=} 0$$
$$\frac{1}{2} + \frac{3}{2} - 2 \stackrel{?}{=} 0$$
$$0 = 0 \checkmark$$

$$2\sin^2\theta - 3\sin\theta - 2 = 0$$
$$2\sin^2\left(\frac{11\pi}{6}\right) - 3\sin\left(\frac{11\pi}{6}\right) - 2 \stackrel{?}{=} 0$$
$$2\left(\frac{1}{4}\right) - 3\left(-\frac{1}{2}\right) - 2 \stackrel{?}{=} 0$$
$$\frac{1}{2} + \frac{3}{2} - 2 \stackrel{?}{=} 0$$
$$0 = 0 \checkmark$$

تحقق من فهمك

1A) حُلّ المعادلة $\cos x \sin x = 3\cos x$، إذا كانت $0 \le \theta \le 2\pi$. $x = \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}$

1B) $\sin^2\theta + 2\cos^2\theta = 4$ لا يوجد حل

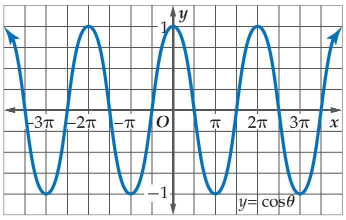
تحل المعادلات المثلثية عادة، لقيم المتغيّر في الفترة $[0, 2\pi]$ بالراديان، أو $[0°, 360°]$ بالدرجات. كما توجد حلول أخرى تقع خارج الفترات المحددة. لذلك، فالحلول تختلف باختلاف الفترات.

مثال 2 معادلة مثلثية لها عدد لا نهائي من الحلول

حُلّ المعادلة $\cos\theta + 1 = 0$ لقيم θ جميعها، إذا كان قياس θ بالراديان.

$$\cos\theta + 1 = 0$$
$$\cos\theta = -1$$

استعن بالتمثيل البياني لمنحنى $y = \cos\theta$؛ لإيجاد حلول المعادلة $\cos\theta = -1$.



الحلول هي $\dots, \pi, 3\pi, 5\pi$، وكذلك $-\pi, -3\pi, -5\pi, \dots$، والحل الوحيد في الفترة من 0 إلى 2π هو π. طول الدورة لدالة جيب التمام هو 2π. لذلك، يمكن كتابة الحلول على الشكل $\pi + 2k\pi$؛ حيث k أيّ عدد صحيح.

إرشادات للدراسة

التعبير عن الحلول بوصفها مضاعفات

العبارة $\pi + 2k\pi$ هي π مضافًا لها مضاعفات 2π، ولذلك، ليس من الضروري سرد جميع الحلول.

تحقق من فهمك

2A) حُلّ المعادلة $4\sin x = 2\sin x + \sqrt{2}$

2B) حُلّ المعادلة $2\sin\theta = -1$ لقيم θ جميعها، إذا كان قياس θ بالراديان.

(2A $\frac{\pi}{4} + 2k\pi, \frac{3\pi}{4} + 2k\pi$ حيث k أي عدد صحيح

(2B $\frac{7\pi}{6} + 2k\pi, \frac{11\pi}{6} + 2k\pi$

يمكن استعمال المعادلات المثلثية في حلّ مسائل من واقع الحياة.

مثال 3 من واقع الحياة حل معادلات مثلثية

مدينة ألعاب: ارجع إلى فقرة "لماذا؟" في بداية هذا الدرس، بعد كم دقيقة من بدء دوران العجلة يكون مقعدك على ارتفاع 31m عن سطح الأرض للمرة الأولى؟

$h = 21 - 20\cos 3\pi t$	المعادلة الأصلية
$31 = 21 - 20\cos 3\pi t$	عوّض 31 بدلًا من h
$10 = -20\cos 3\pi t$	اطرح 21 من كلا الطرفين.
$-\frac{1}{2} = \cos 3\pi t$	اقسم كلا الطرفين على -20
$\cos^{-1}\left(-\frac{1}{2}\right) = 3\pi t$	خذ معكوس جيب التمام

حل المعادلات المثلثية:

مثال 1 يبيّن كيفية حل المعادلات المثلثية في فترة معينة.

مثال 2 يبيّن كيفية حل المعادلات المثلثية لزوايا بالراديان.

مثال 3 يبيّن كيفية حل مسائل من واقع الحياة تتضمن معادلات مثلثية.

التقويم التكويني

استعمل تدريبات "تحقق من فهمك" بعد كل مثال للتحقق من مدى فهم الطلاب للمفاهيم.

أمثلة إضافية

1 a) حل المعادلة $2\cos^2\theta - 1 = \sin\theta$ إذا كانت $0° \le \theta \le 180°$. $30°, 150°$

b) حل المعادلة $\sin\theta\cos\theta = \cos^2\theta$ إذا كان: $0 \le \theta \le 2\pi$ $\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}, \frac{5\pi}{4}, \frac{3\pi}{2}$

2 a) حل المعادلة $2\tan x - \sqrt{3} = \tan x$ لقيم θ جميعها، إذا كان قياس θ بالدرجات. $x = \frac{\pi}{3} + k\pi$؛ حيث k هو أي عدد صحيح.

b) حل المعادلة $2\cos\theta = -1$ لقيم θ جميعها، إذا كان قياس θ بالراديان. $\frac{2\pi}{3} + 2k\pi$, $\frac{4\pi}{3} + 2k\pi$، حيث k هو أيّ عدد صحيح.

3 **مدينة الألعاب:** ارجع إلى فقرة "لماذا؟" في بداية هذا الدرس. بعد كم من الزمن سيكون ارتفاع العجلة الدوّارة على بعد $(10\sqrt{2} + 21)$ مترًا عن سطح الأرض، بدءًا من دورانها لأول مرة؟

$$10\sqrt{2} + 21 = 21 - 20\cos 3\pi t;$$
$$10\sqrt{2} = -20\cos 3\pi t;$$
$$-\frac{\sqrt{2}}{2} = \cos 3\pi t;$$
$$\cos^{-1}\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = 3\pi t$$
$$\frac{3}{4}\pi = 3\pi t$$
$$\frac{1}{4} = t$$

$\frac{1}{4}$ دقيقة، أو 15 ثانية.

إرشادات للمعلم الجديد

تبرير يوضح المثال 2 كيفية البحث عن أنماط في الحل؛ لذا اطلب إلى الطلاب البحث عن أزواج من الحلول يكون الفارق بينها إما π وإما 2π.

ومن قيم الدوال المثلثية للزوايا الخاصة نعلم أن:

$\cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) = \cos\left(\frac{4\pi}{3}\right) = -\frac{1}{2}$ ، إذن:

$\frac{2\pi}{3} + 2\pi k = 3\pi t$ أو $\frac{4\pi}{3} + 2\pi k = 3\pi t$ ‏ k أي عدد صحيح أكبر من أو يساوي الصفر.

$\frac{2}{9} + \frac{2}{3}k = t$ ‏ $\frac{4}{9} + \frac{2}{3}k = t$ اقسم كلا الطرفين على 3π

إن أقل قيمة لـ t نحصل عليها عندما تكون $k = 0$ في المساواة $\frac{2}{9} + \frac{2}{3}k = t$.

لذلك، $t = \frac{2}{9}$ وهذا يعني أن ارتفاع مقعدك يكون 31 مترًا للمرة الأولى بعد $\frac{2}{9}$ دقيقة.

تحقق من فهمك

3) كم من الوقت تحتاج من بداية دوران العجلة، ليكون ارتفاع مقعدك 41 مترًا فوق سطح الأرض للمرة الأولى؟ 20 ثانية تقريبًا

الحلول الدخيلة: بعض المعادلات المثلثية ليس لها حل. فعلى سبيل المثال، المعادلة $\cos\theta = 4$ ليس لها حل؛ لأن قيم $\cos\theta$ جميعها تقع في الفترة $[-1, 1]$. كما أن بعض المعادلات المثلثية تعطي حلولًا لا تحقق المعادلة الأصلية، وتسمى مثل هذه الحلول حلولًا دخيلة.

إذا لم تتمكّن من حل معادلة بالتحليل إلى العوامل، فحاول إعادة كتابة العبارات التي تتضمنها باستعمال المتطابقات المثلثية. وقد يقودنا استعمال المتطابقات وبعض العمليات الجبرية، كالتربيع مثلًا إلى حلول دخيلة. لذا، من الضروري التحقق من حلولك باستعمال المعادلات الأصلية.

مثال 4 حل معادلات مثلثية مع وجود حلول دخيلة

حُلّ المعادلة: $\sin\theta = 1 + \cos\theta$ إذا كان $0° \le \theta < 360°$

$\sin\theta = 1 + \cos\theta$ المعادلة الأصلية

$\sin^2\theta = (1+\cos\theta)^2$ ربع

$1 - \cos^2\theta = 1 + 2\cos\theta + \cos^2\theta$ ‏ $\sin^2\theta = 1 - \cos^2\theta$

$0 = 2\cos\theta + 2\cos^2\theta$ بطرح 1 من الطرفين، وإضافة $\cos^2\theta$ لكلا الطرفين

$0 = 2\cos\theta(1+\cos\theta)$ حلّل

$1 + \cos\theta = 0$ أو $2\cos\theta = 0$ خاصية الضرب الصفري

$\cos\theta = -1$ أو $\cos\theta = 0$

$\theta = 180°$ أو $\theta = 90°, 270°$

التحقق:

$\sin\theta = 1 + \cos\theta$
$\sin 180° \stackrel{?}{=} 1 + \cos 180°$
$0 \stackrel{?}{=} 1 + (-1)$
$0 = 0$ ✓

$\sin\theta = 1 + \cos\theta$
$\sin 90° \stackrel{?}{=} 1 + \cos 90°$
$1 \stackrel{?}{=} 1 + 0$
$1 = 1$ ✓

$\sin\theta = 1 + \cos\theta$
$\sin 270° \stackrel{?}{=} 1 + \cos 270°$
$-1 \stackrel{?}{=} 1 + 0$
$-1 \neq 1$ ✗

إذن °270 حلًّا دخيلًا

إذن للمعادلة حلان هما $90°, 180°$.

تحقق من فهمك

4) $\cos^2\theta + 3 = 4 - \sin^2\theta$ متطابقة، لها عدد لا نهائي من الحلول؛ لأن جميع قيم θ تمثل حلولًا لها.

حلول دخيلة

مثال 4 يبيِّن كيفية حل معادلة مثلثية، واختبار إن كان لها حلول دخيلة أم لا.

مثال إضافي

4 حل المعادلة الآتية:
$\cos\theta = 1 - \sin\theta$ إذا كان:
$0° \le \theta \le 360°$
$0°, 90°, 360°$

المحتوى الرياضي

عدد لا نهائي من الحلول: العديد من المعادلات المثلثية لها عدد لا نهائي من الحلول، وإذا لم يكن هنالك فترة لتحديد عدد الحلول فيجب التعبير عن العدد اللانهائي من الحلول باستعمال التعبير عن الحلول بوصفه مضاعفات. وعندما يوجد الحل لكل دورة كاملة حول نقطة الأصل، فإن الحلول جميعها تكتب على الصيغة: $a° + k \cdot 360°$ ؛ حيث k هي أيّ عدد صحيح.

التعليم باستعمال التقنيات

مدوّنة اطلب إلى الطلاب كتابة مدوّنة حول كيفية حل المعادلات المثلثية، واطلب إليهم أيضًا وصف كيف تشبه هذه العملية حل الأنواع الأخرى من المعادلات وكيف تختلف عنها.

تنويع التعليم

دون ضمن

المتعلمون المتفاعلون: اطلب إلى الطلاب أثناء دراستهم هذا الدرس وضع قائمة بالأخطاء الشائعة التي وقعوا فيها على السبورة. وشجِّعهم على إضافة بعض المقترحات حول كيفية تفادي مِثل هذه الأخطاء. فعلى سبيل المثال، أحد الأخطاء الشائعة هو أن تكون الحاسبة مضبوطة على نظام الدرجات، في حين يجب أن تكون مضبوطة على نظام الراديان؛ لأن حل المسألة يتطلب ذلك، والعكس صحيح.

إرشادات حل المسألة

البحث عن نمط
ابحث عن أنماط في حلولك. ابحث عن زوج من الحلول الفرق بينهما هو π تمامًا. واكتب حلولك بأبسط طريقة.

مثال 5 حل المعادلات المثلثية باستعمال متطابقات

حُلّ المعادلة $2\sec^2\theta - \tan^4\theta = -1$ لقيم θ جميعها إذا كان قياس θ بالدرجات.

$2\sec^2\theta - \tan^4\theta = -1$ المعادلة الأصلية

$2(1+\tan^2\theta) - \tan^4\theta = -1$ $\sec^2\theta = 1+\tan^2\theta$

$2 + 2\tan^2\theta - \tan^4\theta = -1$ خاصية التوزيع

$\tan^4\theta - 2\tan^2\theta - 3 = 0$ اجعل أحد الطرفين مساويًا للصفر

$(\tan^2\theta - 3)(\tan^2\theta + 1) = 0$ حلّل

$\tan^2\theta + 1 = 0$ أو $\tan^2\theta - 3 = 0$ خاصية الضرب الصفري

أولًا: $\tan^2\theta + 1 = 0$

$\tan^2\theta = -1$

لا يوجد لهذا الجزء حلول؛ لأن $\tan^2\theta$ لا يمكن أن يكون سالبًا.

ثانيًا: $\tan^2\theta - 3 = 0$

$\tan^2\theta = 3$

$\tan^2\theta = \pm\sqrt{3}$

لذا، تكون حلول هذا الجزء هي : $\theta = 60° + 180°k, \theta = 120° + 180°k$؛ حيث k هو أي عدد صحيح.

وتكون حلول المعادلة الأصلية هي $60° + 180°k, 120° + 180°k$.

التحقق: $\theta = 60° + 180°k$؛ حيث k هو أي عدد صحيح

$2\sec^2\theta - \tan^4\theta \stackrel{?}{=} -1$

$2\sec^2(60° + 180°k) - \tan^4(60° + 180°k) \stackrel{?}{=} -1$

$8 - 9 = -1$ ✓

$\theta \stackrel{?}{=} 120° + 180°k$؛ حيث k هو أي عدد صحيح

$2\sec^2\theta - \tan^4\theta \stackrel{?}{=} -1$

$2\sec^2(120° + 180°k) - \tan^4(120° + 180°k) \stackrel{?}{=} -1$

$8 - 9 = -1$ ✓

✓ تحقق من فهمك

حل كل معادلة مما يأتي، لقيم θ جميعها ، إذا كان قياس θ بالدرجات:

5A) $\sin\theta\cot\theta - \cos^2\theta = 0$

5B) $\frac{\cos\theta}{\cot\theta} + 2\sin^2\theta = 0$

5A) $90° + k \cdot 180°$

5B) $210° + 360°k$ ، $330° + 360°k$

حلول دخيلة

مثال 5 يبيِّن كيفية استعمال المتطابقات لحل معادلة مثلثية.

مثال إضافي

5 حُلّ المعادلة $\tan^4\theta - 4\sec^2\theta = -7$ لقيم θ جميعها، إذا كان قياس θ بالدرجات.

$\theta = 60° + 180°k, 120° + 180°k, 45° + 90° \cdot k$ حيث k هو أي عدد صحيح.

تدرب وحل المسائل

حل كل معادلة مما يأتي لقيم θ جميعها الموضحة بجانب كل منها : (مثال 1)

1) $\cos^2\theta + 2\cos\theta + 1 = 0\ ;\ 0° \le \theta \le 360°$ **180°**

2) $2\cos^2\theta + \cos\theta = 1\ ;\ 0° \le \theta \le 360°$ **60° , 180° , 300°**

3) $-2\sin^2\theta = 7 - 15\sin\theta\ ;\ 0° \le \theta \le 360°$ **30° , 150°**

4) $\cos\theta + \frac{\sqrt{3}}{2} = 0\ ;\ 0° \le \theta \le 240°$ **150° , 210°**

حل كل معادلة مما يأتي، لقيم θ جميعها إذا كان قياس θ بالراديان: (مثال 2)

5) $4\sin^2\theta - 1 = 0$ 6) $2\cos^2\theta = 1$ **(5-12 انظر الهامش.**

7) $\sin\frac{\theta}{2} - 2\sin^2\frac{\theta}{2} = 0$ 8) $2\cos^2\theta + 4\cos\theta = -2$

حل كل معادلة مما يأتي لقيم θ جميعها إذا كان قياس θ بالدرجات: (مثال 2)

9) $\cos 2\theta - \sin^2\theta + 2 = 0$ 10) $\sin^2\theta - \sin\theta = 0$

11) $2\sin^2\theta - 1 = 0$ 12) $\cos\theta - 2\cos\theta\sin\theta = 0$

13) **الليل والنهار:** إذا كان عدد ساعات النهار في إحدى المدن هو d، ويمكن تمثيلها بالمعادلة $d = 3\sin\frac{2\pi}{365}t + 12$ ، حيث t عدد الأيام بعد 21 مارس، فأجب عما يأتي: (مثال 3) **انظر الهامش.**

a) في أي يوم سيكون عدد ساعات النهار في المدينة $10\frac{1}{2}$h تمامًا؟

b) باستعمال النتيجة في الفرع a، ما أيام السنة التي يكون فيها عدد ساعات النهار $10\frac{1}{2}$ساعات على الأقل إذا علمت أن أطول نهار في السنة يحدث تقريبًا يوم 22 يونيو؟ فسِّر إجابتك.

حل كل معادلة مما يأتي: (المثالان 4, 5)

14) $\sin^2 2\theta + \cos^2\theta = 0$ لجميع قيم θ $\frac{\pi}{2} + \pi k$

15) $\sin 2\theta - \cos\theta = 0$ لجميع قيم θ $\frac{\pi}{2} + \pi k, \frac{\pi}{6} + 2\pi k, \frac{5\pi}{6} + 2\pi k$

16) $\tan\theta = 1$ لجميع قيم θ $\frac{\pi}{4} + k \cdot \pi$

17) $\cos^2\theta = \frac{1}{4};\ 0° \le \theta \le 360°$ **60° , 120° , 240° , 300°**

18) $2\sin^2\theta = 1;\ 90° < \theta < 270°$ **135° , 225°**

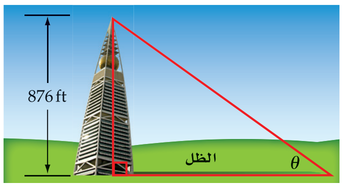
19) $\sin 2\theta - \cos\theta = 0;\ 0 \le \theta \le 2\pi$ $\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{2}, \frac{5\pi}{6}, \frac{3\pi}{2}$

20) $4\sin^2\theta - 1 = 0;\ 180° < \theta < 360°$ **210° , 330°**

21) $\tan\theta - \sin\theta = 0$ لجميع قيم θ $k \cdot 180°$

22) $4\sin^2\theta = 4\sin\theta - 1$ لجميع قيم θ $30° + k \cdot 360°, 150° + k \cdot 360°$

23) **ناطحات سحاب:** يبلغ ارتفاع برج الفيصلية في الرياض 876 ft . أوجد θ إذا كان طول ظله في الشكل أدناه 685 m؟ **52° تقريبًا**



24) **أنهار:** تمثل الدالة: $y = 3\sin\left[\frac{\pi}{6}(x-4)\right] + 8$ ، عمق نهر خلال أحد الأيام ؛ حيث $x = 0, 1, 2, \ldots, 24$ ، 0 تدل على الساعة الثانية عشرة عند منتصف الليل، 13 تدل على الساعة الواحدة بعد الظهر ، وهكذا....

a) ما أقصى عمق للنهر في ذلك اليوم؟ **11 m**

b) في أي وقت تحصل على أقصى عمق؟ **7: 00 صباحًا، 7:00 مساءً**

حل كل معادلة مما يأتي، لقيم θ جميعها، إذا كان قياس θ بالراديان:

25) $(\cos\theta)(\sin 2\theta) - 2\sin\theta + 2 = 0$ $\frac{\pi}{2} + 2\pi k$

26) $2\sin^2\theta + (\sqrt{2} - 1)\sin\theta = \frac{\sqrt{2}}{2}$ $\frac{\pi}{6} + 2\pi k, \frac{5\pi}{6} + 2\pi k, \frac{5\pi}{4} + 2\pi k, \frac{7\pi}{4} + 2\pi k$

27) $2\sin\theta = \sin 2\theta$ πk

حل المعادلتين الآتيتين، لقيم θ جميعها، إذا كان قياس θ بالدرجات:

28) $\sin 2\theta + \frac{\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3}\sin\theta + \cos\theta$ $30° + 360°k, 150° + 360°k, 330° + 360°k$

29) $1 - \sin^2\theta - \cos\theta = \frac{3}{4}$ $120° + 360°k, 240° + 360°k$

30) **الماس:** حسب قانون سنيل (snell's law) $n_1 \sin i = n_2 \sin r$ ، حيث n_1 معامل الانكسار للضوء في الوسط الذي يخرج منه الضوء، و n_2 معامل الانكسار للوسط الذي يدخل فيه الضوء، و i قياس زاوية السقوط، و r قياس زاوية الانكسار.

a) إذا كان معامل الانكسار للماس 2.42 ، ومعامل الانكسار للهواء 1 ، وقياس زاوية سقوط الضوء على حجر الألماس هو 35° ، فما قياس زاوية الانكسار؟ **13.71°**

b) اشرح كيف يستطيع بائع المجوهرات استعمال قانون سنيل؛ لمعرفة إذا كان هذا ألماسًا حقيقيًّا ونقيًّا أم لا . **انظر الهامش**

3 التدريب

التقويم التكويني

استعمل الأسئلة 1–29 للتأكد من فهم الطلاب.

ثم استعمل الجدول أسفل هذه الصفحة؛ لتعيين الواجبات المنزلية للطلاب حسب مستوياتهم.

4 التقويم

بطاقة مكافأة: اطلب إلى الطلاب توضيح كتابة معادلة تتضمن $\sin^2\theta$ ويكون لها حل وحيد في المجال $90° < \theta < 270°$.

التقويم التكويني

تحقق من مدى استيعاب الطلاب للمفاهيم الواردة في الدرس، بإعطائهم:

الاختبار القصير 4، ص (50)

إجابات:

5) $\pm\frac{\pi}{6} + 2k\pi, \pm\frac{5\pi}{6} + 2k\pi$

6) $\frac{\pi}{4} + k\frac{\pi}{2}$

7) $2k\pi, \frac{\pi}{3} + 2k\pi, \frac{5\pi}{3} + 2k\pi$

8) $\pi + 2k\pi$

9) $90° + k \cdot 180°$

10) $k \cdot 180°, 90° + k \cdot 360°$

11) $45° + k \cdot 90°$

12) $30° + k \cdot 360°, 150° + k \cdot 360°, 90° + k \cdot 180°$

13a) عدد ساعات النهار $10\frac{1}{2}$ ساعات، ويكون ذلك بعد 213، أو 335 يومًا بعد يوم 21 مارس. وهذا يعني أنه في يوم 20 أكتوبر أو 19 فبراير. ستكون عدد ساعات النهار $10\frac{1}{2}$ ساعات.

13b) كل يوم منذ 19 فبراير إلى 20 أكتوبر. تفسير ممكن: بما أن أطول نهار في السنة يحدث تقريبًا يوم 22 يونيو، لذا فإن الأيام بين 19 فبراير إلى 20 أكتوبر يتزايد طول نهارها حتى يوم 22 يونيو، ثم تبدأ ساعات النهار بالنقصان حتى 20 أكتوبر.

تنويع الواجبات المنزلية

المستوى	الأسئلة
دون المتوسط	1–29، 31، 34–48
ضمن المتوسط	1–29 (فردي)، 30، 31، 33–48
فوق المتوسط	30–48

30b) بقياس زوايا سقوط الضوء وانعكاساتها لتحديد معامل انكسار الضوء، فإذا كان معامل الانكسار 2.42 يكون ماسًا نقيًّا.

مسائل مهارات التفكير العليا

31) **اكتشف الخطأ:** حلت كل من هلا وليلى المعادلة $2\sin\theta\cos\theta = \sin\theta$ ، $0° \le \theta \le 360°$. أيّ منهما كانت إجابتها صحيحة؟ برِّر إجابتك. انظر الهامش

هلا	ليلى
$2\sin\theta\cos\theta = \sin\theta$	$2\sin\theta\cos\theta = \sin\theta$
$\frac{2\sin\theta\cos\theta}{\sin\theta} = \frac{\sin\theta}{\sin\theta}$	$-\sin\theta = -\sin\theta$
$2\cos\theta = 1$	$2\cos\theta = 0$
$\cos\theta = \frac{1}{2}$	$\cos\theta = 0$
$\theta = 60°, 300°$	$\theta = 90°, 270°$

32) **تحدٍّ:** حل المتباينة $\sin 2x < \sin x$ ، $0 \le x \le 2\pi$ بدون استعمال الحاسبة. $\frac{\pi}{3} < x < \pi$ أو $\frac{5\pi}{3} < x < 2\pi$ للتوضيح انظر ملحق الإجابات.

33) **اكتب:** حدّد أوجه الشبه وأوجه الاختلاف بين حل المعادلات المثلثية، والمعادلات الخطية والتربيعية. ما الطرق المتشابهة؟ وما الطرق المختلفة؟ وما عدد الحلول المتوقعة؟ انظر الهامش.

34) **تبرير:** اشرح سبب وجود عدد لانهائي من الحلول للمعادلات المثلثية. انظر الهامش.

35) **مسألة مفتوحة:** اكتب مثالًا على معادلة مثلثية لها حلّان فقط، بحيث تكون $0° \le \theta \le 360°$. 35) إجابة ممكنة: $2\cos\theta = 0;\ 90°, 270°$

36) **تحدٍّ:** هل للمعادلتين $\cot^2 x + 1 = 2$, $\csc x = \sqrt{2}$ الحلول نفسها في الربع الأول؟ برر إجابتك. انظر الهامش.

مراجعة تراكمية (37–44) انظر ملحق الإجابات.

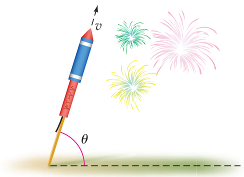
أوجد القيمة الدقيقة لكل مما يأتي: (الدرس 3–4)

37) $\cos 165°$ 38) $\sin 22\frac{1}{2}°$ 39) $\sin\frac{7\pi}{8}$ 40) $\cos\frac{7\pi}{12}$

أثبت أن كل معادلة مما يأتي تمثّل متطابقة: (الدرس 3–3)

41) $\sin(270° - \theta) = -\cos\theta$ 42) $\cos(90° + \theta) = -\sin\theta$

43) $\cos(90° - \theta) = \sin\theta$ 44) $\sin(90° - \theta) = \cos\theta$

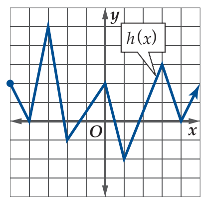


45) **ألعاب نارية:** إذا أطلق صاروخ من سطح الأرض، فإن أعلى ارتفاع يصل إليه يعطى بالصيغة $h = \frac{v^2\sin^2\theta}{2g}$ ، حيث θ زاوية الانطلاق، و v السرعة المتجهة الابتدائية للصاروخ، و g تسارع الجاذبية الأرضية وتساوي 9.8m/sec. انظر ملحق الإجابات.

a) أثبت أن $\frac{v^2\tan^2\theta}{2g\sec^2\theta} = \frac{v^2\sin^2\theta}{2g}$ تمثّل متطابقة.

b) إذا أطلق الصاروخ من سطح الأرض بزاوية 80° ، وسرعة ابتدائية مقدارها 110m/s ، فأوجد أقصى ارتفاع يصل إليه. (الدرس 3-2)

46) استعمل التمثيل البياني في الشكل المجاور؛ لتحدد مجال الدالة $h(x)$ ومداها. (مهارة سابقة) انظر ملحق الإجابات.



تدريب على اختبار

47) أي مما يأتي ليس حلًّا للمعادلة $\sin\theta + \cos\theta\tan^2\theta = 0$ ؟ A

A $\frac{5\pi}{2}$ B $\frac{7\pi}{4}$ C 2π D $\frac{3\pi}{4}$

48) ماحَل المعادلة $\csc x = \frac{-2\sqrt{3}}{3}$ ، حيث $0° < x < 360°$؟ D

A 30° أو 150° B 60° أو 120° C 210° أو 330° D 240° أو 300°

تنبيه!

اكتشف الخطأ: في السؤال 31، يتعين على الطلاب أن يلاحظوا أن هلا قسمت طرفي المعادلة على $\sin\theta$، وأن ليلى أعادت كتابة $2\sin\theta\cos\theta - \sin\theta$ بطريقة غير صحيحة. واشرح للطلاب أنه إذا كان $\cos\theta = \frac{1}{2}$ فإن θ يجب أن تكون في الربع الأول أو الربع الرابع؛ لذا فإن $\theta = 60°$ أو $300°$. وبيّن لهم أيضًا أن العبارة: $2\sin\theta\cos\theta - \sin\theta$ يمكن أن تكتب على الشكل $2 \bullet B \bullet C - B$، وهذه العبارة لا تساوي $2 \bullet C$.

31) كلاهما إجابتهما خاطئة؛ لأن هلا قسمت كلًّا من الطرفين على $\sin\theta$، وهذا خطأ، وكذلك ليلى طرحت $\sin\theta$ من الطرفين بشكل خاطئ أيضًا.

33) كل نوع من المعادلات يحتاج إما إلى جمع وإما إلى طرح وإما إلى ضرب وإما إلى قسمة كل طرف على العدد نفسه. وتُحلّ المعادلات التربيعية والمثلثية غالبًا باستعمال التحليل. ولا تحتاج المعادلات الخطية والتربيعية إلى متطابقات لحلها، ويمكن حلها جبريًّا، في حين يمكن تمثيل بعض المعادلات المثلثية بيانيًّا بسهولة باستعمال الآلة الحاسبة البيانية. أما المعادلة الخطية فلها على الأكثر حل واحد. والمعادلة التربيعية لها على الأكثر حلَّان. أما المعادلة المثلثية فلها عادة عدد لا نهائي من الحلول إلَّا إذا كانت قيم المتغير مقيّدة أو مشروطة.

34) لأن الدوال المثلثية دورية؛ فإضافة دورة كاملة لأي حل للمعادلة ينتج حلًّا لها.

36) نعم لأن

$$\cot^2 x + 1 = 2$$
$$\csc^2 x = 2$$
$$\csc x = \sqrt{2}$$
$$\sin x = \frac{1}{\sqrt{2}}$$
$$x = \frac{\pi}{4}$$

$$\csc x = \sqrt{2}$$
$$\sin x = \frac{1}{\sqrt{2}}$$
$$x = \frac{\pi}{4}$$

التقويم التكويني

المفردات

يشير رقم الصفحة بعد كل مفردة إلى الصفحة التي وردت فيها المفردة لأول مرة. فإذا واجه الطلاب صعوبات في حل الأسئلة 1–9، فنبِّههم إلى أنه يمكنهم استعمال هذه الصفحات لتذكّر المفردات.

التقويم الختامي

اختبار المفردات، ص (52) .

ملخص الفصل

المفاهيم الأساسية

المتطابقات المثلثية (الدروس 3–1, 3–2, 3–5)

- تصف المتطابقات المثلثية العلاقة بين الدوال المثلثية.
- يمكن استعمال المتطابقات المثلثية في تبسيط العبارات المثلثية، وحل المعادلات المثلثية.

المتطابقات المثلثية لمجموع زاويتين والفرق بينهما (الدرس 3–3)

- لجميع قيم A, B:

$$\cos(A \pm B) = \cos A \cos B \mp \sin A \sin B$$

$$\sin(A \pm B) = \sin A \cos B \pm \cos A \sin B$$

المتطابقات المثلثية لضعف الزاوية ونصفها (الدرس 3–4)

- المتطابقات المثلثية لضعف الزاوية:

$$\sin 2\theta = 2 \sin\theta \cos\theta$$

$$\cos 2\theta = \cos^2\theta - \sin^2\theta$$

$$\cos 2\theta = 1 - 2\sin^2\theta$$

$$\cos 2\theta = 2\cos^2\theta - 1$$

$$\tan 2\theta = \frac{2\tan\theta}{1-\tan^2\theta}$$

- المتطابقات المثلثية لنصف الزاوية:

$$\sin\frac{\theta}{2} = \pm\sqrt{\frac{1-\cos\theta}{2}}$$

$$\cos\frac{\theta}{2} = \pm\sqrt{\frac{1+\cos\theta}{2}}$$

$$\tan\frac{\theta}{2} = \pm\sqrt{\frac{1-\cos\theta}{1+\cos\theta}},\ \cos\theta \neq -1$$

المفردات

المتطابقة (ص 136)
المتطابقة المثلثية (ص 136)
المتطابقات النسبية (ص 136)
متطابقات المقلوب (ص 136)
متطابقات فيثاغورس (ص 136)
متطابقات الزاويتين المتتامتين (ص 136)
متطابقات الدوال الزوجية والدوال الفردية (ص 136)
المعادلات المثلثية (ص 158)

اختبر مفرداتك

اكتب المفردة المناسبة لكل عبارة مما يأتي:

1) يمكن استعمال ______ في إيجاد جيب أو جيب تمام الزاوية $75°$ إذا علم الجيب والجيب تمام لكل من الزاويتين $90°$ و $15°$.
المتطابقة المثلثية للفرق بين زاويتين.

2) المتطابقة $\cot\theta = \frac{\cos\theta}{\sin\theta}$ هي مثال على ______ .
المتطابقات النسبية

3) المتطابقة المثلثية هي معادلة تحتوي على دوال مثلثية صحيحة للقيم جميعها التي تجعل كل طرف في المعادلة معرفًا.

4) يمكن استعمال ______ في إيجاد $\sin 60°$ باستعمال الزاوية $30°$.
المتطابقة المثلثية لضعف الزاوية

5) تكون ______ صحيحة لقيم معينة للمتغيرات.
المعادلة المثلثية

6) يمكن استعمال ______ في إيجاد $\cos 22\frac{1}{2}°$.
المتطابقة المثلثية لنصف الزاوية

7) المتطابقتان $\sec\theta = \frac{1}{\cos\theta}$, $\csc\theta = \frac{1}{\sin\theta}$ مثالان على ______ .
متطابقات المقلوب

8) يمكن استعمال ______ في إيجاد كل من $\sin 120°$, $\cos 120°$ إذا عُلم الجيب، والجيب تمام لكل من الزاويتين $90°$, $30°$.
المتطابقة المثلثية لمجموع زاويتين

9) $\cos^2\theta + \sin^2\theta = 1$ هي مثال على ______ .
متطابقات فيثاغورس

مراجعة الدروس

3-1 المتطابقات المثلثية (الصفحات 136 - 140)

أوجد القيمة الدقيقة لكل من النسب المثلثية الآتية:

10) $\sin\theta$ ، إذا كان $\cos\theta = \frac{\sqrt{2}}{2}$، $270° < \theta < 360°$ $\quad -\frac{\sqrt{2}}{2}$

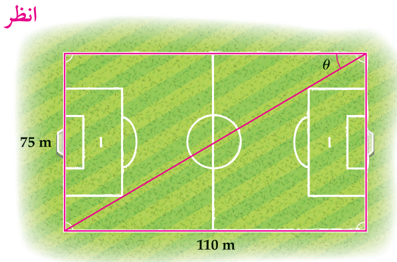
11) $\sec\theta$ ، إذا كان $\cot\theta = \frac{-\sqrt{2}}{2}$، $90° < \theta < 180°$ $\quad -\sqrt{3}$

12) $\tan\theta$ ، إذا كان $\cot\theta = 2$، $0° < \theta < 90°$ $\quad \frac{1}{2}$

13) $\cos\theta$ ، إذا كان $\sin\theta = -\frac{3}{5}$، $180° < \theta < 270°$ $\quad -\frac{4}{5}$

14) $\csc\theta$ ، إذا كان $\cot\theta = -\frac{4}{5}$، $270° < \theta < 360°$ $\quad -\frac{\sqrt{41}}{5}$

15) **كرة قدم:** إذا كان بُعدا ملعب كرة القدم هما: 75 m, 110m كما في الشكل أدناه، فأوجد جيب الزاوية θ. انظر الهامش



بسّط كل عبارة مما يأتي:

16) $1 - \tan\theta\sin\theta\cos\theta$ $\quad \cos^2\theta$

17) $\tan\theta\csc\theta$ $\quad \sec\theta$

18) $\sin\theta + \cos\theta\cot\theta$ $\quad \csc\theta$

19) $\cos\theta\,(1 + \tan^2\theta)$ $\quad \sec\theta$

مثال 1

أوجد $\sin\theta$ إذا كان $\cos\theta = \frac{3}{4}$ ، $0° < \theta < 90°$.

$\cos^2\theta + \sin^2\theta = 1$ — متطابقة فيثاغورس

$\sin^2\theta = 1 - \cos^2\theta$ — اطرح $\cos^2\theta$ من كلا الطرفين.

$\sin^2\theta = 1 - \left(\frac{3}{4}\right)^2$ — عوّض $\frac{3}{4}$ بدلًا عن $\cos\theta$

$\sin^2\theta = 1 - \frac{9}{16}$ — ربع $\frac{3}{4}$

$\sin^2\theta = \frac{7}{16}$ — اطرح

$\sin\theta = \pm\frac{\sqrt{7}}{4}$ — خذ الجذر التربيعي لكلا الطرفين

بما أن θ في الربع الأول، فإن $\sin\theta$ موجبة.

إذن، $\sin\theta = \frac{\sqrt{7}}{4}$.

مثال 2

بسّط العبارة $\cos\theta\sec\theta\cot\theta$.

$$\cos\theta\sec\theta\cot\theta = \cos\theta\left(\frac{1}{\cos\theta}\right)\left(\frac{\cos\theta}{\sin\theta}\right)$$

$$= \cot\theta$$

مراجعة الدروس

مراجعة إذا كانت الأمثلة المعطاة غير كافية لمراجعة المواضيع التي تناولتها الأسئلة، فذكّر الطلاب بمرجع الصفحات الذي يدلهم أين يراجعون تلك المواضيع في كتابهم المقرر.

نموذج التوقع

اطلب إلى الطلاب تعبئة نموذج التوقع للفصل 3 ص (46)، وناقشهم حول تغيّر إجاباتهم بعد إتمام دراسة الفصل عمّا كانت عليه عند بدايته.

إجابة:

15) أولاً، أوجد طول القطر:

$$c^2 = 75^2 + 110^2$$
$$c^2 = 5625 + 12100$$
$$= 17725$$
$$c = 5\sqrt{709};$$
$$\sin\theta = \frac{75}{5\sqrt{709}}$$
$$= \frac{15\sqrt{709}}{709}$$

الفصل 3 دليل الدراسة والمراجعة

3-2 إثبات صحة المتطابقات المثلثية (الصفحات 141 - 145)

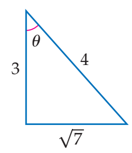
أثبت أن كل معادلة مما يأتي تمثّل متطابقة: 20-23 انظر الهامش

20) $\tan\theta\cos\theta + \cot\theta\sin\theta = \sin\theta + \cos\theta$

21) $\dfrac{\cos\theta}{\cot\theta} + \dfrac{\sin\theta}{\tan\theta} = \sin\theta + \cos\theta$

22) $\sec^2\theta - 1 = \dfrac{\sin^2\theta}{1-\sin^2\theta}$

23) **هندسة:** المثلث المجاور قائم الزاوية. استعمل أطواله المعطاة لتتحقّق من أن $\tan^2\theta + 1 = \sec^2\theta$



مثال 3

أثبت أن المعادلة $\dfrac{\cos\theta + 1}{\sin\theta} = \cot\theta + \csc\theta$ تمثّل متطابقة.

$\dfrac{\cos\theta+1}{\sin\theta}$ الطرف الأيسر

$= \dfrac{\cos\theta}{\sin\theta} + \dfrac{1}{\sin\theta}$ بسّط

$= \cot\theta + \csc\theta$ ✓ بسّط

= الطرف الأيمن

3-3 المتطابقات المثلثية لمجموع زاويتين والفرق بينهما (الصفحات 146 - 149)

أوجد القيمة الدقيقة لكل مما يأتي:

24) $\cos(-135^\circ)$ $\quad -\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

25) $\cos 15^\circ$ $\quad \dfrac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$

26) $\sin 210^\circ$ $\quad -\dfrac{1}{2}$

27) $\sin 105^\circ$ $\quad \dfrac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$

28) $\tan 75^\circ$ $\quad \sqrt{3}+2$

29) $\cos 105^\circ$ $\quad \dfrac{-\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$

أثبت صحة كل من المتطابقات الآتية: 30-32 انظر ملحق الإجابات

30) $\sin(\theta + 90) = \cos\theta$

31) $\sin\left(\dfrac{3\pi}{2} - \theta\right) = -\cos\theta$

32) $\tan(\theta - \pi) = \tan\theta$

مثال 4

أوجد القيمة الدقيقة لـ $\sin 75^\circ$.

استعمل المتطابقة $\sin(A+B) = \sin A\cos B + \cos A\sin B$.

$$\sin 75^\circ = \sin(30^\circ + 45^\circ)$$
$$= \sin 30^\circ\cos 45^\circ + \cos 30^\circ\sin 45^\circ$$
$$= \left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$$
$$= \frac{\sqrt{2}}{4} + \frac{\sqrt{6}}{4} = \frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}$$

مراجعة حل المسائل

إذا احتاج الطلاب إلى تدريبات إضافية على حل المسألة فذكّرهم بخطوات حل المسألة وناقشهم فيها، وقدّم لهم مزيدًا من التدريبات على ورقة عمل.

إجابات:

20) $\tan\theta\cos\theta + \cot\theta\sin\theta \stackrel{?}{=} \sin\theta + \cos\theta$

$\dfrac{\sin\theta}{\cos\theta}\cdot\cos\theta + \dfrac{\cos\theta}{\sin\theta}\cdot\sin\theta \stackrel{?}{=} \sin\theta + \cos\theta$

$\sin\theta + \cos\theta = \sin\theta + \cos\theta$ ✓

21) $\dfrac{\cos\theta}{\cot\theta} + \dfrac{\sin\theta}{\tan\theta} \stackrel{?}{=} \sin\theta + \cos\theta$

$\cos\theta \div \dfrac{\cos\theta}{\sin\theta} + \sin\theta \div \dfrac{\sin\theta}{\cos\theta} \stackrel{?}{=} \sin\theta + \cos\theta$

$\cos\theta\cdot\dfrac{\sin\theta}{\cos\theta} + \sin\theta\cdot\dfrac{\cos\theta}{\sin\theta} \stackrel{?}{=} \sin\theta + \cos\theta$

$\sin\theta + \cos\theta = \sin\theta + \cos\theta$ ✓

22) $\sec^2\theta - 1 \stackrel{?}{=} \dfrac{\sin^2\theta}{1-\sin^2\theta}$

$\sec^2\theta - 1 \stackrel{?}{=} \dfrac{\sin^2\theta}{\cos^2\theta}$

$\sec^2\theta - 1 \stackrel{?}{=} \tan^2\theta$

$\sec^2\theta - 1 = \sec^2\theta - 1$ ✓

23) $\tan^2\theta + 1 = \left(\dfrac{\sqrt{7}}{3}\right)^2 + 1 = \dfrac{7}{9} + 1$

$= \dfrac{7}{9} + \dfrac{9}{9} = \dfrac{16}{9};$

$\sec^2\theta = \left(\dfrac{4}{3}\right)^2 = \dfrac{16}{9}$

3-4 المتطابقات المثلثية لضعف الزاوية ونصفها (الصفحات 151 - 156)

أوجد القيم الدقيقة لكل من: لـ $\sin 2\theta, \cos 2\theta, \sin \frac{\theta}{2}, \cos \frac{\theta}{2}$ ، إذا علمت أن:
33-36) انظر ملحق الإجابات

33) $\cos \theta = \frac{4}{5}; 0° < \theta < 90°$

34) $\sin \theta = -\frac{1}{4}; 180° < \theta < 270°$

35) $\cos \theta = -\frac{2}{3}; \frac{\pi}{2} < \theta < \pi$

36) **ملاعب:** ملعب على شكل مربع طول ضلعه 90 ft.

a) أوجد طول قطر الملعب.

b) اكتب النسبة $\sin 45°$ باستعمال أطوال أضلاع الملعب.

c) استعمل الصيغة $\sin \frac{\theta}{2} = \pm\sqrt{\frac{1-\cos\theta}{2}}$ ؛ لبرهنة صحة النسبة التي كتبتها في الفرع(b) .

مثال 5

أوجد القيمة الدقيقة لـ $\sin \frac{\theta}{2}$ ، إذا كان $\cos \theta = -\frac{3}{5}$، وتقع θ في الربع الثاني.

$\sin \frac{\theta}{2} = \pm\sqrt{\frac{1-\cos\theta}{2}}$ متطابقة نصف الزاوية

$= \pm\sqrt{\frac{1-\left(-\frac{3}{5}\right)}{2}}$ $\cos \theta = -\frac{3}{5}$

$= \pm\sqrt{\frac{\frac{8}{5}}{2}}$ اطرح

$= \pm\sqrt{\frac{4}{5}} = \pm\frac{2\sqrt{5}}{5}$ اقسم ، بسّط ، وأنطق المقام

بما أن θ تقع في الربع الثاني، فإن $\sin \frac{\theta}{2} = \frac{2\sqrt{5}}{5}$

3-5 حل المعادلات المثلثية (الصفحات 157 - 163)

حل كل معادلة مما يأتي ، لقيم θ جميعها الموضحة بجانب كل منها:

37) $2\cos\theta - 1 = 0; 0° \le \theta < 360°$ **60° , 300°**

38) $4\cos^2\theta - 1 = 0; 0 \le \theta < 2\pi$ $\frac{\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}, \frac{4\pi}{3}, \frac{5\pi}{3}$

39) $\sin 2\theta + \cos\theta = 0; 0° \le \theta < 360°$

40) $\sin^2\theta = 2\sin\theta + 3; 0° \le \theta < 360°$ **270°**

41) $4\cos^2\theta - 4\cos\theta + 1 = 0; 0 \le \theta < 2\pi$ $\frac{\pi}{3}, \frac{5\pi}{3}$

39) **90° , 210° , 270° , 330°**

مثال 6

حل المعادلة $\sin 2\theta - \cos\theta = 0$ ، إذا كان $0 \le \theta < 2\pi$.

$\sin 2\theta - \cos\theta = 0$ المعادلة الأصلية

$2\sin\theta\cos\theta - \cos\theta = 0$ متطابقة ضعف الزاوية

$\cos\theta(2\sin\theta - 1) = 0$ حلّل

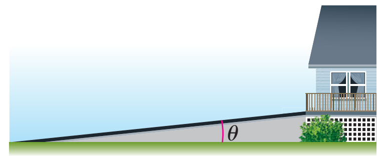
$2\sin\theta - 1 = 0$ أو $\cos\theta = 0$

$\sin\theta = \frac{1}{2}$ ، $\theta = \frac{\pi}{2}$ أو $\frac{3\pi}{2}$

$\theta = \frac{\pi}{6}$ أو $\frac{5\pi}{6}$

تطبيقات ومسائل

42) إنشاءات: يبين الشكل أدناه ممرًّا مائلًا لمنزل. (الدرس 3-1)



أوجد $\sin\theta, \cos\theta$ إذا كان $\tan\theta = \frac{1}{12}$.

$\sin\theta = \frac{\sqrt{145}}{145}$

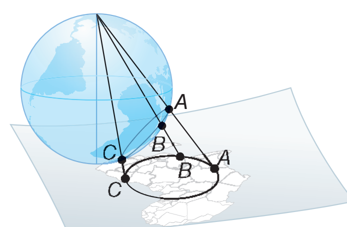
$\cos\theta = \frac{12\sqrt{145}}{145}$

43) ضوء: تعطى شدة الضوء الخارج من عدستين متتاليتين بالصيغة $I = I_0 - \frac{I_0}{\csc^2\theta}$؛ حيث I_0 شدة الضوء الخارج من العدسة الأولى، θ الزاوية بين محوري العدستين. اكتب الصيغة السابقة بحيث لا تظهر فيها نسب مثلثية سوى $\tan\theta$. (الدرس 3-1)

$I = I_0\left(\frac{1}{1+\tan^2\theta}\right)$

44) خرائط: يستعمل إسقاط الستيروجرافيك (Stereographic Projection) لتحويل مسار ثلاثي الأبعاد على الكرة الأرضية إلى مسار في المستوى (على الخريطة)، بحيث ترتبط النقاط على الكرة الأرضية بالنقاط المقابلة لها على الخريطة بالمعادلة $r = \frac{\sin\alpha}{1-\cos\alpha}$.

أثبت أن $r = \frac{1+\cos\alpha}{\sin\alpha}$. (الدرس 3-2) انظر الهامش



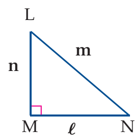
45) موجات: يُسمى تداخل موجتين بنّاءً إذا كانت سعة الموجة الناتجة أكبر من سعة مجموع الموجتين المتداخلتين. هل يكون تداخل الموجتين الآتيتين معادلتاهما بنّاء؟

$y_1 = 20\sin(3t + 225°)$ ، $y_2 = 20\sin(3t + 45°)$ (الدرس 3-3)

$y_1 + y_2 = 0$

إذن، التداخل هدام

46) هندسة: استعمل المثلث LMN أدناه لإثبات أن $\sin 2N = \frac{2n\ell}{m^2}$. (الدرس 3-4) انظر الهامش



أثبت أن كلًّا من المعادلتين الآتيتين تمثِّل متطابقة: (الدرس 3-4) انظر الهامش

47) $\frac{\sin 2\theta}{2\sin^2\theta} = \cot\theta$

48) $1 + \cos 2\theta = \frac{2}{1+\tan^2\theta}$

49) مقذوفات: إذا قُذفت كرة بسرعة متجهة مقدارها v وزاوية قياسها θ، فقطعت مسافة أفقية مقدارها d ft، ويعطى زمن تحليقها t بالصيغة $t = \frac{d}{v\cos\theta}$، فأوجد الزاوية التي قُذفت بها الكرة، إذا علمت أن $v = 50$ft/s، وكانت المسافة الأفقية 100ft، وزمن التحليق 4 ثوانٍ. (الدرس 3-5) $60°$

الفصل 3 دليل الدراسة والمراجعة

إجابات:

44) $r = \frac{\sin\alpha}{1-\cos\alpha}$

$= \frac{\sin\alpha}{1-\cos\alpha}\cdot\frac{1+\cos\alpha}{1+\cos\alpha}$

$= \frac{\sin\alpha(1+\cos\alpha)}{1-\cos^2\alpha}$

$= \frac{\sin\alpha(1+\cos\alpha)}{\sin^2\alpha}$

$= \frac{1+\cos\alpha}{\sin\alpha}$

46) إجابة ممكنة: $\sin 2 = 2\sin N\cos N$

$= 2\,\frac{n}{m}\cdot\frac{l}{m}$

$= \frac{2nl}{m^2}$

47) $\frac{\sin 2\theta}{2\sin^2\theta} \stackrel{?}{=} \cot\theta$

$\frac{2\sin\theta\cos\theta}{2\sin^2\theta} \stackrel{?}{=} \cot\theta$

$\frac{\cos\theta}{\sin\theta} \stackrel{?}{=} \cot\theta$

$\cot\theta = \cot\theta$ ✓

48) $1 + \cos 2\theta \stackrel{?}{=} \frac{2}{1+\tan^2\theta}$

$1 + 2\cos^2\theta - 1 \stackrel{?}{=} \frac{2}{\sec^2\theta}$

$2\cos^2 = 2\cos^2\theta$

الفصل 3 اختبار الفصل

1) **اختيار من متعدد:** أي من العبارات الآتية تكافئ $\sin\theta + \cos\theta \cot\theta$؟ **D**

A $\cot\theta$ C $\sec\theta$

B $\tan\theta$ D $\csc\theta$

أثبت أن كلًّا من المعادلتين الآتيتين تمثّل متطابقة:

2) $\cos(30° - \theta) = \sin(60° + \theta)$. انظر الهامش

3) $\cos(\theta - \pi) = -\cos\theta$. انظر الهامش.

4) **اختيار من متعدد:** ما القيمة الدقيقة لـ $\sin\theta$، إذا كان $\cos\theta = -\frac{3}{5}$، $90° < \theta < 180°$؟ **D**

A $\frac{5}{3}$ C $-\frac{4}{5}$

B $\frac{\sqrt{34}}{8}$ D $\frac{4}{5}$

أوجد القيمة الدقيقة لكل مما يأتي:

5) $\cot\theta$، إذا كان $\sec\theta = \frac{4}{3}$، $270° < \theta < 360°$ $-\frac{3\sqrt{7}}{7}$

6) $\tan\theta$، إذا كان $\cos\theta = -\frac{1}{2}$، $90° < \theta < 180°$ $-\sqrt{3}$

7) $\sec\theta$، إذا كان $\csc\theta = -2$، $180° < \theta < 270°$ $-\frac{2\sqrt{3}}{3}$

8) $\sec\theta$، إذا كان $\sin\theta = \frac{1}{2}$، $0° < \theta < 90°$ $\frac{2\sqrt{3}}{3}$

أثبت أن كل معادلة مما يأتي تمثّل متطابقة: **9-12) انظر ملحق الإجابات**

9) $\sin\theta(\cot\theta + \tan\theta) = \sec\theta$

10) $\frac{\cos^2\theta}{1 - \sin\theta} = \frac{\cos\theta}{\sec\theta - \tan\theta}$

11) $(\tan\theta + \cot\theta)^2 = \csc^2\theta \sec^2\theta$

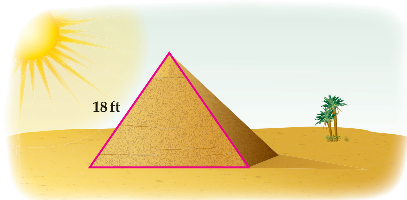
12) $\frac{1 + \sec\theta}{\sec\theta} = \frac{\sin^2\theta}{1 - \cos\theta}$

13) **اختيار من متعدد:** ما قيمة $\tan\frac{\pi}{8}$؟ **B**

A $\frac{\sqrt{2 - \sqrt{3}}}{2}$ C $1 - \sqrt{2}$

B $\sqrt{2} - 1$ D $-\frac{\sqrt{2 - \sqrt{3}}}{2}$

14) **تاريخ:** يُرجّح بعض المؤرخين أن الذين بنوا أهرامات مِصر ربما حاولوا أن يبنوا الواجهة على شكل مثلث متطابق الأضلاع ، ثمّ غيروها إلى أنواع مختلفة من المثلثات. افترض أنّه تم بناء هرم بواجهة على شكل مثلث متطابق الأضلاع ، طول ضلعه 18 ft.



انظر الهامش

a) أوجد ارتفاع المثلث المتطابق الأضلاع.

b) استعمل الصيغة $\sin 2\theta = 2\sin\theta\cos\theta$ ، وطول ضلع المثلث وارتفاعه لتبيّن أن $\sin 2(30°) = \sin 60°$ ، ثم أوجد القيمة الدقيقة للنسبة المثلثية $\sin 60°$.

أوجد القيمة الدقيقة لكل مما يأتي:

15) $\cos(-225°)$ $-\frac{\sqrt{2}}{2}$

16) $\sin 480°$ $\frac{\sqrt{3}}{2}$

17) $\cos 75°$ $\frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}$

18) $\sin 165°$ $\frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}$

حُلّ كلًّا من المعادلتين الآتيتين لقيم θ جميعها ، إذاكان قياس θ بالراديان:

19) $2\cos^2\theta - 3\cos\theta - 2 = 0$ انظر الهامش

20) $2\sin 3\theta - 1 = 0$ $\frac{\pi}{18} + \frac{2k\pi}{3}, \frac{5\pi}{18} + \frac{2k\pi}{3}$

حُلّ المعادلتين الآتيتين ، حيث $0° \le \theta \le 360°$:

21) $\cos 2\theta + \cos\theta = 2$ **0°, 360°**

22) $\sin\theta\cos\theta - \frac{1}{2}\sin\theta = 0$ **0°, 60°, 180°, 300°, 360°**

المعالجة:

بناء على نتائج اختبار الفصل استعمل مخطط المعالجة في مراجعة المفاهيم التي لاتزال تشكل تحديًا للطلاب.

اختبار الفصل :نماذج متعددة ص (53–61) .

إجابات

(2

$\cos(30° - \theta) \stackrel{?}{=} \sin(60° + \theta)$

$\cos 30° \cos\theta + \sin 30° \sin\theta \stackrel{?}{=}$
$\sin 60° \cos\theta + \cos 60° \sin\theta$

$\frac{\sqrt{3}}{2}\cos\theta + \frac{1}{2}\sin\theta = \frac{\sqrt{3}}{2}\cos\theta + \frac{1}{2}\sin\theta \checkmark$

(3 $\cos(\theta - \pi) \stackrel{?}{=} -\cos\theta$

$\cos\theta\cos\pi + \sin\theta\sin\pi \stackrel{?}{=} -\cos\theta$

$(\cos\theta)(-1) + (\sin\theta)(0) \stackrel{?}{=} -\cos\theta$

$-\cos\theta = -\cos\theta \checkmark$

(14a افترض أن ارتفاع المثلث a

$a^2 + 9^2 = 18^2$

$a^2 = 18^2 - 9^2$

$a^2 = 243$

$a = 9\sqrt{3}$

(14b $\sin 2\theta = 2\sin\theta\cos\theta;$

$\sin 2(30) = 2\sin 30\cos 30$

$\sin 60 = 2\left(\frac{9}{18}\right)\left(\frac{9\sqrt{3}}{18}\right)$

$= \frac{162\sqrt{3}}{324} = \frac{\sqrt{3}}{2};$

$\sin 60 = \frac{9\sqrt{3}}{18} = \frac{\sqrt{3}}{2}$

(19 $\frac{2\pi}{3} + 2\pi k$

$\frac{4\pi}{3} + 2\pi k$

مخطط المعالجة

المستوى 1 ضمن المتوسط	المستوى 2 دون المتوسط
إذا أخطأ بعض الطلاب في 25% أو أقل تقريبًا من الأسئلة،	إذا أخطأ بعض الطلاب في 50% تقريبًا من الأسئلة،
فاختر أحد المصدرين الآتيين:	فاختر المصدر الآتي:
كتاب الطالب الدروس 5-3 ,4-3 ,3-3 ,2-3 ,1-3	
دليل المعلم مشروع الفصل، ص (134)	
زيارة الموقع www.obeikaneducation.com	زيارة الموقع www.obeikaneducation.com

الدرس 3-2 ، ص (143-145)

1) $\cos^2\theta + \tan^2\theta\cos^2\theta \stackrel{?}{=} 1$

نبدأ بالطرف الأيسر

$$\cos^2\theta + \tan^2\theta\cos^2\theta$$
$$= \cos^2\theta + \frac{\sin^2\theta}{\cos^2\theta}\cdot\cos^2\theta$$
$$= \cos^2\theta + \sin^2\theta$$
$$= 1$$

ويساوي الطرف الأيمن

2) $\cot\theta(\cot\theta + \tan\theta) \stackrel{?}{=} \csc^2\theta$

نبدأ بالطرف الأيسر

$$\cot^2\theta + \cot\theta\tan\theta$$
$$= \cot^2\theta + \frac{\sin\theta}{\cos\theta}\cdot\frac{\cos\theta}{\sin\theta}$$
$$= \cot^2\theta + 1$$
$$= \csc^2\theta$$

ويساوي الطرف الأيمن

3) $1 + \sec^2\theta\sin^2\theta \stackrel{?}{=} \sec^2\theta$

نبدأ بالطرف الأيسر

$$1 + \sec^2\theta\sin^2\theta$$
$$= 1 + \frac{1}{\cos^2\theta}\cdot\sin^2\theta$$
$$= 1 + \tan^2\theta$$
$$= \sec^2\theta$$

ويساوي الطرف الأيمن

4) $\sin\theta\sec\theta\cot\theta \stackrel{?}{=} 1$

نبدأ بالطرف الأيسر

$$\sin\theta\sec\theta\cot\theta$$
$$= \sin\theta\cdot\frac{1}{\cos\theta}\cdot\frac{\cos\theta}{\sin\theta}$$
$$= 1$$

ويساوي الطرف الأيمن

5) $\frac{1-\cos\theta}{1+\cos\theta} \stackrel{?}{=} (\csc\theta - \cot\theta)^2$

نبدأ بالطرف الأيمن $(\csc\theta - \cot\theta)^2$

$$= \csc^2\theta - 2\cot\theta\csc\theta + \cot^2\theta$$
$$= \frac{1}{\sin^2\theta} - 2\cdot\frac{\cos\theta}{\sin\theta}\cdot\frac{1}{\sin\theta} + \frac{\cos^2\theta}{\sin^2\theta}$$
$$= \frac{1}{\sin^2\theta} - \frac{2\cos\theta}{\sin^2\theta} + \frac{\cos^2\theta}{\sin^2\theta}$$
$$= \frac{1 - 2\cos\theta + \cos^2\theta}{\sin^2\theta}$$
$$= \frac{(1-\cos\theta)(1-\cos\theta)}{1-\cos^2\theta}$$
$$= \frac{(1-\cos\theta)(1-\cos\theta)}{(1-\cos\theta)(1+\cos\theta)}$$
$$= \frac{1-\cos\theta}{1+\cos\theta}$$

ويساوي الطرف الأيسر

6) $\frac{1-2\cos^2\theta}{\sin\theta\cos\theta} \stackrel{?}{=} \tan\theta - \cot\theta$

نبدأ بالطرف الأيسر

$$\frac{1-2\cos^2\theta}{\sin\theta\cos\theta}$$
$$= \frac{(1-\cos^2\theta) - \cos^2\theta}{\sin\theta\cos\theta}$$
$$= \frac{\sin^2\theta - \cos^2\theta}{\sin\theta\cos\theta}$$
$$= \frac{\sin^2\theta}{\sin\theta\cos\theta} - \frac{\cos^2\theta}{\sin\theta\cos\theta}$$
$$= \frac{\sin\theta}{\cos\theta} - \frac{\cos\theta}{\sin\theta}$$
$$= \tan\theta - \cot\theta$$

ويساوي الطرف الأيمن

7) $\tan\theta \stackrel{?}{=} \frac{\sec\theta}{\csc\theta}$

نبدأ بالطرف الأيمن

$$\frac{\sec\theta}{\csc\theta}$$
$$= \frac{\frac{1}{\cos\theta}}{\frac{1}{\sin\theta}}$$
$$= \frac{\sin\theta}{\cos\theta}$$
$$= \tan\theta$$

ويساوي الطرف الأيسر

8) $\cos\theta \stackrel{?}{=} \sin\theta\cot\theta$

نبدأ بالطرف الأيمن

$$\sin\theta\cot\theta$$
$$= \sin\theta\left(\frac{\cos\theta}{\sin\theta}\right)$$
$$= \cos\theta \checkmark$$

ويساوي الطرف الأيسر

9) $(\sin\theta - 1)(\tan\theta + \sec\theta) \stackrel{?}{=} -\cos\theta$

نبدأ بالطرف الأيسر

$$(\sin\theta - 1)(\tan\theta + \sec\theta)$$
$$= \sin\theta\tan\theta + \sin\theta\sec\theta - \tan\theta - \sec\theta$$
$$= \frac{\sin^2\theta}{\cos\theta} + \frac{\sin\theta}{\cos\theta} - \frac{\sin\theta}{\cos\theta} - \frac{1}{\cos\theta}$$
$$= \frac{\sin^2\theta}{\cos\theta} - \frac{1}{\cos\theta}$$
$$= \frac{\sin^2\theta - 1}{\cos\theta}$$
$$= \frac{-\cos^2\theta}{\cos\theta}$$
$$= -\cos\theta$$

ويساوي الطرف الأيمن

(10 $\cos\theta\cos(-\theta) - \sin\theta\sin(-\theta) \stackrel{?}{=} 1$

نبدأ بالطرف الأيسر

$$\cos\theta\cos(-\theta) - \sin\theta\sin(-\theta)$$

$$= \cos\theta\cos\theta - \sin\theta(-\sin\theta)$$

$$= \cos^2\theta + \sin^2\theta$$

$$= 1$$

ويساوي الطرف الأيمن

(12 $\sec\theta - \tan\theta \stackrel{?}{=} \dfrac{1-\sin\theta}{\cos\theta}$

نبدأ بالطرف الأيسر

$$\sec\theta - \tan\theta$$

$$= \frac{1}{\cos\theta} - \frac{\sin\theta}{\cos\theta}$$

$$= \frac{1-\sin\theta}{\cos\theta}$$

ويساوي الطرف الأيمن

(13 $\dfrac{1+\tan\theta}{\sin\theta+\cos\theta} \stackrel{?}{=} \sec\theta$

نبدأ بالطرف الأيسر

$$\frac{1+\tan\theta}{\sin\theta+\cos\theta}$$

$$= \frac{1+\frac{\sin\theta}{\cos\theta}}{\sin\theta+\cos\theta}$$

$$= \frac{\frac{\cos\theta+\sin\theta}{\cos\theta}}{\sin\theta+\cos\theta}$$

$$= \frac{\cos\theta+\sin\theta}{\cos\theta}\cdot\frac{1}{\sin\theta+\cos\theta}$$

$$= \frac{1}{\cos\theta}$$

$$= \sec\theta$$

ويساوي الطرف الأيمن

(14 $\sec\theta\csc\theta \stackrel{?}{=} \tan\theta + \cot\theta$

نبسط الطرف الأيسر

$$\sec\theta\csc\theta$$

$$= \frac{1}{\cos\theta}\cdot\frac{1}{\sin\theta}$$

$$= \frac{1}{\cos\theta\sin\theta}$$

نبسط الطرف الأيمن

$$\tan\theta + \cot\theta$$

$$= \frac{\sin\theta}{\cos\theta} + \frac{\cos\theta}{\sin\theta}$$

$$= \frac{\sin^2\theta}{\sin\theta\cos\theta} + \frac{\cos^2\theta}{\sin\theta\cos\theta}$$

$$= \frac{\sin^2\theta+\cos^2\theta}{\sin\theta\cos\theta}$$

$$= \frac{1}{\cos\theta\sin\theta}$$

بما أن الطرفين يساويان المقدار نفسه، فالطرفان متساويان.

(15 $\sin\theta + \cos\theta \stackrel{?}{=} \dfrac{2\sin^2\theta - 1}{\sin\theta - \cos\theta}$

نبدأ بالطرف الأيمن

$$\frac{2\sin^2\theta - 1}{\sin\theta - \cos\theta}$$

$$= \frac{2\sin^2\theta - (\sin^2\theta + \cos^2\theta)}{\sin\theta - \cos\theta}$$

$$= \frac{\sin^2\theta - \cos^2\theta}{\sin\theta - \cos\theta}$$

$$= \frac{(\sin\theta - \cos\theta)(\sin\theta + \cos\theta)}{\sin\theta - \cos\theta}$$

$$= \sin\theta + \cos\theta$$

ويساوي الطرف الأيسر

(16 $(\sin\theta + \cos\theta)^2 \stackrel{?}{=} \dfrac{2+\sec\theta\csc\theta}{\sec\theta\csc\theta}$

نبسِّط الطرف الأيسر

$$(\sin\theta + \cos\theta)^2 = 2\cos\theta\sin\theta + \cos^2\theta + \sin^2\theta$$

$$= 2\cos\theta\sin\theta + 1$$

نبسِّط الطرف الأيمن

$$\frac{2+\frac{1}{\cos\theta}\cdot\frac{1}{\sin\theta}}{\frac{1}{\cos\theta}\cdot\frac{1}{\sin\theta}}$$

$$= \left(2+\frac{1}{\cos\theta\sin\theta}\right)\cdot\frac{\cos\theta\sin\theta}{1}$$

$$= 2\cos\theta\sin\theta + 1$$

بما أن الطرفين يساويان المقدار نفسه، فالطرفان متساويان.

(17 $\dfrac{\cos\theta}{1-\sin\theta} \stackrel{?}{=} \dfrac{1+\sin\theta}{\cos\theta}$

نبدأ بالطرف الأيمن

$$\frac{1+\sin\theta}{\cos\theta}$$

$$= \frac{1+\sin\theta}{\cos\theta}\cdot\frac{1-\sin\theta}{1-\sin\theta}$$

$$= \frac{1-\sin^2\theta}{\cos\theta(1-\sin\theta)}$$

$$= \frac{\cos^2\theta}{\cos\theta(1-\sin\theta)}$$

$$= \frac{\cos\theta}{1-\sin\theta}$$

ويساوي الطرف الأيسر

(18 $\csc\theta - 1 \stackrel{?}{=} \dfrac{\cot^2\theta}{\csc\theta + 1}$

نبدأ بالطرف الأيمن

$$\frac{\cot^2\theta}{\csc\theta+1}$$

$$= \frac{\csc^2\theta - 1}{\csc\theta + 1}$$

$$= \frac{(\csc\theta - 1)(\csc\theta + 1)}{\csc\theta + 1}$$

$$= \csc\theta - 1$$

ويساوي الطرف الأيسر

(19 $\csc^2\theta - \cot^2\theta = \sec^2\theta - \tan^2\theta$

نبسط الطرف الأيسر

$$\csc^2\theta - \cot^2\theta = \frac{1}{\sin^2\theta} - \frac{\cos^2\theta}{\sin^2\theta}$$
$$= \frac{1-\cos^2\theta}{\sin^2\theta}$$
$$= \frac{\sin^2\theta}{\sin^2\theta} = 1$$

نبسط الطرف الأيمن

$$\sec^2\theta - \tan^2\theta = \frac{1}{\cos^2\theta} - \frac{\sin^2\theta}{\cos^2\theta}$$
$$= \frac{1-\sin^2\theta}{\cos^2\theta}$$
$$= \frac{\cos^2\theta}{\cos^2\theta} = 1$$

بما أن الطرفين يساويان المقدار نفسه، فالطرفان متساويان.

(20 $\sin\theta\cos\theta\tan\theta + \cos^2\theta \stackrel{?}{=} 1$

نبدأ بالطرف الأيسر

$$\sin\theta\cos\theta\tan\theta + \cos^2\theta$$
$$= \sin\theta\cos\theta \cdot \frac{\sin\theta}{\cos\theta} + \cos^2\theta$$
$$= \sin^2\theta + \cos^2\theta$$
$$= 1$$

ويساوي الطرف الأيمن

(21 $\sec\theta - \cos\theta \stackrel{?}{=} \tan\theta\sin\theta$

نبسط الطرف الأيسر

$$\sec\theta - \cos\theta$$
$$= \frac{1}{\cos\theta} - \cos\theta$$
$$= \frac{1-\cos^2\theta}{\cos\theta}$$
$$= \frac{\sin^2\theta}{\cos\theta}$$

نبسط الطرف الأيمن

$$\tan\theta\sin\theta$$
$$= \frac{\sin\theta}{\cos\theta}\sin\theta$$
$$= \frac{\sin^2\theta}{\cos\theta}$$

بما أن الطرفين يساويان المقدار نفسه، فالطرفان متساويان.

(22 $\csc^2\theta \stackrel{?}{=} \cot^2\theta + \sin\theta\csc\theta$

نبدأ بالطرف الأيمن

$$\cot^2\theta + \sin\theta\csc\theta$$
$$= \cot^2\theta + \sin\theta \cdot \frac{1}{\sin\theta}$$
$$= \cot^2\theta + 1$$
$$= \csc^2\theta$$

ويساوي الطرف الأيسر

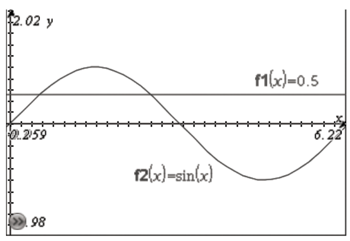
(23 $\dfrac{\sec\theta - \csc\theta}{\csc\theta\sec\theta} \stackrel{?}{=} \sin\theta - \cos\theta$

نبدأ بالطرف الأيسر

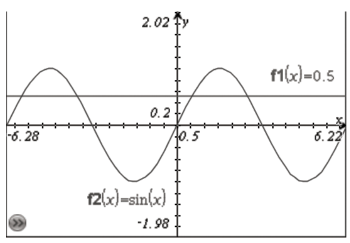
$$\frac{\sec\theta - \csc\theta}{\csc\theta\sec\theta}$$
$$= \frac{\sec\theta}{\csc\theta\sec\theta} - \frac{\csc\theta}{\csc\theta\sec\theta}$$
$$= \frac{1}{\csc\theta} - \frac{1}{\sec\theta}$$
$$= \sin\theta - \cos\theta$$

ويساوي الطرف الأيمن

(43b يتقاطع التمثيل البياني للدالتين $y = \frac{1}{2}$, $y = \sin x$ عند النقاط $x = \frac{5\pi}{6}$, $x = \frac{\pi}{6}$ ، على الفترة $[0, 2\pi)$.



(43c يتقاطع التمثيل البياني للدالتين $y = \frac{1}{2}$, $y = \sin x$ عند النقاط $\frac{5\pi}{6}, \frac{\pi}{6}, -\frac{7\pi}{6}, -\frac{11\pi}{6}$ ، على الفترة $[-2\pi, 2\pi)$



(43d إجابة ممكنة: بما أن الجيب دالة دورية، تكون حلول المعادلة هي $x = \frac{5\pi}{6} + 2n\pi$ وَ $x = \frac{\pi}{6} + 2n\pi$ ، حيث n عدد صحيح.

(49 الثانية:

$$1 + \tan^2\theta = \sec^2\theta$$
$$1 + \frac{\sin^2\theta}{\cos^2\theta} \stackrel{?}{=} \sec^2\theta$$
$$\frac{\cos^2\theta + \sin^2\theta}{\cos^2\theta} \stackrel{?}{=} \sec^2\theta$$
$$\frac{1}{\cos^2\theta} \stackrel{?}{=} \sec^2\theta$$
$$\sec^2\theta \stackrel{?}{=} \sec^2\theta \checkmark$$

الثالثة:

$$1 + \cot^2\theta \stackrel{?}{=} \csc^2\theta$$
$$1 + \frac{\cos^2\theta}{\sin^2\theta} \stackrel{?}{=} \csc^2\theta$$
$$\frac{\sin^2\theta + \cos^2\theta}{\sin^2\theta} \stackrel{?}{=} \csc^2\theta$$

$$\frac{1}{\sin^2\theta} \stackrel{?}{=} \csc^2\theta$$

$$\csc\theta \stackrel{?}{=} \csc^2\theta \checkmark$$

(57

$$\sin^3\theta\cos\theta + \cos^3\theta\sin\theta$$

$$= \sin\theta\cos\theta\,(\sin^2\theta + \cos^2\theta)$$

$$= \sin\theta\cos\theta\,(1)$$

$$= \sin\theta\cos\theta$$

الدرس 3-3 ، ص (148-149)

(10

$$\begin{aligned}
\sin(90° + \theta) &\stackrel{?}{=} \cos\theta\\
\sin 90°\cos\theta + \cos 90°\sin\theta &\stackrel{?}{=} \cos\theta\\
1\cdot\cos\theta + 0\cdot\sin\theta &\stackrel{?}{=} \cos\theta\\
\cos\theta &= \cos\theta \checkmark
\end{aligned}$$

(11

$$\begin{aligned}
\cos\left(\frac{3\pi}{2} - \theta\right) &\stackrel{?}{=} -\sin\theta\\
\cos\frac{3\pi}{2}\cos\theta + \sin\frac{3\pi}{2}\sin\theta &\stackrel{?}{=} -\sin\theta\\
0\cdot\cos\theta - 1\cdot\sin\theta &\stackrel{?}{=} -\sin\theta\\
-\sin\theta &= -\sin\theta \checkmark
\end{aligned}$$

(12

$$\begin{aligned}
\tan\left(\theta + \frac{\pi}{2}\right) &\stackrel{?}{=} -\cot\theta\\
\frac{\sin\left(\theta + \frac{\pi}{2}\right)}{\cos\left(\theta + \frac{\pi}{2}\right)} &\stackrel{?}{=} -\cot\theta\\
\frac{\sin\theta\cos\frac{\pi}{2} + \cos\theta\sin\frac{\pi}{2}}{\cos\theta\cos\frac{\pi}{2} - \sin\theta\sin\frac{\pi}{2}}\cot\theta &\stackrel{?}{=} -\cot\theta\\
\frac{(\sin\theta)\cdot 0 + (\cos\theta)\cdot 1}{(\cos\theta)\cdot 0 - (\sin\theta)\cdot 1} &\stackrel{?}{=} -\cot\theta\\
-\frac{\cos\theta}{\sin\theta} &\stackrel{?}{=} -\cot\theta\\
-\cot\theta &= -\cot\theta \checkmark
\end{aligned}$$

(13

$$\begin{aligned}
\sin(\theta + \pi) &\stackrel{?}{=} -\sin\theta\\
\sin\theta\cos\pi + \cos\theta\sin\pi &\stackrel{?}{=} -\sin\theta\\
(\sin\theta)(-1) + (\cos\theta)(0) &\stackrel{?}{=} -\sin\theta\\
-\sin\theta &= -\sin\theta \checkmark
\end{aligned}$$

(14

$$\begin{aligned}
\cos\left(\frac{\pi}{2} + \theta\right) \stackrel{?}{=} &\stackrel{?}{=} -\sin\theta\\
\cos\frac{\pi}{2}\cos\theta - \sin\frac{\pi}{2}\sin\theta &\stackrel{?}{=} -\sin\theta\\
(0)(\cos\theta) - (1)(\sin\theta) &\stackrel{?}{=} -\sin\theta\\
-\sin\theta &= -\sin\theta \checkmark
\end{aligned}$$

(15

$$\begin{aligned}
\tan(\theta + 45°) &\stackrel{?}{=} \frac{1 + \tan\theta}{1 - \tan\theta}\\
\frac{\tan\theta + \tan 45°}{1 - \tan\theta\tan 45°} &\stackrel{?}{=} \frac{1 + \tan\theta}{1 - \tan\theta}\\
\frac{\tan\theta + 1}{1 - (\tan\theta)(1)} &\stackrel{?}{=} \frac{1 + \tan\theta}{1 - \tan\theta}\\
\frac{1 + \tan\theta}{1 - \tan\theta} &= \frac{1 + \tan\theta}{1 - \tan\theta} \checkmark
\end{aligned}$$

(23

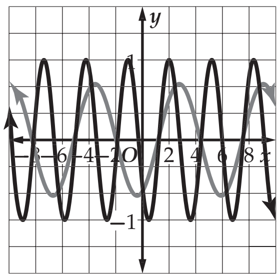
$$\frac{(\sin A + \tan\theta\cos A)}{\cos A - \tan\theta\sin A}$$

$$= \frac{\left(\frac{\sin A}{\cos A} + \frac{\tan\theta\cos A}{\cos A}\right)}{\frac{\cos A}{\cos A} - \frac{\tan\theta\sin A}{\cos A}}$$

$$= \frac{(\tan A + \tan\theta)}{1 - \tan A\tan\theta}$$

$$= \tan(A + \theta)$$

(24b



(24c $\sin(30° + 45°) = \sin 30° + \sin 45°$

فالطرف الأيمن يساوي $\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{1}{2}$ ، أو 1.21 تقريبًا. وبما أن قيمة جيب أية زاوية لا يمكن أن تكون أكبر من 1؛ فإن الجملة $\sin(A + B) = \sin A + \sin B$ لا تمثل متطابقة.

(25

$$\sin(A + B) \stackrel{?}{=} \frac{\tan A + \tan B}{\sec A\sec B}$$

$$\sin(A + B) \stackrel{?}{=} \frac{\frac{\sin A}{\cos A} + \frac{\sin B}{\cos B}}{\frac{1}{\cos A}\cdot\frac{1}{\cos B}}$$

$$\sin(A + B) \stackrel{?}{=} \frac{\frac{\sin A}{\cos A} + \frac{\sin B}{\cos B}}{\frac{1}{\cos A}\cdot\frac{1}{\cos B}}\cdot\frac{\cos A\cos B}{\cos A\cos B}$$

$$\sin(A + B) \stackrel{?}{=} \frac{\sin A\cos B + \cos A\sin B}{1}$$

$$\sin(A + B) = \sin(A + B) \checkmark$$

(26

$$\cos(A + B) \stackrel{?}{=} \frac{1 - \tan A\tan B}{\sec A\sec B}$$

$$\cos(A + B) \stackrel{?}{=} \frac{1 - \frac{\sin A}{\cos A}\cdot\frac{\sin B}{\cos B}}{\frac{1}{\cos A}\cdot\frac{1}{\cos B}}$$

$$\cos(A + B) \stackrel{?}{=} \frac{1 - \frac{\sin A}{\cos A}\cdot\frac{\sin B}{\cos B}}{\frac{1}{\cos A}\cdot\frac{1}{\cos B}}\cdot\frac{\cos A\cos B}{\cos A\cos B}$$

$$\cos(A + B) \stackrel{?}{=} \frac{\cos A\cos B - \sin A\sin B}{1}$$

$$\cos(A + B) = \cos(A + B) \checkmark$$

(27

$$\sec(A-B) \stackrel{?}{=} \frac{\sec A \sec B}{1+\tan A \tan B}$$

$$\sec(A-B) \stackrel{?}{=} \frac{\frac{1}{\cos A}\cdot\frac{1}{\cos B}}{1+\frac{\sin A}{\cos A}\cdot\frac{\sin B}{\cos B}}$$

$$\sec(A-B) \stackrel{?}{=} \frac{\frac{1}{\cos A}\cdot\frac{1}{\cos B}}{1+\frac{\sin A}{\cos A}\cdot\frac{\sin B}{\cos B}}\cdot\frac{\cos A\cos B}{\cos A\cos B}$$

$$\sec(A-B) \stackrel{?}{=} \frac{1}{\cos A\cos B+\sin A\sin B}$$

$$\sec(A-B) \stackrel{?}{=} \frac{1}{\cos(A-B)}$$

$$\sec(A-B) = \sec(A-B)\ \checkmark$$

(28

$$\sin(A+B)\sin(A-B) \stackrel{?}{=} \sin^2 A-\sin^2 B$$

$$(\sin A\cos B+\cos A\sin B)(\sin A\cos B-\cos A\sin B) \stackrel{?}{=} \sin^2 A-\sin^2 B$$

$$(\sin A\cos B)^2-(\cos A\sin B)^2 \stackrel{?}{=} \sin^2 A-\sin^2 B$$

$$\sin^2 A\cos^2 B-\cos^2 A\sin^2 B \stackrel{?}{=} \sin^2 A-\sin^2 B$$

$$\sin^2 A\cos^2 B+\sin^2 A\sin^2 B-\sin^2 A\sin^2 B-\cos^2 A\sin^2 B \stackrel{?}{=} \sin^2 A-\sin^2 B$$

$$\sin^2 A(\cos^2 B+\sin^2 B)-\sin^2 B(\sin^2 A+\cos^2 A) \stackrel{?}{=} \sin^2 A-\sin^2 B$$

$$(\sin^2 A)(1)-(\sin^2 B)(1) \stackrel{?}{=} \sin^2 A-\sin^2 B$$

$$\sin^2 A-\sin^2 B = \sin^2 A-\sin^2 B\ \checkmark$$

(30

$$\cot(A+B) = \frac{1}{\tan(A+B)}$$

$$= \frac{1}{\frac{\tan A+\tan B}{1-\tan A\tan B}}$$

$$= \frac{1-\tan A\tan B}{\tan A+\tan B}$$

$$= \frac{1-\frac{1}{\cot A}\cdot\frac{1}{\cot B}}{\frac{1}{\cot A}+\frac{1}{\cot B}}\cdot\frac{\cot A\cot B}{\cot A\cot B}$$

$$= \frac{\cot A\cot B-1}{\cot A+\cot B}$$

(31

$$d=\sqrt{(\cos A-\cos B)^2+(\sin A-\sin B)^2}$$

$$d^2=(\cos A-\cos B)^2+(\sin A-\sin B)^2$$

$$d^2=(\cos^2 A-2\cos A\cos B+\cos^2 B)+(\sin^2 A-2\sin A\sin B+\sin^2 B)$$

$$d^2=\cos^2 A+\sin^2 A+\cos^2 B+\sin^2 B-2\cos A\cos B-2\sin A\sin B$$

$$d^2=1+1-2\cos A\cos B-2\sin A\sin B$$

$$d^2=2-2\cos A\cos B-2\sin A\sin B=2-2\cos(A-B)$$

اختبار منتصف الفصل، ص (150)

(10

$$\cot^2\theta+1 \stackrel{?}{=} \frac{\cot\theta}{\cos\theta\cdot\sin\theta}$$

$$\csc^2\theta \stackrel{?}{=} \frac{\cos\theta}{\cos\theta\cdot\sin\theta\cdot\sin\theta}$$

$$\csc^2\theta \stackrel{?}{=} \frac{1}{\sin^2\theta}$$

$$\csc^2\theta=\csc^2\theta\ \checkmark$$

(11

$$\frac{\cos\theta\csc\theta}{\cot\theta} \stackrel{?}{=} 1$$

$$\frac{\cos\theta\frac{1}{\sin\theta}}{\cot\theta} \stackrel{?}{=} 1$$

$$\frac{\frac{\cos\theta}{\sin\theta}}{\cot\theta} \stackrel{?}{=} 1$$

$$\frac{\cot\theta}{\cos\theta} \stackrel{?}{=} 1$$

$$1=1\ \checkmark$$

(12

$$\frac{\sin\theta\tan\theta}{1-\cos\theta} \stackrel{?}{=} (1+\cos\theta)\sec\theta$$

$$\frac{\sin\theta\left(\frac{\sin\theta}{\cos\theta}\right)}{1-\cos\theta} \stackrel{?}{=} (1+\cos\theta)\frac{1}{\cos\theta}$$

$$\frac{\frac{\sin^2\theta}{\cos\theta}}{1-\cos\theta} \stackrel{?}{=} \frac{1}{\cos\theta}+1$$

$$\frac{\sin^2\theta}{\cos\theta}\cdot\frac{1}{1-\cos\theta} \stackrel{?}{=} \frac{1}{\cos\theta}+1$$

$$\frac{\sin^2\theta}{\cos\theta(1-\cos\theta)} \stackrel{?}{=} \frac{1}{\cos\theta}+1$$

$$\frac{1-\cos^2\theta}{\cos\theta(1-\cos\theta)} \stackrel{?}{=} \frac{1}{\cos\theta}+1$$

$$\frac{(1-\cos\theta)(1+\cos\theta)}{\cos\theta(1-\cos\theta)} \stackrel{?}{=} \frac{1}{\cos\theta}+1$$

$$\frac{1+\cos\theta}{\cos\theta} \stackrel{?}{=} \frac{1}{\cos\theta}+1$$

$$\frac{1}{\cos\theta}+1=\frac{1}{\cos\theta}+1\ \checkmark$$

(13

$$\tan\theta(1-\sin\theta) \stackrel{?}{=} \frac{\cos\theta\sin\theta}{1+\sin\theta}$$

$$\tan\theta(1-\sin\theta) \stackrel{?}{=} \frac{\cos\theta\sin\theta}{1+\sin\theta}\cdot\frac{1-\sin\theta}{1-\sin\theta}$$

$$\tan\theta(1-\sin\theta) \stackrel{?}{=} \frac{\cos\theta\sin\theta(1-\sin\theta)}{1-\sin^2\theta}$$

$$\tan\theta(1-\sin\theta) \stackrel{?}{=} \frac{\cos\theta\sin\theta(1-\sin\theta)}{\cos^2\theta}$$

$$\tan\theta(1-\sin\theta) \stackrel{?}{=} \frac{\sin\theta(1-\sin\theta)}{\cos\theta}$$

$$\tan\theta(1-\sin\theta) \stackrel{?}{=} \frac{\sin\theta}{\cos\theta}\cdot(1-\sin\theta)$$

$$\tan\theta(1-\sin\theta)=\tan\theta(1-\sin\theta)\ \checkmark$$

(14b

$$\cot\theta=\frac{12}{9}$$

$$\frac{\cos\theta}{\sin\theta}=\frac{\frac{12}{15}}{\frac{9}{15}}=\frac{12}{9}$$

بما أن $\frac{12}{9}=\frac{12}{9}$

إذن $\cot\theta=\frac{\cos\theta}{\sin\theta}$

(15
$$\frac{\sin\theta \cdot \sec\theta}{\sec\theta - 1} \stackrel{?}{=} (\sec\theta + 1)\cot\theta$$
$$\frac{\sec\theta + 1}{\sec\theta + 1} \cdot \frac{\sin\theta \cdot \sec\theta}{\sec\theta - 1} \stackrel{?}{=} (\sec\theta + 1)\cot\theta$$
$$\frac{\sin\theta \cdot \sec\theta(\sec\theta + 1)}{\sec^2\theta - 1} \stackrel{?}{=} (\sec\theta + 1)\cot\theta$$
$$\frac{\sin\theta \cdot \frac{1}{\cos\theta}(\sec\theta + 1)}{\tan^2\theta} \stackrel{?}{=} (\sec\theta + 1)\cot\theta$$
$$\frac{\frac{\sin\theta}{\cos\theta}(\sec\theta + 1)}{\tan^2\theta} \stackrel{?}{=} (\sec\theta + 1)\cot\theta$$
$$\frac{\tan\theta(\sec\theta + 1)}{\tan^2\theta} \stackrel{?}{=} (\sec\theta + 1)\cot\theta$$
$$\frac{\sec\theta + 1}{\tan\theta} \stackrel{?}{=} (\sec\theta + 1)\cot\theta$$
$$\frac{\sec\theta + 1}{1} \cdot \frac{1}{\tan\theta} \stackrel{?}{=} (\sec\theta + 1)\cot\theta$$
$$(\sec\theta + 1)\cot\theta = (\sec\theta + 1)\cot\theta \checkmark$$

(16
$$\sin^2\theta \cdot \tan^2\theta \stackrel{?}{=} \tan^2\theta - \sin^2\theta$$
$$\sin^2\theta \cdot \tan^2\theta \stackrel{?}{=} \frac{\sin^2\theta}{\cos^2\theta} - \sin^2\theta$$
$$\sin^2\theta \cdot \tan^2\theta \stackrel{?}{=} \frac{\sin^2\theta - \sin^2\theta\cos^2\theta}{\cos^2\theta}$$
$$\sin^2\theta \cdot \tan^2\theta \stackrel{?}{=} \frac{\sin^2\theta\,(1 - \cos^2\theta)}{\cos^2\theta}$$
$$\sin^2\theta \cdot \tan^2\theta \stackrel{?}{=} \frac{\sin^2\theta\,(\sin^2\theta)}{\cos^2\theta}$$
$$\sin^2\theta \cdot \tan^2\theta \stackrel{?}{=} \sin^2\theta \cdot \frac{\sin^2\theta}{\cos^2\theta}$$
$$\sin^2\theta \cdot \tan^2\theta = \sin^2\theta \cdot \tan^2\theta \checkmark$$

(17
$$\cot\theta(1 - \cos\theta) \stackrel{?}{=} \frac{\cos\theta \cdot \sin\theta}{1 + \cos\theta}$$
$$\cot\theta(1 - \cos\theta) \stackrel{?}{=} \frac{\cos\theta \cdot \sin\theta}{1 + \cos\theta} \cdot \frac{1 - \cos\theta}{1 - \cos\theta}$$
$$\cot\theta(1 - \cos\theta) \stackrel{?}{=} \frac{\cos\theta \cdot \sin\theta\,(1 - \cos\theta)}{1 - \cos^2\theta}$$
$$\cot\theta(1 - \cos\theta) \stackrel{?}{=} \frac{\cos\theta \cdot \sin\theta\,(1 - \cos\theta)}{\sin^2\theta}$$
$$\cot\theta(1 - \cos\theta) \stackrel{?}{=} \frac{\cos\theta\,(1 - \cos\theta)}{\sin\theta}$$
$$\cot\theta(1 - \cos\theta) \stackrel{?}{=} \frac{\cos\theta}{\sin\theta}(1 - \cos\theta)$$
$$\cot\theta(1 - \cos\theta) = \cot\theta\,(1 - \cos\theta) \checkmark$$

(23
$$\cos 30^\circ\cos\theta + \sin 30^\circ\sin\theta \stackrel{?}{=} \sin 60^\circ\cos\theta + \cos 60^\circ\sin\theta$$
$$\frac{\sqrt{3}}{2}\cos\theta + \frac{1}{2}\sin\theta = \frac{\sqrt{3}}{2}\cos\theta + \frac{1}{2}\sin\theta \checkmark$$

الدرس 3-4 ، ص (155 ,156)

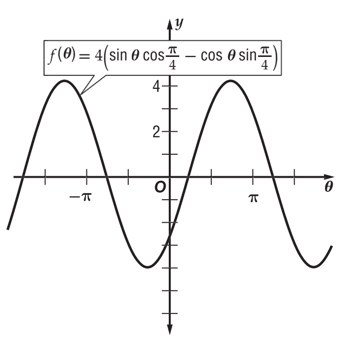
(16
$$\tan 2\theta \stackrel{?}{=} \frac{2}{\cot\theta - \tan\theta}$$
$$\tan 2\theta \stackrel{?}{=} \frac{2}{\cot\theta - \tan\theta} \cdot \frac{\tan\theta}{\tan\theta}$$
$$\tan 2\theta \stackrel{?}{=} \frac{2\tan\theta}{\cot\theta\tan\theta - \tan^2\theta}$$
$$\tan 2\theta \stackrel{?}{=} \frac{2\tan\theta}{1 - \tan^2\theta}$$
$$\tan 2\theta = \tan 2\theta \checkmark$$

(17
$$\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2} \stackrel{?}{=} \frac{\sin\theta}{2}$$
$$\frac{2\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}}{2} \stackrel{?}{=} \frac{\sin\theta}{2}$$
$$\frac{\sin 2\left(\frac{\theta}{2}\right)}{2} \stackrel{?}{=} \frac{\sin\theta}{2}$$
$$\frac{\sin\theta}{2} = \frac{\sin\theta}{2} \checkmark$$

(20 إذا كانت $\theta = 45^\circ + A$
$$d = \frac{v^2\sin 2\,(45^\circ + A)}{g}$$
$$= \frac{v^2\sin(90^\circ + 2A)}{g}$$
$$= \frac{v^2(\sin 90^\circ\cos 2A + \cos 90^\circ\sin 2A)}{g}$$
$$= \frac{v^2(1 \cdot \cos 2A + 0 \cdot \sin 2A)}{g}$$
$$= \frac{v^2\cos 2A}{g}$$

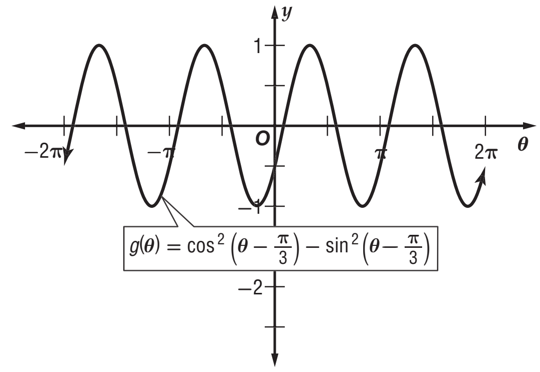
إذا كانت $\theta = 45^\circ - A$
$$d = \frac{v^2\sin 2\,(45^\circ - A)}{g}$$
$$= \frac{v^2\sin(90^\circ - 2A)}{g}$$
$$= \frac{v^2(\sin 90^\circ\cos 2A - \cos 90^\circ\sin 2A)}{g}$$
$$= \frac{v^2(1 \cdot \cos 2A - 0 \cdot \sin 2A)}{g}$$
$$= \frac{v^2\cos 2A}{g}$$

(26a



(26b
$$4\sin\left(\theta - \frac{\pi}{4}\right);$$
$$4\sin\left(\theta - \frac{\pi}{4}\right) = 4\left(\sin\theta\cos\frac{\pi}{4} - \cos\theta\sin\frac{\pi}{4}\right),$$

(26c



(26d $\cos\left(2\theta - \frac{\pi}{3}\right)$;

$$\cos\left(2\theta - \frac{2\pi}{3}\right) = \cos\left[2\left(\theta - \frac{\pi}{3}\right)\right]$$
$$= \cos^2\left(\theta - \frac{\pi}{3}\right) - \sin^2\left(\theta - \frac{\pi}{3}\right)$$

27) كلاهما خطأ؛ حيث طرح سعيد الجذور التربيعية بطريقة غير صحيحة، كما استعمل سلمان متطابقة نصف الزاوية، ولكنه أخطأ في إيجاد قيمة $\cos 30°$ في المتطابقة فكتبها $\frac{1}{2}$ بدلاً من $\frac{\sqrt{3}}{2}$.

29) إذا أعطيت فقط قيمة $\cos\theta$ فإن $\cos 2\theta = 2\cos^2\theta - 1$ هي أفضل متطابقة يمكن استعمالها. وإذا أعطيت فقط قيمة $\sin\theta$، فإن $\cos 2\theta = 1 - 2\sin^2\theta$ هي أفضل متطابقة يمكن استعمالها. وإذا أعطيت القيمتين $\sin\theta$، $\cos\theta$، فإن $\cos 2\theta = \cos^2\theta - \sin^2\theta$ هي الأفضل.

(30 $\sin 2\theta = \sin(\theta + \theta)$

$$= \sin\theta\cos\theta + \cos\theta\sin\theta$$
$$= 2\sin\theta\ \cos\theta$$
$$\cos 2\theta = \cos(\theta + \theta)$$
$$= \cos\theta\cos\theta - \sin\theta\sin\theta$$
$$= \cos^2\theta - \sin^2\theta$$

(31 $1 - 2\sin^2\theta = \cos 2\theta$ متطابقة جيب تمام ضعف الزاوية

$1 - 2\sin^2\frac{A}{2} = \cos A$ عوّض $\frac{A}{2}$ بدلًا من θ و A بدل 2θ.

$\sin^2\frac{A}{2} = \frac{1-\cos A}{2}$ حلّ بالنسبة لـ $\sin^2\frac{A}{2}$.

$\sin\frac{A}{2} = \pm\sqrt{\frac{1-\cos A}{2}}$ خذ الجذر التربيعي لكل طرف.

$2\cos^2\theta - 1 = \cos 2\theta$ متطابقة جيب تمام ضعف الزاوية

$2\cos^2\frac{A}{2} - 1 = \cos A$ عوّض $\frac{A}{2}$ بدلًا من θ، و A بدلاً من 2θ.

$\cos^2\frac{A}{2} = \frac{1+\cos A}{2}$ حلّ بالنسبة لـ $\cos^2\frac{A}{2}$.

$\cos\frac{A}{2} = \pm\sqrt{\frac{1+\cos A}{2}}$ خذ الجذر التربيعي لكل طرف.

(43 $\tan\theta = \sqrt{\frac{1-\cos\theta}{1+\cos\theta}}$

$$= \sqrt{\frac{1-\frac{\sqrt{3}}{2}}{1+\frac{\sqrt{3}}{2}}}$$
$$= \sqrt{\frac{2-\sqrt{3}}{2+\sqrt{3}}}$$
$$= \sqrt{\frac{(2-\sqrt{3})^2}{(2+\sqrt{3})(2-\sqrt{3})}}$$
$$= \sqrt{\frac{(2-\sqrt{3})^2}{1}}$$
$$= |2-\sqrt{3}|$$
$$= 2-\sqrt{3}$$

الدرس 5-3 ، ص (163)

(32 $\sin 2x < \sin x$

$$\sin 2x - \sin x < 0$$
$$2\sin x\cos x - \sin x < 0$$
$$\sin x\,(2\cos x - 1) < 0$$

وحتى يكون المقدار $\sin x(2\cos x - 1)$ سالبًا يجب أن يكون المقداران $2\cos x - 1$، $\sin x$ مختلفين في الإشارة ويتحقق ذلك في كل من الفترتين

$\frac{\pi}{3} < x < \pi$، $\frac{5\pi}{3} < x < 2\pi$، ولهذا فإن حل المتباينة الأصلية هو:

$\frac{5\pi}{3} < x < 2\pi, \frac{\pi}{3} < x < \pi$

(37 $\frac{-\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$ أو $-\frac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{2}$

(38 $\frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}$

(39 $\frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}$

(40 $\frac{-\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$ أو $-\frac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{2}$

(41 $\sin(270 - \theta) \stackrel{?}{=} -\cos\theta$

نبسط الطرف الأيسر

$$\sin(270 - \theta)$$
$$= \sin 270\cos\theta - \cos 270\sin\theta$$
$$= -\cos\theta - 0 \cdot \sin\theta$$
$$= -\cos\theta$$

ويساوي الطرف الأيمن

42) $\cos(90+\theta) \stackrel{?}{=} -\sin\theta$

$\cos 90\cos\theta - \sin 90\sin\theta \stackrel{?}{=} \sin\theta$

$0 \cdot \cos\theta - 1 \cdot \sin\theta \stackrel{?}{=} -\sin\theta$

$-\sin\theta = -\sin\theta$

43) $\cos(90° - \theta) \stackrel{?}{=} \sin\theta$

$\cos 90°\cos\theta + \sin 90°\sin\theta \stackrel{?}{=} \sin\theta$

$0 \cdot \cos\theta + 1 \cdot \sin\theta \stackrel{?}{=} \sin\theta$

$\sin\theta = \sin\theta \checkmark$

44) $\sin(90° - \theta) \stackrel{?}{=} \cos\theta$

$\sin 90°\cos\theta - \cos 90°\sin\theta \stackrel{?}{=} \cos\theta$

$1 \cdot \cos\theta - 0 \cdot \sin\theta \stackrel{?}{=} \cos\theta$

$\cos\theta - 0 \stackrel{?}{=} \cos\theta$

$\cos\theta = \cos\theta \checkmark$

45)

a) $\frac{v^2\sin^2\theta}{2g} \stackrel{?}{=} \frac{v^2\tan^2\theta}{2g\sec^2\theta}$

$\frac{v^2\sin^2\theta}{2g} = \frac{v^2\frac{\sin^2\theta}{\cos^2\theta}}{2g\frac{1}{\cos^2\theta}}$

$\frac{v^2\sin^2\theta}{2g} = \frac{v^2\sin^2\theta}{2g}$

b) $h = \frac{(110)^2\sin^2 80}{2(9.8)} \approx 598.73 \text{ m}$

46) المجال: $[-5, \infty)$

المدى: $[-5, \infty)$

دليل الدراسة والمراجعة، ص (166, 167)

30) $\sin(\theta + 90) \stackrel{?}{=} \cos\theta$

$\sin\theta\cos 90° + \cos\theta\sin 90° \stackrel{?}{=} \cos\theta$

$(\sin\theta)(0) + (\cos\theta)(1) \stackrel{?}{=} \cos\theta$

$\cos\theta = \cos\theta \checkmark$

31) $\sin\left(\frac{3\pi}{2} - \theta\right) \stackrel{?}{=} -\cos\theta$

$\sin\frac{3\pi}{2}\cos\theta - \cos\frac{3\pi}{2}\sin\theta \stackrel{?}{=} -\cos\theta$

$(-1)\cos\theta - (0)\sin\theta \stackrel{?}{=} -\cos\theta$

$-\cos\theta = -\cos\theta \checkmark$

32) $\tan(\theta - \pi) \stackrel{?}{=} \tan\theta$

$\frac{\tan\theta - \tan\pi}{1 + \tan\theta\tan\pi} \stackrel{?}{=} \tan\theta$

$\frac{\tan\theta - 0}{1 + (\tan\theta)(0)} \stackrel{?}{=} \tan\theta$

$\frac{\tan\theta}{1} \stackrel{?}{=} \tan\theta$

$\tan\theta = \tan\theta \checkmark$

33) $\sin 2\theta = \frac{24}{25}, \cos 2\theta = \frac{7}{25}, \sin\frac{\theta}{2} = \frac{\sqrt{10}}{10}$, and $\cos\frac{\theta}{2} = \frac{3\sqrt{10}}{10}$

34) $\sin 2\theta = \frac{\sqrt{15}}{8}, \cos 2\theta = \frac{7}{8}, \sin\frac{\theta}{2} = \frac{\sqrt{2}\sqrt{4+\sqrt{15}}}{4},$

$\cos\frac{\theta}{2} = -\frac{\sqrt{2}\sqrt{4-\sqrt{15}}}{4}$

35) $\sin 2\theta = -\frac{4\sqrt{5}}{9}, \cos 2\theta = -\frac{1}{9}, \sin\frac{\theta}{2} = \frac{\sqrt{30}}{6}$, and

$\cos\frac{\theta}{2} = \frac{\sqrt{6}}{6}$

36a) $c^2 = 90^2 + 90^2; c^2 = 8100 + 8100;$

$c^2 = 16200; c = 90\sqrt{2}$

36b) $\sin 45° = \frac{90}{90\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$

36c) $\sin\frac{\alpha}{2} = \pm\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{2}}; \sin\frac{90}{2} = \pm\sqrt{\frac{1-\cos 90}{2}};$

$\sin\frac{90}{2} = \pm\sqrt{\frac{1-0}{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$

اختبار الفصل، ص (169)

9)

$\sin\theta(\cot\theta + \tan\theta) \stackrel{?}{=} \sec\theta$

$\sin\theta\left(\frac{\cos\theta}{\sin\theta} + \frac{\sin\theta}{\cos\theta}\right) \stackrel{?}{=} \sec\theta$

$\cos\theta + \frac{\sin^2\theta}{\cos\theta} \stackrel{?}{=} \sec\theta$

$\frac{\cos^2\theta + \sin^2\theta}{\cos\theta} \stackrel{?}{=} \sec\theta$

$\frac{1}{\cos\theta} \stackrel{?}{=} \sec\theta$

$\sec\theta = \sec\theta \checkmark$

10)

$\frac{\cos^2\theta}{1-\sin\theta} \stackrel{?}{=} \frac{\cos\theta}{\sec\theta - \tan\theta}$

$\frac{\cos^2\theta}{1-\sin\theta} \stackrel{?}{=} \frac{\cos\theta}{\frac{1}{\cos\theta} - \frac{\sin\theta}{\cos\theta}}$

$\frac{\cos^2\theta}{1-\sin\theta} \stackrel{?}{=} \frac{\cos\theta}{\frac{1-\sin\theta}{\cos\theta}}$

$\frac{\cos^2}{1-\sin\theta} \stackrel{?}{=} \cos\theta \cdot \frac{\cos\theta}{1-\sin\theta}$

$\frac{\cos^2\theta}{1-\sin\theta} = \frac{\cos^2\theta}{1-\sin\theta} \checkmark$

11)

$(\tan\theta + \cot\theta)^2 \stackrel{?}{=} \csc^2\theta\sec^2\theta$

$\left(\frac{\sin\theta}{\cos\theta} + \frac{\cos\theta}{\sin\theta}\right)^2 \stackrel{?}{=} \csc^2\theta\sec^2\theta$

$\left(\frac{\sin^2\theta + \cos^2}{\cos\theta\sin\theta}\right)^2 \stackrel{?}{=} \csc^2\theta\sec^2\theta$

$\left(\frac{1}{\cos\theta\sin\theta}\right)^2 \stackrel{?}{=} \csc^2\theta\sec^2\theta$

$\frac{1}{\cos^2\theta} \cdot \frac{1}{\sin^2\theta} \stackrel{?}{=} \csc^2\theta\sec^2\theta$

$\sec^2\theta\csc^2\theta = \csc^2\theta\sec^2\theta \checkmark$

12)

$\frac{1+\sec\theta}{\sec\theta} \stackrel{?}{=} \frac{\sin^2\theta}{1-\cos\theta}$

$\frac{1}{\sec\theta} + \frac{\sec\theta}{\sec\theta} \stackrel{?}{=} \frac{\sin^2\theta}{1-\cos\theta} \cdot \frac{1+\cos\theta}{1+\cos\theta}$

$\cos\theta + 1 \stackrel{?}{=} \frac{\sin^2\theta(1+\cos\theta)}{1-\cos^2\theta}$

$\cos\theta + 1 \stackrel{?}{=} \frac{\sin^2\theta(1+\cos\theta)}{\sin^2\theta}$

$\cos\theta + 1 = 1 + \cos\theta \checkmark$