1-1 الدوال

اكتب كل مجموعة مما يأتي باستعمال الصفة المميزة للمجموعة، وباستعمال رمز الفترة إن أمكن:

1) $\{\dots, -2, -1, 0, 1, 2\}$
$\{x \mid x \leq 2, x \in \mathbb{Z}\}$

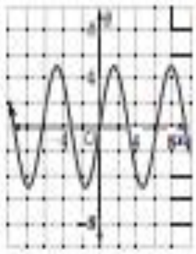
2) $-6.5 < x \leq 3$
$\{x \mid -6.5 < x \leq 3, x \in \mathbb{R}\}; (-6.5, 3]$

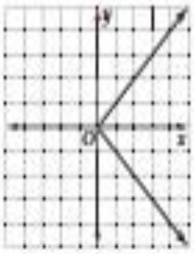
3) $x < 3$
$\{x \mid x < 3, x \in \mathbb{R}\}, (-\infty, 3)$

4) $x < 0$ أو $x > 8$
$\{x \mid x < 0$ أو $x > 8, x \in \mathbb{R}\};$
$(-\infty, 0) \cup (8, \infty)$

في كل علاقة مما يأتي، حدد ما إذا كانت y تمثل دالة في x أم لا:

5) تمثل x رقم لوحة السيارة، و y سنة صنع السيارة. دالة

6) 
دالة

7) 
ليست دالة

8) $-x + y = 3x$ دالة

9) $x = 5(y - 1)^2$ ليست دالة

أوجد قيم كل دالة من الدوال الآتية:

10) $h(x) = x^2 - 8x + 1$
a) $h(-1)$ 10
b) $h(2x)$ $4x^2 - 16x + 1$
c) $h(x + 8)$ $x^2 + 8x + 1$

11) $f(a) = -3\sqrt{a^2 + 9}$
a) $f(4)$ -15
b) $f(3a)$ $-9\sqrt{a^2 + 1}$
c) $f(a + 1)$ $-3\sqrt{a^2 + 2a + 10}$

حدّد مجال كل من الدالتين الآتيتين:

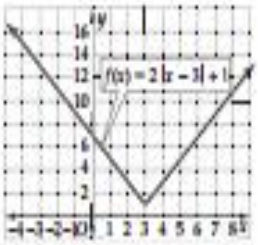
12) $g(x) = \sqrt{-3x - 2}$ $\{x \mid x \leq -\frac{2}{3}, x \in \mathbb{R}\}$

13) $h(t) = \dfrac{2t - 6}{t^2 + 6t + 9}$ $\{t \mid t \neq -3, t \in \mathbb{R}\}$

14) أوجد $f(-4)$ و $f(11)$ للدالة $f(x) = \begin{cases} 3x^2 + 16, & x < -2 \\ \sqrt{x - 2}, & -2 \leq x \leq 11 \\ -75, & x > 11 \end{cases}$ $64; 3$

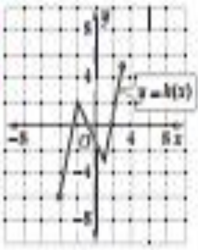
1-2 تحليل التمثيلات البيانية للدوال والعلاقات

1) استعمل التمثيل البياني المجاور لتقدير قيمة $f(-2.5), f(1), f(7)$ ، ثم تحقق من إجابتك جبريًّا. $12; 5; 9$



استعمل التمثيل البياني للدالة h في كلٍّ مما يأتي لإيجاد كل من مجال الدالة ومداها.

2)



المجال $= [-4, 3]$

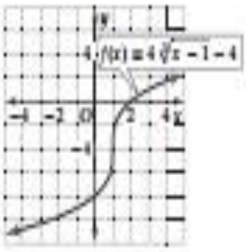
المدى $= [-6, 5]$

3)

المجال $= (-\infty, 4]$

المدى $= (-\infty, 3]$

4) استعمل التمثيل البياني المجاور لإيجاد المقطع y للدالة f وأصفارها، ثم أوجد هذه القيم جبريًّا. المقطع y : $f(0) = -8$ ؛ صفر الدالة: 2



$$4\sqrt[3]{0-1} - 4 = 4\sqrt[3]{-1} - 4 = 4(-1) - 4 = -8;$$

$$y = -8$$

$$0 = 4\sqrt[3]{x-1} - 4; 4 = 4\sqrt[3]{x-1};$$

$$1 = \sqrt[3]{x-1}, 1 = x - 1; 2 = x$$

استعمل التمثيل البياني لكل معادلة من المعادلتين الآتيتين لاختبار التماثل حول المحور x ، والمحور y ، ونقطة الأصل. وعزّز إجابتك عدديًّا، ثم تحقق منها جبريًّا:

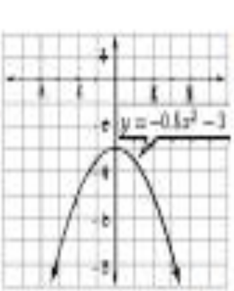
5)

متماثل حول نقطة الأصل

$$-y = \frac{-2}{-x}$$

$$y = \frac{-2}{x}$$

6)



متماثل حول المحور y

$$y = -0.5(-x)^2 - 3$$

$$y = -0.5(x)^2 - 3$$

7) استعمل الحاسبة البيانية لتمثيل الدالة $g(x) = \frac{1}{x^2}$ بيانيًّا، ثم حلّل منحناها؛ لتحدد إن كانت الدالة زوجيةً أم فرديةً أم غير ذلك. ثم تحقّق من إجابتك جبريًّا. وإذا كانت الدالة زوجيةً أو فرديةً فصِف تماثل منحناها.

زوجية، متماثلة حول المحور y .

1-3 الاتصال وسلوك طرفي التمثيل البياني والنهايات

حدد ما إذا كانت كل دالة مما يأتي متصلة أم لا عند قيمة x المعطاة، وبرِّر إجابتك باستعمال اختبار الاتصال. وإذا كانت الدالة غير متصلة، فحدِّد نوع عدم الاتصال: لانهائي ، قفزي ، قابل للإزالة.

1) $f(x) = -\frac{2}{3x^2};\ x = -1$

نعم متصلة، الدالة معرفة عند $x = -1$ ، الدالة تقترب من $-\frac{2}{3}$ عندما تقترب x من -1 من الجهتين و $f(-1) = -\frac{2}{3}$

2) $f(x) = \frac{x-2}{x+4};\ x = -4$

غير متصلة، نوع عدم الاتصال لا نهائي عند $x = -4$

3) $f(x) = x^3 - 2x + 2;\ x = 1$

نعم متصلة، الدالة معرفة عند $x = 1$ ، الدالة تقترب من 1 عندما تقترب x من 1 من الجهتين و $f(1) = 1$

4) $f(x) = \frac{x+1}{x^2+3x+2};\ x = -1,\ x = -2$

غير متصلة، للدالة نقطة عدم اتصال قابل للإزالة عند $x = -1$ ، وعدم اتصال لا نهائي عند $x = -2$

حدِّد الأعداد الصحيحة المتتالية التي تنحصر بينها الأصفار الحقيقية لكلٍّ من الدالتين الآتيتين في الفترة المعطاة:

5) $f(x) = x^3 + 5x^2 - 4;\ [-6, 2]$

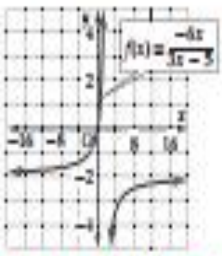
$[-5, -4], [-1, 0], [0, 1]$

6) $g(x) = x^4 + 10x - 6;\ [-3, 2]$

$[-3, -2], [0, 1]$

استعمل التمثيل البياني لكلٍّ من الدالتين الآتيتين؛ لوصف سلوك طرفي تمثيلها البياني، ثم عزِّز إجابتك عدديًّا:

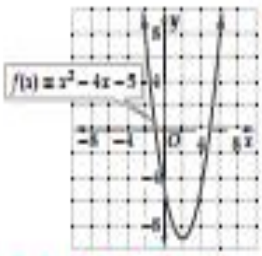
7)



$\lim_{x \to -\infty} f(x) = -2;\ \lim_{x \to \infty} f(x) = -2$

انظر أعمال الطلاب.

8)



$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \infty;\ \lim_{x \to \infty} f(x) = \infty$

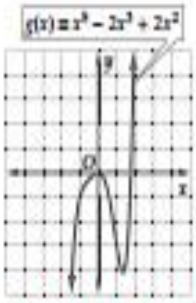
انظر أعمال الطلاب.

9) **إلكترونيات،** يوضح قانون أوم العلاقة بين المقاومة R ، وفرق الجهد E ، وشدة التيار I في دائرة كهربائية، وتُعطى هذه العلاقة بالقاعدة $R = \frac{E}{I}$. فإذا كان فرق الجهد ثابتًا، وتزايدت شدة التيار، فماذا يحدث للمقاومة؟

تتناقص المقاومة لتقترب من الصفر.

استعمل التمثيل البياني لكل من الدالتين الآتيتين ؛ لتقدير الفترات التي تكون فيها الدالة متزايدة، أو متناقصة، أو ثابتة مقرَّبة إلى أقرب 0.5 وحدة، ثم عزِّز إجابتك عدديًا:

1)

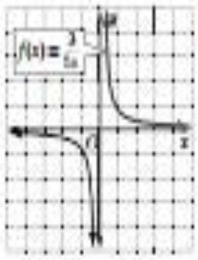


متزايدة في $(-\infty, 0)$ ، متناقصة في $(0, 1.5)$

متزايدة في $(1.5, \infty)$

انظر أعمال الطلاب.

2)



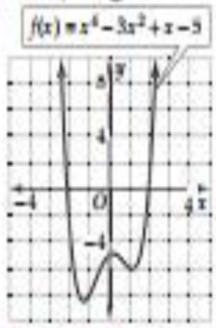
متناقصة في الفترتين $(-\infty, 0)$ ،

$(0, \infty)$

انظر أعمال الطلاب.

قدِّر قيم x التي يكون لكل من الدالتين الآتيتين عندها قيم قصوى مقرَّبة إلى أقرب 0.5 وحدة، وأوجد قيم الدالة عندها، وبيِّن نوع القيم القصوى، ثم عزِّز إجابتك عدديًا.

3)



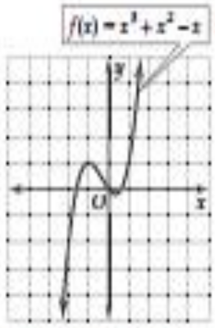
صغرى مطلقة قيمتها -8.5 عند $x = -1.5$

عظمى محلية قيمتها -5 عند $x = 0$

صغرى محلية قيمتها -6 عند $x = 1$

انظر أعمال الطلاب.

4)



عظمى محلية قيمتها 1 عند $x = -1$

صغرى محلية قيمتها -0.13 عند $x = 0.5$

انظر أعمال الطلاب.

5) **الحاسبة البيانية :** أوجد القيم القصوى المحلية والمطلقة مقرَّبة إلى أقرب جزء من مئة للدالة: $h(x) = x^3 - 6x + 1$. وحدِّد قيم x التي تكون عندها هذه القيم.

قيمة عظمى محلية تقدَّر بـ 6.02 عند $x = -1.05$ ، وقيمة صغرى تقدر بـ -4.02 عند $x = 1.05$

أوجد متوسط معدَّل التغير لكلٍّ من الدالتين الآتيتين في الفترة المعطاة:

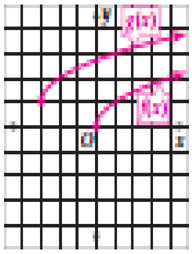
6) $g(x) = x^4 + 2x^2 - 5; [-4, -2]$ **-132**

7) $g(x) = -3x^3 - 4x; [2, 6]$ **-160**

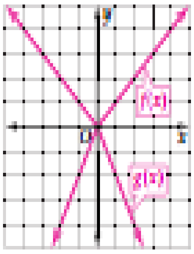
8) **فيزياء :** إذا كان ارتفاع صاروخ $h(t)$ بالقدم بعد t ثانية من إطلاقه رأسيًا يُعطى بالقاعدة $h(t) = -16t^2 + 32t + 0.5$ ، فأوجد أقصى ارتفاع يصل إليه الصاروخ. **16.5 ft**

1-5 الدوال الرئيسة (الأم) والتحويلات الهندسية

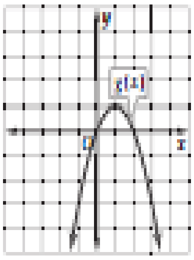
1) استعمل منحنى الدالة الرئيسة (الأم) $f(x) = \sqrt{x}$ لتمثيل منحنى الدالة $g(x) = \sqrt{x+3} + 1$ بيانيًّا .



2) استعمل منحنى الدالة الرئيسة (الأم) $f(x) = |x|$ لتمثيل منحنى الدالة $g(x) = -|2x|$ بيانيًّا.



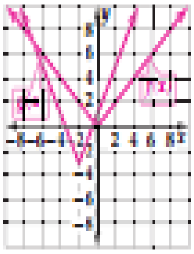
3) صف العلاقة بين منحنى الدالة $f(x) = x^2$ ومنحنى $g(x)$ في التمثيل المجاور، ثم اكتب معادلة $g(x)$.



منحنى الدالة $g(x)$ هو انعكاس لمنحنى $f(x)$ حول المحور x، ثم انسحاب وحدة إلى اليمين ووحدة إلى الأعلى.

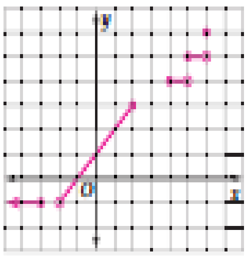
$g(x) = -(x-1)^2 + 1$

4) عيِّن الدالة الرئيسة (الأم) $f(x)$ للدالة $g(x) = 2|x+2| - 3$. ثم صف العلاقة بين المنحنيين، ومثِّلهما بيانيًّا في المستوى الإحداثي.

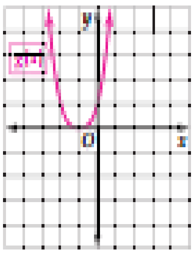


منحنى الدالة $g(x)$ هو توسع رأسي لمنحنى $f(x) = |x|$ ثم انسحاب وحدتين إلى اليسار، و 3 وحدات إلى الأسفل.

5) مثِّل الدالة بيانيًّا $f(x) = \begin{cases} -1, & x \le -3 \\ 1 + x, & -2 < x \le 2 \\ [x], & 4 \le x \le 6 \end{cases}$



6) استعمل منحنى الدالة $f(x) = x^3$ لتمثيل منحنى الدالة $g(x) = \left|(x+1)^3\right|$



1-6 العمليات على الدوال وتركيب دالتين

أوجد $(f+g)(x), (f-g)(x), (f \cdot g)(x), \left(\frac{f}{g}\right)(x)$ للدالتين $f(x), g(x)$ في كلٍّ مما يأتي، وحدِّد مجال كلٍّ من الدوال الناتجة:

1) $f(x) = 2x^2 + 8, g(x) = 5x - 6$

$2x^2 + 5x + 2, (-\infty, \infty) =$ المجال

$2x^2 - 5x + 14, (-\infty, \infty) =$ المجال

$10x^3 - 12x^2 + 40x - 48,$

$(-\infty, \infty) =$ المجال

$\frac{2x^2+8}{5x-6}, \left\{x \mid x \neq \frac{6}{5}, x \in R\right\} =$ المجال

2) $f(x) = x^3, g(x) = \sqrt{x+1}$

$x^3 + \sqrt{x+1}, [-1, \infty) =$ المجال

$x^3 - \sqrt{x+1}, [-1, \infty) =$ المجال

$x^3\sqrt{x+1}, [-1, \infty) =$ المجال

$\frac{x^3}{\sqrt{x+1}}, (-1, \infty) =$ المجال

أوجد $[f \circ g](x), [g \circ f](x), [f \circ g](3)$ لكل زوج من الدوال الآتية:

3) $f(x) = x + 5, g(x) = x - 3$

$x + 2; x + 2; 5$

4) $f(x) = 2x^3 - 3x^2 + 1, g(x) = 3x$

$54x^3 - 27x^2 + 1; 6x^3 - 9x^2 + 3; 1216$

5) $f(x) = 2x^2 - 5x + 1, g(x) = 2x - 3$

$8x^2 - 34x + 34; 4x^2 - 10x - 1; 4$

6) $f(x) = 3x^2 - 2x + 5, g(x) = 2x - 1$

$12x^2 - 16x + 10; 6x^2 - 4x + 9; 70$

حدِّد مجال $f \circ g$، ثم أوجد $f \circ g$ لكل زوج من الدوال في السؤالين الآتيين:

7) $f(x) = \sqrt{x-2}$

$g(x) = 3x$

$\left\{x \mid x \geq \frac{2}{3}, x \in R\right\}; f \circ g = \sqrt{3x-2}$

8) $f(x) = \frac{1}{x-8}$

$g(x) = x^2 + 5$

$\left\{x \mid x \neq \pm\sqrt{3}, x \in R\right\}; f \circ g = \frac{1}{x^2-3}$

أوجد دالتين f و g في كلٍّ من السؤالين 9, 10، بحيث يكون $h(x) = [f \circ g](x)$. على ألا تكون أيٌّ منهما الدالة المحايدة $I(x) = x$

9) $h(x) = \sqrt{2x-6} - 1$

إجابة ممكنة:

$f(x) = \sqrt{x} - 1, g(x) = 2x - 6$

10) $h(x) = \frac{1}{3x+3}$

إجابة ممكنة:

$f(x) = \frac{1}{3x}, g(x) = x + 1$

11) **مطعم:** دخل ثلاثة أشخاص مطعمًا، وطلب كلٌّ منهم الوجبة نفسها. إذا تقاضى صاحب المطعم 18% من تكلفة الوجبة بدل خدمة، فاكتب الدوال الثلاث على النحو الآتي: الأولى تمثّل تكلفة الوجبات الثلاث قبل استيفاء بدل الخدمة، والثانية تكلفة الوجبة بعد استيفاء الخدمة، وأما الثالثة فتمثّل تركيب الدالتين الذي يعطي تكلفة الوجبات الثلاث متضمنة بدل الخدمة.

$f(x) = 3x$، حيث x تكلفة الوجبة الواحدة، $g(x) = 1.18x$ ، $g(f(x)) = 3.54x$

1-7 العلاقات والدوال العكسية

مثّل كلًّا من الدوال الآتية بيانيًّا باستعمال الحاسبة البيانية، ثم طبِّق اختبار الخط الأفقي لتحديد إن كانت الدالة العكسية موجودة أم لا.

1) $f(x) = 3|x| + 2$ لا

2) $f(x) = -\sqrt{x+3} - 1$ نعم

3) $f(x) = x^5 + 5x^3$ نعم

4) $f(x) = \frac{x}{5} + 9$ نعم

في كلٍّ مما يأتي أوجد الدالة العكسية f^{-1} إن أمكن، وحدِّد مجالها والقيود عليه، وإذا لم يكن ذلك ممكنًا، فاكتب: غير موجودة.

5) $f(x) = \sqrt[3]{x-1}$ $\quad f^{-1}(x) = x^3 + 1$

6) $f(x) = \frac{2x-1}{x+7}$ $\quad f^{-1}(x) = \frac{7x+1}{2-x};\ x \neq 2$

7) $f(x) = \frac{4}{(x-3)^2}$ غير موجودة

8) $f(x) = \sqrt{x-2}$ $\quad f^{-1}(x) = x^2 + 2;\ x \geq 0$

أثبت جبريًّا أن كلًّا من الدالتين f, g دالة عكسية للأخرى في كلٍّ من السؤالين الآتيين:

9) $f(x) = 2x + 3;\ g(x) = \frac{x-3}{2}$

$$f[g(x)] = 2\left(\frac{x-3}{2}\right) + 3 = x$$

$$g[f(x)] = \frac{2x+3-3}{2} = x$$

10) $f(x) = \frac{x^2}{2} - 6;\ x \geq 0;\ g(x) = \sqrt{2x+12}$

$$f[g(x)] = \frac{\left(\sqrt{2x+12}\right)^2}{2} - 6 = x$$

$$g[f(x)] = \sqrt{2\left(\frac{x^2}{2} - 6\right) + 12} = x$$

11) استعمل التمثيل البياني للدالة $f(x)$ في الشكل أدناه لتمثيل $f^{-1}(x)$:

12) **مكافحة الحرائق:** تستعمل الطائرات الماء في إطفاء حرائق الغابات. ويعطى الزمن الذي يستغرقه الماء للوصول إلى الأرض بالثواني بالدالة $t(h) = \frac{\sqrt{h}}{4}$، حيث h ارتفاع الطائرة بالقدم. أوجد الدالة العكسية لها. وإذا استغرق الماء 8 ثوانٍ للوصول إلى الأرض، فأوجد ارتفاع الطائرة. $f^{-1}(x) = 16x^2$; 1024 ft