برنامج دعم الطلاب والطالبات على اختبار القدرات العامة

خرائط ومفاهيم

إعداد الفريق العلمي

الاشكال الهندسية

المثلث
مساحة المثلث = ½ ق × ع

محيط المثلث = مجموع الأضلاع

الدائرة
مساحة الدائرة = ط نق²

محيط الدائرة = ٢ ط نق

متوازي الأضلاع
المساحة = ل × ع

المحيط = مجموع الأضلاع

المعين
المساحة = حاصل ضرب قطرية

المحيط = مجموع الأضلاع

المستطيل
المساحة = ط × ع

المحيط = ٢ (ط + ع)

المربع
المساحة = ل²

المحيط = ٤ل

شبه المنحرف
المساحة =نصف مجموع القاعدتين × الارتفاع

المحيط = مجموع الأضلاع

المنشور
المساحة الجانبية = محيط القاعدة × ع

المساحة الكلية = المساحة الجانبية + مساحة القاعتين

الحجم = مساحة القاعدة × ع

الهرم
المساحة الجانبية = ½ محيط القاعدة ×الإرتفاع الجانبي

المساحة الكلية = المساحة الجانبية + مساحة القاعدة

الحجم = ⅓ مساحة القاعدة × ع

الاسطوانة
المساحة الجانبية = ٢ ط نق × ع

المساحة الكلية= ط نق²×ع+٢ ط نق²

الحجم = ط نق² × ع

المخروط
المساحة الجانبية = ط نق ل

المساحة الكلية = المساحة الجانبية + مساحة القاعدة

الحجم = ⅓ ط نق² × ع

الكرة
المساحة السطحية = ٤ ط نق²

الحجم = ⁴⁄₃ ط نق³

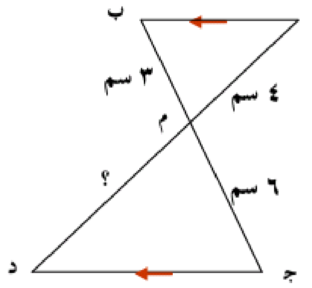
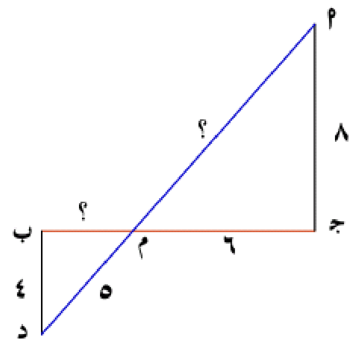
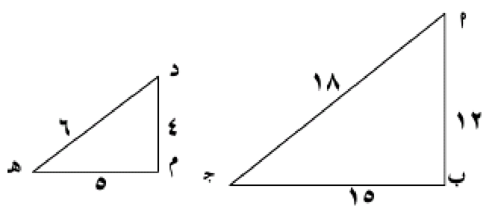
ط= ٣،١٤ = ²²⁄₇ = π

تشابه المثلثات

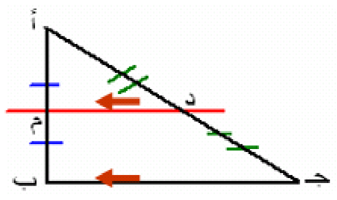
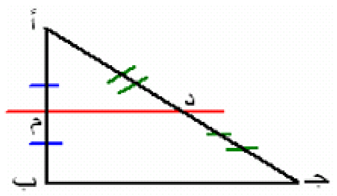
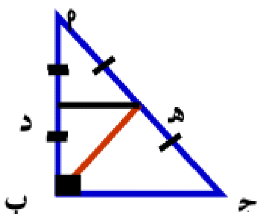
تعريف التشابه ونسبته

تعريف تشابه مثلثين	يكون المثلثان متشابهين إذا كانت أضلاعهما متناسبة وزواياهما المواجهة للأضلاع المتناسبة متطابقة.
نسبة التشابه	هي النسبة بين طولي ضلعين مقابلين لزاويتين متطابقتين.

حالات تشابه المثلثات

الحالة الأولى	يتشابه مثلثان إذا تطابقت زاويتان من أحدهما مع زاويتين من الآخر 
الحالة الثانية	يتشابه مثلثان إذا تساوت زاوية من أحدهما مع زاوية من الآخر وتناسب ضلعا أحد هاتين الزاويتين مع ضلعي الزاوية الأخرى 
الحالة الثالثة	يتشابه مثلثان إذا تناسبت أضلاعهما 

خواص المستقيمات في المثلث

المستقيم الموازي لضلع مثلث ، والمار في منتصف ضلع ثانٍ ،يمر في منتصف الضلع الثالث.	
المستقيم المار في منتصفي ضلعي مثلث يوازي الضلع الثالث.	
طول القطعة المحدودة بمنتصفي ضلعي مثلث يساوي نصف طول الضلع الثالث. أي أن : |دم| = ½ × |جب|	
في المثلث القائم الزاوية طول المتوسط على الوتر يساوي نصف طول الوتر. أي أن : |هب| = ½ × |أج|	

المتطابقات الأساسية

تعريف المتطابقة : هي مساواة بين عبارتين رياضيتين متكافئتين إذا لم تكن متكافئتين تسمى معادلة

مربع مجموع حدين : (أ + ب)^{٢} = أ^{٢} + ٢ أ ب + ب^{٢}

(مربع الحد الأول) + (٢ × الأول × الثاني) + (مربع الحد الثاني)

مربع الفرق بين حدين : (أ − ب)^{٢} = أ^{٢} − ٢ أ ب + ب^{٢}

(مربع الحد الأول) − (٢ × الأول × الثاني) + (مربع الحد الثاني)

ضرب مجموع حدين في الفرق بينهما: (أ + ب) (أ − ب) = أ^{٢} − ب^{٢}

مجموع حدين × الفرق بينهما = (مربع الحد الأول) − (مربع الحد الثاني)

مكعب مجموع حدين : (أ + ب)^{٣} = أ^{٣} + ٣ أ^{٢} ب + ٣ أ ب^{٢} + ب^{٣}

(مكعب الأول) + (٣ × مربع الأول × الثاني) +(٣ × مربع الثاني × الأول) +(مكعب الثاني)

مكعب الفرق بين حدين : (أ − ب)^{٣} = أ^{٣} − ٣ أ^{٢} ب + ٣ أ ب^{٢} − ب^{٣}

(مكعب الأول) − (٣ × مربع الأول × الثاني) +(٣ × مربع الثاني × الأول) − (مكعب الثاني)

المتطابقات

التحليل إلى عوامل

طرق التحليل

التحليل بإيجاد العامل المشترك الأكبر

١) نوجد العامل المشترك الأكبر

٢) نضع العامل المشترك الأكبر خارج القوس

٣) نقسم كل حد من حدود المقدار على العامل المشترك الأكبر ونكتب خوارج القسمة داخل القوس

مثال/ ٢س^{٢} + ٨س = ٢س (س + ٤)

تحليل المربع الكامل

تحليل المربع الكامل:يكون المقدار الثلاثي مربعاً كاملاً إذا كان :

– الحد الأول مربعاً.

– الحد الثالث مربعاً.

– الحد الأوسط على الصورة : ٢ × جذر الأول × جذر الثاني

– إذا كان المقدار الثلاثي مربعاً ، فإن تحليله يكون على الصورة: ($\sqrt{\text{الأول}}$ ± $\sqrt{\text{الثاني}}$)^{٢}

ملاحظة مهمة : (أ + ب)^{٢} = أ^{٢} + ٢ أ ب + ب^{٢} ، (أ − ب)^{٢} = أ^{٢} − ٢ أ ب + ب^{٢}

كلا المتطابقتين تُسمى (مربعاً كاملاً)

مثال / س^{٢} + ٦س + ٩= (س + ٣)^{٢}

التحليل بتمييز المتطابقة

تحليل الفرق بين مربعين

تحليل الفرق بين مربعين :

(أ + ب) (أ − ب) = أ^{٢} − ب^{٢}

الفرق بين مربعي حدين = مجموع الحدين × الفرق بينهما

مثال / ٣ س^{٢} − ٢٧ = ٣ (س^{٢} − ٩) = ٣ (س + ٣) (س − ٣)

التحليل بالتجميع المناسب

التحليل بالتجميع المناسب : نستخدم التحليل بالتجميع المناسب إذا كانت كثيرة الحدود :

– لها أكثر من ثلاث حدود.

– ليس لحدودها عامل مشترك .

– كما أنها لا تمثّل مربعاً كاملاً أو فرقاً بين مربعين.

فنضطر إلى تحليلها بطريقة التجميع المناسب بهدف إيجاد عامل مشترك أو إظهار المتطابقات الأساسية بعد تجميع حدودها.

مثال / أ^{٢} − ٤س^{٢} + ب^{٢} + ٢أب = أ^{٢} + ٢أب +ب^{٢} − ٤س^{٢}

= (أ + ب)^{٢} − ٤س^{٢} = (أ+ب − ٢س)(أ+ب+٢س)

تحليل ثلاثي الحدود بالطريقة العامة (أ × ج إلى عاملين مجموعهما ب)

تحليل ثلاثي الحدود : أس^{٢} + ب س + ج بالطريقة العامة :

– نبحث عن عددين حاصل ضربهما يساوي حاصل ضرب أ × ج و مجموعهما يساوي الحد الأوسط ب .

– نكتب كثيرة الحدود مع تجزئ الحد الأوسط إلى الحدين اللذين تم إيجادهما.

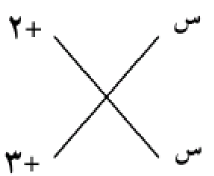
– نحلل بطريقة التجميع المناسب .

تحليل ثلاثي الحدود بطريقة المقص (الأسهم) :

– نحلل الحد الأول إلى عاملين بحيث يكون حاصل ضربهما الحد الأول .

– نحلل الحد الثالث إلى عاملين بحيث يكون حاصل ضربهما الحد الثالث .

– لا بد أن يكون مجموع حاصل ضرب الطرفين والوسطين = الحد الأوسط في المقدار الثلاثي .



مثال / س^{٢} + ٥س + ٦ = (س + ٢) (س + ٣)

تبسيط العبارات الكسرية

العبارات الكسرية: هي عبارات رياضية تحتوي على متغيّر في المقام . مثال : $\frac{٥}{ص}$

تبسيط العبارة الكسرية : إن تبسيط عبارة كسرية هو جعلها بأبسط صورة وذلك عن طريق تحليلها إلى عواملها الأولية

الجذور التربيعية

تعريف

إذا كان أ عدداً موجباً ، فإن $\sqrt{\text{أ}} = \text{ب}$ أي أن $\text{ب}^2 = \text{أ}$

إذا كان العدد النسبي الموجب مربعاً فإن له جذرين تربيعيين أحدهما معكوس جمعي للآخر.

$\sqrt{9} = 3$

$\sqrt{25} = 5$

إنطاق المقام

تعريف إنطاق المقام :

هو جعل المقام خالي من الجذر التربيعي.

$\sqrt{100} = 10$

أنواع الجذور :

جذور ناطقة : هي الجذور المربعة الموجبة مثل $\sqrt{9}$، $\sqrt{4}$ ، $\sqrt{16}$

جذور صمّاء :هي الجذور الموجبة غير المربعة مثل $\sqrt{2}$، $\sqrt{3}$ ، $\sqrt{7}$

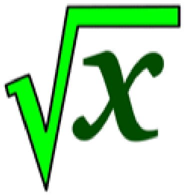
طريقة إنطاق المقام

$\sqrt{16} = 4$

١) مقام الكسر يتألف من حد واحد بجذر تربيعي (نقوم بضرب البسط والمقام في الجذر الموجود في المقام)

٢) مقام الكسر يتألف من حدين احدهما على الأقل فيه جذر تربيعي (نقوم بضرب البسط والمقام بمرافق المقام)

ملاحظة / مرافق المقدار ٤ $\sqrt{7} - \sqrt{3}$ هو ٤ $\sqrt{7} + \sqrt{3}$



خصائص الجذور

١) $\sqrt{\text{أ}^2} = |\text{أ}|$

٢) $\sqrt{\text{أ}} \times \sqrt{\text{ب}} = \sqrt{\text{أ} \times \text{ب}}$

٣) $\sqrt{\text{أ}} \times \sqrt{\text{ب}} \times \sqrt{\text{ج}} = \sqrt{\text{أ} \times \text{ب} \times \text{ج}}$

٤) $(\sqrt{\text{أ}} + \sqrt{\text{ب}})(\sqrt{\text{أ}} - \sqrt{\text{ب}}) = \text{أ} - \text{ب}$

٥) $\sqrt{\frac{\text{أ}}{\text{ب}}} = \frac{\sqrt{\text{أ}}}{\sqrt{\text{ب}}}$

٦) $(\sqrt{\text{أ}^{م}})^{ن} = (\sqrt{\text{أ}^{ن}})^{م} = (\sqrt{\text{أ}})^{ن \times م}$

العدد النسبي المربع

$\sqrt{81} = 9$

$\sqrt{49} = 7$

١)يكون العدد النسبي المبسّط مربعاً، إذا كانت قوى عوامله الأولية زوجيه فقط ، وعندها يكون جذره التربيعي عدداً نسبياً

٢) عند حساب الجذر التربيعي للعدد المربع نحلله إلى عوامله الأولية ثم نستخرج العوامل من تحت الجذر بنصف الأس ثم نضرب هذه العوامل في بعضها لنصل على الجذر التربيعي .

تبسيط الجذور : ١) لإدخال عامل تحت الجذر نضرب اسه في ٢ ولاخراجه من الجذر نقسم على ٢

٢) الاس الفردي يقسم الى عددين احدهما اسه الواحد

الجذور المتشابهة

تعريف

تكون الجذور التربيعية متشابهة إذا بقيت العوامل نفسها داخل إشارات الجذور التربيعية كثيراً ما تكون الجذور التربيعية متشابهة ، ولا نفطن إلى تشابهها إلا بعد تحليلها إلى عوامل

جمع الجذور المتشابهة

لجمع الجذور التربيعية نبسطها أولاً ، ثم نجمع عوامل الجذور المتشابهة بعد تبسيطها

مجموعة الاعداد الحقيقية

مجموعة الأعداد النسبية

ن = { $\frac{\text{ب}}{\text{أ}}$ ، حيث ب، أ ∋ ص، أ ≠ ٠ }

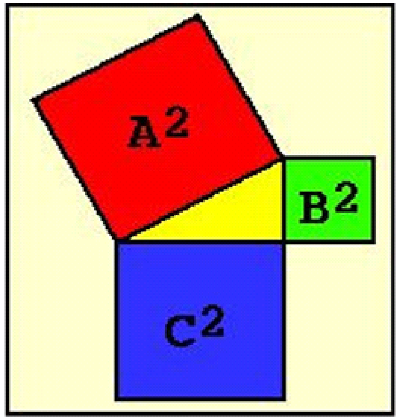
∴ ط ⊂ ك ⊂ ص ⊂ ن

تنقسم الأعداد النسبية إلى أعداد عشرية أعداد دورية

تُسمى مجموعة الأعداد غير العشرية وغير الدورية مجموعة الأعداد غير النسبية

مثل: $\sqrt{2}$ ، $\sqrt{3}$ ، $\sqrt{5}$ ، $\sqrt{6}$

فيثاغورس

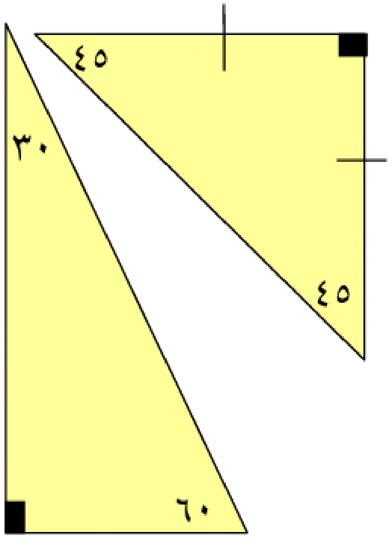


نص نظرية فيثاغورس / في المثلث القائم الزاوية مربع طول الوتر يساوي مجموع مربعي طولي الضلعين الآخرين أي أن :

إذا كان المثلث ا ب ج قائم الزاوية في ب فان $|\text{اج}|^{2} = |\text{اب}|^{2} + |\text{ب ج}|^{2}$

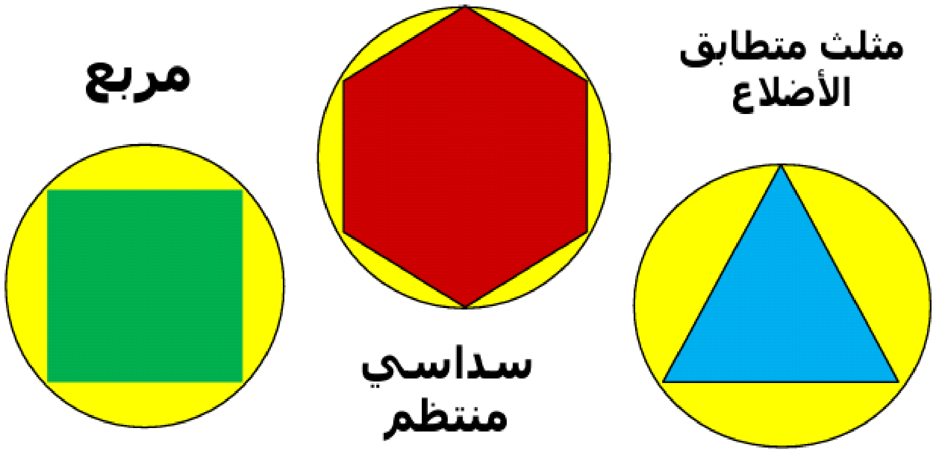
عكس نظرية فيثاغورس/ إذا كان مربع طول ضلع في مثلث يساوي مجموع مربعي طولي الضلعين الآخرين فان المثلث قائم الزاوية (مثل / المثلث ٣,٤,٥ والمثلث ٦,٨,١٠ وغيرها)

فيثاغورس هو فيلسوف ورياضي إغريقي (يوناني) عاش في القرن السادس قبل الميلاد، وتنسب إليه نظرية فيثاغورس.



المثلث القائم الزاوية والمتطابق الضلعين زواياه (٤٥,٤٥,٩٠)	**طول الوتر = طول ضلع الزاوية القائمة × $\sqrt{٢}$** **طول ضلع الزاوية القائمة = طول الوتر ÷ $\sqrt{٢}$**
المثلث الثلاثيني الستيني زوايا (٩٠,٦٠,٣٠)	**طول الضلع المواجه للزاوية ٣٠° = نصف طول الوتر**
	طول الضلع المواجه للزاوية ٦٠° = نصف طول الوتر × $\sqrt{٣}$

مثلث متطابق الأضلاع داخل دائرة	**طول ضلعه = نق × $\sqrt{٣}$**
سداسي منتظم داخل دائرة	**طول ضلعه = نصف قطر الدائرة = نق**
مربع داخل الدائرة	**طول ضلعه = نق × $\sqrt{٢}$**



معادلة الدرجة الثانية في مجهول واحد
$أ س^{٢} + ب س + جـ = ٠$

الصورة العامة لمعادلة الدرجة الثانية في مجهول واحد هي :

$أ س^{٢} + ب س + جـ = ٠$

حيث : $أ \neq$ صفر

س : المجهول

أ ، ب ، جـ $\in$ ح

ملاحظة :

إذا كانت : أ ، ب $\in$ ح، وكان أ × ب = ٠ فإن أ = ٠ أو ب = ٠

المعادلة مكونة من حدين

كلا الحدين فيهما س
جـ = ٠

الحل بطريقة إكمال المربع

$س^{٢} - ٨س = ٠$

نضيف للطرفين مربع نصف معامل س أي

$س^{٢} - ٨س + (\frac{٨}{٢})^{٢} = ٠ + (\frac{٨}{٢})^{٢}$

$س^{٢} - ٨ س + ١٦ = ١٦$

$(س - ٤)^{٢} = ١٦$

بأخذ جذر الطرفين

$س - ٤ = \pm ٤$

$س = \pm ٤ + ٤$

إما $س = + ٤ + ٤$

$\therefore س = ٨$

أو $س = - ٤ + ٤$

$\therefore س = ٠$

$\therefore ح = \{ ٠ ، ٨ \}$

احد الحدين خالي من س
ب = ٠

الحل بالطريقة العادية

الإشارة بين الحدين

–

$س^{٢} - ١٦ = ٠$

$س^{٢} = ١٦$

بأخذ جذر الطرفين

$س = \mp ٤$

$\therefore ح = \{ ٤ ، -٤ \}$

+

$س^{٢} + ١٦ = ٠$

مستحيلة الحل

أو

$ح = \emptyset$

المعادلة مكونة من ثلاث حدود

ثلاثي الحدود الذي لا يمكن حله بطريقة المقص نقوم بنقل الحد الخالي من س (جـ) إلى الطرف الثاني ونكمل الحل بطريقة إكمال المربع

الحل بطريقة المقص

$س^{٢} + ٥ س + ٦ = ٠$

(س   +٣)

(س   +٢)

$(س + ٣) (س + ٢) = ٠$

إما $س + ٣ = ٠$

$س = - ٣$

أو $س + ٢ = ٠$

$س = - ٢$

$\therefore ح = \{ -٢ ، -٣ \}$

ملاحظة: ١) المعادلة المكونة من ٣ حدود يمكن حلها بإكمال المربع وذلك بنقل الحد الثابت إلى الطرف الأخر

٢) المعادلة المكونة من حدين كلاهما يحتوي س يمكن أن تحل بإيجاد العامل المشترك بشرط أن يكون الطرف الأخر صفر