المملكة العربية السعودية

بسم الله الرحمن الرحيم

وزارة التعليم
Ministry of Education

وزارة التعليم
الإدارة العامة للتعليم بمنطقة مكة المكرمة
الرقم (٢٨٠)
الشئون التعليمية
إدارة نشاط الطالبات

الحقيبة التدريبية للأولمبياد الوطني للرياضيات للمرحلة الثانوية

تقديم المشرفة التربوية بإدارة نشاط الطالبات

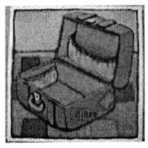
مها بكر فلاته

مديرة إدارة نشاط الطالبات

لمياء عبد العزيز بشاوري

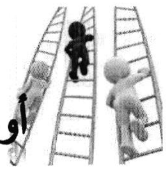
إ. البنيان

مقدمة



حقيبـــة:

إن حقائبنا التي نحملها لا نستطيع أن نضمنها كل أغراضنا ولكن نضع فيها عادة ما نتوقع أن نحتاجه في مشوارنا، وكذلك حقيبتنا هذه فإننا لا نستطيع أن نحمل في طياتها كل أمتعتنا العلمية ولكن جعلنا فيها قدراً كافياً لفهم الفيزياء والتعامل مع مسائله الحياتية.



أولمبيـــاد:

أولمبياد هي كلمة مشتقة من مدينة أوليمبيا اليونانية وهي أول مدينة تحتضن المسابقات على مر التاريخ والتي بدأت عام ٧٧٦ قبل الميلاد...

الرياضيات:

تعرف الرياضيات بأنها دراسة القياس والحساب والهندسة. هذا بالإضافة إلى المفاهيم الحديثة نسبياً ومنها البنية، الفضاء أو الفراغ، والتغير والأبعاد. وبشكل عام قد يعرفها البعض على أنها دراسة البنى المجردة باستخدام المنطق والبراهين الرياضية والتدوين الرياضي. وبشكل أكثر عمومية، قد تعرف الرياضيات أيضاً على أنها دراسة الأعداد وأنماطها.

أسئلة مادة الجبر

س١ : حلي المعادلة التالية $4^{x} + 4^{x+1} = 160$

الحل : $4^{x} + 4^{x+1} = 4^{x}(1+4) = 4^{x}(5) = 160$

$$4^{x} = 32 \Rightarrow 2^{2x} = 2^{5} \Rightarrow 2x = 5 \Rightarrow x = 2.5$$

س٢ : إذا كان $a + b = 1$ و $c = (a^{2} - a + 1)(b^{2} - b + 1)$ فأثبتي أن $c = (ab - 1)^{2}$

الحل : باستخدام الشرط $a + b = 1$ نجد أن $a^{2} - a + 1 = a(a-1) + 1 = a(-b) + 1 = -ab + 1$

$$b^{2} - b + 1 = b(b-1) + 1 = b(-a) + 1 = -ba + 1$$

إذا : $c = (-ab + 1)(-ba + 1) = (1 - ab)^{2} = (ab - 1)^{2}$

س٣ : حلي المعادلة $(x-3)^{2} + (x+1)^{2} + (4x-5)^{2} = 0$

الحل : بملاحظة أن المقادير الثلاثة كلها موجبة ومجموعها يساوي 0 وهذا يعني أن كلاً منهما يساوي الصفر :

$$(x-3)^{2} = (x+1)^{2} = (4x-5)^{2} = 0$$

$$x = 3 \qquad x = -1 \qquad x = \frac{5}{4}$$

وبالتالي المعادلة ليس لها حل لأن x لها قيم مختلفة في آن واحد

س٤ : إذا كان لكثيرة الحدود $f(x) = x^{3} - 3x^{2} - 2x + 6$ جذر نسبي فأوجدي جميع جذورها .

الحل : ليكن p/q هو الجذر النسبي في أبسط حالاته . إذا $q > 0$ ، وعليه فإن p يقسم 6 و $q = 1$

إذا القيم الممكنة هي $p = \pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 6$ وبالتجريب نجد أن $x = 3$ ، إذا $x - 3$ من عوامل $f(x)$

وبالقسمة نجد أن $f(x) = (x-3)(x^{2} - 2) \Rightarrow f(x) = (x-3)(x - \sqrt{2})(x + \sqrt{2})$

وستكون جذور كثيرة الحدود هي $3 , \pm\sqrt{2}$

س٥ : عند قسمة الحدودية $f(x)$ على $(2x-4)$ يكون الباقي 7 وعند قسمتها على $(3x-7)$ يكون الباقي 11 ، أوجدي باقي قسمة $f(x)$ على $(2x-4)(3x-7)$.

الحل : بما أن المقسوم عليه $(2x-4)(3x-7)$ من الدرجة الثانية فإن الباقي من الدرجة الأولى أو عدد ثابت إذا . $f(x) = (3x-7)(2x-4)h(x) + ax + b \quad (*)$ من المعطى لدينا

$$f(x) = (2x-4)\,q(x) + 7 \quad , \quad f(x) = (3x-7)(t(x)) + 11$$

وبالتالي : $f(2) = (4-4)q(2) + 7 = 7 \quad , \quad f(7/3) = (7-7)t(7/3) + 11 = 11$

إذا $f(2) = 7 \quad , \quad f(7/3) = 11$ ، وبالتعويض في $(*)$ نستنتج أن

$2a + b = 7 \quad (1) \quad , \quad \frac{7a}{b+3} = 11 \quad (2)$ ، وبحل هذا النظام $(1), (2)$ نجد أن

$b = -17 \quad , \quad a = 12$ ، إذا الباقي يساوي $12x - 17$.

س٦ : أكملي $123456789 \times 999999999 = \dots\dots\dots\dots\dots\dots$

الحل : $123456789 \times 999999999 = 123456789 \times (1000000000 - 1)$

$$= 123456789000000000 - 123456789 = 123456788876543211$$

س٧ : أوجدي قيمة : $\frac{1}{3} + \frac{1}{15} + \frac{1}{35} + \frac{1}{63} + \frac{1}{99} + \frac{1}{143}$

الحل : نستخدم الجمع التلسكوبي $\frac{1}{k(k+r)} = \frac{1}{r}\left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+r}\right)$ وهي صحيحة لجميع قيم k الصحيحة

فعليه : $\frac{1}{k(k+2)} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+2}\right)$

$$\frac{1}{3} + \frac{1}{15} + \frac{1}{35} + \frac{1}{63} + \frac{1}{99} + \frac{1}{143}$$

$$= \frac{1}{1\times3} + \frac{1}{3\times5} + \frac{1}{5\times7} + \frac{1}{7\times9} + \frac{1}{9\times11} + \frac{1}{11\times13}$$

$$= \frac{1}{2}\left[\left(\frac{1}{1} - \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{5}\right) + \dots\dots\dots + \left(\frac{1}{11} - \frac{1}{13}\right)\right]$$

$$= \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{13}\right) = \frac{6}{13}$$

س٨ : إذا علمت أن المعادلة $a(2x+3)+3bx=12x+5$ لها عدد لانهائي من الحلول ، فاوجدي قيمة a , b

الحل : بتحويل المعادلة للصورة $(2a+3b-12)x=5-3a$

فيكون لدينا $2a+3b-12=0$ و $5-3a=0$ وبالتالي $a=\frac{5}{3}\quad,\quad b=\frac{12-2a}{3}=\frac{26}{9}$

أسئلة مادة التركيبات

س١ : في مكتب هندسي 10 من الموظفين منهم 4 مهندسون والبقية فني خرائط وتصميم ويراد تكوين لجنة متابعة مشاريع من 4 أفراد .

أ / بكم طريقة يمكن تكوين اللجنة وتعيين رئيساً لها ومساعدا له ؟

ب / بكم طريقة يمكن تكوين اللجنة شريطة أن تتضمن مهندساً على الأقل ؟

الحل : (أ) تكوين اللجنة فقط ليس سوى اختيار 4 أشخاص من بين 10 ، إذا عدد الطرق

$$\binom{10}{4} = 210 \quad \text{أو} \quad \binom{10}{6}$$

عدد طرق اختيار رئيساً و نائباً يساوي عدد التباديل الثنائية $p(4,2)$ ، إذا عدد الطرق المطلوب هو

$$P(4,2)\times\binom{10}{4}=\frac{4!}{2!}\times 210 = 2520$$

(ب) المطلوب هنا نستطيع حله بعدة طرق ومنها : نلاحظ أن العدد المطلوب هو عدد الطرق جميعها لاختيار اللجنة $\binom{10}{4}$ مطروحا منه عدد طرق اختيارها من بين موظفي الخرائط والتصميم وهو $\binom{6}{4}$ إذا يساوي

$$\binom{10}{4}-\binom{6}{4}=\binom{10}{4}-\binom{6}{2}=210-15=195$$

س٢ : مضلع عشاري منتظم $A_1A_2A_3A_4A_5A_6A_7A_8A_9A_{10}$ أوجدي عدد الزوايا المنفرجة والحاده $\angle A_iA_jA_k$ فيه .

الحل : العدد المكمل للمطلوب هو عدد الزوايا القائمة . سنعد هذة الزوايا ثم نطرحه من العدد الكلي للزوايا فنحصل بذلك على المطلوب . كل ثلث نقاط $A_i\,A_j\,A_k$ مختلفة تحدد ثلاث زوايا مختلفة ، وبما أن هناك $\binom{10}{3}$ طريقة لاختيار 3 نقاط من بين 10 نقاط . إذا عدد الزوايا الكلي يساوي

$$3 \times \binom{10}{3} = 3 \times \frac{10 \times 9 \times 8}{3 \times 2 \times 1} = 360$$

سنحدد عدد الزوايا القائمة منها . ولنبدأ بإيجاد عدد الزوايا القائمة عند رأس معين وليكن A_1 . بما أن العشاري منتظم فإنه يوجد دائرة C تمر برؤوسه . إذا عدد الزوايا القائمة عند A_1 وهو بالضبط عدد الأقطار $A_i\,A_j$ في الدائرة والتي لا تمر في A_1 وعددها 4 . إذا هناك $40 = 10 \,.\, 4$ زاوية قائمة . إذا عدد الزوايا المطلوب

$$360 - 40 = 320$$

س٣ : 51 حشرة صغيرة غير طائرة تتحرك داخل مربع طول ضلعه 1 متر . أثبتي أنه في أي لحظة يوجد على الأقل 3 منها يمكن تغطيتها بقرص نصف قطره $\frac{1}{7}$ متر .

الحل : لنقسم المربع إلى 25 مربعاً صغيراً طول ضلع الواحد $\frac{1}{5}$ من مبدأ ديرشليه نضمن وجود 3 حشرات في أحد المربعات الصغيرة وحيث أن قطر المربع الصغير يساوي $\frac{\sqrt{2}}{5}$ فإذا اعتمدنا الدائرة التي تمر في رؤوس المربع نحصل على قرص نصف قطره يساوي $\frac{\sqrt{2}}{10}$ والذي يكون أقل من $\frac{1}{7}$ ، كما هو مطلوب .

س٤ : إذا كان لدينا سبعة أعداد صحيحة فأثبت وجود عددين على الأقل الفرق بينهما يقبل القسمة على 6 .

الحل : عند قسمة أي عدد صحيح على العدد 6 فإن الباقي يمكن أن يكون 5 , 4 , 3 , 2 , 1 , 0 لما كان عدد الأعداد المعطاه هو 7 أي أكثر من عدد البواقي ، فإنه لابد من وجود عددين a , b لهما نفس الباقي بعد القسمة على 6 أي أن : $b = 6q_2 + r$, $a = 6q_1 + r$ إذا $a - b = 6(q_1 - q_2)$ وهكذا العدد يقبل القسمة على 6 .

س٥ : 3 خيول تتسابق في ميدان . كم عدد النتائج الممكنة لهذا السباق علماً بأن التعادل وارد ؟

الحل : هناك 3 حالات

الحالة الأولى : الخيول الثلاثة متعادلة ، أي أنها وصلت إلى خط النهاية في نفس الوقت . فعدد الامكانات 1 .

الحالة الثانية : أن يصل حصانان في نفس الوقت إلى خط النهاية والثالث في وقت مختلف .فعدد امكانات اختيار الحصان الثالث هي 3 وهو إما أن يكون فائزاً أو في المرتبة الثانية . إذن ، عدد إمكانات هذه المرحلة $6 = 3 \times 2$

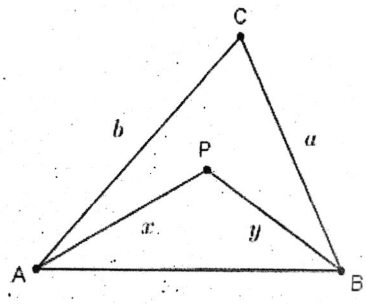
الحالة الثالثة : أن تصل الخيول الثلاثة إلى خط النهاية في أوقات مختلفة ، فعدد الامكانات في هذه الحالة

$1 \times 2 \times 3 = 6$ ، إذن العدد الكلي للإمكانات هو $13 = 6 + 6 + 1$

س٦ : احسبي عدد الحلول الصحيحة غير السالبة للمعادلة : $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 60$.

الحل : لنفكر في الحلول بأنها توزيع 60 كرة على 4 أماكن متجاورة تفصل بينهما 3 جدران قابلة للتحريك . عدد الأشياء التي لدينا هي $63 = 3 + 60$ أي تحريك لمواقع الجدران يعطينا حلاً للمعادلة . إذا يوجد تقابل بين عدد مواقع الجدران و عدد الحلول . لذا فإن عدد الحلول هو $\binom{10}{3}$.

أسئلة مادة الهندسة



س١ : لتكن P نقطة داخل مثلث ABC بحيث $PA = x$ و $PB = y$

أثبتي أن $a + b > x + y$.

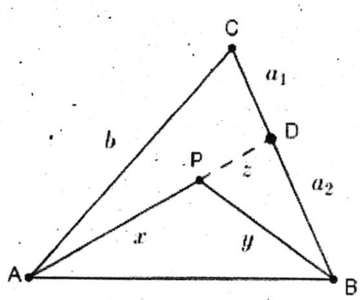
الحل : نمد AP ليقطع الضلع المقابل في D مقسماً طوله a إلى a_1 , a_2

كما هو مبين في الشكل المقابل . وبتطبيق متباينة المثلث على المثلثين

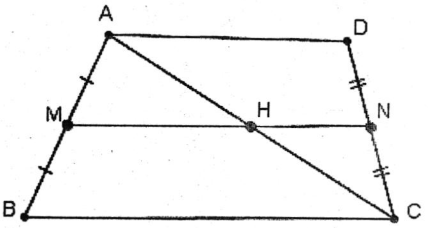
ACD و PDB نجد تواليا أن $b + a_1 > x + z$

$a_2 + z > y$

بالجمع وحذف z ينتج أن $a + b > x + y$ وهو المطلوب



س٢ : ليكن ABCD شبه منحرف قاعدتيه AD , BC و M , N منتصفي الساقين AB , CD

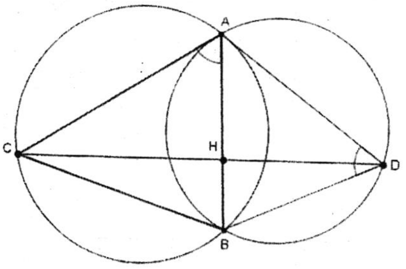


أثبتي أن $MN = \frac{AD + BC}{2}$

الحل : بما أن $\frac{AM}{MB} + \frac{DN}{NC} = 1$ فإن $MN \parallel BC$

إذا في المثلث ABC المستقيم يوازي BC وبنصف AB ، ومن نظرية طالس نجد أن MH ينصف AC و

$MH = \frac{BC}{2}$. بالمثل $HN = \frac{AD}{2}$ وبالجمع نحصل على $MN = \frac{AD + BC}{2}$



س٣ : دائرتان متقاطعتان في نقطتين A , B . من A مماس لأحدهما يقطع الث لى في D . الوتر AB يقطع CD في H أثبتي أن $\frac{AC^2}{AD^2} = \frac{HC}{HD}$

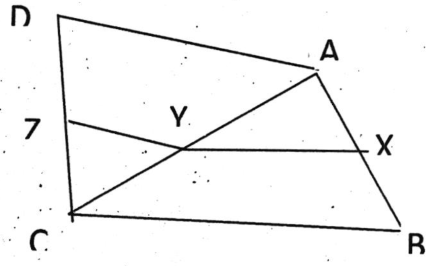
الحل : من خاصية التناسب بين مساحات المثلثات نجد أن

$\frac{CH}{DH} = \frac{[BCH]}{[BDH]}$ و $\frac{CH}{DH} = \frac{[ACH]}{[ADH]}$ وبالتالي

$\frac{CH}{DH} = \frac{[BCH] + [AHC]}{[BDH] + [ADH]}$ ومنه $\frac{CH}{DH} = \frac{[ACB]}{[ADB]}$ وهذه نسبة المساحة بين المثلثين ACB و DBA ،

لاحظي أن المثلثين متشابهين حيث ∠ CAB = ∠ ADB و ∠ BAD = ∠ ACB وذلك لأن الزاوية المحيطية تساوي الزاوية المماسية المشتركة معها في القوس . إذا مربع نسبة التشابه تساوي نسبة المساحتين ، أي أن

$\frac{HC}{HD} = \frac{AC^2}{AD^2}$ وهو المطلوب إثباته .



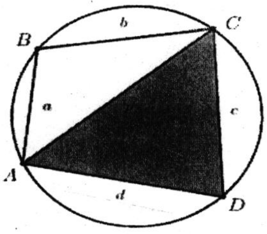
س٤ : في الشكل المقابل X منتصف AB ، XY // BC ، Z منتصف CD

أثبتي أن YZ // AD :

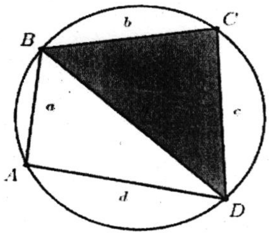
في Δ ABC: بما ان X منتصف AB ، XY // BC ، إذن Y منتصف AC .

في Δ ACD: بما ان Y منتصف AC ، Z منتصف CD ، إذن YZ // AD .

<u>س٥ :</u> ليكن ABCD رباعي دائري فيه $AB = a$, $BC = b$, $CD = c$, $DA = d$ و قطريه $AC = p$ و $BD = q$. أثبتي أن $\dfrac{p}{q} = \dfrac{ad + bc}{ab + od}$.



شكل 1



شكل 2

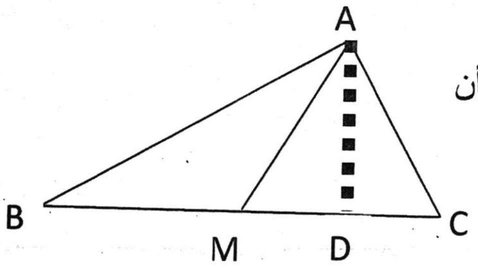
الحل : سنستخدم قانون مساحة المثلث بدلالة أضلاعه و نصف القطر R للدائرة المحوطة . لنفترض أن مساحة الرباعي Q . وفق شكل 1 لدينا

$$Q = [\,ABC\,] + [\,CDA\,] = \frac{abp}{4R} + \frac{pcd}{4R} = q\ \frac{ab + cd}{4R}$$

و وفق شكل 2 .

$$Q = [\,BCD\,] + [\,DAB\,] = \frac{bcq}{4R} + \frac{qda}{4R} = q\ \frac{bc + da}{4R}$$

إذاً $p\ \dfrac{ab + cd}{4} = q\ \dfrac{bc + da}{4R}$ وبالقسمة ينتج أن $\dfrac{p}{q} = \dfrac{ad + bc}{ab + od}$



<u>س٦ :</u> في ΔABC ، AM متوسط من الرأس A على الضلع BC أثبتي أن

$$AB^2 + AC^2 = 2\,(AM^2 + BM^2)$$

الحل : نرسم $AD \perp BC$ وبتطبيق نظرية فيثاغورس على ΔABD , ΔAMD

$$AB^2 = BD^2 + AD^2$$

$$= (BM + MD)^2 + AM^2 - MD^2$$

$$= BM^2 + 2\,BM\,.\,MD + MD^2 + AM^2 - MD^2$$

$$= BM^2 + AM^2 + 2\,BM\,.\,MD + MD^2 - MD^2$$

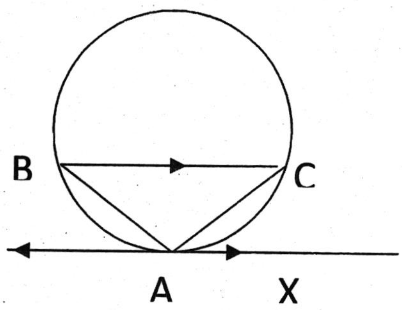
$$AB^2 = BM^2 + AM^2 + 2\,BM\,.\,MD \qquad (*)$$

بالمثل يمكننا الوصول إلى العلاقة :

$$AC^2 = CM^2 + AM^2 - 2\,CM\,.\,MD \qquad (*)$$

بالجمع مع العلم أن $BM = CM$ نحصل على : $AB^2 + AC^2 = 2\,(AM^2 + BM^2)$

س٧ : إذا كان AX مماس لدائرة عند A ، الوتر BC // AX ، $m(\angle B)$ أوجدي $m(\angle BAC)$



الحل : بما ان BC // AX

إذن $AB = AC$, $m(AB) = m(AC)$

في المثلث ΔABC : بما أن $AB = AC$

إذا $m(\angle C) = m(\angle B) = 35°$

$m(\angle BAC) = 180° - (35° + 35°) = 110°$

س٨ : مضلعان متشابهان أطول أضلاع أحدهما 3,5,6,8,10 وحدة طول ، والاخر محيطة 48 وحدة طول ، أوجدي أطوال أضلاع المضلع الثاني ؟

الحل : نفرض أن ABCDE رؤوس المضلع الأول ، و A'B'C'D'E' رؤوس المضلع الثاني ، بما أن النسبة بين محيطي مضلعين متشابهين تساوي نسبة التشابه ، بالتالي :

ومنها : $A'B' = 4.5$, $B'C' = 7.5$, $C'D' = 9$, $D'A' = 12$

أسئلة مادة نظرية الأعداد

س١ : أثبت أن : 5^k يمكن كتابتها كحاصل جمع خمسة أعداد متتالية .

الحل : لكتابة العدد : 5^k كحاصل جمع خمسة أعداد متتالية يجب كتابته على الصورة :

$$(n-2)+(n-1)+(n)+(n+1)+(n+2) = 5n$$

إذاً نريد قيمة : n بحيث : $5n = 5^k$ وبوضع $n = 5^{k-1}$ سنجد أن :

$$(5^{k-1}-2)+(5^{k-1}-1)+5^{k-1}+(5^{k-1}+1)+(5^{k-1}+2)$$

$$= 5^{k-1}+5^{k-1}+5^{k-1}+5^{k-1}+5^{k-1} = 5\times 5^{k-1} = 5^k$$

وبالتالي أمكن كتابة : 5^k على صورة خمسة أعداد متتالية .

س٢ : أوجدي كل الأعداد الصحيحة الموجبة : n والتي تحقق أن $(n^6 + 206)\,/\,(n^2 + 2)$

الحل : بملاحظة أن $n^6 + 206 = (n2 + 2 - 2)3 + 206$

$= (n^2+2)^3 - 6(n^2+2)^2 + 12(n^2+2) + 198$

بما أن : $(n^2+2)\,/\,(n^6+206)$ إذاً $(n^2+2)\,/\,198$ ، وبتجربة قواسم 198 نجد أن

$n^2 + 2 \in \{1, 2, 3, 6, 9, 11, 18, 22, 33, 66, 99, 198\}$ ومنه نجد أن :

$n \in \{1, 2, 3, 4, 8, 14\}$

س٣ : أوجدي كل الأعداد الصحيحة : a , b والتي تحقق : $a^4 + 4b^4$ عدد أولي

الحل : بتحليل المقدار على الصورة $a^4 + 4b^4 = (a^2)^2 + (2b^2)^2$

$= (a2)^2 + (2b^2)^2 + 2 \times 2a^2b^2 - 2 \times 2a^2b^2$

$= (a^2 + 2b^2)^2 - (2ab)^2$

$= (a^2 + 2b^2 + 2ab)\,(a^2 + 2b^2 - 2ab)$

المقدار أمكن تحليله ، وبالتالي لن يكون أولياً إلا إذا كان $a = b = 1$

س٤ : أوجدي جميع الأعداد الصحيحة : k التي تجعل : $k^2 + k + 1$ مربعاً كاملاً

الحل : بإكمال المربع للمقدار سنجد أن : $(k+1)^2 > k^2 + k + 1 = (k+1)^2 - k > k^2$

إذاً واضح عند : $k > 0$ لاتوجد قيم تحقق أن المقدار مربع كامل . بينما عند : $k = 0$ المقدار مربع كامل ويساوي

الواحد . كذلك عند : $k < -1$ سنجد أن : $k^2 < k^2 + k + 1 < (k+1)^2$. بينما عند : $k = 1$

المقدار يحقق كونه مربعاً كاملاً . إذاً : المقدار مربع كامل عند $k = 0 , 1$

س٥ : أثبت أن : $2222^{5555}+5555^{2222}$ يقبل القسمة على : 7 .

الحل :

نستخدم الإضافة والحذف بحيث نحصل على عددين يمكن تحليلهما ، ومجموعهما يقبل القسمة على : 7 ، وهذه نحصل عليها بالتجربة ، والمحاولة . الآن :

$$2222^{5555}+5555^{2222}=\left(2222^{5555}-3^{5555}\right)+\left(5555^{2222}-4^{2222}\right)+\left(3^{5555}+4^{2222}\right)$$

بتحليل كل قوس :

$$\begin{aligned}\left(2222^{5555}-3^{5555}\right)&=\left(2222-3\right)\left(2222^{5554}+\cdots+3^{5554}\right)\\&=7\cdot 317\cdot\left(2222^{5554}+\cdots+3^{5554}\right)\end{aligned}$$

بالمثل القوس الثاني :

$$\begin{aligned}\left(5555^{2222}-4^{2222}\right)&=\left(5555-4\right)\left(5555^{2221}+\cdots+4^{2221}\right)\\&=7\cdot 793\cdot\left(5555^{2221}+\cdots+4^{2221}\right)\end{aligned}$$

أيضاً القوس الثالث :

$$\begin{aligned}\left(3^{5555}+4^{2222}\right)&=\left(\left(3^{5}\right)^{1111}+\left(4^{2}\right)^{1111}\right)\\&=\left(243^{1111}+16^{1111}\right)=\left(243+16\right)\left(243^{1110}-\cdots+16^{1110}\right)\\&=7\cdot 37\left(243^{1110}-\cdots+16^{1110}\right)\end{aligned}$$

لاحظ أن : 7 عامل من عوامل كل مقدار ، وبالتالي يمكن أخذه كعامل مشترك ، وبالتالي : 7 تقسم المقدار : $2222^{5555}+5555^{2222}$.

س٦ : أثبت لكل عدد صحيح موجب : n ، فإن : $n^2 \mid (n+1)^n-1$.

الحل :

باستخدام مفكوك ذات الحدين :

$$\begin{aligned}(n+1)^n-1&=\left(n^n+\binom{n}{1}n^{n-1}+\binom{n}{2}n^{n-2}+\cdots+\binom{n}{n-2}n^2+\binom{n}{n-1}n^1+1\right)-1\\&=n^n+\binom{n}{1}n^{n-1}+\binom{n}{2}n^{n-2}+\cdots+\binom{n}{n-2}n^2+n^2\\&=n^2\left(n^{n-1}+\binom{n}{1}n^{n-2}+\binom{n}{2}n^{n-3}+\cdots+\binom{n}{n-2}+1\right)\end{aligned}$$

واضح أن : n^2 عامل من عوامل المقدار ، وبالتالي : $(n+1)^n-1$ يقبل القسمة على : n^2 .

س٧ : أوجدي أصغر خمسة أعداد موجبة من مضاعفات 8 وتكون مربعاً كاملاً ؟

الحل : بما أن $2^3 = 8$ ، أي أنه أي عدد من مضاعفات العدد 8 يجب أن يكون له على الأقل العدد 2 مرفوعاً للقوى 3 عند تحليله إلى عوامله الأولية ، وبما أن قوى أي عدد مربع كامل يجب أن تكون زوجيه . بالتالي أقل قوى ممكنة للعدد 2 في العوامل الأولية كامل ومن مضاعفات 8 هي $16 = 2^4$. المربع الكامل لأي عدد صحيح من مضاعفات 16 نستطيع كتابته على الصورة : $16n^2 = (2^2 \times n)^2$ لأي عدد صحيح موجب n .

وبالتالي أصغر خمسة أعداد هي :

$$16 \times 1^2 = 16$$

$$16 \times 2^2 = 64$$

$$16 \times 3^2 = 144$$

$$16 \times 4^2 = 256$$

$$16 \times 5^2 = 400$$

انتهت الأسئلة

كتب ومواقع يمكن الاستفادة منها

١. كتاب مبادئ أساسية لأولمبياد الرياضيات أ/ سلطان البركاتي
٢. كتاب مسائل تحضيرية لأولمبياد الرياضيات د/ عبدالله الجوعي
٣. كتاب رياضيات الأولمبياد (الهندسة) د/ دورين أندريكا أ/ طارق سلامة
٤. كتاب رياضيات الأولمبياد (نظرية الأعداد) د/ معروف سمحان د/ دورين أندريكا د/ فوزي الذكير
٥. كتاب رياضيات الأولمبياد (الجبر) د/ معروف سمحان د/ دورين أندريكا د/ فوزي الذكير
٦. موقع رياضيات جدة
٧. موقع يزيد التعليمي
٨. موقع موهبة للأولمبياد .