



كلوك

مفحة مدرسية تعليمية

حل كتاب التمارين رياضيات

الصف الثالث الثانوى

الفصل الأول



الفصل الثاني
العلاقات والدوال الأسية
واللوغاريتمية

الفصل الرابع
القطوع المخروطية والمعادلات
الوسيطية

الفصل الأول
تحليل الدوال

الفصل الثالث
المتطابقات والمعادلات المثلثية



الفصل الأول تحليل الدوال

١-١ الدوال.

٢-١ تحليل التمثيلات البيانية للدوال والعلاقات.

٣-١ الاتصال وسلوك طرفي التمثيل البياني والنهايات.

٤-١ القيم القصوى ومتوسط معدل التغيير.

٥-١ الدوال الرئيسية (الأم) والتحويلات الهندسية.

٦-١ العمليات على الدوال وتركيب دالتين.

٧-١ العلاقات والدوال العكسية.



١-١ الدوال

اكتب كل مجموعة مما يأتي باستعمال الصفة المميزة للمجموعة، وباستعمال رمز الفترة إن أمكن:

$$-6.5 < x \leq 3 \quad (2)$$

$$\{\dots, -2, -1, 0, 1, 2\} \quad (1)$$

$$\{x / -6.5 < x \leq 3, x \in \mathbb{R}\} \quad (-6.5, 3]$$

$$\{x : x \in \mathbb{Z}, x \leq 2\}$$

$$x > 8 \text{ أو } x < 0 \quad (4)$$

$$x < 3 \quad (3)$$

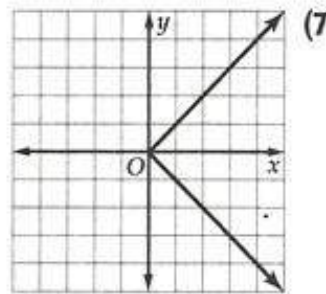
$$\{x / x > 8, x < 0, x \in \mathbb{R}\} \quad (-\infty, 0) \cup (8, \infty)$$

$$\{x / x < 3, x \in \mathbb{R}\} \quad (-\infty, 3)$$

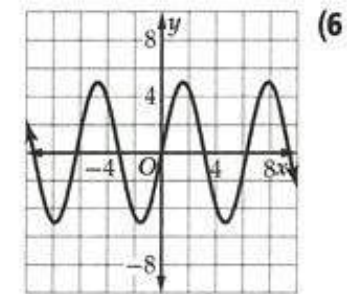
في كل علاقة مما يأتي، حدد ما إذا كانت y تمثل دالة في x أم لا:

(5) تمثل x رقم لوحة السيارة و y سنة صنع السيارة ونوعها. **دالة**

**ليست
دالة**



دالة



ليست دالة

$$x = 5(y - 1)^2 \quad (9)$$

دالة

$$-x + y = 3x \quad (8)$$



أوجد قيم كل دالة من الدوال الآتية:

$$f(a) = -3\sqrt{a^2 + 9} \quad (11)$$

$$-15 \quad f(4) \quad (a)$$

$$-9\sqrt{a^2 + 1} \quad f(3a) \quad (b)$$

$$-3\sqrt{a^2 + 2a + 10} \quad f(a + 1) \quad (c)$$

$$h(x) = x^2 - 8x + 1 \quad (10)$$

$$10 \quad h(-1) \quad (a)$$

$$-12x^2 + 1 \quad h(2x) \quad (b)$$

$$x^2 + 8x + 1 \quad h(x + 8) \quad (c)$$

حدّد مجال كل من الدالتين الآتيتين:

$$\mathbf{R - \{3\}} \quad h(t) = \frac{2t - 6}{t^2 + 6t + 9} \quad (13)$$

$$\mathbf{X \leq -2/3} \quad g(x) = \sqrt{-3x - 2} \quad (12)$$

$$\mathbf{f(-4)=64}$$

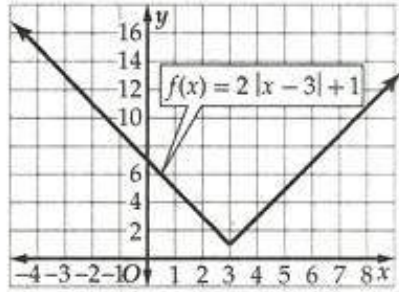
$$\mathbf{f(11)=3}$$

$$f(x) = \begin{cases} 3x^2 + 16, & x < -2 \\ \sqrt{x-2}, & -2 < x \leq 11 \\ -75, & x > 11 \end{cases} \quad (14) \quad \text{أوجد } f(11) \text{ و } f(-4) \text{ للدالة}$$



٢-١ تحليل التمثيلات البيانية للدوال والعلاقات

ممنوعة مدارس تعليمية



١) استعمل التمثيل البياني المجاور لتقدير قيمة $f(-2.5)$, $f(1)$, $f(7)$ ، ثم تحقق من إجابتك جبرياً، وقرب الناتج إلى أقرب جزء من مئة إذا لزم ذلك.

جبرياً: $f(7) = 2|7-3|+1$
 $=8+1=9$

من الرسم: $f(7) = 9$

$f(1)=5$

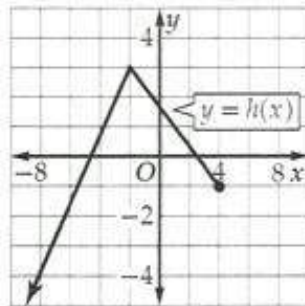
$f(1)=2|1-3|+1=4+1=5$

$f(-2.5)=12$

$f(-2.5)=2|-2.5+3|+1=12$

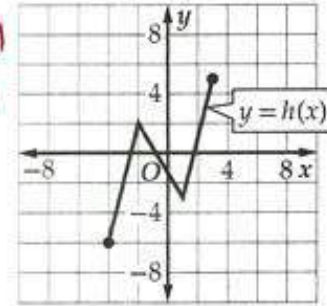
استعمل التمثيل البياني للدالة h في كل مما يأتي لإيجاد كل من مجال الدالة ومدائها.

المجال: $x \leq 4$
المدى: $y \leq 3$

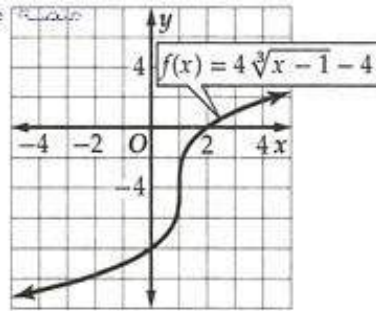


(3)

المجال: $-4 \leq x \leq 3$
المدى: $-6 \leq y \leq 5$



(2)



(4) استعمل التمثيل البياني المجاور لإيجاد المقطع y للدالة f وأصفارها، ثم أوجد هذه القيم جبرياً.

جبرياً المقطع y : $x = -8$

$$4 \cdot 3 \sqrt{-1} - 4 = -8$$

أصفار الدالة : $y = 0$

$$4 \cdot 3 \sqrt{x-1} - 4 = 0$$

$$3 \sqrt{x-1} = 1$$

$$x - 1 = 1 \quad x = 2$$

من الرسم المقطع y : $y = -8$

أصفار الدالة : $x = 2$

استعمل التمثيل البياني لكل معادلة من المعادلتين الآتيتين لاختبار التماثل حول المحور x ، والمحور y ، ونقطة الأصل. وعزز إجابتك عددياً، ثم تحقق منها جبرياً:

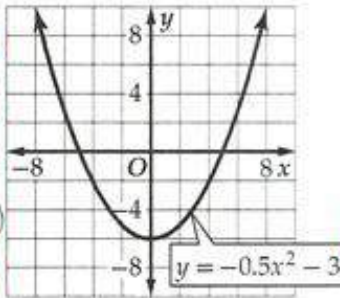
التماثل حول المحور y

$$f(x) = -0.5x^2 - 3$$

$$f(-x) = -0.5(-x)^2 - 3$$

$$-0.5x^2 - 3 = f(x)$$

الدالة زوجية

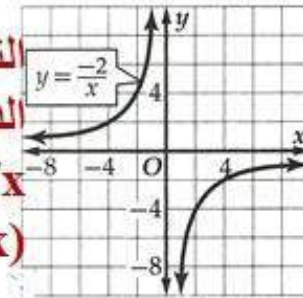


(6) **التماثل حول نقطة الأصل**

الدالة فردية

$$f(x) = -2/x$$

$$f(-x) = -2/-x = 2/x = -f(x)$$



(5)



٣-١ الاتصال وسلوك طرفي التمثيل البياني والنهيات

مركز تعليمية تعليمية

حدد ما إذا كانت كل دالة مما يأتي متصلة أم لا عند قيمة x المعطاة، وبرر إجابتك باستعمال اختبار الاتصال. وإذا كانت الدالة غير متصلة، فحدد نوع عدم الاتصال: لانهاضي، قفزي، قابل للإزالة.

$$f(x) = \frac{x-2}{x+4}; x = -4 \quad (2)$$

غير متصلة عند $x = -4$

$$f(x) = -\frac{2}{3x^2}; x = -1 \quad (1)$$

متصلة عندما $x = -1$

$$f(x) = \frac{x+1}{x^2+3x+2}; x = -1, x = -2 \quad (4)$$

غير متصلة عدم الاتصال لانهاضي عند $x = -2$

عدم الاتصال نقطي قابل للإزالة عند $x = -1$

$$f(x) = x^3 - 2x + 2; x = 1 \quad (3)$$

متصلة عند $x = -1$

حدّد الأعداد الصحيحة المتتالية التي تنحصر بينها الأصفار الحقيقية لكلّ من الدالتين الآتيتين في الفترة المعطاة:

$$g(x) = x^4 + 10x - 6; [-3, 2] \quad (6)$$

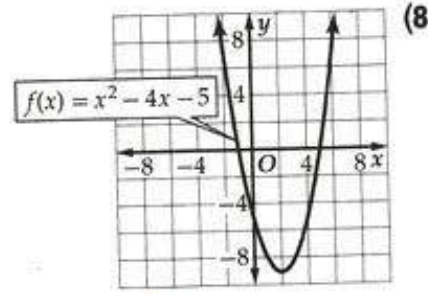
$[-3, -2], [0, 1]$

$$f(x) = x^3 + 5x^2 - 4; [-6, 2] \quad (5)$$

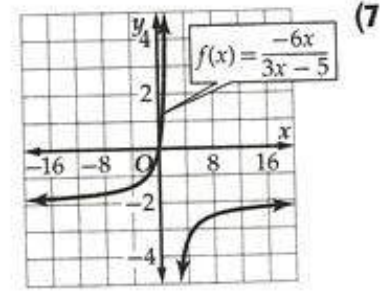
$[-5, -4], [-1, 0], [0, 1]$



استعمل التمثيل البياني لكل من الدالتين الآتيتين؛ لوصف سلوك طرفي تمثيلها البياني، ثم عزز إجابتك عددياً:



تقترب الدالة من ∞ عندما
تقترب x من $-\infty$



تقترب الدالة من العدد -2 عندما
تقترب x من ∞

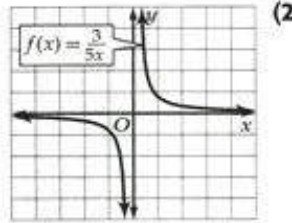
(9) إلكترونيات: يوضح قانون أوم العلاقة بين المقاومة R ، وفرق الجهد E ، وشدة التيار I في دائرة كهربائية، وتُعطى هذه العلاقة بالقاعدة $R = \frac{E}{I}$. فإذا كان فرق الجهد ثابتاً، وتزايدت شدة التيار، فماذا يحدث للمقاومة؟

$R = E/I = 5$ فولت / I
المقاومة تتناقص وتقترب من الصفر

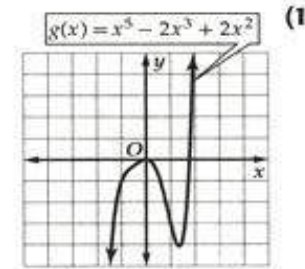


١- القيم القصوى ومتوسط معدل التغير

استعمل التمثيل البياني لكل من الدالتين الآتيتين ؛ لتقدير الفترات التي تكون فيها الدالة متزايدة، أو متناقصة، أو ثابتة مقربة إلى أقرب 0.5 وحدة، ثم عزز إجابتك عدديًا:



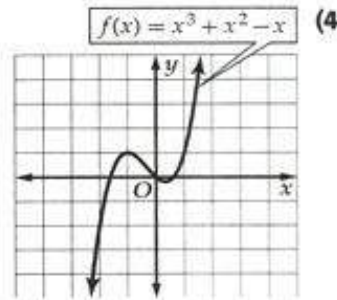
الدالة متناقصة لكل قيم $x \in \mathbb{R} - \{0\}$
أو $x \in (-\infty, 0) \cup (0, \infty)$



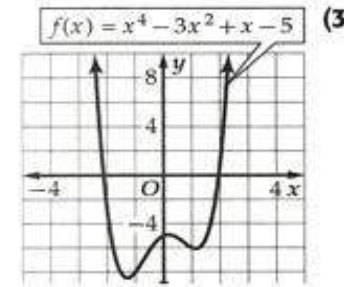
الدالة متزايدة $x \in (-\infty, 0) \cup (1.5, \infty)$
عند

متناقصة عند $x \in (0, 1.5)$

قدّر قيم x التي يكون لكل من الدالتين الآتيتين عندها قيم قصوى مقربة إلى أقرب 0.5 وحدة، وأوجد قيم الدالة عندها، وبيّن نوع القيم القصوى، ثم عزز إجابتك عدديًا.



ع. م. عندما $x = -1, y = 1$
ص. م. عندما $x = 0.5, y = 0$



ص. م. عندما $x = 1.5, y = -6$
ص. م. عندما $x = -1.5, y = -8$
ع. م. عندما $x = 0, y = -5$



حلولة

(5) الحاسبة البيانية : اوجد القيم القصوى المحلية والمطلقة مقربة إلى أقرب جزء من مئة للدالة: $h(x) = x^5 - 6x + 1$ وحدد قيم x التي تكون عندها هذه القيم.

ع.م. عندما $x = -1.05, y = 6.02$

ص.م. عندما $x = 1.05, y = -4.02$

أوجد متوسط معدّل التغير لكلّ من الدالتين الآتيتين في الفترة المعطاة:

(6) $g(x) = x^4 + 2x^2 - 5; [-4, -2]$ **-132** (7) $g(x) = -3x^3 - 4x; [2, 6]$ **-160**

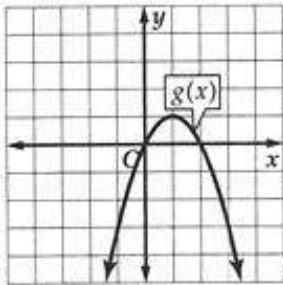
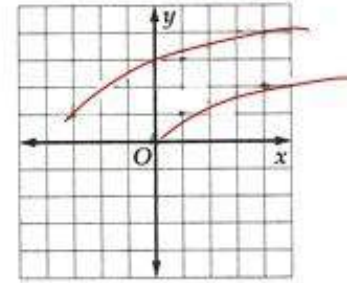
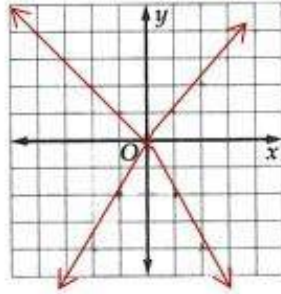
(8) **فيزياء:** إذا كان ارتفاع صاروخ $h(t)$ بالقدم بعد t ثانية من إطلاقه رأسياً يُعطى بالقاعدة $h(t) = -16t^2 + 32t + 0.5$ فأوجد أقصى ارتفاع يصل إليه الصاروخ.

أقصى ارتفاع يعنى القيمة العظمى = 16.5 ft



١-٥ الدوال الرئيسية (الأم) والتحويلات الهندسية

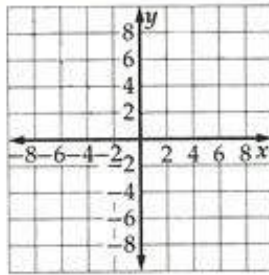
- (1) استعمل منحنى الدالة الرئيسية (الأم) $f(x) = \sqrt{x}$ لتمثيل منحنى الدالة $g(x) = \sqrt{x+3} + 1$ بيانياً .
- (2) استعمل منحنى الدالة الرئيسية (الأم) $f(x) = |x|$ لتمثيل منحنى الدالة $g(x) = -|2x|$ بيانياً .



- (3) صف العلاقة بين منحنى الدالة $f(x) = x^2$ ومنحنى $g(x)$ في التمثيل المجاور، ثم اكتب معادلة $g(x)$.

$$g(x) = -(x-1)^2 + 1$$

انعكاس ثم انسحاب (1,1)

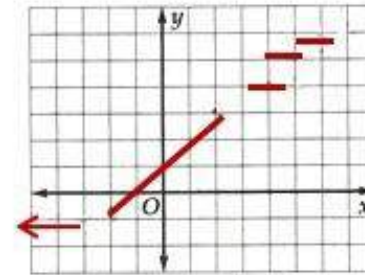
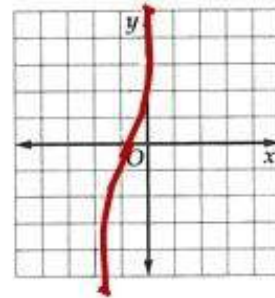


4) عین الدالة الرئيسية (الأم) $f(x)$ للدالة $g(x) = 2|x + 2| - 3$. ثم صف العلاقة بين المنحنيين، ومثلهما بيانياً في المستوى الإحداثي.

الدالة الرئيسية (الأم) هي $g(x) = |x|$
حدث انسحاب (1,1) وشد رأسي معاملته 2

5) مثل الدالة بيانياً $f(x) = \begin{cases} -1, & x \leq -3 \\ 1 + x, & -2 < x \leq 2 \\ [x], & 4 \leq x \leq 6 \end{cases}$

6) استعمل منحنى الدالة $f(x) = x^3$ لتمثيل منحنى الدالة $g(x) = |(x + 1)^3|$





٦-١ العمليات على الدوال وتركيب دالتين

أوجد $(f+g)(x)$, $(f-g)(x)$, $(f \cdot g)(x)$, $(\frac{f}{g})(x)$ للدالتين $f(x)$, $g(x)$ في كل مما يأتي، وحدد مجال كل من الدوال الناتجة:

$$f(x) = x^3, g(x) = \sqrt{x+1} \quad (2)$$

$$f(x) = 2x^2 + 8, g(x) = 5x - 6 \quad (1)$$

	المجال		المجال
$f(x+g)(x) = x^3 + \sqrt{x+1}$	$X \geq -1$	$(f+g)(x) = 2x^2 + 5x + 2$	R
$f(x-g)(x) = x^3 - \sqrt{x+1}$	$X \geq -1$	$(f-g)(x) = 2x^2 - 5x + 14$	R
$f(x \cdot g)(x) = x^3 \sqrt{x+1}$	$X \geq -1$	$(f/g)(x) = (2x^2 + 8)/(5x - 6)$	R - (6/5)
$(f/g)(x) = x^3 / \sqrt{x+1}$	$X > -1$	$(f-g)(x) = 10x^3 - 12x^2 + 40x - 48$	R

أوجد $[f \circ g](x)$, $[g \circ f](x)$, $[f \circ g](3)$ لكل زوج من الدوال الآتية:

$f(x) = 2x^3 - 3x^2 + 1$, $g(x) = 3x$ (4)

$(f \circ g)(x) = 54x^3 - 27x^2 + 1$
 $(g \circ f)(x) = 6x^3 - 9x^2 + 1$
 $(f \circ g)(3) = 54(3)^3 - 27(3)^2 + 1$

$f(x) = x + 5$, $g(x) = x - 3$ (3)

$(f \circ g)(x) = x + 2$
 $(g \circ f)(x) = x + 2$
 $(f \circ g)(3) = 5$

$f(x) = 3x^2 - 2x + 5$, $g(x) = 2x - 1$ (6)

$(f \circ g)(x) = 12x^2 - 16x + 10$
 $(g \circ f)(x) = 6x^2 - 4x + 9$
 $(f \circ g)(3) = 70$

$f(x) = 2x^2 - 5x + 1$, $g(x) = 2x - 3$ (5)

$(f \circ g)(x) = 8x^2 - 34x + 34$
 $(g \circ f)(x) = 4x^2 - 10x - 1$
 $(f \circ g)(3) = 4$



حدّد مجال $f \circ g$ ، ثم أوجد $f \circ g$ لكل زوج من الدوال في السؤالين الآتيين:

$$f(x) = \frac{1}{x-8} \quad (8)$$

$$g(x) = x^2 + 5$$

	المجال
$(f \circ g)(x) = 1/(x^2-3)$	$x \neq \sqrt{3}$

$$f(x) = \sqrt{x-2} \quad (7)$$

$$g(x) = 3x$$

	المجال
$(f \circ g)(x) = \sqrt{3x-2}$	$x \neq (2/3)$

أوجد دالتين f و g في كل من السؤالين 9, 10، بحيث يكون $h(x) = [f \circ g](x)$. على ألا تكون أي منهما الدالة

المحايدة $I(x) = x$

$$h(x) = \frac{1}{3x+3} \quad (10)$$

$$h(x) = \sqrt{2x-6} - 1 \quad (9)$$

$$f(x) = 1/(x+1) \quad g(x) = 3x + 2$$

$$f(x) = \sqrt{(x-6)} - 1 \quad g(x) = 2x$$



حلوك

مستوى تدريسي تعليمي

(11) **مطعم:** دخل ثلاثة أشخاص مطعمًا، وطلب كلُّ منهم الوجبة نفسها. إذا تفاضى صاحب المطعم 18% من تكلفة الوجبة بدل خدمة، فاكتب الدوال الثلاث على النحو الآتي: الأولى تمثل تكلفة الوجبات الثلاث قبل استيفاء بدل الخدمة، والثانية تكلفة الوجبة بعد استيفاء الخدمة، وأما الثالثة فتمثل تركيب الدالتين الذي يعطي تكلفة الوجبات الثلاث متضمنة بدل الخدمة.

نفرض أن تكلفة الوجبة = x ريال

$$f(x) = 3x$$

$$g(x) = 1.18x$$

$$(f \circ g)(x) = 3(1.18x) = 3.54x$$





٧-١ العلاقات والدوال العكسية

مثل كلاً من الدوال الآتية بياناً باستعمال الحاسبة البيانية، ثم طبق اختبار الخط الأفقي لتحديد إن كانت الدالة العكسية موجودة أم لا.

نعم

$$f(x) = -\sqrt{x+3} - 1 \quad (2)$$

لا

$$f(x) = 3|x| + 2 \quad (1)$$

نعم

$$f(x) = \frac{x}{5} + 9 \quad (4)$$

نعم

$$f(x) = x^5 + 5x^3 \quad (3)$$

في كل مما يأتي أوجد الدالة العكسية f^{-1} إن أمكن، وحدد مجالها والقيود عليه، وإذا لم يكن ذلك ممكناً، فاكتب: غير موجودة.

$$y = (7x+1) / (2-x)$$

$$f(x) = \frac{2x-1}{x+7} \quad (6)$$

$$y = x^3 + 1$$

$$f(x) = \sqrt[3]{x-1} \quad (5)$$

$$y = x^2 + 2$$

$$f(x) = \sqrt{x-2} \quad (8)$$

غير موجودة

$$f(x) = \frac{4}{(x-3)^2} \quad (7)$$



أثبت جبريًا أن كلًّا من الدالتين f, g دالة عكسية للأخرى في كلٍّ من السؤالين الآتيين:

$$f(x) = \frac{x^2}{2} - 6; x \geq 0; g(x) = \sqrt{2x + 12} \quad (10)$$

$$f(x) = 2x + 3; g(x) = \frac{x-3}{2} \quad (9)$$

$$\begin{aligned} (f \circ g)(x) &= x \\ (g \circ f)(x) &= x \\ (f \circ g)(x) &= (g \circ f)(x) = x \end{aligned}$$

دالة عكسية للأخرى f, g

$$\begin{aligned} (f \circ g)(x) &= x \\ (g \circ f)(x) &= x \\ (f \circ g)(x) &= (g \circ f)(x) = x \end{aligned}$$

دالة عكسية للأخرى f, g

(12) مكافحة الحرائق: تستعمل الطائرات الماء في إطفاء حرائق الغابات. ويعطى الزمن الذي يستغرقه الماء للوصول إلى الأرض بالثواني بالدالة $t(h) = \frac{\sqrt{h}}{4}$ ، حيث h ارتفاع الطائرة بالقدم. أوجد الدالة العكسية لها. وإذا استغرق الماء 8 ثوانٍ للوصول إلى الأرض، فأوجد ارتفاع الطائرة.

$$\begin{aligned} h &= 16 t^2 \\ h &= 16 (8)^2 \\ h &= 1024 \text{ sec} \end{aligned}$$



الفصل الثاني العلاقات والدوال الأسية واللوغاريتمية

١-٢ تمثيل الدوال الأسية بيانياً.

٢-٢ حل المعادلات والمتباينات الأسية.

٣-٢ اللوغاريتمات والدوال اللوغاريتمية.

٤-٢ خصائص اللوغاريتمات.

٥-٢ حل المعادلات والمتباينات اللوغاريتمية.

٦-٢ اللوغاريتمات العشرية.



١-٢ تمثيل الدوال الأسية بيانياً

مثل كل دالة مما يأتي بيانياً، وحدد مجالها، ومداه.

$$y = 3(0.5)^x \quad (3)$$



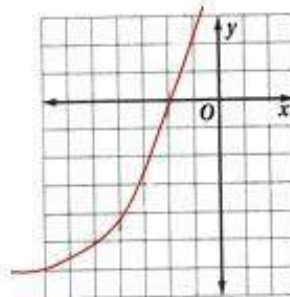
$$y = 4(3)^x \quad (2)$$



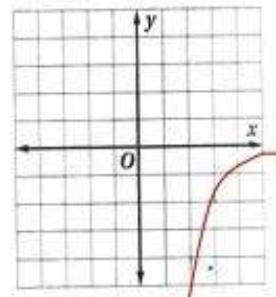
$$y = 1.5(2)^x \quad (1)$$



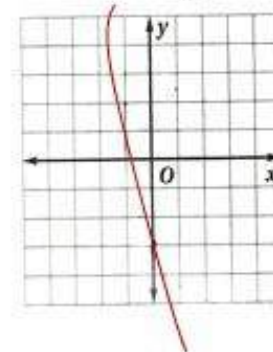
$$y = \frac{1}{2}(3)^{x+4} - 5 \quad (6)$$



$$y = -2\left(\frac{1}{4}\right)^{x-3} \quad (5)$$



$$y = 5\left(\frac{1}{2}\right)^x - 8 \quad (4)$$





(7) أحياء: تحوي عينة مخبرية 12000 خلية بكتيرية، ويتضاعف عددها يومياً.

(a) اكتب دالة أسية تمثل عدد الخلايا البكتيرية بعد x يوم. $1200 (2)^x$

(b) ما عدد الخلايا البكتيرية بعد 6 أيام؟ $1200 (2)^6 = 768000$

(8) جامعات: بلغ عدد طلبة السنة الرابعة في إحدى الجامعات 4000 طالب عام 1429 هـ، ويتوقع زيادة العدد بنسبة 5% سنوياً. اكتب دالة أسية تمثل عدد طلبة السنة الرابعة في الجامعة t بعد سنة من عام 1429 هـ.

$$y = 4000 (1.05)^t$$



٢-٢ حل المعادلات والمتباينات الأسية

حل كل معادلة مما يأتي:

$$x=0.8 \quad \left(\frac{1}{64}\right)^{0.5x-3} = 8^{9x-2} \quad (2)$$

$$x=22 \quad 4^{x+35} = 64^{x-3} \quad (1)$$

$$x=0.2 \quad \left(\frac{1}{4}\right)^{2x+2} = 64^{x-1} \quad (4)$$

$$x=-60 \quad 3^{x-4} = 9^{x+28} \quad (3)$$

$$x=0 \quad 3^{6x-2} = \left(\frac{1}{9}\right)^{x+1} \quad (6)$$

$$x=-1/13 \quad \left(\frac{1}{2}\right)^{x-3} = 16^{3x+1} \quad (5)$$

$$x=-7 \quad 10^{2x+7} = 1000^x \quad (8)$$

$$x=-10/7 \quad 400 = \left(\frac{1}{20}\right)^{7x+8} \quad (7)$$



اكتب دالة أسية على الصورة $y = ab^x$ للتمثيل البياني المار بكل زوج من النقاط فيما يأتي:

(11) $(0, \frac{3}{4}), (2, 36.75)$

$x = \frac{3}{4} \cdot 7^x$

(10) $(0, 8), (4, 2048)$

$y = 8 \cdot 4^x$

(9) $(0, 5), (4, 3125)$

$y = 5 \cdot 5^x$

(14) $(0, 0.7), (\frac{1}{2}, 3.5)$

$y = 0.7 (25)^x$

(13) $(0, 15), (2, \frac{15}{16})$

$y = 15(0.25)^x$

(12) $(0, -0.2), (-3, -3.125)$

$y = -0.2 (0.4)^x$

حل كل متباينة مما يأتي:

$(\frac{1}{16})^{3x-4} \leq 64^{x-1}$ (17)
 $x \geq 11/9$

$10^{2x+7} \geq 1000^x$ (16)
 $x \leq 7$

$400 > (\frac{1}{20})^{7x+8}$ (15)
 $x > -10/7$

$128^{x+3} < (\frac{1}{1024})^{2x}$ (20)
 $x < -21/27$

$(\frac{1}{36})^{x+8} \leq 216^{x-3}$ (19)
 $x \geq -7/5$

$(\frac{1}{8})^{x-6} < 4^{4x+5}$ (18)
 $x > 8/11$

(21) علوم، إذا كان عدد الخلايا البكتيرية في عينة A يساوي 36^{2t+8} خلية عند الزمن t ، وعدددها في عينة B يساوي 216^{t+18} عند الزمن نفسه. فمتى يصبح عدد الخلايا متساويًا في العيتين؟

$t=38$



٢-٣ اللوغاريتمات والدوال اللوغاريتمية

اكتب كل معادلة لوغاريتمية مما يأتي على الصورة الأسية:

$$3^{-4} = 1/81 \quad \log_3 \frac{1}{81} = -4 \quad (3) \quad 2^6 = 64 \quad \log_2 64 = 6 \quad (2) \quad 6^3 = 216 \quad \log_6 216 = 3 \quad (1)$$

$$\log_{32} 8 = \frac{3}{5} \quad (6) \\ 52^{3/5} = 8$$

$$\log_{25} 5 = \frac{1}{2} \quad (5) \\ 25^{0.5} = 5$$

$$\log_{10} 0.00001 = -5 \quad (4) \\ 10^{-5} = 0.00001$$

اكتب كل معادلة أسية مما يأتي على الصورة اللوغاريتمية:

$$3^4 = 81 \quad (9) \\ \log_3 81 = 4 \\ 7776^{1/5} = 6 \quad (12) \\ \log_{7776} 6 = 1/5$$

$$7^0 = 1 \quad (8) \\ \log_7 1 = 0 \\ \left(\frac{1}{4}\right)^3 = \frac{1}{64} \quad (11) \\ \log_{1/4} 1/64 = 3$$

$$5^3 = 125 \quad (7) \\ \log_5 125 = 3 \\ 3^{-4} = \frac{1}{81} \quad (10) \\ \log_3 1/81 = -4$$

أوجد قيمة كل مما يأتي:

$$-3 \quad \log_{1/3} 27 \quad (16)$$

$$-4 \quad \log_2 \frac{1}{16} \quad (15)$$

$$-4 \quad \log_{10} 0.0001 \quad (14)$$

$$4 \quad \log_3 81 \quad (13)$$

$$4 \quad \log_6 6^4 \quad (20)$$

$$-2 \quad \log_7 \frac{1}{49} \quad (19)$$

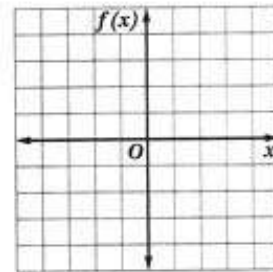
$$2/3 \quad \log_8 4 \quad (18)$$

$$0 \quad \log_9 1 \quad (17)$$

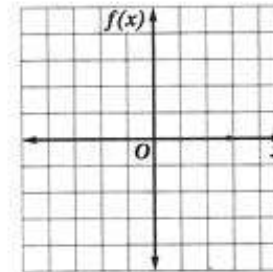


مثل كل دالة مما يأتي بيانًا:

$$f(x) = -2 \log_4 x \quad (22)$$



$$f(x) = \log_2(x - 2) \quad (21)$$



(23) صوت، تستعمل المعادلة $L = 10 \log_{10} R$ لإيجاد شدة الصوت L بالديسيبل، حيث R الشدة النسبية للصوت. والأصوات التي تزيد شدتها على 120 dB ذات أثر سلبي على الإنسان. ما الشدة النسبية لصوت شدته 120 dB؟

(24) استثمار، استثمر ماجد 100000 ريال في مشروع متوقعًا ربحًا سنويًا نسبته 4%، وتضاف الأرباح سنويًا إلى رأس المال، إذا كان المبلغ الكلي المتوقع A بعد 5 سنوات من الاستثمار دون أي سحب أو إضافة يُعطى بالمعادلة $\log_{10} A = \log_{10} [100000(1 + 0.04)^5]$. فاكتب المعادلة على الصورة الأسية.

$$A = 100000(1+0.04)^5$$



٢-٤ خصائص اللوغاريتمات

استعمل $\log_{10} 7 \approx 0.8451$ ، $\log_{10} 5 \approx 0.6990$ لتقريب قيمة كل مما يأتي:

$$1.3980 \log_{10} 25 \quad (2)$$

$$-0.1461 \log_{10} \frac{5}{7} \quad (4)$$

$$2.2430 \log_{10} 175 \quad (6)$$

$$0.5528 \log_{10} \frac{25}{7} \quad (8)$$

$$1.5441 \log_{10} 35 \quad (1)$$

$$0.1461 \log_{10} \frac{7}{5} \quad (3)$$

$$2.3892 \log_{10} 245 \quad (5)$$

$$-0.6990 \log_{10} 0.2 \quad (7)$$

اكتب كل عبارة لوغاريتمية فيما يأتي بالصورة المطولة:

$$\log_8 [(4x + 2)^3 (x - 4)] \quad (10)$$
$$3\log (4X+2) + \log_8 (X-4)$$

$$\log_2 \frac{(x + 1)^3}{\sqrt[3]{x + 5}} \quad (12)$$

$$3\log_2 (X+1) - 1/3 \log (X+5)$$

$$\log_2 [(2x)^3 (x + 1)] \quad (9)$$
$$3\log_2 (2X) + \log_2 (X+1)$$

$$\log_{13} \frac{3x^4}{\sqrt[3]{7x - 3}} \quad (11)$$

$$\log_{13} 3X^4 - 1/3 \log_{13} (7X-3)$$



اكتب كل عبارة لوغاريتمية فيما يأتي بالصورة المختصرة:

$$2 - \log_7 6 - 2 \log_7 x \quad (14)$$
$$2 - \log_7 6/x^2$$

$$\log_{10} y + \log_{10} 3 - \frac{1}{3} \log_{10}(x) + 2 \log_{10} z \quad (16)$$
$$\log_{10} [3yz^2 / \sqrt[3]{X}]$$

$$3 \log_2 (5x + 6) - \frac{1}{2} \log_2 (x - 4) \quad (13)$$
$$\log_2 [(5X+6)^2 / \sqrt{X-4}]$$

$$\log_3 8 + \log_3 x - 2 \log_3 (x + 4) \quad (15)$$
$$\log_3 [8x / (X+4)^2]$$

$$\log_3 y + \log_3 x - \frac{1}{2} \log_3 x + 3 \log_3 z \quad (17)$$
$$\log_3 [xyz^3 / \sqrt{X}]$$

احسب قيمة كل مما يأتي:

$$2/5 \log_2 \sqrt[5]{4} \quad (20)$$

$$2 \log_{100} 10000 \quad (19)$$

$$3 \log_{\frac{1}{2}} \frac{1}{8} \quad (18)$$



٥-٢ حل المعادلات والمتباينات اللوغاريتمية

حل كل معادلة أو متباينة مما يأتي، وتحقق من صحة حلك.

$$x = 65 \quad \log_3 (4x - 17) = 5 \quad (2)$$

$$x = -1 \quad x + 5 = \log_4 256 \quad (1)$$

$$x = -4/3 \quad \log_8 (-6x) = 1 \quad (4)$$

$$x = 4 \quad \log_{13} (x^2 - 4) = \log_{13} 3x \quad (3)$$

$$\text{ليس لها حل} \quad \log_{10} (x - 5) = \log_{10} 2x \quad (6)$$

$$x = -4/3 \quad \log_8 (-6x) = 1 \quad (5)$$

$$u = 4 \quad \log_{10} u = \frac{3}{2} \log_{10} 4 \quad (8)$$

$$n = 4 \quad \log_7 n = \frac{2}{3} \log_7 8 \quad (7)$$

$$w = 12 \quad \log_8 48 - \log_8 w = \log_8 4 \quad (10)$$

$$x = 6 \quad \log_6 x + \log_6 9 = \log_6 54 \quad (9)$$

$$x = 3 \quad 4 \log_2 x + \log_2 5 = \log_2 405 \quad (12) \quad u = 2 \quad \log_9 (3u + 14) - \log_9 5 = \log_9 2u \quad (11)$$

$$d = 4 \quad \log_2 d = 5 \log_2 2 - \log_2 8 \quad (14) \quad y = 1/4 \quad \log_3 y = -\log_3 16 + \frac{1}{3} \log_3 64 \quad (13)$$

$$b = 1 \quad \log_{10} (b + 3) + \log_{10} b = \log_{10} 4 \quad (16) \quad m = 2 \quad \log_{10} (3m - 5) + \log_{10} m = \log_{10} 2 \quad (15)$$

$$a = 0 \quad \log_3 (a + 3) + \log_3 (a + 2) = \log_3 6 \quad (18) \quad t = 2 \quad \log_8 (t + 10) - \log_8 (t - 1) = \log_8 12 \quad (17)$$

$$x = 3 \quad \log_4 (x^2 - 4) - \log_4 (x + 2) = \log_4 1 \quad (20) \quad r = 2 \quad \log_{10} (r + 4) - \log_{10} r = \log_{10} (r + 1) \quad (19)$$



$$n=4 \quad \log_8 (n-3) + \log_8 (n+4) = 1 \quad (22)$$

$$w=25 \quad \log_{10} 4 + \log_{10} w = 2 \quad (21)$$

$$x=3 \quad \log_{16} (9x+5) - \log_{16} (x^2-1) = \frac{1}{2} \quad (24)$$

$$x=4 \quad 3 \log_5 (x^2+9) - 6 = 0 \quad (23)$$

$$y=0 \quad \log_2 (5y+2) - 1 = \log_2 (1-2y) \quad (26) \quad x=8 \quad \log_6 (2x-5) + 1 = \log_6 (7x+10) \quad (25)$$

$$x=6 \quad \log_7 x + 2 \log_7 x - \log_7 3 = \log_7 72 \quad (28) \quad c=101 \quad \log_{10} (c^2-1) - 2 = \log_{10} (c+1) \quad (27)$$

$$x > 1 \quad \log_9 (x+2) > \log_9 (6-3x) \quad (30) \quad 0 > x > -4/3 \quad \log_8 (-6x) < 1 \quad (29)$$

$$-6 < x < 11 \quad \log_2 (x+6) < \log_2 17 \quad (32) \quad 0 < x \leq 27 \quad \log_{81} x \leq 0.75 \quad (31)$$

$$\log_{10} (x-5) > \log_{10} 2x \quad (34) \quad x > 5 \quad \log_{12} (2x-1) > \log_{12} (5x-16) \quad (33)$$

$$x \geq 2, x \neq 3 \quad \log_6 (3-x) \leq \log_6 (x-1) \quad (36) \quad \log_2 (x+3) < \log_2 (1-3x) \quad (35)$$

$-3 < x < -1/2$

(37) **بيئة:** اكتشف عالم بيئة فصيلة من الطيور المهددة بالانقراض، وقدّر أن عدد طيورها يتضاعف كل 12 سنة. وعندما يصل العدد إلى 20 مرة مما هو عليه الآن، لن تعد مهددة بالانقراض. اكتب تعبيرًا لوغاريتميًا لعدد السنوات اللازمة ليلعب عدد طيور هذه الفصيلة 20 مرة مما هو عليه الآن.



٦-٢ اللوغاريتمات العشرية

استعمل الحاسبة لإيجاد قيمة كل مما يأتي مقرباً إلى أقرب جزء من عشرة آلاف:

$$\log 0.05 \quad (3) \quad -1.3010$$

$$\log 2.2 \quad (2) \quad 0.3424$$

$$\log 101 \quad (1) \quad 2.0043$$

استعمل الصيغة $\text{pH} = -\log[H^+]$ لإيجاد pH لكل مادة مما يأتي، إذا كان تركيز أيون الهيدروجين فيها على النحو المعطى:

$$(4) \quad \text{الحليب} : [H^+] = 2.51 \times 10^{-7} \text{ mol/L} \quad 6.6$$

$$(5) \quad \text{المطر الحمضي} : [H^+] = 2.51 \times 10^{-6} \text{ mol/L} \quad 5.6$$

$$(6) \quad \text{القهوة} : [H^+] = 1.0 \times 10^{-5} \text{ mol/L} \quad 5$$

$$(7) \quad \text{الحليب الفني بالماغنيسيوم} : [H^+] = 3.16 \times 10^{-11} \text{ mol/L} \quad 10.5$$



حلّ كل معادلة أو متباينة مما يأتي، وقرّب الناتج إلى أقرب جزء من عشرة آلاف:

$x=3.0885$ $3.5^x = 47.9$ (10) $z=2.1319$ $6^z = 45.6$ (9) $a=2.9746$ $5^a = 120$ (8)

$a=10.3593$ $2^{a-4} = 82.1$ (13) $x=1.1887$ $4^{2x} = 27$ (12) $y=1.9802$ $8.2^y = 64.5$ (11)

$x=\pm 2.3785$ $5^{x^2-3} = 72$ (16) $x=\pm 1.0725$ $30^{x^2} = 50$ (15) $w=-1.2396$ $5^{w+3} = 17$ (14)

$2^{n+1} \leq 5^{2n-1}$ (18) $x > 3.8188$ $4^{2x} > 9^{x+1}$ (17)

(25) درجة الحموضة: إذا كانت درجة حموضة الخل (pH) 2.9، والحليب 6.6، فكم مرة (تقريبًا) يساوي تركيزُ أيون الهيدروجين في الخل تركيزه في الحليب؟

(26) أحياء: تحتوي عينة مخبرية على 1000 خلية بكتيرية، ويتضاعف عددها كل ساعة، ويعطي عددها N بعد t ساعة بالصيغة $N = 1000(2)^t$. كم الزمن اللازم ليصل عدد الخلايا البكتيرية إلى 50000 خلية؟

(27) صوت: تُعطى شدة الصوت L بالديسيبل بالمعادلة $L = 10 \log R$ ، حيث R شدة الصوت النسبية، إذا كانت شدة صوت صفارة إنذار 150 dB، وشدة صوت محرك الطائرة الحربية 120 dB، فكم مرة من شدة الصوت النسبية لصفارة الإنذار تساوي شدة الصوت النسبية لمحرك الطائرة الحربية؟



الفصل الثالث المتطابقات والمعادلات المثلثية

١-٣ المتطابقات المثلثية.

٢-٣ إثبات صحة المتطابقات المثلثية.

٣-٣ المتطابقات المثلثية لمجموع زاويتين والفرق بينهما.

٤-٣ المتطابقات المثلثية لضعف الزاوية ونصفها.

٥-٣ حل المعادلات المثلثية.



١-٣ المتطابقات المثلثية

أوجد القيمة الدقيقة لكل من النسب المثلثية الآتية علمًا بأن: $0^\circ < \theta < 90^\circ$.

(2) $\sin \theta$ ، إذا كان $\cot \theta = \frac{1}{2}$ $2\sqrt{5} / 5$

(1) $\sin \theta$ ، إذا كان $\cos \theta = \frac{5}{13}$ $12/13$

(4) $\cot \theta$ ، إذا كان $\tan \theta = \frac{2}{5}$ $5/2$

(3) $\sec \theta$ ، إذا كان $\tan \theta = 4$ $\sqrt{17}$

أوجد القيمة الدقيقة لكل من النسب المثلثية الآتية ، علمًا بأن: $180^\circ < \theta < 270^\circ$.

(6) $\cot \theta$ ، إذا كان $\csc \theta = -\frac{3}{2}$ $\sqrt{5} / 2$

(5) $\sec \theta$ ، إذا كان $\sin \theta = -\frac{15}{17}$ $-17/8$

أوجد القيمة الدقيقة لكل من النسب المثلثية الآتية ، علمًا بأن: $270^\circ < \theta < 360^\circ$.

(8) $\sec \theta$ ، إذا كان $\csc \theta = -8$ $8 \sqrt{63} / 63$

(7) $\cot \theta$ ، إذا كان $\cos \theta = \frac{3}{10}$ $-3 \sqrt{91} / 91$

(10) $\cot \theta$ ، إذا كان $\cos \theta = \frac{1}{3}$ $-3\sqrt{2} / 4$

(9) $\sin \theta$ ، إذا كان $\tan \theta = -\frac{1}{2}$ $-\sqrt{5} / 5$



بسّط كل عبارة مما يأتي:

$$\cos^2 \theta \sin^2 \theta \cot^2 \theta \quad (13)$$

$$\cos^2 \theta \frac{\sin^2 \theta}{\tan^2 \theta} \quad (12)$$

$$\sec \theta \csc \theta \tan \theta \quad (11)$$

$$\cot \theta \frac{\csc \theta - \sin \theta}{\cos \theta} \quad (16)$$

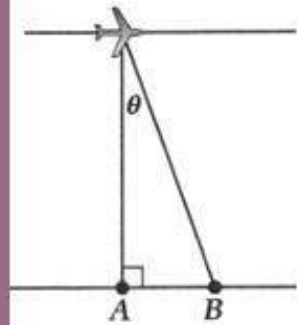
$$\csc^2 \theta \frac{\csc^2 \theta - \cot^2 \theta}{1 - \cos^2 \theta} \quad (15)$$

$$\csc^2 \theta \cot^2 \theta + 1 \quad (14)$$

$$\sec^2 \theta \cos^2 \theta - \tan^2 \theta \quad (19) \quad 2 \tan \theta \frac{\cos \theta}{1 - \sin \theta} - \frac{\cos \theta}{1 + \sin \theta} \quad (18)$$

$$\csc \theta \sin \theta + \cos \theta \cot \theta \quad (17)$$

$$1 - \tan^2 \theta$$



$$\cos^2 \theta$$

(20) التصوير الجوي: يُبين الشكل المجاور طائرة تلتقط صورة جوية للنقطة A. وبما أن النقطة تقع تحت الطائرة تمامًا، فإنه لا يوجد تشويه أو عيوب في الظل أو الصورة لها. وفي النقاط التي لا تقع مباشرة أسفل الطائرة يوجد تشويه في الصورة، يعتمد مقداره على بعد النقاط عن الموقع أسفل الطائرة. وعندما تزيد المسافة من الكاميرا إلى المنطقة المراد تصويرها يقل زمن عرض الصورة على فيلم التصوير في الكاميرا، حسب العلاقة: $(\sin \theta)(\csc \theta - \sin \theta)$. اكتب هذه العلاقة بدلالة $\cos \theta$ فقط.

(21) الأمواج: المعادلة $y = a \sin \theta t$ تُمثّل ارتفاع الأمواج على العوامة عند الزمن t بالثواني. عبّر عن a

بدلالة $\csc \theta t$.

$$\cos \theta t = a / y$$



٢-٣ إثبات صحة المتطابقات المثلثية

أثبت أن كل معادلة مما يأتي تمثل متطابقة:

$$\frac{\sin^2 \theta + \cos^2 \theta}{\cos^2 \theta} = \sec^2 \theta \quad (1)$$

$$\begin{aligned} \text{L.H.S } & (\sin^2 \theta + \cos^2 \theta) / \cos^2 \theta \\ & = 1 / \cos^2 \theta = \sec^2 \theta = \text{R.H.S} \end{aligned}$$

$$\frac{\cos^2 \theta}{1 - \sin^2 \theta} = 1 \quad (2)$$

$$\begin{aligned} \text{L.H.S } & \cos^2 \theta / (1 - \sin^2 \theta) \\ & = \cos^2 \theta / \cos^2 \theta = 1 = \text{R.H.S} \end{aligned}$$

$$\tan^4 \theta + 2 \tan^2 \theta + 1 = \sec^4 \theta \quad (4)$$

$$\begin{aligned} \text{L.H.S } & \tan^4 \theta + 2 \tan^2 \theta + 1 \\ & = (\tan^2 \theta + 1)^2 = (\sec^2 \theta)^2 = \sec^4 \theta \end{aligned}$$

$$(\sin^2 \theta)(\csc^2 \theta + \sec^2 \theta) = \sec^2 \theta \quad (6)$$

$$\begin{aligned} \text{L.H.S } & \sin^2 \theta (\csc^2 \theta + \sec^2 \theta) \\ & = \sin^2 \theta \cdot \csc^2 \theta + \sin^2 \theta \sec^2 \theta \\ & = 1 + \tan^2 \theta \\ & = \sec^2 \theta = \text{R.H.S} \end{aligned}$$

$$(1 + \sin \theta)(1 - \sin \theta) = \cos^2 \theta \quad (3)$$

$$\begin{aligned} \text{L.H.S } & (1 + \sin \theta)(1 - \sin \theta) \\ & = 1 - \sin^2 \theta = \cos^2 \theta = \text{R.H.S} \end{aligned}$$

$$\cos^2 \theta \cot^2 \theta = \cot^2 \theta - \cos^2 \theta \quad (5)$$

$$\begin{aligned} \text{R.H.S } & \cot^2 \theta - \cos^2 \theta \\ & = (\cos^2 \theta / \sin^2 \theta) - \cos^2 \theta \\ & = \cos^2 \theta (1 - \sin^2 \theta) / \sin^2 \theta \\ & = \cos^2 \theta \cdot \cos^2 \theta / \sin^2 \theta \\ & = \cos^2 \theta \cdot \cot^2 \theta = \text{L.H.S} \end{aligned}$$



(7) فيزياء: مربع السرعة الابتدائية لجسيم قُذِف من سطح الأرض هو $v^2 = \frac{2gh}{\sin^2 \theta}$ ، حيث θ زاوية القذف، و h أقصى ارتفاع يصل إليه الجسيم. و g مقدار تسارع الجاذبية الأرضية. أثبت صحة المتطابقة الآتية:

$$\frac{2gh}{\sin^2 \theta} = \frac{2gh \sec^2 \theta}{\sec^2 \theta - 1}$$

(8) ضوء: تُقاس شدة مصدر الضوء بالشمعة، من خلال المعادلة $I = ER^2 \sec \theta$ ، حيث E هي مقدار الإنارة بالشمعة لكل قدم مربعة على السطح، و R هي المسافة بالأقدام من مصدر الضوء، و θ هي الزاوية بين شعاع الضوء والخط العامودي على السطح. برهن المتطابقة التالية: $ER^2(1 + \tan^2 \theta) \cos \theta = ER^2 \sec \theta$.



٣-٣ المتطابقات المثلثية لمجموع زاويتين والفرق بينهما

أوجد القيمة الدقيقة لكل مما يأتي:

$$\cos 75^\circ \quad (1) \quad (\sqrt{6} - \sqrt{2}) / 4 \quad \cos 375^\circ \quad (2) \quad (\sqrt{6} + \sqrt{2}) / 4 \quad \sin(-165^\circ) \quad (3) \quad (-\sqrt{6} - \sqrt{2}) / 4$$

$$\sin(-105^\circ) \quad (4) \quad (-\sqrt{6} + \sqrt{2}) / 4 \quad \sin 150^\circ \quad (5) \quad -\sqrt{3} / 2 \quad \cos 240^\circ \quad (6) \quad -1 / 2$$

$$\sin 225^\circ \quad (7) \quad -\sqrt{2} / 2 \quad \sin(-75^\circ) \quad (8) \quad (\sqrt{6} - \sqrt{2}) / 4 \quad \sin 195^\circ \quad (9) \quad (-\sqrt{6} - \sqrt{2}) / 4$$





$$\begin{aligned} & \text{L.H.S } \cos (180 - \Theta) \\ & = \cos 180 \cos \Theta + \sin 180 \sin \Theta \\ & = - \cos \Theta = \text{R.H.S} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \text{Sin } (360 + \Theta) \\ & = \sin 360 \cos \Theta + \cos 360 \sin \Theta \\ & = 0 + 1 \cdot \sin \Theta = \sin \Theta = \text{R.H.S} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \text{L.H.S } \sin(45+\Theta) - \sin (45 - \Theta) \\ & = \sin 45 \cos \Theta + \cos 45 \sin \Theta - \sin 45 \cos \Theta \\ & \quad + \cos 45 \sin \Theta \\ & = 2 \cos 45 \sin \Theta = \sqrt{2} \sin \Theta = \text{R.H.S} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \text{L.H.S } \cos(x-\pi/6) + \sin (x - \pi/3) \\ & = \cos x \cos \pi/6 + \sin x \sin \pi/6 + \sin x \cos \pi/3 \\ & \quad - \cos x \sin \pi/3 \\ & = \frac{1}{2} \sin x + \frac{1}{2} \sin x \\ & = \sin x = \text{R.H.S} \end{aligned}$$

أثبت أن كل معادلة مما يأتي تمثل متطابقة:

$$\cos (180^\circ - \theta) = -\cos \theta \quad (10)$$

$$\sin (360^\circ + \theta) = \sin \theta \quad (11)$$

$$\sin (45^\circ + \theta) - \sin (45^\circ - \theta) = \sqrt{2} \sin \theta \quad (12)$$

$$\cos \left(x - \frac{\pi}{6} \right) + \sin \left(x - \frac{\pi}{3} \right) = \sin x \quad (13)$$



(14) الطاقة الشمسية: في 21 من شهر مارس، تُحدّد القيمة العظمى للطاقة الشمسية الساقطة على القدم المربع من سطح الكرة الأرضية في موقع معيّن بالتعبير: $E \sin(90^\circ - \phi)$ ، حيث ϕ هي خط العرض الجغرافي للموقع، و E هي مقدار ثابت. استخدم صيغة النسب المثلثية للفرق بين الزوايا، لإيجاد كمية الطاقة الشمسية بدلالة جيب التمام $(\cos \phi)$ ، للموقع الجغرافي الذي يُمثّله خط العرض ϕ .

(15) كهرباء: تُحدّد شدة التيار (c) بالأمبيرات في دائرة كهربائية فيها تيار متردّد بالصيغة: $c = 2 \sin(120t)$ بعد t ثانية.

(a) أعد كتابة الصيغة باستعمال النسب المثلثية لمجموع زاويتين.

(b) استعمل صيغة النسب المثلثية لمجموع الزوايا في إيجاد قيمة التيار عند $t = 1$ ثانية.



٣-٤ المتطابقات المثلثية لضعف الزاوية ونصفها

أوجد القيمة الدقيقة لكل من $\sin 2\theta$, $\cos 2\theta$, $\sin \frac{\theta}{2}$, $\cos \frac{\theta}{2}$ إذا كان:

$$\sin \theta = \frac{8}{17}; 90^\circ < \theta < 180^\circ \quad (2)$$

$$\cos \theta = \frac{5}{13}; 0^\circ < \theta < 90^\circ \quad (1)$$

$$\sin \theta = -\frac{2}{3}; 180^\circ < \theta < 270^\circ \quad (4)$$

$$\cos \theta = \frac{1}{4}; 270^\circ < \theta < 360^\circ \quad (3)$$

أوجد القيمة الدقيقة لكل مما يأتي:

$$\sin \left(-\frac{\pi}{8}\right) \quad (8)$$

$$\cos 67.5^\circ \quad (7)$$

$$\tan 15^\circ \quad (6)$$

$$\tan 105^\circ \quad (5)$$

أثبت أن كل معادلة مما يأتي تمثل متطابقة:

$$\sin^2 \frac{\theta}{2} = \frac{\tan \theta - \sin \theta}{2 \tan \theta} \quad (9)$$

$$\sin 4\theta = 4 \cos 2\theta \sin \theta \cos \theta \quad (10)$$



(11) صور جوية: في التصوير الجوي يوجد تناقص في درجة وضوح صور الفلم لأي نقطة X لا تقع مباشرة أسفل الكاميرا. يُعطى التناقص في وضوح الصورة E_θ بالعلاقة $E_\theta = E_0 \cos^4 \theta$ ، حيث θ هي الزاوية بين الخط العمودي على الكاميرا إلى سطح الأرض والخط من الكاميرا إلى النقطة X ، و E_0 هي درجة وضوح للنقطة X الموجودة مباشرة تحت الكاميرا. استعمل المتطابقة $2 \sin^2 \theta = 1 - \cos 2\theta$ في إثبات أن:

$$E_0 \cos^4 \theta = E_0 \left(\frac{1}{2} + \frac{\cos 2\theta}{2} \right)^2$$

(12) التصوير: تلتقط آلة المسح الجوي صورًا حرارية من بعد 300 متر إلى 1200 متر. إذا علمت أن عرض المنطقة W التي يتم تغطيتها بالصورة تُعطى بالعلاقة: $W = 2H' \tan \theta$ ، حيث H' هي الارتفاع، و θ هي نصف

زاوية المسح. برهن أن

$$\frac{2H' \sin 2\theta}{1 + \cos 2\theta} = 2H' \tan \theta$$



٥-٣ حل المعادلات المثلثية

حُل كل معادلة مما يأتي لقيم θ جميعها الموضحة بجانب كل منها:

$$\sin 2\theta = \cos \theta; 90^\circ \leq \theta < 180^\circ \quad (2)$$

$$\sqrt{2} \cos \theta = \sin 2\theta; 0^\circ \leq \theta \leq 360^\circ \quad (1)$$

$$\cos \theta + \cos (90 - \theta) = 0; 0 \leq \theta < 2\pi \quad (4)$$

$$\cos 4\theta = \cos 2\theta; 180^\circ \leq \theta < 360^\circ \quad (3)$$

$$\tan^2 \theta + \sec \theta = 1; \frac{\pi}{2} \leq \theta < \pi \quad (6)$$

$$2 + \cos \theta = 2 \sin^2 \theta; \pi \leq \theta \leq \frac{3\pi}{2} \quad (5)$$

حُل كل معادلة مما يأتي لقيم θ جميعها، إذا كان قياس θ بالراديان:

$$\cot \theta = \cot^3 \theta \quad (8)$$

$$\cos^2 \theta = \sin^2 \theta \quad (7)$$

$$\cos^2 \theta \sin \theta = \sin \theta \quad (10)$$

$$\sqrt{2} \sin^3 \theta = \sin^2 \theta \quad (9)$$

$$\sec^2 \theta = 2 \quad (12)$$

$$2 \cos 2\theta = 1 - 2 \sin^2 \theta \quad (11)$$



حل كل معادلة مما يأتي لقيم θ جميعها. إذا كان قياس θ بالدرجات:

$$\csc^2 \theta - 3 \csc \theta + 2 = 0 \quad (14)$$

$$\sin^2 \theta \cos \theta = \cos \theta \quad (13)$$

$$\sqrt{2} \cos^2 \theta = \cos^2 \theta \quad (16)$$

$$\frac{3}{1 + \cos \theta} = 4(1 - \cos \theta) \quad (15)$$

حل كل معادلة مما يأتي:

$$4 \sin^2 \theta - 1 = 0 \quad (18)$$

$$4 \sin^2 \theta = 3 \quad (17)$$

$$\cos 2\theta + \sin \theta - 1 = 0 \quad (20)$$

$$2 \sin^2 \theta - 3 \sin \theta = -1 \quad (19)$$



(21) أمواج: تُسبب الأمواج تحرك العوامة بنمط ثابت معين في الماء. يمكن تحديد ارتفاع العوامة h بالمعادلة:
 $h = 2 \sin x$ ، اكتب تعبيرًا لموقع العوامة، عندما يكون ارتفاعها عند خط المنتصف.

(22) كهرباء: يمكنك وصف شدة التيار الكهربائي المتردد المار في دائرة كهربائية ما بالعلاقة: $i = 3 \sin 240t$ ،
حيث i شدة التيار الكهربائي بالأمبير، و t الزمن بالثواني. اكتب مقدارًا يصف الزمن عندما لا يوجد تيار
كهربائي.



الفصل الرابع القطوع المخروطية والمعادلات الوسيطة

١-٤ القطوع المكافئة.

٢-٤ القطوع الناقصة والدوائر.

٣-٤ القطوع الزائدة.

٤-٤ تحديد أنواع القطوع المخروطية ودورانها.

٥-٤ المعادلات الوسيطة.

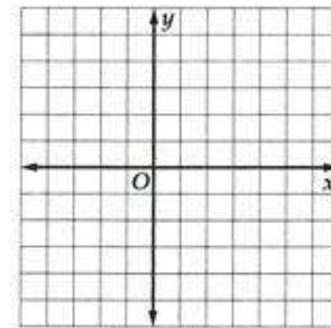
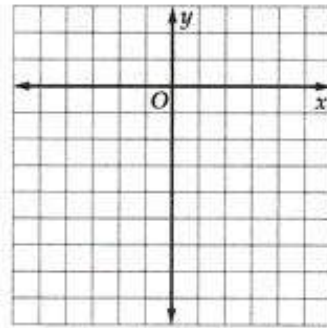


٤-١ القطوع المكافئة

حدّد خصائص القطع المكافئ المعطاة معادلته في كلّ مما يأتي، ثمّ مثلّ منحناه بيانياً:

$$y^2 + 6y + 9 = 12 - 12x \quad (2)$$

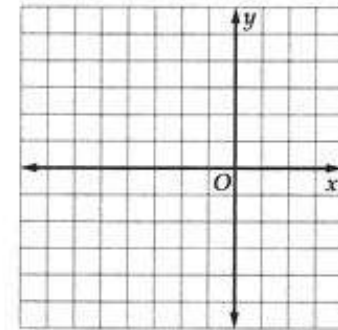
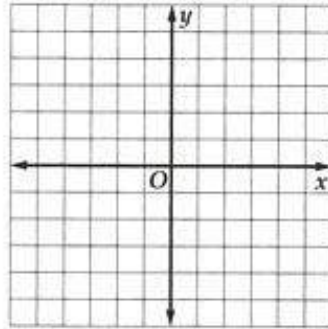
$$(x - 1)^2 = 8(y - 2) \quad (1)$$





اكتب معادلة القطع المكافئ الذي يحقق الخصائص المعطاة في السؤالين 3، 4، ثم مثل منحناه بيانياً.

- 3 الرأس $(-2, 4)$ ، والبؤرة $(-2, 3)$
- 4 الرأس $(0, 1)$ ؛ مفتوح أفقياً إلى اليمين ، ويمر بالنقطة $(8, -7)$.



- 5 اكتب المعادلة $x^2 + 8x = -4y - 8$ على الصورة القياسية للقطع المكافئ ، ثم حدّد خصائصه.



(6) **قمر اصطناعي:** افترض أن طبقاً هوائياً على شكل قطع مكافئ، بحيث يبعد المستقبل 2 ft عن الرأس، ويقع في البؤرة. وافترض أن الرأس عند نقطة الأصل، وأن الطبق موجه إلى الأعلى فأوجد معادلة تمثل مقطعاً عرضياً للطبق.

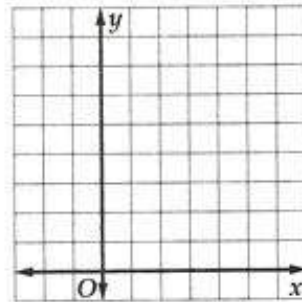




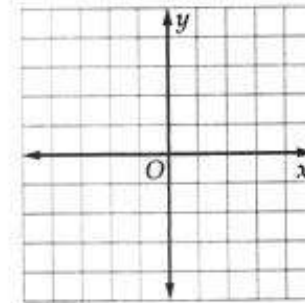
٤-٢ القطوع الناقصة والدوائر

حدّد خصائص القطع الناقص المعطاة معادلته في كلِّ مما يلي، ثمّ مثلّ منحناه بيانيّاً:

$$25x^2 + 9y^2 - 50x - 90y + 25 = 0 \quad (2)$$



$$4x^2 + 9y^2 - 8x - 36y + 4 = 0 \quad (1)$$



اكتب معادلة القطع الناقص الذي يحقق الخصائص المعطاة في كلِّ مما يأتي:

(3) الرأسان $(4, 6)$, $(-12, 6)$ ، والبؤرتان $(2, 6)$, $(-10, 6)$

(4) البؤرتان $(-2, 7)$, $(-2, 1)$ ، وطول المحور الأكبر 10 وحدات.



حدّد الاختلاف المركزي للقطع الناقص المعطاة معادلته في السؤالين الآتيين:

$$\frac{(y+2)^2}{64} + \frac{(x+1)^2}{9} = 1 \quad (6)$$

$$\frac{(x+1)^2}{25} + \frac{(y+1)^2}{16} = 1 \quad (5)$$

اكتب معادلة الدائرة التي تحقق الخصائص المعطاة في كل مما يأتي:

(7) المركز $(-6, 1)$ ، والقطر 8.

(8) المركز هو نقطة الأصل، ونصف القطر 3.

(9) النقطتان $(-4, 1)$ ، $(2, 3)$ طرفا قطر فيها.

(10) نجارة: يُستعمل قوس على شكل نصف قطع ناقص لتصميم لوحة رأسية لإطار سرير، ويساوي ارتفاع اللوحة الرأسية عند المركز 2 ft، وعرضها 5 ft عند القاعدة. فأين يجب أن يضع النجار البؤرتين لتصميم اللوحة؟

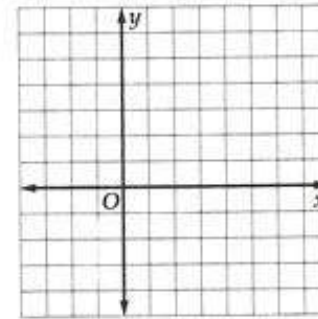
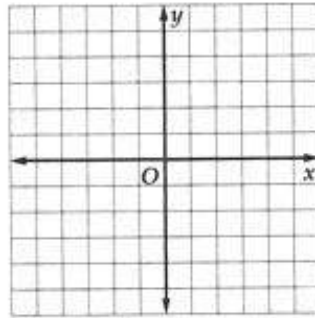


٤-٣ القطوع الزائدة

حدّد خصائص القطع الزائد المعطاة معادلته في كلّ مما يلي، ثمّ مثلّ منحناه بيانيّاً:

$$\frac{y^2}{16} - \frac{(x-1)^2}{4} = 1 \quad (2)$$

$$x^2 - 4y^2 - 4x + 24y - 36 = 0 \quad (1)$$



اكتب معادلة القطع الزائد الذي يحقق الخصائص المعطاة في كلّ مما يأتي:

(4) البؤرتان $(0, 6)$, $(0, -4)$ ، وطول المحور القاطع 8 وحدات.

(3) الرأسان $(4, 6)$, $(-10, 6)$ ،
والبؤرتان $(6, 6)$, $(-12, 6)$



5) حدّد الاختلاف المركزي للقطع الزائد الذي معادلته $\frac{(x - 7)^2}{36} - \frac{(y + 10)^2}{121} = 1$

6) صوت: المسافة بين بيتي صديقين ميلٌ واحدٌ، وقد سمعا صوت طائرة في أثناء حديثهما معًا على الهاتف، وقد سمع أحدهما الصوت قبل الآخر بثانيتين. إذا كانت سرعة الصوت 1100 ft/s فاكتب معادلة القطع الزائد الذي يحدّد موقع الطائرة.



٤-٤ تحديد أنواع القطوع المخروطية ودورانها

حدد نوع القطع المخروطي الذي تمثله كل معادلة مما يأتي دون كتابتها على الصورة القياسية:

$$16x^2 - 4y^2 - 8x - 8y + 1 = 0 \quad (2)$$

$$5x^2 + xy + 2y^2 - 5x + 8y + 9 = 0 \quad (1)$$

$$2x^2 + 4y^2 - 3x - 6y + 2 = 0 \quad (4)$$

$$4x^2 + 8xy + 4y^2 + x + 11y + 10 = 0 \quad (3)$$

استعمل قيمة θ المعطاة لكتابة الصورة القياسية لكل معادلة مما يأتي في المستوى $x'y'$ ، ثم حدّد نوع القطع المخروطي الذي تمثله:

$$5x^2 + 6y^2 = 30; \theta = 30^\circ \quad (6)$$

$$xy = 1; \theta = \frac{\pi}{4} \quad (5)$$



اكتب معادلة القطع المخروطي لكلّ مما يأتي في المستوى xy بناءً على معادلته المعطاة في المستوى $x'y'$ والزاوية θ .

$$\frac{(x')^2}{25} - \frac{(y')^2}{4} = 1; \theta = \frac{\pi}{3} \quad (8)$$

$$(x')^2 = 16(y'); \theta = 45^\circ \quad (7)$$

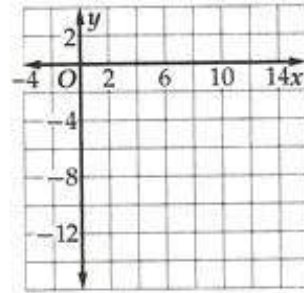
(9) اتصالات: إذا كانت معادلة مقطع طبق قمر اصطناعي متحكم في موجات مذياع بدوران 45° في المستوى $x'y'$ $5x'^2 + 3y'^2 - 2y' = 0$ فاكتب معادلة هذا القطع في المستوى xy .



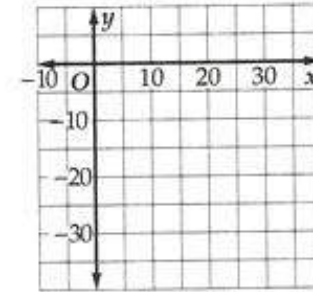
٤-٥ المعادلات الوسيطة

مثّل بيانيًا المنحنى المُعطى بالمعادلتين الوسيطيتين على الفترة المعطاة في كلٍّ مما يأتي بيانيًا:

$$x = 2t + 6, y = -\frac{t^2}{2}; -5 \leq t \leq 5 \quad (2)$$



$$x = t^2 + 1, y = \frac{t}{2} - 6; -5 \leq t \leq 5 \quad (1)$$



اكتب كل معادلتين وسيطيتين فيما يأتي بالصورة الديكارتية:

$$x = t + 5, y = -3t^2 \quad (4)$$

$$x = 2t + 3, y = t - 4 \quad (3)$$

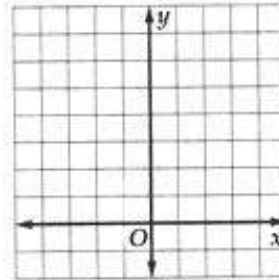
$$y = 4 \sin \theta, x = 5 \cos \theta \quad (6)$$

$$x = 3 \sin \theta, y = 2 \cos \theta \quad (5)$$

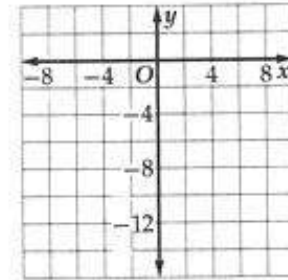


استعمل المتغير الوسيط في كلِّ مما يأتي لكتابة المعادلتين الوسيطيتين اللتين تمثلان المعادلة الديكارتية المعطاة، ثم مثل المنحنى بيانياً موضحاً السرعة والاتجاه.

$$t = 4x - 1, y = x^2 + 2 \quad (8)$$



$$t = \frac{2-x}{3}, y = \frac{3-x^2}{2} \quad (7)$$



(9) **مقذوفات:** يطلق محمود لعبة صاروخية من مستوى الأرض بسرعة ابتدائية مقدارها 80 ft/s، وبزاوية 80° مع الأفق.

(a) اكتب معادلتين وسيطيتين لتمثيل مسار الصاروخ.

(b) ما الزمن اللازم للصاروخ لقطع مسافة أفقية مقدارها 10 feet من نقطة البداية؟ وما المسافة الرأسية عند هذه النقطة؟