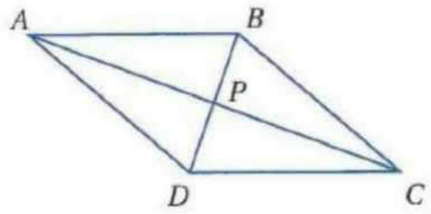
5.5

المعين والمربع

RHOMBUS AND SQUAR

برهان نظرية 5.15

أكتب برهاناً حراً لنظرية 5.15



المعطيات ABCD معين

المطلوب $\overline{AC} \perp \overline{BD}$

البرهان

بما أن ABCD معين فإن $\overline{AB} \cong \overline{BC}$ حسب التعريف

بما أن المعين متوازى أضلاع فإن قطراه ينصف كل منهما الآخر لذا فإن

$\overline{AP} \cong \overline{PC}$ كذلك $\overline{BP} \cong \overline{PB}$ حسب خاصية الإنعكاس

لذا فإن $\Delta APB \cong \Delta CPB$ حسب الحالة SSS

لذا فإن العناصر المتناظرة تكون متطابقة

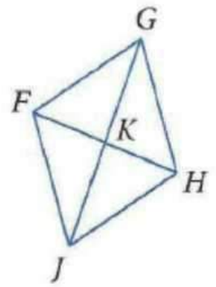
لذا فإن $\angle APB \cong \angle CPB$ وهما متجاورتان على مستقيم وبالتالى قائمتين

لذا فإن $\overline{AC} \perp \overline{BD}$ حسب تعريف التعامد

تحقق من فهمك

استعن بالمعين FGHJ المبين جانباً

1A) إذا كان FG=13, FK=5 فأوجد KJ



$\overline{FH} \perp \overline{JG}$ قطرا المعين FGHJ متعامدان

$m\angle FKJ = 90°$ تعريف التعامد

$\overline{FG} \cong \overline{FJ}$ أضلاع المعين متطابقة

$(JK)^2 = (FJ)^2 - (FK)^2$ نظرية فيثاغورث

$(JK)^2 = 169 - 25$ بالتعويض

$(JK)^2 = 144$ بالتبسيط

$JK = \sqrt{144}$ بأخذ الجذر التربيعى للطرفين

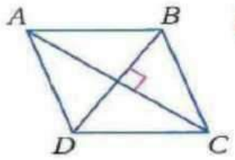
$JK = 12$ بالتبسيط

المعين هو متوازى أضلاع جميع أضلاعه متطابقة

خواص المعين له جميع خواص متوازى الأضلاع بالإضافة إلى الخاصيتين الواردتين فى النظريتين الآتيتين

نظرية 5.15

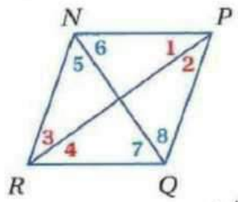
إذا كان متوازى الأضلاع معيناً فإن قطراه متعامدان



مثال إذا كان متوازى الأضلاع ABCD معيناً فإن $\overline{AC} \perp \overline{BD}$

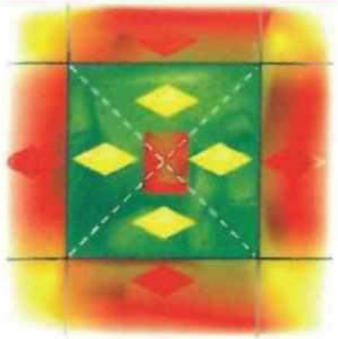
نظرية 5.16

إذا كان متوازى الأضلاع معيناً فإن كل قطر فيه ينصف كلاً من الزاويتين الواصل بين رأسيهما



مثال إذا كان متوازى الأضلاع NPQR معيناً فإن

$\angle 1 \cong \angle 2, \angle 3 \cong \angle 4, \angle 5 \cong \angle 6, \angle 7 \cong \angle 8$



تحقق من فهمك

خاطت كوثر غطاء طاولة باستعمال قطع ملونة من القماش كما فى الرسم المجاور

A) رسمت كوثر قطرى كل من القطع الصفراء فوجدت أنهما متعامدان هل يمكن استنتاج أن كل قطعة صفراء تمثل معيناً

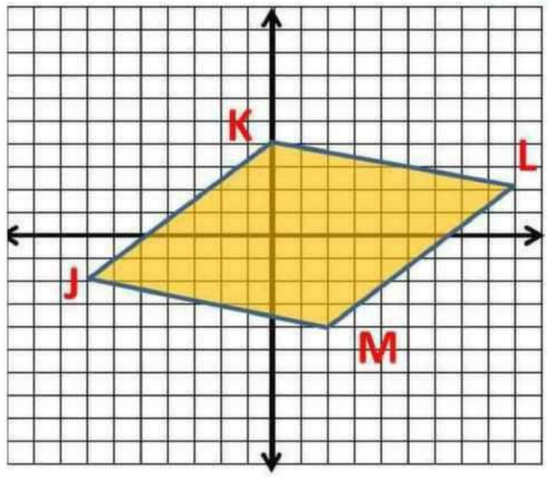
ليس بالضرورة أن تمثل معيناً لأن القطران قد يتعامدا ولكن لا ينصف كل منهما الآخر

B)إذا كانت الزوايا الأربع للقطعة الخضراء متساوية القياس والضلعان الأيسر والسفلى متساويي الطول هل يمكن استنتاج أن القطعة الخضراء تمثل مربعاً

تطابق الزوايا الأربع يعنى أن الشكل مستطيل وتطابق ضلعين متتاليين يعنى أن هذا المستطيل مربعاً

مثال:

حدد ما إذا كان متوازى الأضلاع JKLM الذى إحداثيات رؤوسه M(2,-4) , L(9,2) , K(0,4) , J(-7,-2) معيناً أو مستطيلاً أو مربعاً ، أكتب جميع التسميات التى تنطبق عليه



نوجد طولا القطرين

$$KM=\sqrt{(2-0)^2+(-4-4)^2}=\sqrt{68}=2\sqrt{17}$$

$$JL=\sqrt{(9-(-7))^2+(-4-4)^2}=\sqrt{272}=4\sqrt{17}$$

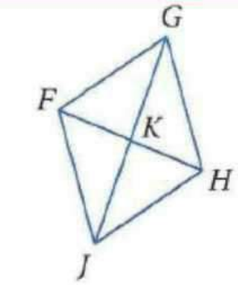
القطران غير متطابقان وبالتالى
الشكل لا يمثل مستطيل ولا يمثل مربع

نوجد ميلا القطرين

ميل $\overline{KM}$ $\quad \frac{-4-4}{2-0}=-4$

ميل $\overline{JL}$ $\quad \frac{2-(-2)}{9-(-7)}=\frac{4}{16}=\frac{1}{4}$

حاصل ضرب الميلين يساوى 1- أى أن القطران متعامدان وبالتالى الشكل يمثل معين



ص - 45

2B) إذا كان $m\angle KFG=(9y-5)^\circ$

فاوجد قيمة y $m\angle JFK=(6y+7)^\circ$

قطر المعين ينصف الزاويتين الواصل بين رأسيهما $m\angle JFK=m\angle KFG$

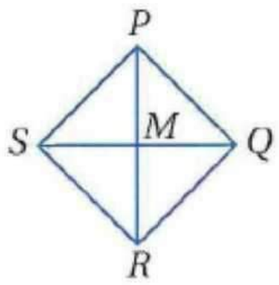
بالتعويض $\quad 6y+7=9y-5$

الجمع والطرح $\quad 7+5=9y-6y$

بالتبسيط $\quad 12=3y$

القسمة $\quad 4=y$

تحقق من فهمك



المعطيات: $\overline{SQ}$ عمود منصف ل $\overline{PR}$

$\overline{SQ}$ عمود منصف ل $\overline{PR}$

و Δ RMS متطابق الضلعين

المطلوب: PQRS مربع

بما أن $\overline{SQ}$ و $\overline{PR}$ ينصف كل منهما الآخر فإن PQRS متوازى أضلاع

بما أن $\overline{SQ}$ و $\overline{PR}$ يعامد كل منهما الآخر فإن PQRS معين

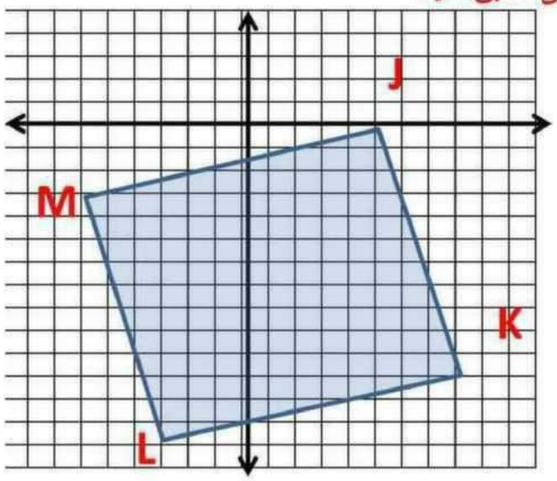
بما أن Δ RMS متطابق الضلعين فإن RS= RM

وبالتالى RP=SQ أى أن القطران متطابقان فإن PQRS مستطيل

بما أن PQRS مستطيل ومعين فإنه يكون مربعاً حسب نضرية 5.20

تحقق من فهمك

حدد ما إذا كان متوازى الأضلاع JKLM الذى إحداثيات رؤوسه J(5, 0) , K(8,-11) , L(-3,-14) , M(-6,-3) معيناً أو مستطيلاً أو مربعاً ، أكتب جميع التسميات التى تنطبق عليه



نوجد طولا القطرين

$$KM=\sqrt{(8-(-6)^2+(-11-(-3))^2}=\sqrt{320}$$

$$JL=\sqrt{(5-(-3))^2+(0-(-14))^2}=\sqrt{320}$$

القطران متطابقان وبالتالى
الشكل يمثل مستطيل

نوجد ميلا القطرين

ميل $\overline{KM}$ $\frac{-11-(-3)}{8-(-6)}=\frac{-8}{14}=\frac{-4}{7}$

ميل $\overline{JL}$ $\frac{0-(-14)}{5-(-3)}=\frac{14}{8}=\frac{7}{4}$

حاصل ضرب الميلين يساوى 1- أى أن القطران متعامدان وبالتالى الشكل يمثل معين

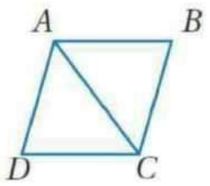
الشكل يمثل مستطيل ويمثل معيناً فهو يمثل مربعاً

هندسة إحداثيّة : حدِّد ما إذا كان $\square QRST$ المعطاة إحداثيات رؤوسه في كل مما يأتي معينًا أو مستطيلًا أو مربعًا. اكتب جميع التسميات التي تنطبق عليه. وضِّح إجابتك.

5) $Q(1,2), R(-2,-1), S(1,-4), T(4,-1)$ مستطيل ومعيّن ومربع؛ لأن الضلعين المتتاليين متطابقان ومتعامدان.

6) $Q(-2,-1), R(-1,2), S(4,1), T(3,-2)$ لا شيء ؛ لأن قطريه غير متعامدين وغير متطابقين.

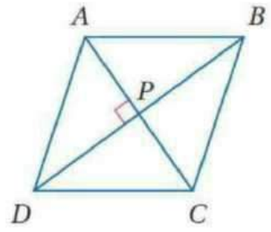
جبر: استعن بالمعين $ABCD$ المبيَّن جانبًا.



1) إذا كان $m\angle BCD = 114^\circ$، فأوجد $m\angle BAC$. **57**

2) إذا كان $AB = 2x+3$, $BC = x+7$، فأوجد CD. **11**

جبر: استعن بالمعين $ABCD$ المبيَّن جانبًا.



7) إذا كان $AB = 14$، فأوجد BC. **14**

8) إذا كان $m\angle BCD = 118^\circ$، فأوجد $m\angle BAC$. **59**

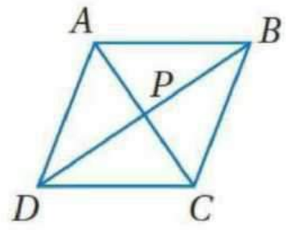
9) إذا كان $AP = 3x-1$ و $PC = x+9$، فأوجد AC. **28**

10) إذا كان $m\angle ABC = (2x-7)^\circ$ و $m\angle BCD = (2x+3)^\circ$، فأوجد $m\angle DAB$. **95**

11) إذا كان $m\angle DPC = (3x-15)^\circ$، فأوجد قيمة x. **35**

حلول
منصة مدرسية تعليمية

في المعين $ABCD$، إذا كان $PB = 12, AB = 15, m\angle ABD = 24°$،
فأوجد كلًّا مما يأتي :



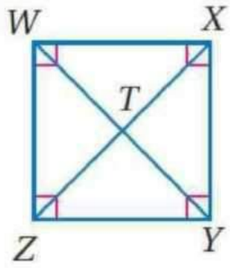
20) AP 9

21) CP 9

22) $m\angle BDA$ 90

23) $m\angle ACB$ 66

في المربع $WXYZ$، إذا كان $WT = 3$، فأوجد كلًّا مما يأتي :



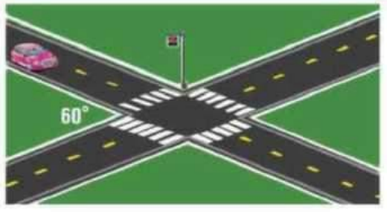
24) ZX 6

25) XY $3\sqrt{2}$

26) $m\angle WTZ$ 90°

27) $m\angle WYX$ 45°

14) طرق: يتقاطع طريقان كما في الشكل. إذا كانت ممرّات المشاة لها الطول نفسه، فصنّف الشكل الرباعيّ المكوّن من هذه الممرات. ووضّح تبريرك.



معين؛ إجابة ممكنة: قياس الزاوية المتكونة بين الشارعين 60°، والزاويتان المتقابلتان بالرأس متطابقتان، لذلك فقياس إحدى زوايا الشكل الرباعي 29°. وبما أنّ لممرّي المشاة الطول نفسه فإنّ أضلاع الشكل الرباعي متطابقة، لذلك فإنّها تشكل معينًا.

هندسة إحداثيّة: حدِّد ما إذا كان $\square JKLM$ المعطاة إحداثيات رؤوسه في كل مما يأتي معينًا أو مستطيلًا أو مربعًا. اكتب جميع التسميات التي تنطبق عليه. ووضِّح إجابتك.

16) $J(-4, -1), K(1, -1), L(4, 3), M(-1, 3)$

معيّن ؛ لأن قطريه متعامدان وغير متطابقين.

17) $J(-3, -2), K(2, -2), L(5, 2), M(0, 2)$

معيّن ؛ لأن قطريه متعامدان وغير متطابقين.

18) $J(-2, -1), K(-4, 3), L(1, 5), M(3, 1)$

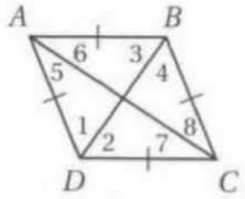
لا شيء؛ لأن قطريه غير متطابقين وغير متعامدين.

19) $J(-1, 1), K(4, 1), L(4, 6), M(-1, 6)$

مربع ومستطيل ومعيّن؛ لأن جميع أضلاعه متطابقة وجميع زواياه قوائم.

برهان: اكتب برهانًا حرًّا لكل مما يأتي :

28) النظريّة 5.16

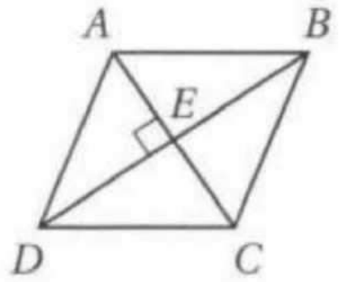


المعطيات: $ABCD$ معين.

المطلوب: إثبات أنّ كل قطر ينصّف زاويتين متقابلتين.

البرهان: نعلم أنّ $ABCD$ معين. وحسب تعريف المعين يكون $ABCD$ متوازي أضلاع. وبما أنّ الزوايا المتقابلة في متوازي الأضلاع متطابقة، فإنّ $\angle ADC \cong \angle ABC$ و $\angle BCD \cong \angle BAD$. ولأنّ جميع أضلاع المعين متطابقة فإن $\overline{DA} \cong \overline{CD} \cong \overline{BC} \cong \overline{AB}$ وحسب SAS يكون $\triangle ADC \cong \triangle ABC$ إذن $\angle 6 \cong \angle 5$ و $\angle 8 \cong \angle 7$ لأن العناصر المتناظرة في المثلثين المتطابقين متطابقة. وكذلك $\triangle BCD \cong \triangle BAD$ حسب SAS. ولذا $\angle 4 \cong \angle 3$, $\angle 2 \cong \angle 1$ لأن العناصر المتناظرة في المثلثين المتطابقين متطابقة. ومن تعريف منصّف الزاوية، فإن كل قطر ينصّف زاويتين متقابلتين.

29) النظريّة 5.17



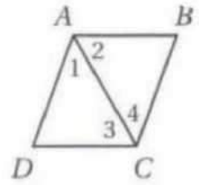
المعطيات: $ABCD$ متوازي أضلاع؛ $\overline{AC} \perp \overline{BD}$.

المطلوب: $ABCD$ معين.

البرهان: نعلم أنّ $ABCD$ متوازي أضلاع، وبما أن قطري متوازي الأضلاع ينصّف كل منهما الآخر، فإنّ $\overline{AE} \cong \overline{EC}$. وكذلك $\overline{BE} \cong \overline{BE}$ ؛ لأن تطابق القطع المستقيمة يحقق خاصية الانعكاس.

ونعلم أيضًا أنّ $\overline{AC} \perp \overline{BD}$. إذن $\angle AEB$ و $\angle BEC$ قائمتان حسب تعريف المستقيمين المتعامدين. إذن $\angle AEB \cong \angle BEC$ لأن جميع الزوايا القائمة متطابقة، لذلك $\triangle AEB \cong \triangle CEB$ بحسب SAS . إذن $\overline{AB} \cong \overline{CB}$ لأن العناصر المتناظرة في المثلثين المتطابقين متطابقة. وبما أنّ الأضلاع المتقابلة في متوازي الأضلاع متطابقة. فإنّ $\overline{AB} \cong \overline{CD}$ و $\overline{BC} \cong \overline{AD}$ إذن $\overline{AB} \cong \overline{CD} \cong \overline{BC} \cong \overline{AD}$ لأنّ تطابق القطع المستقيمة يحقق خاصية التعدي. وبما أنّ جميع أضلاع الشكل $ABCD$ متطابقة، فإنه معين حسب التعريف.

30) النظريّة 5.18



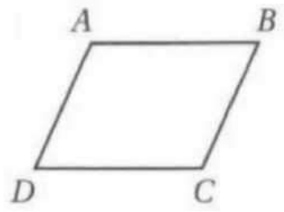
المعطيات: $ABCD$ متوازي أضلاع، القطر $\overline{AC}$ ينصّف كلاً من $\angle DAB$ و $\angle BCD$.

المطلوب: $ABCD\square$ معين.

حلول
منصة مدرسية تعليمية

البرهان: نعلم أنّ $ABCD$ متوازي أضلاع، وبما أن الأضلاع المتقابلة في متوازي الأضلاع متوازية، فإنّ $\overline{AB} \parallel \overline{DC}$. وحسب التعريف $\angle 2$ و $\angle 3$ متبادلتان داخليًّا بالنسبة للضلعين المتوازيين $\overline{AB}$ و $\overline{DC}$. وبما أنّ الزاويتين المتبادلتين داخليًّا متطابقتان، فإنّ $\angle 3 \cong \angle 2$، ولأنّ تطابق الزوايا يحقق خاصية التماثل، فإن $\angle 2 \cong \angle 3$ ونعلم أن $\overline{AC}$ تنصف كل من $\angle DAB$ و $\angle BCD$، إذن $\angle 2 \cong \angle 1$ و $\angle 4 \cong \angle 3$ حسب التعريف. ومن خاصيّة التعدّي $\angle 3 \cong \angle 1$ و $\angle 4 \cong \angle 2$ ولأن الأضلاع المقابلة للزوايا المتطابقة في مثلث تكون متطابقة، فإنّ $\overline{DC} \cong \overline{AD}$ و $\overline{BC} \cong \overline{AB}$. إذن ولأنّ ضلعين متجاورين في متوازي الأضلاع متطابقان فإنّ $ABCD$ معين.

31) النظريّة 5.19

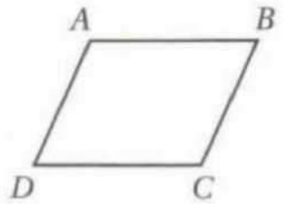


المعطيات: $ABCD$ متوازي أضلاع؛ $\overline{AB} \cong \overline{BC}$.

المطلوب: $ABCD$ معين.

البرهان: بما أنّ الأضلاع المتقابلة في متوازي الأضلاع متطابقة، فإنّ $\overline{AD} \cong \overline{BC}$ و $\overline{AB} \cong \overline{CD}$. ونعلم أيضًا أن $\overline{AB} \cong \overline{BC}$. وحسب خاصيّة التعدّي تكون $\overline{BC} \cong \overline{CD}$. إذن $\overline{BC} \cong \overline{CD} \cong \overline{AB} \cong \overline{AD}$ ؛ لذلك $ABCD$ معين حسب التعريف.

32) النظريّة 5.20



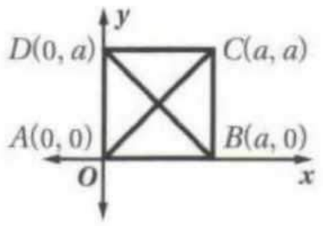
المعطيات: $ABCD$ مستطيل ومعين.

المطلوب: $ABCD$ مربّع.

البرهان: نعلم أنّ $ABCD$ مستطيل ومعين. إذن $ABCD$ متوازي أضلاع أيضًا لأن جميع المستطيلات والمعينات متوازيات أضلاع. وحسب تعريف المستطيل فإن $\angle A, \angle B, \angle C, \angle D$ جميعها قوائم. وحسب تعريف المعين، جميع الأضلاع متطابقة، لذلك $ABCD$ مربع لأنّه متوازي أضلاع أضلاعه الأربعة متطابقة وزواياه الأربع قوائم.

برهان: اكتب برهانًا إحداثيًّا للعبارة في كل من السؤالين الآتيين :

33) قطرا المربّع متعامدان.



المعطيات: $ABCD$ مربّع.

المطلوب: $\overline{AC} \perp \overline{DB}$

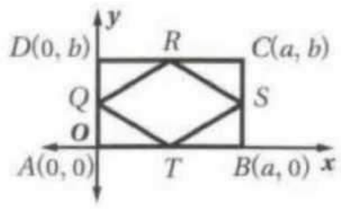
البرهان:

ميل $\overline{DB}$: $m = \dfrac{0-a}{a-0} = -1$

ميل $\overline{AC}$: $m = \dfrac{0-a}{0-a} = 1$

بما أنّ ميل $\overline{AC}$ يساوي سالب مقلوب ميل $\overline{DB}$، فإنهما متعامدان.

34) تشكِّل القطع المستقيمة الواصلة بين منتصفات أضلاع مستطيل معيّنًا.



المعطيات: $ABCD$ مستطيل.

Q, R, S, T منتصفات أضلاع المستطيل.

المطلوب: $QRST$ معين.

البرهان:

إحداثيا نقطة المنتصف Q هي:

$$\left(\frac{0+0}{2}, \frac{b+0}{2}\right) = \left(0, \frac{b}{2}\right)$$

إحداثيا نقطة المنتصف R هي:

$$\left(\frac{a+0}{2}, \frac{b+b}{2}\right) = \left(\frac{a}{2}, \frac{2b}{2}\right) = \left(\frac{a}{2}, b\right)$$

إحداثيا نقطة المنتصف S هي:

$$\left(\frac{a+a}{2}, \frac{b+0}{2}\right) = \left(\frac{2a}{2}, \frac{b}{2}\right) = \left(a, \frac{b}{2}\right)$$

إحداثيا نقطة المنتصف T هي:

$$\left(\frac{a+0}{2}, \frac{0+0}{2}\right) = \left(\frac{a}{2}, 0\right)$$

$$QR = \sqrt{\left(\frac{a}{2}-0\right)^2 + \left(b-\frac{b}{2}\right)^2} = \sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 + \left(\frac{b}{2}\right)^2}$$

$$RS = \sqrt{\left(a-\frac{a}{2}\right)^2 + \left(\frac{b}{2}-b\right)^2} = \sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 + \left(-\frac{b}{2}\right)^2}$$

$$= \sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 + \left(\frac{b}{2}\right)^2}$$

$$ST = \sqrt{\left(a-\frac{a}{2}\right)^2 + \left(\frac{b}{2}-0\right)^2} = \sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 + \left(\frac{b}{2}\right)^2}$$

$$QT = \sqrt{\left(\frac{a}{2}-0\right)^2 + \left(0-\frac{b}{2}\right)^2} = \sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 + \left(-\frac{b}{2}\right)^2}$$

$$= \sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 + \left(\frac{b}{2}\right)^2}$$

بما أنّ $QR = RS = ST = QT$

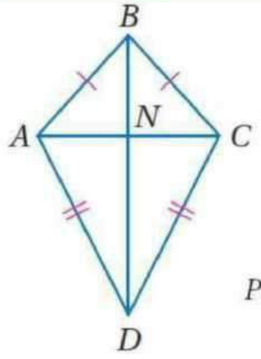
فإن $\overline{QR} \cong \overline{RS} \cong \overline{ST} \cong \overline{QT}$

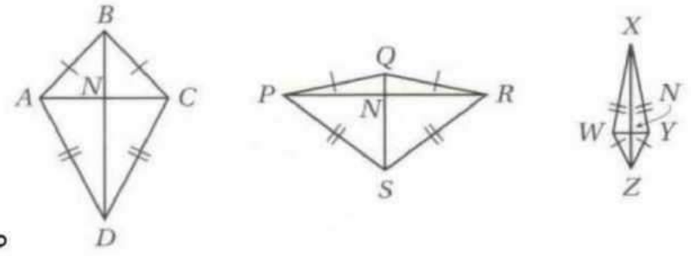
إذن $QRST$ معين.

36) **تمثيلات متعدّدة:** سوف تستقصي في هذه المسألة إحدى خصائص شكل الطائرة الورقيّة، وهو شكل رباعي يتكون من زوجين متمايزين من الأضلاع المتجاورة والمتطابقة.

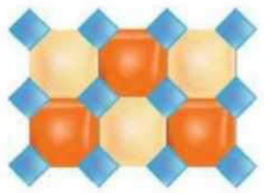
a) **هندسيًّا:** ارسم قطعةً مستقيمةً، ثم افتح الفرجار وثبته عند أحد طرفيها وارسم قوسًا فوقها، ومن دون تغيير فتحة الفرجار، ثبّت رأس الفرجار عند الطرف الآخر للقطعة المستقيمة، وارسم قوسًا يقطع القوس السابق. غيّر فتحة الفرجار وارسم قوسين أسفل القطعة المستقيمة كما فعلت سابقًا.

استعمل المستطرة وصل بين طرفَي القطعة والأقواس، وسينتج لك شكل طائرة ورقية سمّها $ABCD$. ثم كرّر ذلك مرتين، وسمِّ شكلي الطائرتين الورقيتين $PQRS$, $WXYZ$، ثم ارسم قطري كل منهما، ولتكن نقطة تقاطع قطري كل منها N.

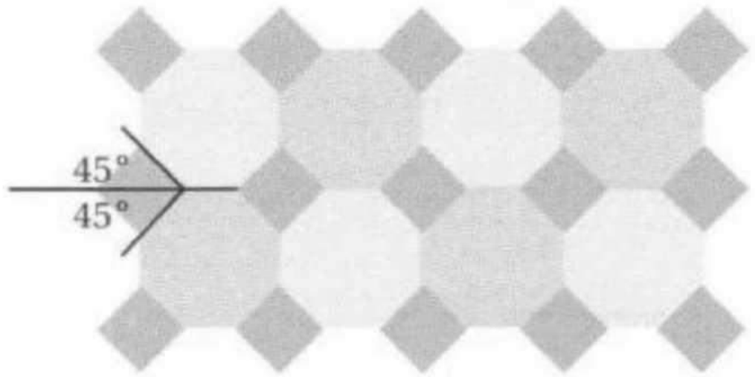




35) **تصميم:** يتكون نمط الفسيفساء المبين جانبًا من قطع ثمانيّة منتظمة وأخرى رباعيّة. صنِّف الأشكال الرباعيّة في النمط، ووضِّح تبريرك.



مربّعات؛ إجابة ممكنة: بما أن الثمانيات منتظمة فإن الاضلاع متطابقة، وتشترك الأشكال الرباعيّة مع الثمانيات في أضلاع، لذا فإن الأشكال الرباعيّة معينات أو مربّعات. وزوايا رؤوس الأشكال الرباعية تتكون من الزوايا الخارجية لأضلاع الثمانيات المجاورة للرؤوس. ومجموع قياسات الزوايا الخارجيّة لأي مضلع يساوي 360° دائمًا، ولأن الثماني المنتظم له 8 زوايا خارجية متطابقة فإنّ قياس كل منها يساوي 45° وكما هو مبيّن في الشكل فإن قياس كل زاوية للأشكال الرباعية في النمط يساوي 45° + 45° أو 90° لذلك فالشكل الرباعي يكون مربّعًا.



b) **جدوليًا :** استعمل مسطرة لقياس المسافة من N إلى كل رأس.
وسجِّل النتائج في جدول على النحو الآتي.

الشكل	المسافة من N إلى كل رأس على القطر الأقصر		المسافة من N إلى كل رأس على القطر الأطول	
$ABCD$	0.8 cm	0.8 cm	0.9 cm	0.9 cm
$PQRS$	1.2 cm	1.2 cm	0.3 cm	0.9 cm
$WXYZ$	0.2 cm	0.2 cm	1.1 cm	0.4 cm

c) **لفظيًا :** اكتب تخمينًا حول قطري شكل الطائرة الورقيّة.

القطر الأطول في شكل الطائرة الورقية يتصف القطر الآخر .

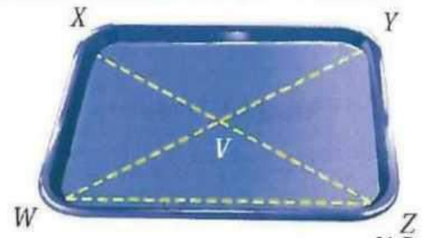
5.6

شبه المنحرف والطائرة الورقية

Trapezoid and kit

تحقق من فهمك

لإستغلال مساحة الطاولات المربعة فى مطعم
تستعمل أطباق على شكل شبه منحرف متطابق
الساقين كما فى الشكل إذا كان



$YZ = 10cm, WV = 15cm$ و $m\angle YZW = 85°$

فأوجد كلاً من

(a $m\angle XWZ$ $m\angle XWZ = m\angle YZW = 85°$

(b $m\angle WXY$ $m\angle WXY = 180 - 85 = 95°$

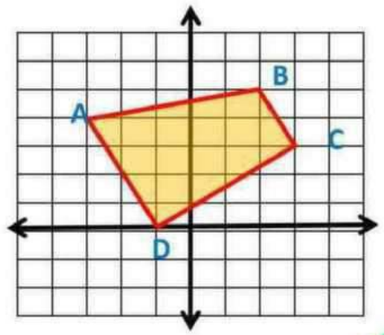
(c XZ $XZ = WY$

$XZ = WV + VY$

$XZ = 15 + 10 = 25$

مثال 2

رؤوس الشكل الرباعىABCDهى A(-3,4) , B(2,5) , C(3,3) , D(-1,0) بين أن
ABCDشبه منحرف وحدد ما إذا كان متطابق الساقين أم لا



ميل $\overline{BC}$ $\frac{3-5}{3-2} = -2$

ميل $\overline{AD}$ $\frac{0-4}{-1-(-3)} = -2$

$\overline{AD} // \overline{BC}$

ميل $\overline{BA}$ $\frac{5-4}{2-(-3)} = \frac{1}{5}$

ميل $\overline{CD}$ $\frac{0-3}{-1-3} = \frac{3}{4}$

$\overline{DC}$ و $\overline{AB}$ غير متوازيين

إذن ABCD شبه منحرف

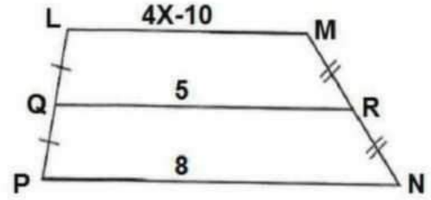
$AB = \sqrt{(-3-2)^2 + (4-5)^2} = \sqrt{26}$

$DC = \sqrt{(-1-3)^2 + (0-3)^2} = \sqrt{25} = 5$

إذن ABCD ليس متطابق الساقين

تحقق من فهمك

في الشكل المجاورإذا كانت $\overline{QR}$ قطعة متوسطة لشبه المنحرف LMNP
فما قيمة X



نظرية $QR=\frac{1}{2}(LM+PN)$

بالتعويض $5=\frac{1}{2}(4X-10+8)$

بالضرب فى٢ $10=4X-2$

بجمع ٢ $12=4X$

بالقسمة على ٤ $3=X$

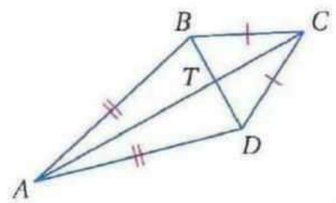
ص - 55

تحقق من فهمك (4A

إذا كان ABCD شكل طائرة ورقية فيه

$m\angle BCD=50°, m\angle BAD=38°$

فأوجد $m\angle ADC$



بما أن ABCDشكل طائرة ورقية فإن

$\angle ABC\cong\angle ADC$ نظرية 5.26

بما أن ABCD شكل رباعى فإن

$m\angle ADC+m\angle ABC+m\angle BAD+m\angle BCD=360°$ نظرية مجموع زوايا المضلع

$m\angle ADC+m\angle ADC+38+50=360°$ بالتعويض

$2m\angle ADC+88=360°$ بالتبسيط

$2m\angle ADC=272°$ بالطرح

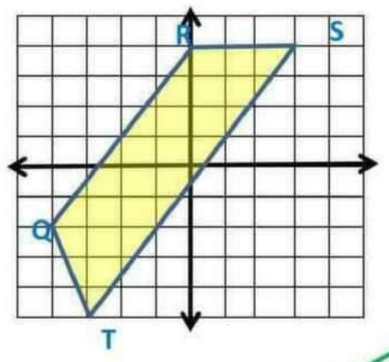
$m\angle ADC=136°$ بالقسمة

ص - 56

تحقق من فهمك

رؤوس الشكل الرباعىQRSTهى Q(-8,-4) , R(0,8) , S(6,8) , T(-6,-
(10 بين أن QRSTشبه منحرف وحدد ما إذا كان متطابق الساقين أم لا

(2



ميل $\overline{QR}$ $\frac{8+4}{0+8}=\frac{3}{2}$

ميل $\overline{ST}$ $\frac{-10-8}{-6-6}=\frac{3}{2}$

$\overline{QR}//\overline{ST}$

ميل $\overline{QT}$ $\frac{-10+4}{-6+8}=-3$

ميل $\overline{RS}$ $\frac{8-8}{6-0}=0$

إذن QRST شبه منحرف

$\overline{RS}$و$\overline{QT}$ غير متوازيين

$QT=\sqrt{(-6+8)^2+(-10+4)^2}=\sqrt{40}$

$RS=\sqrt{(0-6)^2+(8-8)^2}=\sqrt{36}=6$

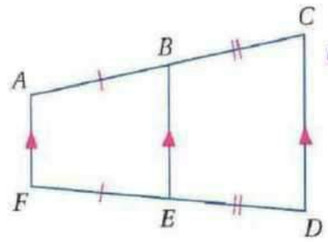
إذن QRST ليس متطابق الساقين

ص - 54

القطعة المتوسطة لشبه المنحرف هى قطعة مستقيمة تصل بين متصفى ساقيه

نظرية القطعة المتوسطة لشبه المنحرف

القطعة المتوسطة توازى كل من قاعدتى شبه المنحرف
وطولها يساوى نصف مجموع طولى القاعدتين



مثال إذا كانت $\overline{BE}$ قطعة متوسطة لشبه المنحرف ACDF
فإن $\overline{AF}\parallel\overline{BE}$, $\overline{CD}\parallel\overline{BE}$

$BE=\frac{1}{2}(AF+CD)$

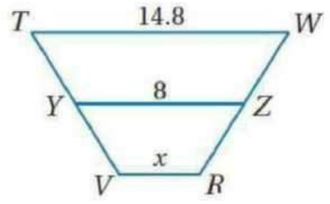
هندسة إحداثيّة: رؤوس الشكل الرباعي $ABCD$ هي $A(-4,-1), B(-2,3), C(3,3), D(5,-1)$.

3) بيّن أنّ $ABCD$ شبه منحرف. $\overline{BC} \parallel \overline{AD}$, $\overline{AB} \nparallel \overline{CD}$ ؛ إذن $ABCD$ شبه منحرف .

4) حدّد ما إذا كان $ABCD$ شبه منحرف متطابق الساقين ؟ وضِّح إجابتك.

شبه منحرف متطابق الساقين ؛ لأن $AB = \sqrt{20} = CD$

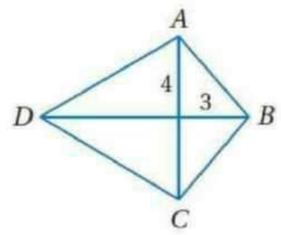
5) **إجابة قصيرة:** في الشكل المجاور: $\overline{YZ}$ قطعة متوسطة لشبه المنحرف $TWRV$. أوجد قيمة x.



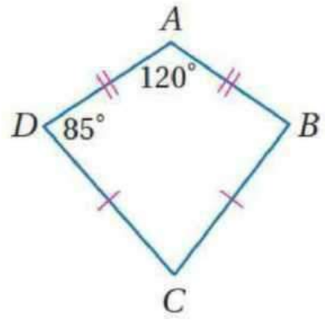
1.2

إذا كان $ABCD$ على شكل طائرة ورقيّة، فأوجد القياس المطلوب في كل من السؤالين الآتيين:

6) AB 5

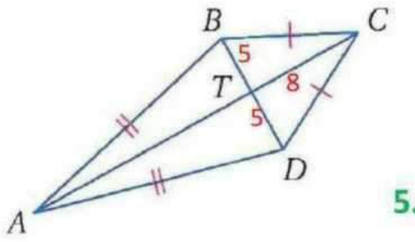


7) $m\angle C$ 70°



4B)

إذا كان TC=8 ,BT=5 فأوجد CD



بما أن ABCDشكل طائرة ورقية فإن $\overline{AC} \perp \overline{BD}$ نظرية 5.25

نظرية فيثاغورس $(DC)^2 = (TC)^2 + (TD)^2$

بالتعويض $(DC)^2 = (8)^2 + (5)^2$

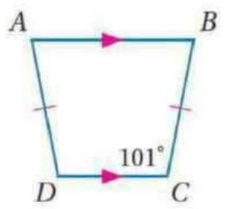
بالتبسيط $(DC)^2 = 64 + 25$

بالتبسيط $(DC)^2 = 89$

باخذ الجذر التربيعى $DC = \sqrt{89}$

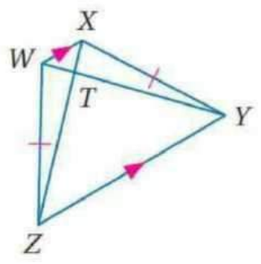
تأكد أوجد القياس المطلوب في كل من السؤالين الآتيين:

1) $m\angle D$ 101°



2) WT، إذا كان: 5

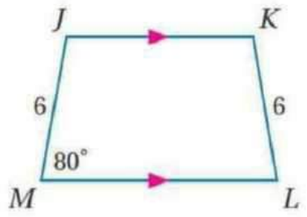
$ZX = 20, TY = 15$



تدرب و حل المسائل

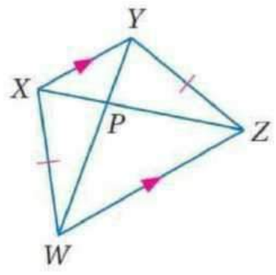
أوجد القياس المطلوب في كل من السؤالين الآتيين:

8) $m\angle K$ $100°$



9) PW، إذا كان: 15

$XZ = 18, PY = 3$



ص - 57

هندسة إحداثية: بيّن أن الشكل الرباعي المعطاة إحداثيات رؤوسه في كل مما يأتي شبه منحرف، وحدِّد ما إذا كان متطابق الساقين؟

10) $A(-2, 5), B(-3, 1), C(6, 1), D(3, 5)$

$\overline{BC} \parallel \overline{AD}, \overline{AB} \nparallel \overline{CD}$؛ $ABCD$ شبه منحرف، ولكن ليس متطابق الساقين؛ لأن $AB = \sqrt{17}$, $CD = 5$.

11) $J(-4, -6), K(6, 2), L(1, 3), M(-4, -1)$

$\overline{JK} \parallel \overline{LM}, \overline{KL} \nparallel \overline{JM}$؛ $JKLM$ شبه منحرف، ولكن ليس متطابق الساقين؛ لأن $KL = \sqrt{26}$, $JM = 5$.

ص - 57

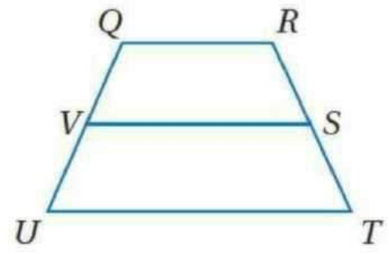
12) $Q(2, 5), R(-2, 1), S(-1, -6), T(9, 4)$

$\overline{QR} \parallel \overline{ST}, \overline{RS} \nparallel \overline{QT}$؛ $QRST$ شبه منحرف متطابق الساقين لأن $RS = \sqrt{50} = QT$.

13) $W(-5, -1), X(-2, 2), Y(3, 1), Z(5, -3)$

$\overline{XY} \parallel \overline{WZ}, \overline{WX} \nparallel \overline{YZ}$؛ $WXYZ$ شبه منحرف، ولكن ليس متطابق الساقين؛ لأن $WX = \sqrt{18}$, $YZ = \sqrt{20}$.

في الشكل المجاور، S, V نقطتا منتصفي الساقين لشبه المنحرف $QRTU$.



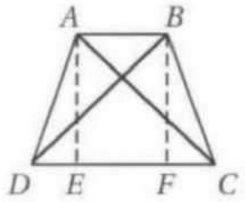
14) إذا كان $QR = 12$, $UT = 22$ ، فأوجد VS. 17

15) إذا كان $VS = 9$, $UT = 12$ ، فأوجد QR. 6

16) إذا كان $RQ = 5$, $VS = 11$ ، فأوجد UT. 17

ص - 57

21) النظريّة 5.23

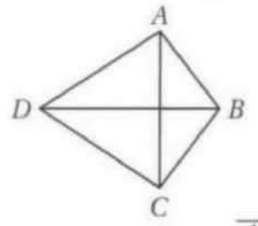


المعطيات: $ABCD$ شبه منحرف؛
$\overline{AC} \cong \overline{BD}$.

المطلوب: إثبات أنّ شبه المنحرف $ABCD$ متطابق الساقين.

البرهان: نعلم أن $ABCD$ شبه منحرف فيه $\overline{AC} \cong \overline{BD}$. ارسم القطعتين المساعدتين $\overline{BF}$ و $\overline{AE}$ بحيث تكون $\overline{AE} \perp \overline{DC}$

22) النظريّة 5.25

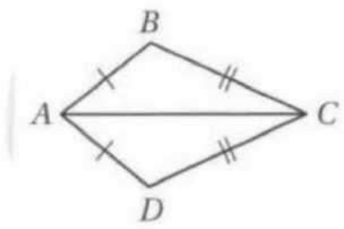


المعطيات: $ABCD$ شكل طائرة ورقية فيه
$\overline{AB} \cong \overline{BC}$ و $\overline{AD} \cong \overline{DC}$.

المطلوب: $\overline{BD} \perp \overline{AC}$

البرهان: تعلم أن $\overline{AB} \cong \overline{BC}$ و $\overline{AD} \cong \overline{DC}$
إذن B و D كلاهما على بعدين متساويين من A و C. وإذا كانت نقطة على بعدين متساويين من طرفي قطعة مستقيمة، فإنها تقع على العمود المنصّف لتلك القطعة. إذن فالمستقيم الذي يحوي النقطتين B و D عمود منصّف لـ $\overline{AC}$، لأنّه لا يوجد إلا مستقيم واحد فقط يمرّ في نقطتين مختلفتين.لذلك
$\overline{BD} \perp \overline{AC}$.

23) النظريّة 5.26

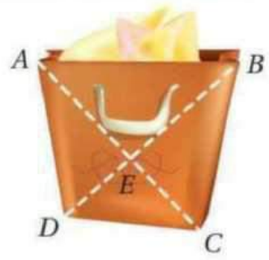


المعطيات: $ABCD$ شكل طائرة ورقيّة

المطلوب: $\angle B \cong \angle D$
$\angle BAD \ncong \angle BCD$

و $\overline{BF} \perp \overline{DC}$ وبما أن المستقيمين المتعامدين يشكلان زوايا قائمة، فإنّ $\angle AEF$ و $\angle BFE$ قائمتان، لذلك $\triangle AEC$ و $\triangle BFD$ قائما الزاوية حسب التعريف. وبما أنّ $\overline{AE} \parallel \overline{BF}$ لأن المستقيمين اللذين يقعان في نفس المستوى والعموديين على مستقيم واحد يكونان متوازيين، فإن $\overline{AE} \cong \overline{BF}$ لأن الأضلاع المتقابلة في متوازي الأضلاع متطابقة. ومن ذلك يكون $\triangle AEC \cong \triangle BFD$ حسب حالة التطابق (HL) و $\angle ACD \cong \angle BDC$ لأن العناصر المتناظرة في مثلثين متطابقين متطابقة. كذلك $\overline{DC} \cong \overline{DC}$ حسب خاصيّة الانعكاس للتطابق. إذن $\triangle ADC \cong \triangle BCD$ حسب حالة التطابق (SAS). وبما أن العناصر المتناظرة في المثلثين المتطابقين متطابقة فإن $\overline{AD} \cong \overline{BC}$. لذلك شبه المنحرف $ABCD$ متطابق الساقين.

تسوّق: الوجه الجانبي لحقيبة التسوّق المبيّنة جانبًا على شكل شبه منحرف متطابق الساقين. إذا كان $EC = 9$ in, $DB = 19$ in ، $m\angle EBC = 35^\circ$, $m\angle ABE = 40^\circ$ ، فأوجد كلًّا مما يأتي :



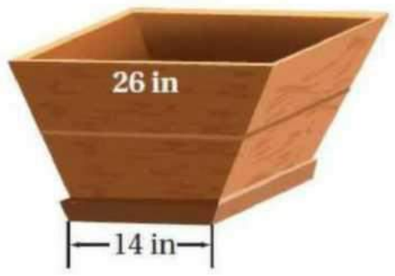
33) AE — 10 in

34) AC — 19 in

35) $m\angle BCD$ — 105°

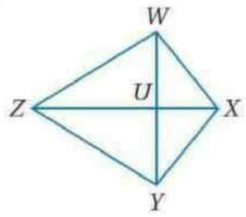
36) $m\angle EDC$ — 40°

24) نباتات: اشترى مشاري أصيصًا زراعيًّا أوجهه الأربعة على شكل شبه منحرف أبعاده كما في الشكل المجاور. إذا أراد مشاري وضع رف أفقي عند منتصف الأصيص؛ لتستند إليه النبتة، فكم يكون عرض هذا الرفّ؟



17 in

جبر: في الشكل المجاور، $WXYZ$ شكل طائرة ورقيّة.



37) إذا كان $m\angle WXY = 120^\circ, m\angle WZY = (4x)^\circ$ ، $m\angle ZWX = (10x)^\circ$ ، فأوجد $m\angle ZYX$.

$\angle ZWX \cong \angle ZYX$ (يوجد زوج واحد فقط من الزوايا المتقابلة المتطابقة، نظرية 5.26)؛ لذا

$m\angle ZYX = m\angle ZWX = 10x$

وعليه فإن: $m\angle ZWX + m\angle WXY + m\angle ZYX + m\angle WZY = 360$ (مجموع قياسات الزوايا الداخلية للشكل الرباعي)، وبالتعويض ينتج:

$10x + 120 + 10x + 4x = 360$

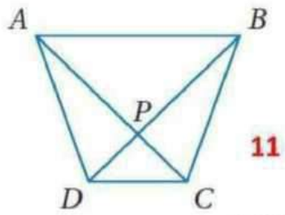
$24x + 120 = 360$

$x = 10$؛

لذا $m\angle ZYX = 10x$

$= 10\,(10) = 100^\circ$

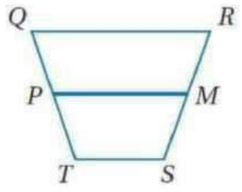
جبر: في الشكل المجاور، $ABCD$ شبه منحرف. أوجد قيمة x بحيث يكون متطابق الساقين في كلٍّ ممَّا يأتي:



27) إذا كان $AC = 3x - 7$, $BD = 2x + 8$ — 15

28) إذا كان $m\angle ABC = (4x + 11)^\circ, m\angle DAB = (2x + 33)^\circ$ — 11

جبر: في الشكل المجاور، M , P نقطتا منتصفي الساقين لشبه المنحرف $QRST$



29) إذا كان $QR = 16, PM = 12, TS = 4x$ ، فأوجد قيمة x. — 2

30) إذا كان $TS = 2x, PM = 20, QR = 6x$ ، فأوجد قيمة x. — 5

31) إذا كان $PM = 2x, QR = 3x, TS = 10$ ، فأوجد PM. — 20

32) إذا كان $TS = 2x + 2, QR = 5x + 3, PM = 13$ ، فأوجد TS. — 8

العبارات (المبررات)

1) $\overline{ZV} \cong \overline{WZ}$ ، $\overline{XY}$ تنصّف كلاً من $\overline{WZ}$ و $\overline{ZV}$. (معطيات)

2) $\frac{1}{2}WZ = \frac{1}{2}ZV$ (خاصيّة الضرب)

3) $WX = VY$ (تعريف نقطة المنتصف)

4) $\overline{WX} \cong \overline{VY}$ (تعريف تطابق القطع المستقيمة)

5) $\angle W \cong \angle ZXY$ (معطى)

6) $\overline{XY} \parallel \overline{WV}$ (إذا كانت الزوايا المتناظرة متطابقة فإن المستقيمين متوازيان)

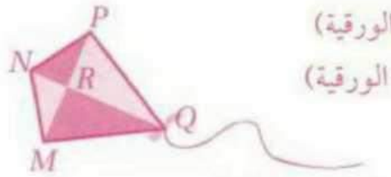
7) $WXYV$ شبه منحرف متطابق الساقين. (تعريف شبه المنحرف متطابق الساقين)

40) طائرة ورقيّة: استعن بالطائرة الورقيّة في الشكل المجاور
اكتب باستعمال خصائص شكل الطائرة الورقية برهانًا ذا عمودين
لبيان أنّ $\triangle MNR$ يطابق $\triangle PNR$.

المعطيات: $MNPQ$ شكل طائرة ورقيّة

المطلوب: $\triangle MNR \cong \triangle PNR$

البرهان:



1) $MNPQ$ شكل طائرة ورقية. (شكل الطائرة الورقية)
2) $\overline{NM} \cong \overline{NP}, \overline{MQ} \cong \overline{PQ}$ (تعريف شكل الطائرة الورقية)
3) $\overline{QN} \cong \overline{QN}$ (خاصية الانعكاس)
4) $\triangle NMQ \cong \triangle NPQ$ (SSS)
5) $\angle MNR \cong \angle PNR$ (العناصر المتناظرة في المثلثين المتطابقين متطابقة)
6) $\overline{NR} \cong \overline{NR}$ (خاصيّة الانعكاس)
7) $\triangle MNR \cong \triangle PNR$ (SAS)

38) إذا كان $m\angle WZY = 35^\circ$, $m\angle WXY = (13x + 24)^\circ$ ،
$m\angle ZWX = (13x + 14)^\circ$، فأوجد $m\angle ZYX$.

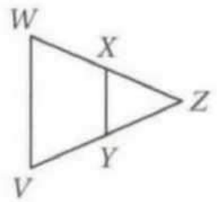
105°

برهان: اكتب برهانًا ذا عمودين.

39) المعطيات: $\overline{WZ} \cong \overline{ZV}, \angle W \cong \angle ZXY$ ، $\overline{XY}$ تنصِّف كلًّا من $\overline{WZ}$ و $\overline{ZV}$.
المطلوب: $WXYV$ شبه منحرف متطابق الساقين.

المعطيات: $\overline{WZ} \cong \overline{ZV}$ ، $\overline{XY}$ تنصّف كل من $\overline{WZ}$ و $\overline{ZV}$ ،
$\angle W \cong \angle ZXY$.

المطلوب: $WXYV$ شبه منحرف متطابق الساقين.



هندسة إحداثيّة: حدد ما إذا كان الشكل المعطاة إحداثيات رؤوسه في كل مما يأتي شبه منحرف، أم متوازي أضلاع، أم مستطيلًا، أم مربعًا، أم معينًا، أم هو شكل رباعي فحسب؟ اختر أكثر المسمّيات تحديدًا، ووضّح إجابتك.

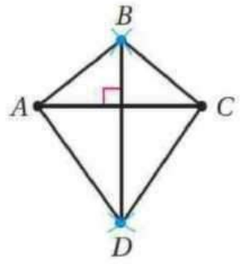
42) $A(-1, 4), B(2, 6), C(3, 3), D(0, 1)$

متوازي أضلاع، لأن أضلاعه المتقابلة متطابقة ولا يوجد زوايا قوائم، وأضلاعه المتتالية غير متطابقة.

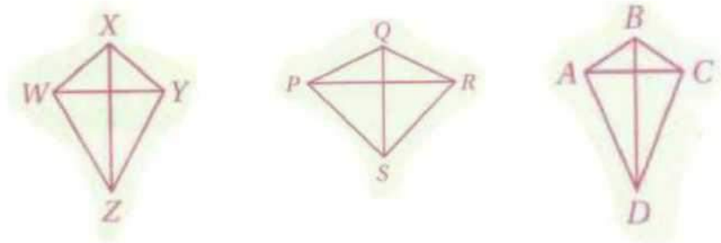
43) $W(-3, 4), X(3, 4), Y(5, 3), Z(-5, 1)$

شكل رباعي ليس فيه أضلاع متوازية.

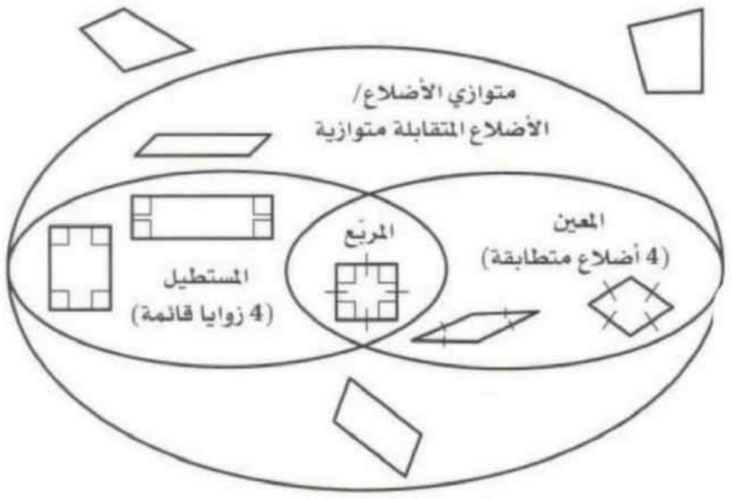
44) **تمثيلات متعدّدة:** سوف تستقصي في هذه المسألة إحدى خصائص شكل الطائرة الورقيّة

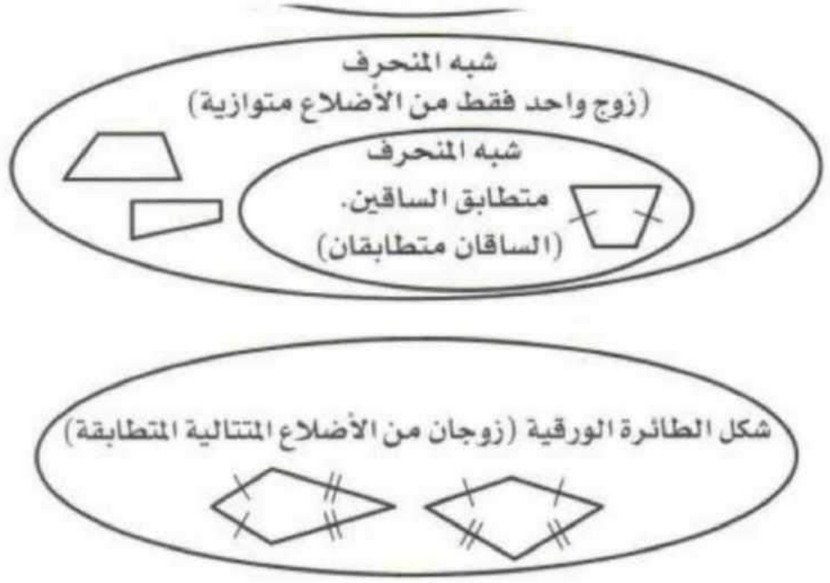


a) هندسيًّا: ارسم قطعة مستقيمة. وأنشئ عمودًا منصفًا لها لا تنصفه القطعة المستقيمة ولا تساويه طولًا. ثم صِلْ أطراف القطعتين المستقيمتين لتكوّن الشكل الرباعي $ABCD$ كما في الشكل المجاور. كرّر هذه العملية مرتين، وسمِّ الشكلين الرباعيين الجديدين $WXYZ$, $PQRS$.



41) **أشكال فن:** ارسم شكل فن يوضح جميع الأشكال الرباعيّة متضمنًا شبه المنحرف المتطابق الساقين، وشكل الطائرة الورقيّة وعموم الأشكال الرباعيّة التي لا أسماء خاصة لها.





البرهان:

$$DB = \sqrt{(a-b)^2 + (0-c)^2}$$

$$= \sqrt{(a-b)^2 + c^2}$$

$$AC = \sqrt{((a-b)-0)^2 + (c-0)^2}$$

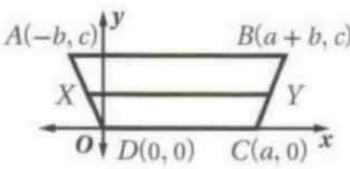
$$= \sqrt{(a-b)^2 + c^2}$$

إذن $BD = AC$ ومن ذلك $\overline{BD} \cong \overline{AC}$

46) القطعة المتوسطة لشبه المنحرف المتطابق الساقين توازي كلًّا من القاعدتين.

المعطيات: $ABCD$ شبه منحرف فيه $\overline{XY}$ قطعة متوسطة.

المطلوب: $\overline{XY} \parallel \overline{AB}, \overline{XY} \parallel \overline{DC}$



b) جدوليًا: انقل الجدول الآتي وأكمله.

الشكل	الضلع	الطول	الضلع	الطول	الضلع	الطول	الضلع	الطول
$ABCD$	$\overline{AB}$	0.8 cm	$\overline{BC}$	0.8 cm	$\overline{CD}$	1.6 cm	$\overline{DA}$	1.6 cm
$PQRS$	$\overline{PQ}$	1.4 cm	$\overline{QR}$	1.4 cm	$\overline{RS}$	1.8 cm	$\overline{SP}$	1.8 cm
$WXYZ$	$\overline{WX}$	0.4 cm	$\overline{XY}$	0.4 cm	$\overline{YZ}$	1.5 cm	$\overline{ZW}$	1.5 cm

c) لفظيًا: اكتب تخمينًا حول الشكل الرباعي الذي قطراه متعامدان وغير متطابقين، وأحدهما فقط ينصِّف الآخر.

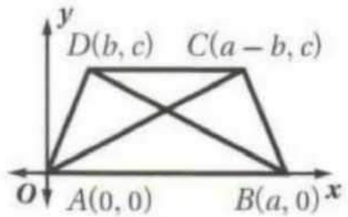
إذا كان قطراً رباعي متعامدين و ليسا متطابقين و أحدهما فقط ينصف الآخر ، فإن الشكل الرباعي هو شكل طائرة ورقية .

برهان: اكتب برهانًا إحداثيًّا لكل من العبارتين الآتيتين :

45) قطرا شبه المنحرف المتطابق الساقين متطابقان.

المعطيات: $ABCD$ شبه منحرف متطابق الساقين فيه $\overline{AD} \cong \overline{BC}$

المطلوب: $\overline{BD} \cong \overline{AC}$



أوجد مجموع قياسات الزوايا الداخليّة فى كل من المضلعين المحدبين الآتيين:

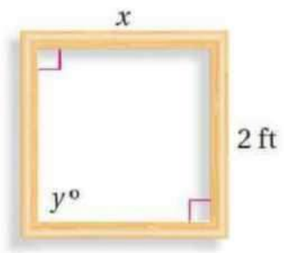
1) السداسي

720°

2) ذو 16 ضلعًا

2520°

3) فن: تصنع جُمانة إطارًا لتبسط عليه قطعة قماش وترسم عليها بألوان زيتية. ثبتت جمانة أربع قطع من الخشب بعضها ببعض واعتقدت أنّها ستمثّل مربّـعًا.



a) كيف يمكنها التحقق من أنّ الإطار مربع؟

يجب أن تقيس الزوايا
عند الرؤوس لترى فيما إذا كان قياس
كل منها 90°، أو يمكنها التحقق مما
إذا كان القطران متطابقين ومتعامدين

b) إذا كانت أبعاد الإطار كما في الشكل، فأوجد القياسات المجهولة.

$y = 90 \; ; x = 2$ ft

البرهان:

X نقطة منتصف $\overline{AD}$، وإحداثياتها $\left(\frac{-b}{2}, \frac{c}{2}\right)$

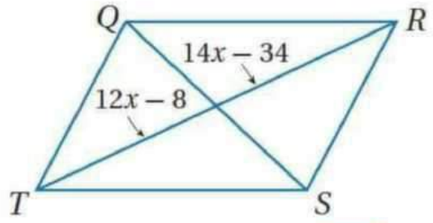
Y نقطة منتصف $\overline{BC}$ وإحداثياتها $\left(\frac{2a+b}{2}, \frac{c}{2}\right)$.

وبما أن ميل $\overline{AB}$ يساوي صفر، وميل $\overline{XY}$ يساوي صفر، وميل $\overline{DC}$ يساوي صفر فإنّ، $\overline{XY} \parallel \overline{DC}$ ، $\overline{XY} \parallel \overline{AB}$

46) القطعة المتوسطة لشبه المنحرف المتطابق الساقين توازي كلًّا من القاعدتين.

11) اختيار من متعدّد: إذا كان $QRST$ متوازي أضلاع،

فما قيمة x؟



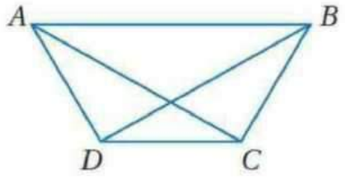
11 **A**

12 **B**

13 **C**

14 **D**

الشكل الرباعي $ABCD$ شبه منحرف متطابق الساقين.



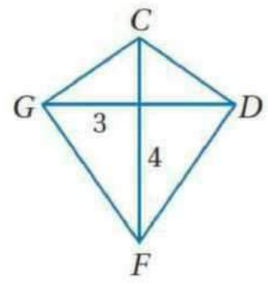
4) ما الزاوية التي تطابق $\angle C$؟ $\angle D$

5) ما الضلع الذي يوازي $\overline{AB}$؟ $\overline{DC}$

6) ما القطعة المستقيمة التي تطابق $\overline{AC}$؟ $\overline{BD}$

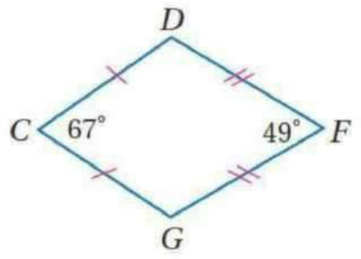
إذا كان $CDFG$ على شكل طائرة ورقيّة، فأوجد القياس المطلوب في كل من السؤالين الآتيين:

12) GF



5

13) $m\angle D$



122°

أوجد عدد أضلاع المضلع المنتظم المعطى مجموع قياسات زواياه في كل مما يأتي:

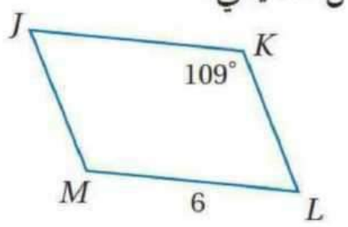
7) 900° 7

8) 1980° 13

9) 2880° 18

10) 5400° 32

استعمل $\square JKLM$ المبيَّن جانبًا لإيجاد كل مما يأتي:

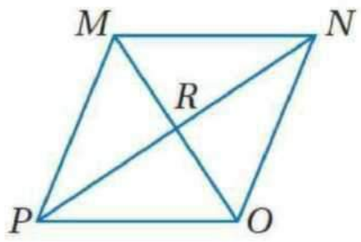


18) $m\angle JML$ 109°

19) JK 6

20) $m\angle KLM$ 71°

جبر: استعن بالمعين $MNOP$ ، للإجابة عن الأسئلة الآتية:

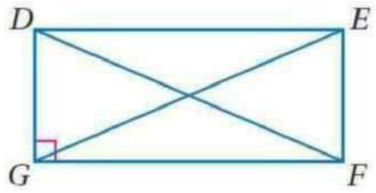


14) $m\angle MRN$ 90°

15) إذا كان $PR = 12$، فأوجد RN. 12

16) إذا كان $m\angle PON = 124^\circ$،
فأوجد $m\angle POM$. 62°

جبر: استعن بالمستطيل $DEFG$ للإجابة عن الأسئلة الآتية:



21) إذا كان $EG = 3(x-2)$, $DF = 2(x+5) - 7$، فأوجد EG. 21

22) إذا كان $m\angle EDF = (5x-3)^\circ$, $m\angle DFG = (3x+7)^\circ$،
فأوجد $m\angle EDF$. 22°

23) إذا كان $GF = 4(x-3) + 6$, $DE = 14 + 2x$، فأوجد GF. 34

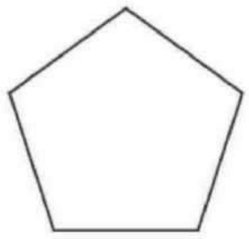
17) إنشاءات: تبني عائلة صالح ملحقًا للمنزل، وتركت فتحة لنافذة جديدة. فإذا قاس صالح الأضلاع المتقابلة فوجدها متطابقة. وقاس القطرين فوجدهما متطابقين، فهل يمكنه القول: إن فتحة النافذة تمثّل مستطيلًا؟ وضّح إجابتك.

نعم، إذا كان مستطيلًا
فإن القطرين متطابقان.

اختبار معياري

ص - 68

ما قياس الزوايا الداخليّة في الخُماسي المنتظم؟



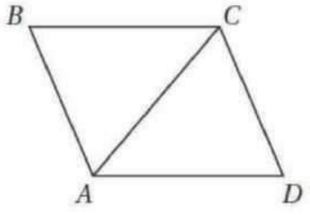
F 96°

H 120°

108° ●

J 135°

5) الشكل الرباعي $ABCD$ معينًا فيه $m\angle BCD = 120°$، أوجد $m\angle DAC$.



A 30°

C 90°

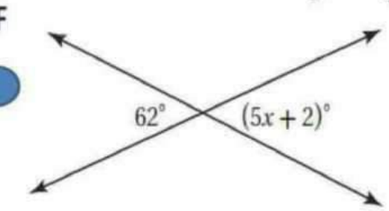
● 60°

D 120°

السابق | الصفحة الرئيسية | التالي

اختبار معياري

6) ما قيمة x في الشكل أدناه؟



F 10

● 12

H 14

J 15

7) أيّ العبارات الآتية صحيحة؟

A جميع المستطيلات مربّعات.

B جميع المعينات مربّعات.

● جميع المستطيلات متوازيات الأضلاع.

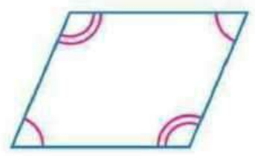
D جميع متوازيات الأضلاع مستطيلات.

حلول
منصة مدرسية تعليمية

السابق | الصفحة الرئيسية | التالي

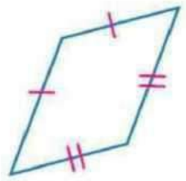
حدِّد ما إذا كان الشكل الرباعي متوازي أضلاع أم لا في كل مما يأتي.
برّر إجابتك.

24)



نعم؛ الزوايا المتقابلة متطابقة.

25)



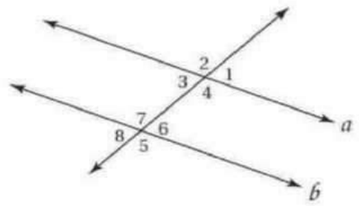
لا؛ الأضلاع المتقابلة ليست متطابقة.

ص - 65

اختبار معياري

ص - 68

1) إذا كان $a \parallel b$ ، فأيّ العبارات الآتية ليست صحيحة؟



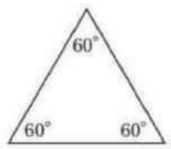
A $\angle 1 \cong \angle 3$

C $\angle 2 \cong \angle 5$

B $\angle 4 \cong \angle 7$

● D $\angle 8 \cong \angle$

2) صنّف المثلث أدناه تبعًا لقياسات زواياه. اختر المصطلح الأنسب.



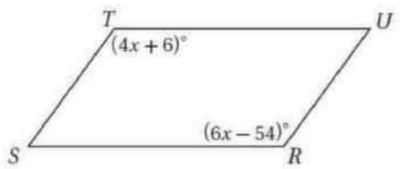
F حادّ الزوايا

● G متطابق الزوايا

H منفرج الزاوية

J قائم الزاوية

3) أوجد قيمة x في متوازي الأضلاع $RSTU$.



A 12

B 18

C 25

● D 36

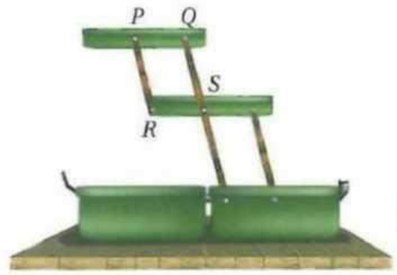
السابق | الصفحة الرئيسية | التالي

١-٣

تمييز متوازى الأضلاع

Distinguishing parallelogram

مثال ٢



فى الشكل المجاور إذا كان PQ= RS, PR =QS
فبين لماذا تبقى الطبقتان العلوية والوسطى
متوازيتان عند أى إرتفاع

لأنه فى الشكل PQRS
كل ضلعين متقابلين متطابقين فإنه متوازى أضلاع

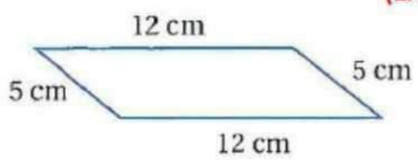
فيكون $\overline{PQ} \,//\, \overline{RS}$

أى أن الطبقتان متوازيتان بصرف النظر عن إرتفاعيهما

تحقق من فهمك

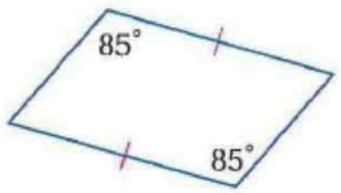
حدد ما إذا كان الشكل متوازى أضلاع أم لا . برر إجابتك

(1A



الشكل متوازى أضلاع لأن
كل ضلعين متقابلين متطابقين

(1B

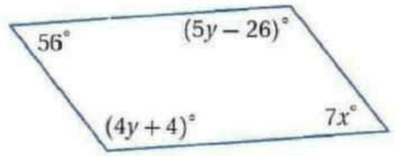


الشكل ليس متوازى أضلاع

لأنه لا يحقق أى من شروطه

تحقق من فهمك

أوجد قيمتى X, Y بحيث يكون الشكل متوازى أضلاع



كل زاويتان متقابلتان متطابقتان

7X=56

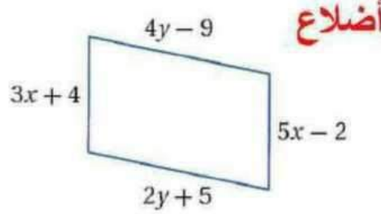
بالقسمة على ٧

X=8

5Y-26=4Y+4

بالجمع والطرح

Y=30



كل ضلعان متقابلان متطابقان

4Y-9=2Y+5

بالجمع والطرح

2Y=14

بالقسمة على 2

Y=7

5X-2=3X+4

بالجمع والطرح

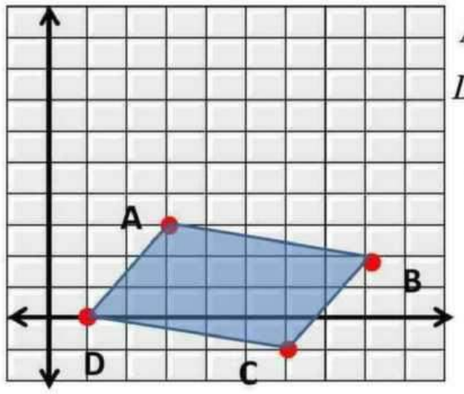
2X=6

بالقسمة على 2

X=3

تحقق من فهمك

4A) مثل فى المستوى الإحداثى الشكل الرباعى ABCD
الذى رؤوسه A(3,3) ,B(8,2) , C(6,-1) ,D(1, 0)
وحدد ما إذا كان متوازى أضلاع أم لا برر إجابتك مستخدماً صيغة المسافة

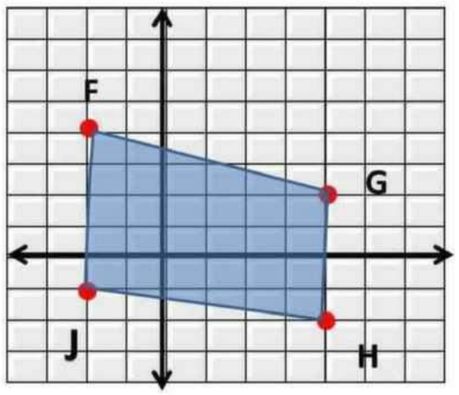


$$AB=\sqrt{(8-3)^2+(2-3)^2}=\sqrt{25+1}=\sqrt{26}$$
$$DC=\sqrt{(6-1)^2+(-1-0)^2}=\sqrt{25+1}=\sqrt{26}$$
$$AD=\sqrt{(3-1)^2+(3-0)^2}=\sqrt{4+9}=\sqrt{13}$$
$$CB=\sqrt{(8-6)^2+(2+1)^2}=\sqrt{4+9}=\sqrt{13}$$

نلاحظ أن الأضلاع المتقابلة لها نفس الطول

لذا فالشكل الرباعى KLMN متوازى أضلاع

4B) مثل فى المستوى الإحداثى الشكل الرباعى FGHJ
الذى رؤوسه J(-2, -1), H(4,-2) , G(4,2) ,F(-2,4)
وحدد ما إذا كان متوازى أضلاع أم لا برر إجابتك مستخدماً صيغة نقطة المنتصف



نقطة منتصف $\overline{FH}$

$$\left(\frac{-2+4}{2},\frac{4+(-2)}{2}\right)=(1,1)$$

نقطة منتصف $\overline{GJ}$

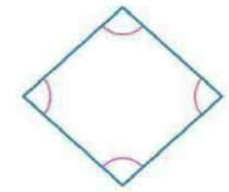
$$\left(\frac{-2+4}{2},\frac{4+(-2)}{2}\right)=(1,1)$$

القطران لا ينصف كل منهما الآخر

لذا فالشكل الرباعى FGHJ ليس متوازى أضلاع

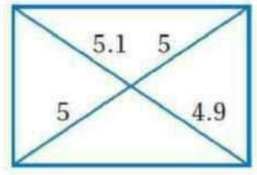
تأكد حدّد ما إذا كان كل شكل رباعي فيما يأتي متوازي أضلاع أم لا. برّر إجابتك.

1)



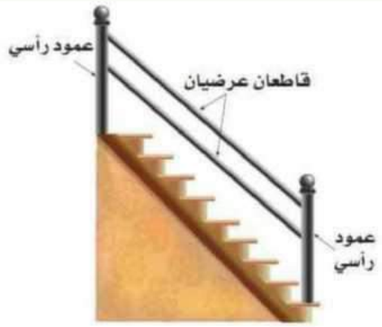
نعم ؛ لأن كل زاويتين متقابلتين متطابقتين .

2)



لا ؛ لأنه لا يحقق اي شرط من شروط متوازي الأضلاع .

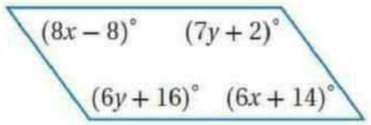
3) **نجارة:** صنع نجار دربزينًا لدَرَج يتكوّن من عمودين رأسيين؛ الأول مثبت فوق الدرجة الأولى، والثاني مثبت فوق الدرجة الأخيرة، ويصل بينهما قاطعان خشبيان كما في الشكل المجاور. كيف يمكن للنجار التحقق من أن القاطعين الخشبيين العرضيين متوازيان، وذلك بأقل عدد من مرات القياس، إذا علمت بأن الدرجتين الأولى والأخيرة مستويتان مع الأرض.



$AP = CP$، $BP = DP$ ؛ إجابة ممكنة:
إذا كان قطرا شكل رباعي ينصّف كل منهما الآخر فيكون الشكل الرباعي متوازي اضلاع. فإذا كان $AP = CP$, $BP = DP$، فإن الخيط يشكّل متوازي أضلاع

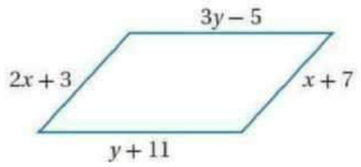
جبر: أوجد قيمتي x, y في كل مما يأتي بحيث يكون الشكل الرباعي متوازي أضلاع.

4)



X = 11 ,
Y = 14

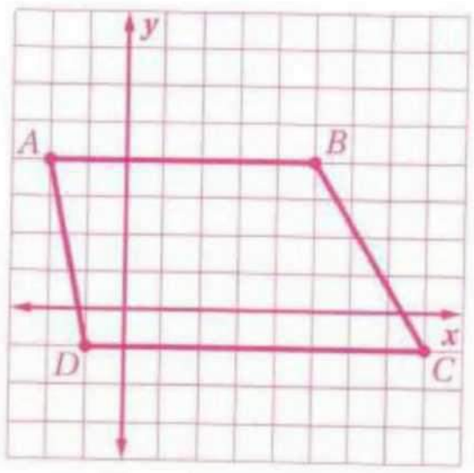
5)



X = 4 ,
Y = 8

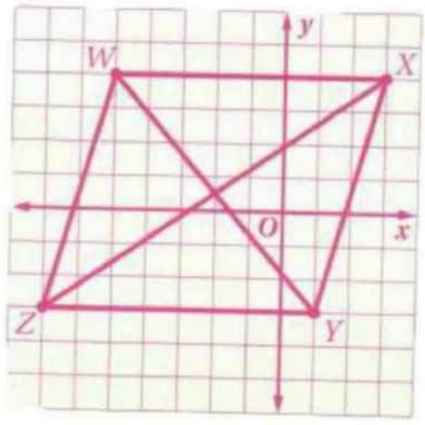
هندسة إحداثيّة: مثّل في المستوى الإحداثي الشكل الرباعي المعطاة إحداثيات رؤوسه فيما يأتي. وحدّد ما إذا كان متوازي أضلاع أم لا، برّر إجابتك باستعمال الطريقة المحدّدة في السؤال.

6) $A(-2, 4), B(5, 4), C(8, -1), D(-1, -1)$ ، صيغة الميل.



لا؛ يجب أن يكون كل ضلعين متقابلين متوازيان. وبما أن ميل $\overline{BC} \neq$ ميل $\overline{AD}$، فإنّ $ABCD$ ليس متوازي أضلاع.

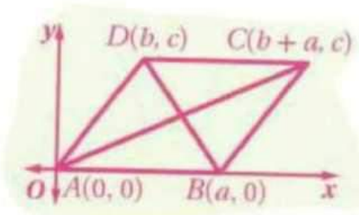
7) $W(-5, 4), X(3, 4), Y(1, -3), Z(-7, -3)$ ، صيغة نقطة المنتصف.



نعم؛ نقطة منتصف كل من $\overline{WY}$ و $\overline{XZ}$ هي $\left(-2, \frac{1}{2}\right)$.

وبما أنّ القطرين ينصّف كل منهما الآخر، فإنّ الشكل $WXYZ$ متوازي أضلاع.

8) اكتب برهانًا إحداثيًّا للعبارة الآتية: إذا كان الشكل الرباعي متوازي أضلاع، فإنّ قطريه ينصّف كل منهما الآخر.



المعطيات: $ABCD$ متوازي أضلاع.

المطلوب: AC و DB ينصّف كل منهما الآخر.

البرهان:

نقطة منتصف $\overline{AC}$

$$= \left(\frac{0+(a+b)}{2}, \frac{0+c}{2}\right)$$

$$= \left(\frac{a+b}{2}, \frac{c}{2}\right)$$

ونقطة منتصف $\overline{DB}$

$$= \left(\frac{a+b}{2}, \frac{0+c}{2}\right)$$

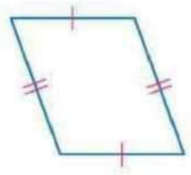
$$= \left(\frac{a+b}{2}, \frac{c}{2}\right)$$

إذن، $\overline{AC}$ و $\overline{DB}$ ينصّف كل منهما الآخر.

تدرب و حل المسائل

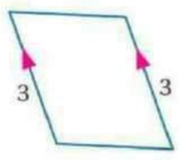
حدّد ما إذا كانت المعطيات في كل مما يأتي كافية ليكون الشكل الرباعي متوازي أضلاع أم لا. برّر إجابتك.

9)



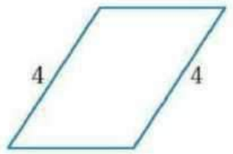
نعم ؛ لأن كل ضلعين متقابلتين متطابقتان .

10)



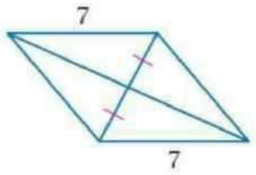
نعم ؛ لأن فيه ضلعين متقابلتين متوازيان و متطابقان .

11)



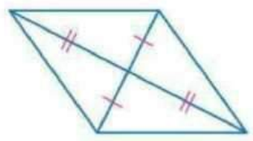
لا ؛ لأنه لا يحقق أي شرط من شروط متوازي الأضلاع

12)



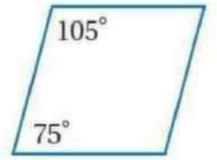
لا ؛ لأنه لا يحقق أي شرط من شروط متوازي الأضلاع

13)



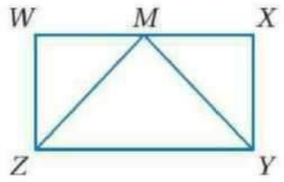
نعم ؛ لأن قطريه ينصف كل منهما الآخر .

14)



لا ؛ لأنه لا يحقق أي شرط من شروط متوازي الأضلاع .

15) برهان: إذا كان $WXYZ$ متوازي أضلاع، حيث $\angle X \cong \angle W$، M نقطة منتصف $\overline{WX}$ ، فاكتب برهانًا حرًّا لإثبات أن $\triangle ZMY$ متطابق الضلعين.



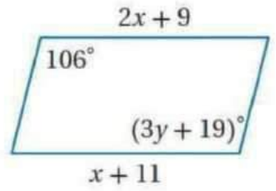
المعطيات: $WXYZ$ متوازي أضلاع فيه $\angle X \cong \angle W$ و M نقطة منتصف $\overline{WX}$.

المطلوب: ZMY مثلث متطابق الضلعين.

البرهان: بما أنّ $WXYZ$ متوازي أضلاع، فإنّ $\overline{XY} \cong \overline{WZ}$. وبما أن M نقطة منتصف $\overline{WX}$، فإنّ $\overline{MX} \cong \overline{WM}$. ومعطى أنّ $\angle X \cong \angle W$، لذلك وحسب SAS فإنّ $\triangle YXM \cong \triangle ZWM$. ولأن العناصر المتناظرة في مثلثين متطابقين متطابقة، فإن $\overline{YM} \cong \overline{ZM}$. إذن ZMY مثلث متطابق الضلعين بحسب تعريف المثلث متطابق الضلعين.

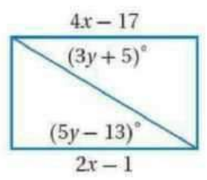
جبر: أوجد قيمتي x, y في كل مما يأتي بحيث يكون الشكل الرباعي متوازي أضلاع.

(17



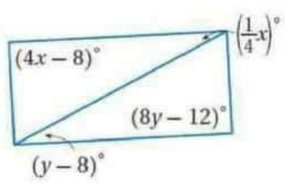
x = 2 , y = 29

(18



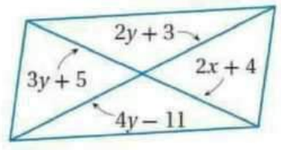
x = 8 , y = 9

(19



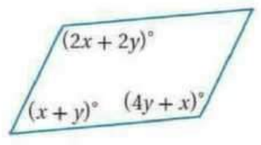
x = 30 , y = 15.5

(20



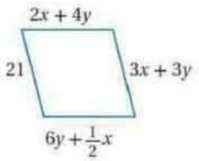
x = 11 , y = 7

(21



x = 40 , y = 20

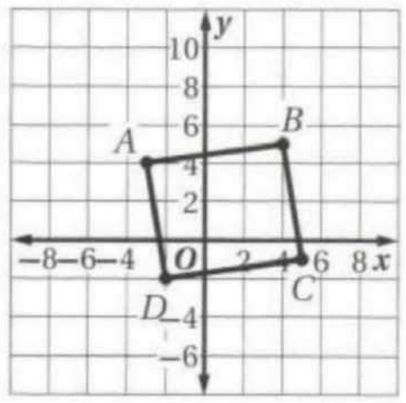
(22



x = 4 , y = 3

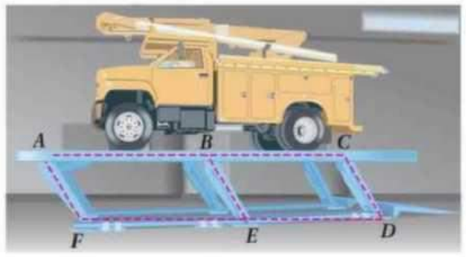
هندسة إحداثيّة: مثّل في المستوى الإحداثي الشكل الرباعي المعطاة إحداثيات رؤوسه فيما يأتي. وحدّد ما إذا كان متوازي أضلاع أم لا، برّر إجابتك باستعمال الطريقة المحدّدة في السؤال.

23) $A(-3, 4)$، $B(4, 5)$، $C(5, -1)$، $D(-2, -2)$، صيغة الميل.



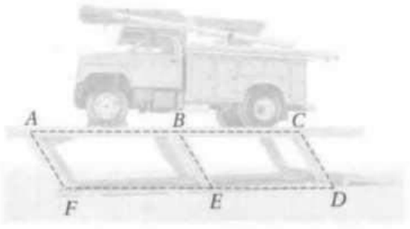
نعم؛ ميل $\overline{AB}$ يساوي ميل $\overline{CD}$ ويساوي $\frac{1}{7}$ لذلك $\overline{AB} \parallel \overline{CD}$.
وبما أنّ ميل $\overline{BC}$ يساوي ميل $\overline{AD}$ ويساوي 6-، فإنّ $\overline{BC} \parallel \overline{AD}$
ولأن كل ضلعين متقابلين متوازيان فإنّ $ABCD$ متوازي أضلاع.

16) رافعات: تستعمل رافعات متوازيات الأضلاع لرفع المركبات الثقيلة عند صيانتها. ففي الشكل أدناه: $ABEF$, $BCDE$ متوازيا أضلاع. اكتب برهانًا ذا عمودين لإثبات أن $ACDF$ متوازي أضلاع أيضًا.



المعطيات: $ABEF$ متوازي أضلاع؛ $BCDE$ متوازي أضلاع.

المطلوب: $ACDF$ متوازي أضلاع.



البرهان:

العبارات (المبررات)

1) $ABEF$ متوازي أضلاع؛ $BCDE$ متوازي أضلاع (معطيات)

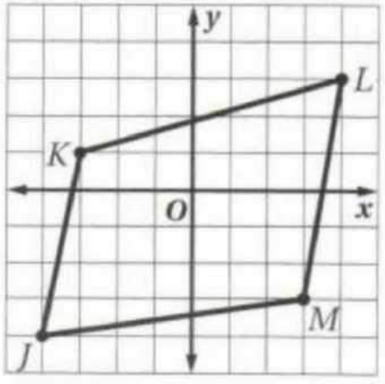
2) $\overline{AF} \cong \overline{BE}, \overline{BE} \cong \overline{CD}, \overline{AF} \parallel \overline{BE}, \overline{BE} \parallel \overline{CD}$ (تعريف متوازي الأضلاع)

3) $\overline{AF} \cong \overline{CD}, \overline{AF} \parallel \overline{CD}$ (خاصية التعدّي)

4) $ACDF$ متوازي أضلاع. (إذا كان ضلعان في شكل رباعي متطابقين ومتوازيين فإنّه متوازي أضلاع)

24) $J(-4,-4)$، $K(-3,1)$، $L(4,3)$، $M(3,-3)$ ، صيغة المسافة بين نقطتين.

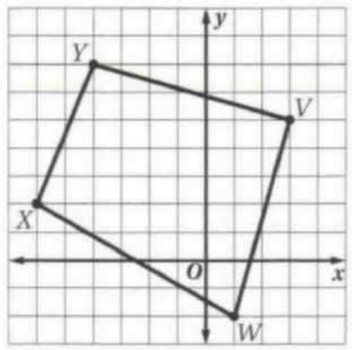
لا؛ يجب أن يكون كل ضلعين متقابلين متطابقين. والمسافة بين K و L تساوي $\sqrt{53}$. والمسافة بين L و M تساوي $\sqrt{37}$. والمسافة بين M و J تساوي $\sqrt{50}$. والمسافة بين J و K تساوي $\sqrt{26}$. وبما أن كل ضلعين متقابلين ليسا متطابقين، فإنّ $JKLM$ ليس متوازي أضلاع.



25) $V(3,5)$، $W(1,-2)$، $X(-6,2)$، $Y(-4,7)$ ، صيغة الميل.

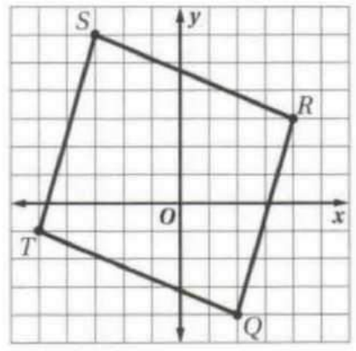
لا؛ يجب أن يكون فيه ضلعان متقابلان متوازيين ومتطابقين.

ميل $\overline{YV}$ يساوي $-\frac{2}{7}$، وميل $\overline{XW}$ يساوي $-\frac{4}{7}$، وميل $\overline{YX}$ يساوي $\frac{5}{2}$، وميل $\overline{VW}$ يساوي $\frac{7}{2}$. وبما أن ميل $\overline{YV}$ لا يساوي ميل $\overline{XW}$، وميل $\overline{YX}$ لا يساوي ميل $\overline{VW}$، فإنّ $VWXY$ ليس متوازي أضلاع.



26) $Q(2,-4)$، $R(4,3)$، $S(-3,6)$، $T(-5,-1)$ ، صيغتا الميل والمسافة بين نقطتين.

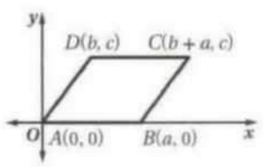
نعم؛ يجب أن يكون فيه ضلعان متقابلان متوازيين ومتطابقين. وبما أنّ ميل $\overline{QR}$ يساوي ميل $\overline{ST}$ ويساوي $\frac{7}{2}$، فإن $\overline{ST} \parallel \overline{QR}$ ولأن $QR = ST = \sqrt{53}$ فإن $\overline{ST} \cong \overline{QR}$. إذن، $QRST$ متوازي أضلاع.



27) اكتب برهانًا إحداثيًّا للعبارة: إذا كان كل ضلعين متقابلين في الشكل الرباعي متطابقين، فإنه متوازي أضلاع.

المعطيات: $\overline{AB} \cong \overline{CD}, \overline{AD} \cong \overline{BC}$

المطلوب: $ABCD$ متوازي أضلاع.



البرهان:

ميل $\overline{AD}$: $m = \frac{c-0}{b-0} = \frac{c}{b}$

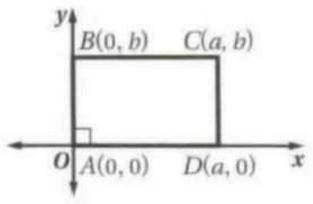
ميل $\overline{AB}$: $m = \frac{0-0}{a-0} = 0$

ميل $\overline{BC}$: $m = \frac{c-0}{b+a-a} = \frac{c}{b}$

ميل $\overline{CD}$: $m = \frac{c-c}{b+a-b} = 0$

لذلك $\overline{AD} \parallel \overline{BC}$ و $\overline{AB} \parallel \overline{CD}$. إذن وحسب تعريف متوازي الأضلاع يكون $ABCD$ متوازي أضلاع.

28) اكتب برهانًا إحداثيًّا للعبارة: إذا كانت إحدى زوايا متوازي الأضلاع قائمة، فإنّ جميع زواياه قوائم.



المعطيات: $ABCD$ متوازي أضلاع.

$\angle A$ زاوية قائمة.

المطلوب: $\angle D$ ، $\angle C$ ، $\angle B$ قوائم.

البرهان:

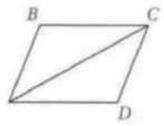
ميل $\overline{BC}$: $m=\frac{b-b}{a-0}=0$ ، ميل $\overline{CD}$: غير معرّف

ميل $\overline{AD}$: $m=\frac{0-0}{a-0}=0$ ، ميل $\overline{AB}$: غير معرّف

لذلك $\overline{AB}\perp\overline{BC}$, $\overline{CD}\perp\overline{AD}$, $\overline{BC}\perp\overline{CD}$.

إذن، $\angle B$ ، $\angle C$ ، $\angle D$ قوائم.

29) برهان: اكتب برهانًا حرًّا للنظرية 5.10.



المعطيات: $\angle A\cong\angle C, \angle B\cong\angle D$

المطلوب: $ABCD$ متوازي أضلاع.

البرهان: ارسم $\overline{AC}$ لتشكل مثلثين.

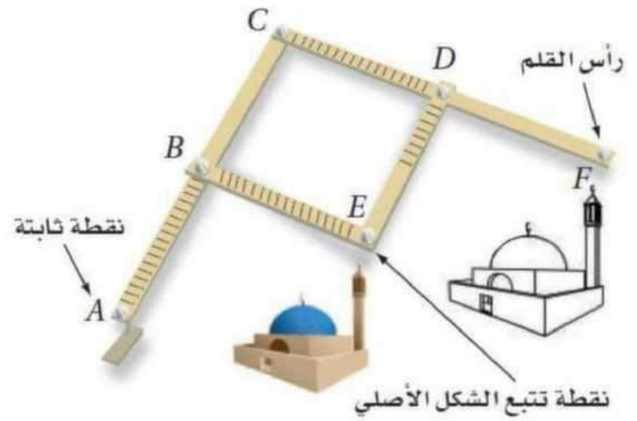
وبما أنّ مجموع قياسات زوايا أي مثلث يساوي $180°$ فإنّ مجموع قياسات زوايا المثلثين يساوي $360°$. إذن $m\angle A+m\angle B+m\angle C+m\angle D=360°$ وبما أنّ $\angle A\cong\angle C$ و $\angle B\cong\angle D$ فإنّ $m\angle A=m\angle C$ و $m\angle B=m\angle D$.

وبالتعويض $m\angle A+m\angle A+m\angle B+m\angle B=360°$

إذن $2(m\angle A)+2(m\angle B)=360°$ وبقسمة كلا الطرفين على 2 ينتج $m\angle A+m\angle B=180°$ لذا فإن الزاويتين المتحالفتين متكاملتان و $\overline{AD}\parallel\overline{BC}$. وبالمثل $2(m\angle A)+2(m\angle D)=360°$

أو $m\angle A+m\angle D=180°$ إذن، هاتان الزاويتان المتحالفتان متكاملتان و $\overline{AB}\parallel\overline{DC}$. إذن الأضلاع المتقابلة متوازية، لذلك فالشكل $ABCD$ متوازي أضلاع.

30) المِنْسَاخ: استعن بمعلومات الربط مع الحياة إلى اليمين والشكل أدناه.



a) إذا كان $\overline{DF}\cong\overline{DE}$, $\overline{AB}\cong\overline{CD}\cong\overline{BE}$, $\overline{AC}\cong\overline{CF}$، فاكتب برهانًا حرًّا لإثبات أنّ $\overline{BE}\parallel\overline{CD}$.

المعطيات: $\overline{AC}\cong\overline{CF}$, $\overline{AB}\cong\overline{CD}\cong\overline{BE}$, $\overline{DF}\cong\overline{DE}$

المطلوب: $\overline{BE}\parallel\overline{CD}$.

البرهان: نعلم أنّ $\overline{AC}\cong\overline{CF}$, $\overline{AB}\cong\overline{CD}\cong\overline{BE}$, $\overline{DF}\cong\overline{DE}$

إذن $AC=CF$ حسب تعريف التطابق، $AC=AB+BC$

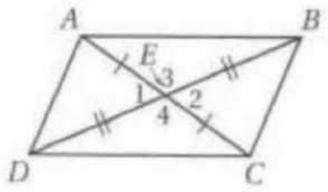
و $CF=CD+DF$ حسب مسلمة جمع القطع المستقيمة. وبالتعويض، يكون $AB+BC=CD+DF$، وباستعمال التعويض مرّة أخرى يكون $AB+BC=AB+DF$ وحسب خاصية الطرح $BC=DF$.

إذن $\overline{DF}\cong\overline{BC}$ حسب تعريف التطابق، و $\overline{BC}\cong\overline{DE}$ حسب خاصيّة التعدّي. وإذا كان كل ضلعين متقابلين لشكل رباعي متطابقين فإن الشكل الرباعي متوازي أضلاع. إذن $BCDE$ متوازي أضلاع ومن تعريف متوازي الأضلاع يكون $\overline{BE}\parallel\overline{CD}$.

b) مقياس الرسم للشكل المنسوخ بالنسبة للشكل الأصلي هو نسبة CF إلى BE،
فإذا كان $AB = 12\,\text{in}, DF = 8\text{in}$ ، وطول الشكل الأصلي $5.5\,\text{in}$، فما طول صورة الشكل المنسوخ؟

9.2 in تقريباً

31) برهان: اكتب برهانًا ذا عمودين للنظرية 5.11



المعطيات: $\overline{DE} \cong \overline{EB}, \overline{AE} \cong \overline{EC}$

المطلوب: $ABCD$ متوازي أضلاع.

العبارات (المبررات)

1) $\overline{AE} \cong \overline{EC}, \overline{DE} \cong \overline{EB}$ (معطيات)

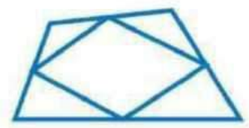
2) $\angle 1 \cong \angle 2, \angle 3 \cong \angle 4$ (الزاويتان المتقابلتان بالرأس متطابقتان)

3) $\triangle ABE \cong \triangle CDE, \triangle ADE \cong \triangle CBE$ (SAS)

4) $\overline{AB} \cong \overline{DC}, \overline{AD} \cong \overline{BC}$ (العناصر المتناظرة في المثلثين المتطابقين متطابقة)

5) $ABCD$ متوازي أضلاع (إذا كان كل ضلعين متقابلين في شكل رباعي متطابقين فإنّه متوازي أضلاع)

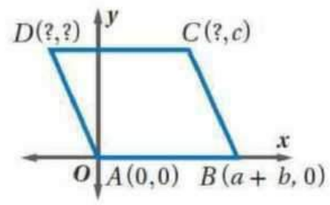
34) برهان: اكتب برهانًا إحداثيًّا لإثبات أن القطع المستقيمة الواصلة بين منتصفات أضلاع أي شكل رباعي تشكِّل متوازي أضلاع.



أوجد الإحداثيات المجهولة لرؤوس كل من متوازيي الأضلاع الآتيين:

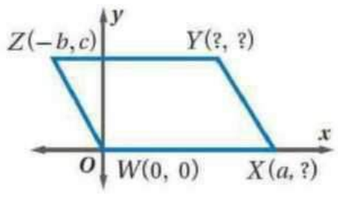
(32

$C(a, c), D(-b, c)$



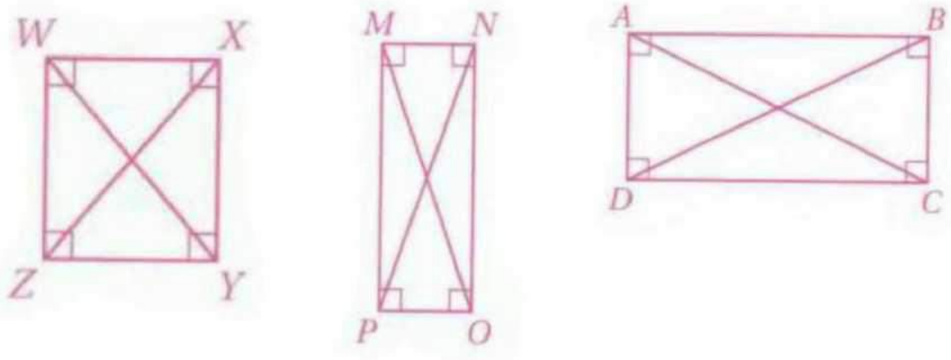
(33

$Y(a - b, c), X(a, 0)$

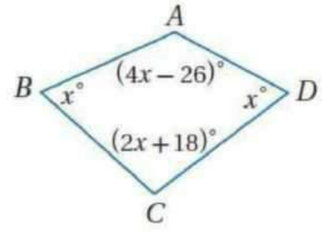


35) **تمثيلات متعددة:** في هذه المسألة سوف تستقصي إحدى خصائص المستطيل.

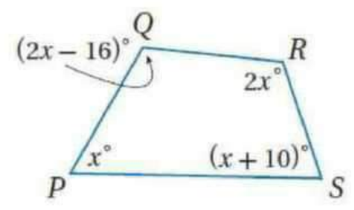
a) **هندسيًا:** ارسم ثلاثة مستطيلات بأبعاد مختلفة وسمِّها *ABCD*, *MNOP*, *WXYZ*، ثم ارسم قطري كل منها.



أوجد قياسات جميع الزوايا الداخلية في كل من المضلعين الآتيين:

5) 

$m\angle A = 158°, m\angle B = 46°,$
$m\angle C = 110°, m\angle D = 46°$

6) 

$m\angle P = 61°, m\angle Q = 106°,$
$m\angle R = 122°, m\angle S = 71°$

أوجد عدد أضلاع المضلع المنتظم المعطى مجموع قياسات زواياه الداخلية في كل مما يأتي :

7) $720°$ 6

8) $1260°$ 9

9) $1800°$ 12

10) $4500°$ 27

أوجد مجموع قياسات الزوايا الداخليّة في كل من المضلعات المحدبة الآتية : (الدرس 1-5)

1) الخماسي $540°$

2) السباعي $900°$

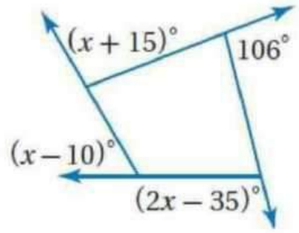
3) ذو 18 ضلعًا $2880°$

4) ذو 23 ضلعًا $3780°$

حلول
منصة مدرسية تعليمية

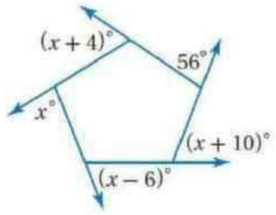
أوجد قيمة x في كل من الشكلين الآتيين :

11)



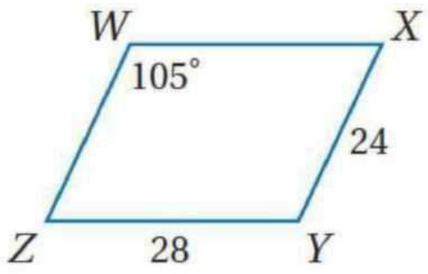
71

12)



74

استعمل $\square WXYZ$ لإيجاد كل مما يأتي :



13) $m\angle WZY$ — 75°

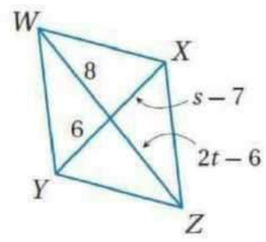
14) WZ — 24

15) $m\angle XYZ$ — 105°

16) إنارة : استعمل مقبض الإنارة العلوي الذي يشكل متوازي أضلاع في إيجاد $m\angle p$ في $\square PQRS$.

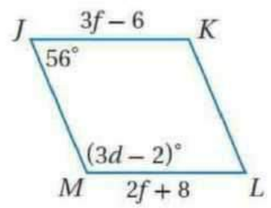
جبر : أوجد قيم المتغيرات في كل من متوازيي الأضلاع الآتيين :

17)



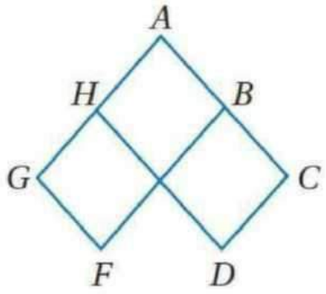
$s = 13, t = 7$

18)



$d = 42, f = 14$

19) برهان: اكتب برهانًا ذا عمودين.



المعطيات: $\square GFBA$, $\square HACD$

المطلوب: $\angle F \cong \angle D$

البرهان:

العبارات (المبررات)

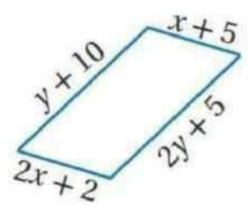
1) $\square GFBA$, $\square HACD$. (معطيات)

2) $\angle A \cong \angle D$, $\angle F \cong \angle A$ (الزوايا المتقابلة في متوازي الأضلاع متطابقة)

3) $\angle F \cong \angle D$ (خاصية التعدّي)

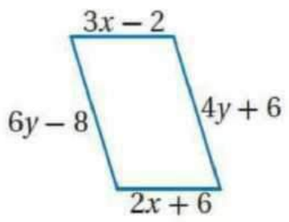
أوجد قيمتي x , y في كل مما يأتي بحيث يكون الشكل الرباعي متوازي أضلاع :

(20



$x = 3, y = 5$

(21

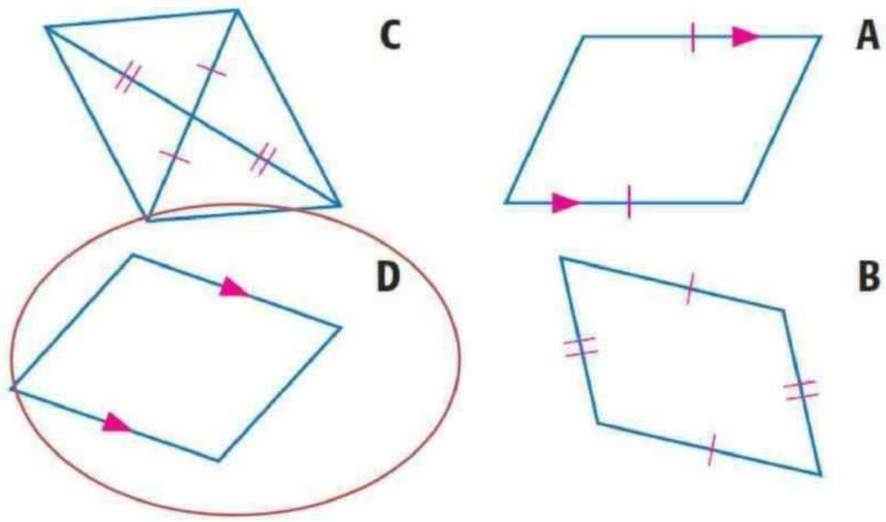


$x = 8, y = 7$

22) طاولات: لماذا يبقى سطح طاولة كي الثياب في الصورة أدناه موازيًا لأرضية الغرفة دائمًا؟ (الدرس 3-5)

عُمل الساقان بحيث ينصف كل منهما الآخر، إذن فالشكل الرباعي المتكون من أطراف الساقين يكون دائمًا متوازي الأضلاع. لذلك فسطح الطاولة العلوي يبقى موازيًا لسطح الأرض.

23) اختيار من متعدّد: أيّ الأشكال الرباعية الآتية ليس متوازي أضلاع؟ (الدرس 3-5)



b) قِس طولي قطري كل مستطيل، ثم أكمل الجدول المجاور.

المستطيل	القطر	الطول
$ABCD$	$\overline{AC}$	3.3 cm
	$\overline{BD}$	3.3 cm
$MNOP$	$\overline{MO}$	2.8 cm
	$\overline{NP}$	2.8 cm
$WXYZ$	$\overline{WY}$	2.0 cm
	$\overline{XZ}$	2.0 cm

c) لفظيًا: اكتب تخمينًا حول قطري المستطيل. قطرا المستطيل متطابقان

5.4

المستطيل

RECTANGLE

هندسة إحداثيّة: حدِّد ما إذا كان الشكل الرباعي المعطاة إحداثيات رؤوسه في كل مما يأتي متوازي أضلاع. برّر إجابتك باستعمال الطريقة المحددة في السؤال.

24) $A(-6, -5), B(-1, -4), C(0, -1), D(-5, -2)$، صيغة المسافة بين نقطتين.

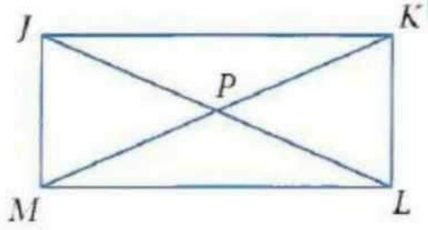
نعم؛ يجب أن يكون كل ضلعين متقابلين متطابقين. المسافة بين A و B تساوي $\sqrt{26}$. والمسافة بين B و C تساوي $\sqrt{10}$. والمسافة بين C و D تساوي $\sqrt{26}$. والمسافة بين D و A تساوي $\sqrt{10}$. وبما أن كل ضلعين متقابلين متطابقان، فإنّ $ABCD$ متوازي أضلاع.

25) $Q(-5, 2), R(-3, -6), S(2, 2), T(-1, 6)$، صيغة الميل.

لا؛ يجب أن يكون كل ضلعين متقابلين متوازيين، وبما أنّ ميل $\overline{QR}$ ≠ ميل $\overline{TS}$، فإنّ $QRST$ ليس متوازي أضلاع.

تحقق من فهمك

٢) إستعن بالشكل المجاور



إذا كان MK=5y+1 ,JP=3y-5
فأوجد قيمة y

JL=2JP لأن القطران ينصف كل منهما الآخر فى المستطيل

JL=2(3Y-5) بالتعويض

JL=6Y-10 بالتوزيع

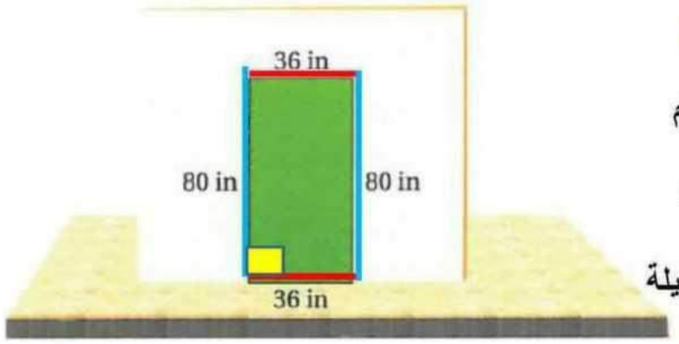
JL=MK لأن القطران متطابقان فى المستطيل

6Y-10=5Y+1 بالتعويض

Y=11 بالجمع والطرح

تحقق من فهمك

قاس أحمد أبعاد المنطقة التى قام بطلائها كما فى الشكل المقابل وكذلك تحقق من أن الزاوية عند الركن الأيسر السفلى قائمة هل يمكن استنتاج أن المنطقة مستطيلة



لاحظ الشكل

أى أن كل ضلعين متقابلين متطابقان فيكون الشكل متوازى أضلاع

لاحظ الشكل أيضاً

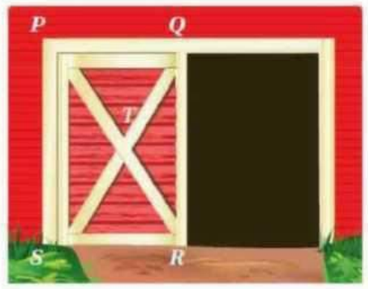
إحدى زوايا متوازى الأضلاع قائمة فيكون مستطيلاً

تأكد

زراعة : الشكل المجاور يبيّن بوّابة مخزن حبوب مستطيلة الشكل، فيها الدعامتان المتقاطعتان تقويان دفة البوّابة، وتحفظانها من الالتواء مع مرور الزمن.

إذا كان $PS = 7 \text{ ft}, ST = 3\frac{13}{16} \text{ ft}, m\angle PTQ = 67^\circ$،

فأوجد كلًّا مما يأتي :



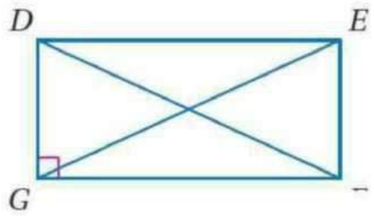
1) QR **7 ft**

2) SQ **$7\frac{5}{6}$ ft**

3) $m\angle TQR$ **33.5°**

4) $m\angle TSR$ **56.5°**

جبر : استعن بالمستطيل ***DEFG*** المبيَّن جانبًا.



5) إذا كان $EG = x + 5$, $FD = 3x - 7$، فأوجد EG .

11

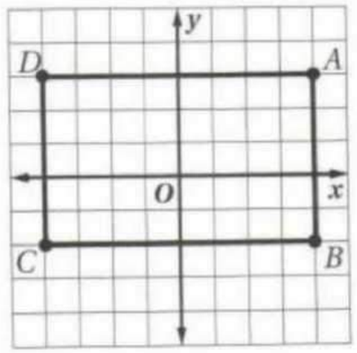
6) إذا كان $m\angle DFG = (x + 12)^\circ$, $m\angle EFD = (2x - 3)^\circ$،

فأوجد $m\angle EFD$.

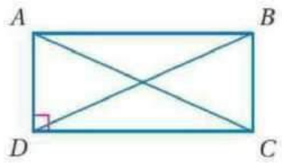
51°

9) $A(4,3), B(4,-2), C(-4,-2), D(-4,3)$ ، صيغة المسافة.

نعم؛ بما أن $AB = 5 = CD$, $BC = 8 = AD$. فإنّ $ABCD$ متوازي أضلاع. وبما أنّ $BD = \sqrt{89} = AC$، فإنّ القطرين متطابقان. لذلك فالشكل $ABCD$ مستطيل.



برهان: اكتب برهانًا ذا عمودين في كل مما يأتي:



20) المعطيات: $ABCD$ مستطيل.

المطلوب: $\triangle ADC \cong \triangle BCD$

البرهان:

العبارات (المبررات)

1) $ABCD$ مستطيل. (معطى)

2) $ABCD$ متوازي أضلاع. (تعريف المستطيل)

3) $\overline{AD} \cong \overline{BC}$ (الأضلاع المتقابلة لمتوازي الأضلاع متطابقة)

4) $\overline{DC} \cong \overline{CD}$ (خاصية الانعكاس)

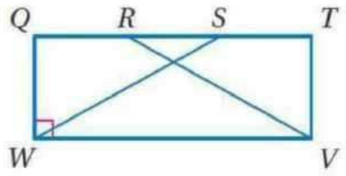
5) $\overline{AC} \cong \overline{BD}$ (قطرا المستطيل متطابقان)

6) $\triangle ADC \cong \triangle BCD$ (SSS)

21) المعطيات: $QTVW$ مستطيل.

$\overline{QR} \cong \overline{ST}$

المطلوب: $\triangle SWQ \cong \triangle RVT$



العبارات (المبررات)

1) $QTVW$ مستطيل؛ $\overline{QR} \cong \overline{ST}$. (معطيات)

2) $QTVW$ متوازي أضلاع. (تعريف المستطيل)

3) $\overline{WQ} \cong \overline{VT}$ (الأضلاع المتقابلة لمتوازي الأضلاع متطابقة)

4) $\angle Q$ و $\angle T$ قائمتان. (تعريف المستطيل)

5) $\angle Q \cong \angle T$ (جميع الزوايا القائمة متطابقة)

6) $QR = ST$ (تعريف تطابق القطع المستقيمة)

7) $\overline{RS} \cong \overline{RS}$ (خاصيّة الانعكاس)

8) $RS = RS$ (تعريف تطابق القطع المستقيمة)

9) $QR + RS = RS + ST$ (خاصيّة الإضافة)

10) $QS = QR + RS, RT = RS + ST$ (مسلمة جمع القطع المستقيمة)

11) $QS = RT$ (بالتعويض)

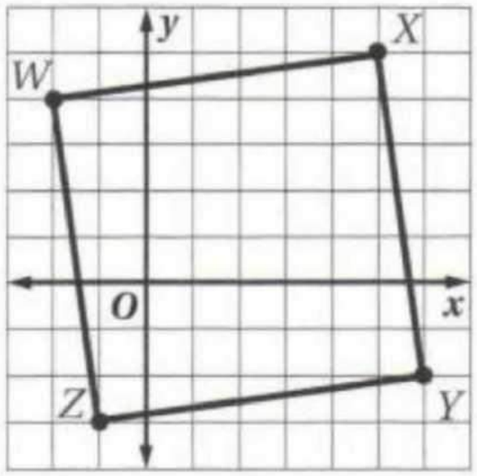
12) $\overline{QS} \cong \overline{RT}$ (تعريف تطابق القطع المستقيمة)

13) $\triangle SWQ \cong \triangle RVT$ (SAS)

هندسة إحداثيّة : مثِّل في المستوى الإحداثي الشكل الرباعي المعطاة إحداثيات رؤوسه في كل مما يأتي، وحدد ما إذا كان مستطيلًا أم لا. برّر إجابتك باستعمال الطريقة المحددة في السؤال.

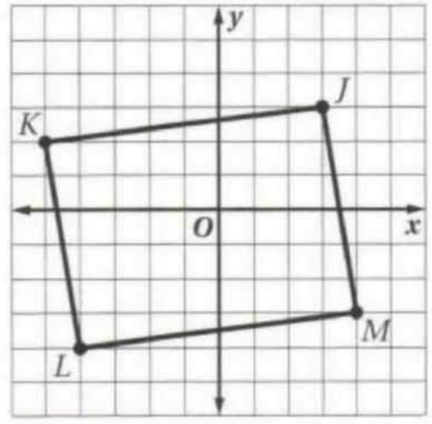
22) $W(-2, 4), X(5, 5), Y(6, -2), Z(-1, -3)$ ، صيغة الميل.

نعم؛ بما أنّ ميل $\overline{WX}$ يساوي ميل $\overline{YZ}$ ويساوي $\frac{1}{7}$ ،
وميل $\overline{XY}$ يساوي ميل $\overline{ZW}$ ويساوي -7. فإنّ $WXYZ$ متوازي أضلاع.
وبما أن حاصل ضرب ميلي كل ضلعين متجاورين يساوي -1، فإنّ
الأضلاع المتجاورة متعامدة وتشكل زوايا قائمة. لذلك فالشكل
$WXYZ$ مستطيل.



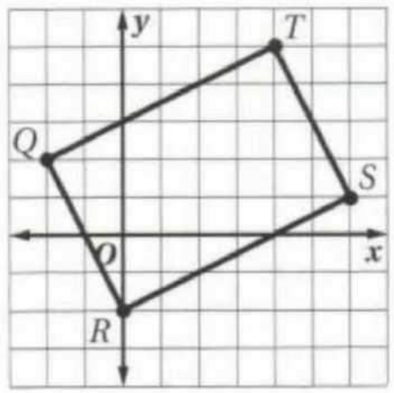
23) $J(3, 3), K(-5, 2), L(-4, -4), M(4, -3)$ ، صيغة المسافة بين نقطتين.

لا؛ بما أنّ $JK = \sqrt{65} = LM, KL = \sqrt{37} = MJ$، فإنّ $JKLM$
متوازي أضلاع، وبما أنّ $JL = \sqrt{98}, KM = \sqrt{106}$. فإنّ $KM \neq JL$،
إذن فالقطران غير متطابقين. لذلك فالشكل $JKLM$ ليس مستطيلاً.

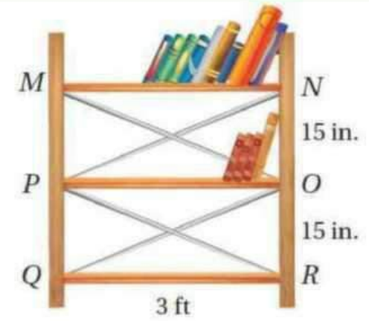


24) $Q(-2, 2), R(0, -2), S(6, 1), T(4, 5)$ ، صيغة المسافة بين نقطتين.

نعم؛ بما أنّ $QR = \sqrt{20} = ST, RS = \sqrt{45} = TQ$، فإنّ $QRST$
متوازي أضلاع. وبما أن $QS = \sqrt{65} = RT$، فإنّ القطرين متطابقان.
إذن فالشكل $QRST$ مستطيل.



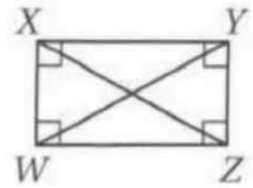
32) مكتبات: أضاف زيد رفًّا جديدًا لمكتبته ودعائم معدنية متقاطعة كما في الشكل المجاور . كم يجب أن يكون طول كل من الدعائم المعدنية بحيث تكون الرفوف عمودية على الجانبين؟ وضّح إجابتك.
(**إرشاد:** $12\,\text{in} = 1\,\text{ft}$)



3 ft و 3 in

إجابة ممكنة : حتى تكون الزوايا قوائم يجب أن تكون أطوال الدعائم الحديدية متساوية . وبما أن طول الرف معلوم والمسافة بين الرفوف معلومة، فيمكن استعمال نظرية فيثاغورس لإيجاد طول الدعامة الحديدية، وقد وجد أن طول الدعامة 3 ft و 3 in.

برهان: اكتب برهانًا ذا عمودين لإثبات النظرية في كل من السؤالين الآتيين :



33) النظريّة 5.13

المعطيات: $WXYZ$ مستطيل قطراه $\overline{WY}$ و $\overline{XZ}$.

المطلوب: $\overline{WY} \cong \overline{XZ}$

البرهان:

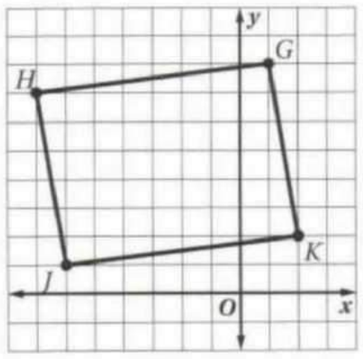
1) $WXYZ$ مستطيل قطراه $\overline{WY}$ و $\overline{XZ}$. (معطيات)

2) $\overline{WX} \cong \overline{ZY}$ الأضلاع المتقابلة للمستطيل متطابقة.

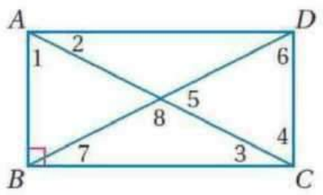
3) $\overline{WZ} \cong \overline{WZ}$ (خاصيّة الانعكاس)

25) $G(1, 8), H(-7, 7), J(-6, 1), K(2, 2)$ ، صيغة الميل.

لا؛ بما أن ميل $\overline{GH}$ يساوي ميل $\overline{JK}$ ويساوي $\frac{1}{8}$ وميل $\overline{HJ}$ يساوي ميل $\overline{KG}$ ويساوي 6–، فإنّ الشكل $GHJK$ متوازي أضلاع. وبما أن حاصل ضرب ميلي كل ضلعين متجاورين لا يساوي 1–، فإنّ الأضلاع المتجاورة ليست متعامدة. لذلك فالشكل $GHJK$ ليس مستطيلاً.



في المستطيل $ABCD$ ، إذا كان $m\angle 2 = 40°$ ، فأوجد كلًّا مما يأتي :



26) $m\angle 1$ 50°

27) $m\angle 7$ 40°

28) $m\angle 3$ 40°

29) $m\angle 5$ 80°

30) $m\angle 6$ 50°

31) $m\angle 8$ 100°

4) $\angle ZWX \cong \angle YXW$ (العناصر المتناظرة في مثلثين متطابقين متطابقة.)

5) $m\angle ZWX = m\angle YXW$ (تعريف الزوايا المتطابقة)

6) $\angle ZWX$ و $\angle YXW$ متكاملتان. (الزوايا المتحالفة في متوازي الأضلاع متكاملة)

7) $m\angle ZWX + m\angle YXW = 180°$ (تعريف الزاويتين المتكاملتين)

8) $\angle ZWX$ و $\angle YXW$ قائمتان. (إذا كانت زاويتان متطابقتين ومتكاملتين فإنّ كلاً منهما قائمة)

9) $\angle WZY$ و $\angle XYZ$ قائمتان. (إذا كانت إحدى زوايا متوازي أضلاع قائمة فإن زواياه الأربع قائمة)

10) $WXYZ$ مستطيل (تعريف المستطيل)

35) رياضة: قام سلمان بعمل التخطيط الخارجي لملعب كرة قدم. وضِّح كيف يمكنه التحقق من أن الملعب مستطيل الشكل باستعمال شريط القياس فقط.

يجب أن يقيس قطري الملعب والأضلاع. فإذا كان القطران متطابقين وكل ضلعين متقابلين متطابقين فإنّ الملعب مستطيل الشكل.

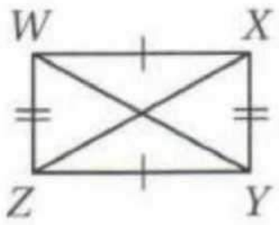
4) $\angle XWZ$ و $\angle YZW$ قائمتان. (تعريف المستطيل)

5) $\angle XWZ \cong \angle YZW$ (جميع الزوايا القائمة متطابقة)

6) $\triangle XWZ \cong \triangle YZW$ (SAS)

7) $\overline{WY} \cong \overline{XZ}$ (العناصر المتناظرة في المثلثين المتطابقين متطابقة)

34) النظريّة 5.14



المعطيات: $WXYZ$ متوازي أضلاع و $\overline{WY} \cong \overline{XZ}$

المطلوب: $WXYZ$ مستطيل.

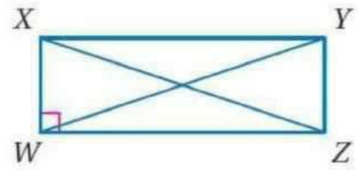
البرهان:

1) $WXYZ$ متوازي أضلاع و $\overline{WY} \cong \overline{XZ}$ (معطيات)

2) $\overline{WX} \cong \overline{YZ}$, $\overline{XY} \cong \overline{WZ}$ (كل ضلعين متقابلين في متوازي الأضلاع متطابقان)

3) $\triangle WZX \cong \triangle XYW$ (SSS)

١-١



زوايا المضلع

Angles of polygon

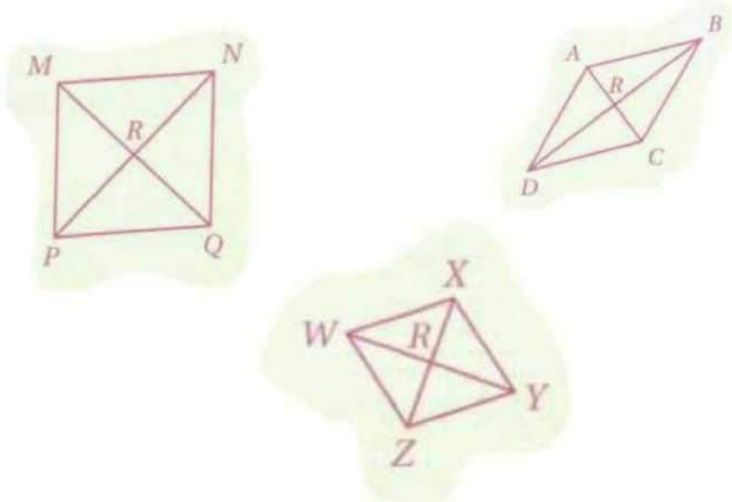
جبر: استعن بالمستطيل $WXYZ$ المبيَّن جانبًا.

37) إذا كان $XW = 3,\ WZ = 4$، فأوجد YW. **5**

38) إذا كان $XY = 8,\ ZY = 6$، فأوجد WY. **10**

36) **تمثيلات متعدّدة:** سوف تستقصي في هذه المسألة خصائص متوازيات أضلاع خاصّة.

a) هندسيًّا: ارسم ثلاثة متوازيات أضلاع كل منها أضلاعه الأربعة متطابقة وسمِّها $ABCD,\ MNOP,\ WXYZ$. ثم ارسم قطري كل منها وسمِّ نقطة تقاطعهما R.



b) جدوليًّا: استعمل المنقلة لقياس الزوايا وأكمل الجدول الآتي

$WXYZ$		$MNOP$		$ABCD$	
$\angle XRY$	$\angle WRX$	$\angle NRO$	$\angle MRN$	$\angle BRC$	$\angle ARB$
90°	**90°**	**90°**	**90°**	**90°**	**90°**

c) لفظيًّا: اكتب تخمينًا حول قطري متوازي الأضلاع المتطابق الأضلاع.

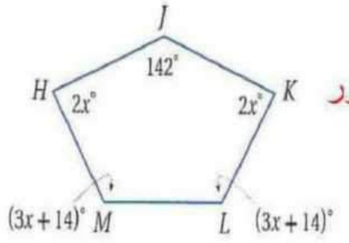
إذا كانت الأضلاع الأربعة في
متوازي الأضلاع متطابقة فإن قطريه متعامدان.

تحقق من فهمك

1A) أوجد مجموع قياسات الزوايا الداخلية للثمانى المحدب

n=8 (8-2).180=1080°

1B) أوجد قياسات جميع الزوايا الداخلية للخماسى المجاور



(n=٥ (٥-2).180=٥٤٠°

$m\angle H + m\angle J + m\angle K + m\angle L + m\angle M = 360°$

$2X + 142 + 2X + 3X + 14 + 3X + 14 = 540°$

$10X + 170 = 540°$

$10X = 370°$

$X = 37$

$m\angle K = 2(37) = 74°$ $m\angle L = 3(37) + 14 = 125°$

$m\angle H = 2(37) = 74°$ $m\angle M = 3(37) + 14 = 125°$

$m\angle J = 142°$

تحقق من فهمك

2A) أوجد قياس الزاوية الداخلية لسجادة على شكل ثمانى منتظم

نوجد أولاً مجموع قياسات زوايا الثمانى

n=8 (8-2).180=1080°

وبما أن الشكل منتظم

إذن زواياه تكون متطابقة

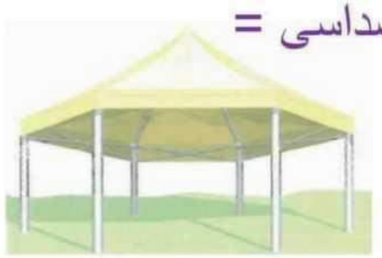
قياس كل زاوية =

مثال 2 من واقع الحياة

الشكل المجاور يمثل مظلة أعمدتها رؤوس سداسى منتظم
أوجد قياس الزاوية المتشكلة عند كل رأس من رؤوسه

(٦n=٦ (٦-2).180=٧٢٠°

٧٢ °0أى أن مجموع قياسات زوايا السداسى =



وبما أن الشكل منتظم

إذن زواياه تكون متطابقة

قياس كل زاوية = $\frac{720}{6} = 120°$

2B)أوجد قياس الزاوية الداخلية لنافورة على شكل تساعى منتظم

نوجد أولاً مجموع قياسات زوايا التساعى

(٩n=٩ (٩-2).180=١٢٦٠°

وبما أن الشكل منتظم

إذن زواياه تكون متطابقة

قياس كل زاوية = $\frac{1260}{9} = 140°$

تحقق من فهمك

ص- 15

أوجد عدد أضلاع مضلع منظم قياس زاويته الداخلية ١٤٤٥°

نفرض عددأضلاعه = n

فيكون عدد زواياه أيضاً = n

مجموع قياسات زواياه الداخلية= n.144

n.144 =(n-2).180

n.144 =180n-360

360=180n- 144n

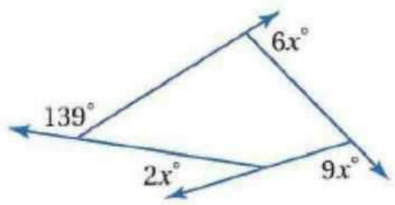
360=36n

n=10

تحقق من فهمك

ص - 16

4A) أوجد قيمة x فى الشكل المجاور



نستخدم نظرية 1.2

6x+9x+2x+139=360°

17x=360-139

17x=221

x= $\frac{221}{17}=13$

4B) أوجد قياس الزاوية الخارجية لمضلع منتظم له ١٢ ضلع

ص - 16

بما أن المضلع منتظم فتكون زواياه الداخلية متطابقة وكذلك زواياه الخارجية تكون متطابقة

نفرض قياس زاويته الخارجية =n

n=360١٢ نظرية مجموع قياسات الزوايا الخارجية للمضلع

n=0٣٠ بقسمة كلا الطرفين على ١٢

تأكد

أوجد مجموع قياسات الزوايا الداخلية لكل من المضلعين المحدبين الآتيين:

1) العشاري

S = 180 (n – 2)

S = 180 (10 – 2)

S = 180 (8) = 1440

2) الخماسي

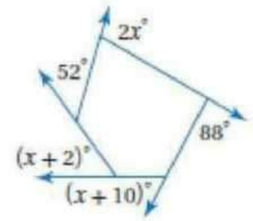
S = 180 (n – 2)

S = 180 (5 – 2)

S = 180 (3) = 540

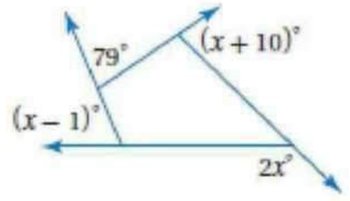
أوجد قياس X في كل من الشكلين الآتيين :

8)



52

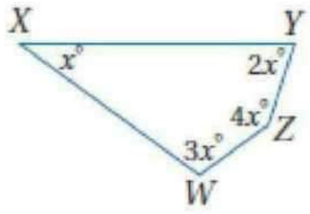
9)



68

أوجد قياسات جميع الزوايا الداخلية لكل من المضلعين الآتيين :

3)

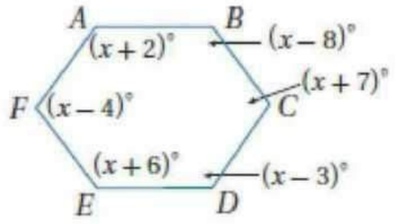


S = 180 (n – 2)

S = 180 (5 – 2)

S = 180 (3) = 540

4)



S = 180 (n – 2)

S = 180 (6 – 2)

S = 180 (4) = 720

أوجد قياس الزاوية الخارجية لكل من المضلعين المنتظمين الآتيين:

10) رباعي 90°

11) ثماني 45°

5) عجلة دوارة : العجلة الدوارة في الصورة المجاورة على شكل مضلع منتظم عدد أضلاعه ١٥ ضلعا.
أوجد قياس الزاوية الداخلية له.

156

إذا كان قياس إحدى الزوايا الداخلية لمضلع منتظم معطى ، فأوجد عدد الأضلاع في كل مما يأتي:

6) 150° 12

7) 170° 36

تدرب

أوجد مجموع قياسات الزوايا الداخلية لكل من المضلعات المحدبة الآتية:

12) ذو 12 ضلعاً

S = 1800

13) ذو 20 ضلعاً

S = 2880

14) ذو 29 ضلعاً

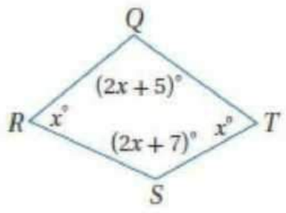
S = 4860

15) ذو 32 ضلعاً

S = 5400

أوجد قياسات جميع الزوايا الداخلية لكل من المضلعات الآتية: ص - 17

16)

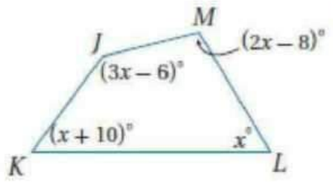


x = 58

R = T = 58

Q = 111 , S = 169

17)



x = 52

R = 52 , M = 96

Q = 62, S = 166

20) ما مجموع قياسات الزوايا الداخلية للمضلع في الشكل المجاور ؟ ص- 17

540°

أوجد قياس زاوية داخلية لكل من المضلعات المنتظمة الآتية:

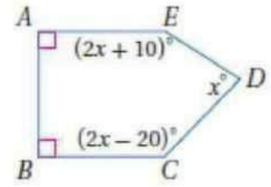
21) الاثنا عشري 150°

22) الخماسي 108°

23) العشاري 144°

24) التساعي 140°

16)

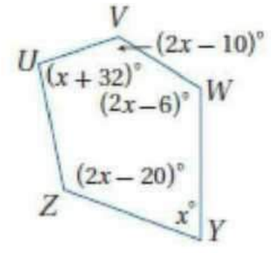


x = 38

D = 38

C = 54 , E = 64

17)



x = 52

R = 52 , M = 96

Q = 62, S = 166

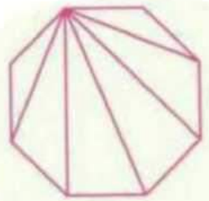
أوجد قياس زاوية خارجية وزاوية داخلية للمضلع المنتظم المعطى عدد أضلاعه في كل مما يأتي، وقرب إجابتك إلى أقربُ عشر:

36) 7 51.4°,128.6°

37) 13 27.7°,152.3°

38) أثبت أن مجموع قياسات الزوايا الداخلية للمضلع الثماني يساوي ° 1080 ، دون استعمال صيغة مجموع الزوايا الداخلية للمضلع.

38) أثبت أن مجموع قياسات الزوايا الداخلية للمضلع الثماني يساوي ° 1080 ، دون استعمال صيغة مجموع الزوايا الداخلية للمضلع.



ارسم جميع الأقطار لمضلع ثماني محدّب من أحد رؤوسه.

لاحظ أنّ المضلع قُسم إلى 6 مثلثات وبما أنّ مجموع قياسات الزوايا الداخليّة لكل مثلث °180، فإنّ مجموع قياسات الزوايا الداخلية للثّماني يساوي

$(8-2)\cdot 180° = 6\cdot 180°$
$= 1080°$

أو $(n-2)\cdot 180$ حيث n يساوي عدد أضلاع المضلع.

إذا كان قياس إحدى الزوايا الداخلية لمضلع منتظم معطى، فأوجد عدد الأضلاع في كل مما يأتي:

25) 3 60°

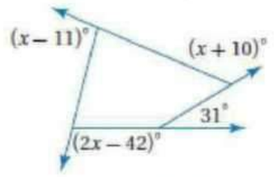
26) 4 90°

27) 6 120°

28) 15 156°

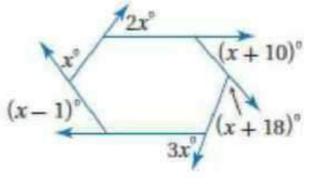
أوجد قيمة x في كل من الشكلين الآتيين:

29)



93

30)



37

أوجد قياس زاوية خارجية لكل من المضلعات المنتظمة الآتية: ص- 18

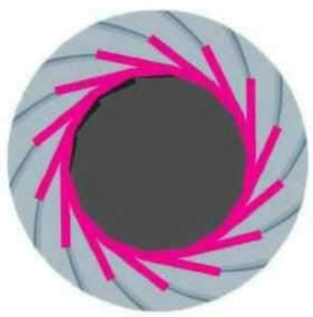
31) العشاري 36°

32) الخماسي 72°

33) العشاري 60°

34) التساعي 24°

35) تشكل الفتحة التي ينفذ منها الضوء إلى عدسة آلة التصوير في الشكل المجاور مضلعا منتظما ذا ١٤ ضلعا.



a) أوجد قياس الزاوية الداخلية مقرّبة إلى أقرب عُشر.

154.3 تقريباً

b) أوجد قياس الزاوية الخارجية مقرّبة إلى أقرب عُشر.

25.7 تقريباً

39) برهان : استعمل الجبر لإثبات نظرية مجموع قياسات الزوايا الخارجيّة للمضلع.

افرض أن N تساوي مجموع قياسات الزوايا الخارجية لمضلع عدد اضلاعه n .

N تساوي مجموع قياسات الأزواج الخطية مطروحًا منه مجموع قياسات الزوايا الداخلية

$= 180n - 180(n-2)$

$= 180n - 180n + 360$

$= 360$

لذا، فإن مجموع قياسات الزوايا الخارجية لأي مضلع محدب يساوي 360°.

جبر : أوجد قياسات جميع الزوايا الداخلية لكل من المضلعين الآتيين : ص - 18

40) عشاري قياسات زواياه الداخلية:

$(x+5)°,(x+10)°,(x+20)°,(x+30)°,(x+35)°,(x+40)°,(x+60)°,$
$(x+70)°,(x+80)°,(x+90)°$

$105°,110°,120°,130°,140°,160°,170°,180,190°$

41) الخماسي ABCDE الذي قياسات زواياه الداخلية :

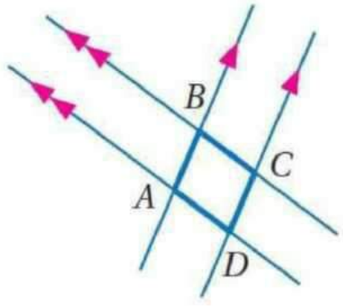
$6x,(4x+13)°,(x+9)°,(2x-8)°,(4x-1)°$

$m\angle A=108°,m\angle B=137°,m\angle C=40°,m\angle D=54°,m\angle E=123°,$

حلول
منصة مدرسية تعليمية

42) تمثيلات متعددة : سوف تستقصي في هذه المسألة العلاقات بين الزوايا والأضلاع في متوازي أضلاع.

a) هندسياً : ارسم زوجين من المستقيمات المتوازية تتقاطع كما في الشكل المجاور، وسمِّ الشكل الرباعي الناتج . $ABCD$ ثم كرر هذه الخطوات لتكوين شكلين آخرين: $QRST$, $FGHJ$



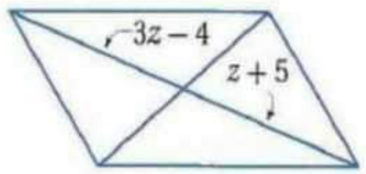
42) جدولياً : أكمل الجدول الآتي :

الشكل الرباعي	أطوال الأضلاع وقياسات الزوايا							
ABCD	101	$m\angle A$	101	$m\angle B$	79	$m\angle C$	101	$m\angle D$
	0.6cm	AB	0.6cm	BC	0.6cm	CD	0.6cm	DA
FGHJ	104	$m\angle F$	76	$m\angle G$	104	$m\angle H$	76	$m\angle J$
	0.9cm	FG	1cm	GH	0.9cm	HJ	1cm	JF
QRST	59	$m\angle Q$	121	$m\angle R$	59	$m\angle S$	121	$m\angle T$
	1.2cm	QR	0.5cm	RS	1.2cm	ST	0.5cm	TQ

تحقق من فهمك

أوجد قيمة كلاً من □□ □ □□ □ في متوازيي الأضلاع

(2B



$$3Z-4=Z+5$$

القطران ينصف كل منهما الآخر

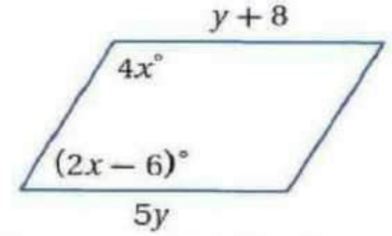
$$2Z=9$$

بالجمع والطرح

$$Z=4.5$$

بالقسمة

(2A



من تطابق الضلعين المتقابلين □□ □□ □□

بالطرح □□ □□

بالقسمة □ □□

الزاوتيان المتحالفتان متكاملتان □□ □□□ □□□□□ °

بالتعويض □□ □□□

بالقسمة □ □□□

c) لفظياً : خمن العلاقة بين كل زاويتين متقابلتين في الشكل الرباعي الناتج عن زوجين من المستقيمات المتوازية .

في الشكل الرباعي المتكون من زوجين من المستقيمات المتوازية تكون الزاويتان المتقابلتان متطابقتين .

d) لفظياً : من العلاقة بين كل زاويتين متحالفتين في الشكل الرباعي الناتج عن زوجين من المستقيمات المتوازية.

في الشكل الرباعي من زوجين من المستقيمات المتوازية تكون الزاويتان المتحالفتان متكاملتين .

e) لفظياً : خمن العلاقة بين كل ضلعين متقابلين في الشكل الرباعي الناتج عن زوجين من المستقيمات المتوازية.

في الشكل الرباعي المتكون من زوجين من المستقيمات المتوازية يكون المستقيمات المتوازية يكون الضلعان المتقابلان متطابقين .

تحقق من فهمك

أوجد إحداثي نقطة تقاطع قطرى متوازى الأضلاع RSTU الذى إحداثيات رؤوسه R(-8,-2) , S(-6 , 7) , T(6 , 7) , U(4 , -2)

نقطة تقاطع قطرى متوازى الأضلاع RSTU هى منتصف أى منهما

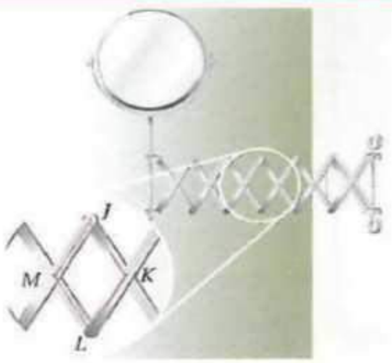
منتصف $\overline{RT}$ هى

$$\left(\frac{-8+6}{2},\frac{-2+7}{2}\right)=(-1,2.5)$$

منتصف $\overline{SU}$ هى

$$\left(\frac{-6+4}{2},\frac{7+(-2)}{2}\right)=(-1,2.5)$$

تحقق من فهمك



١) مرايا: تستعمل فى مرآة الحائط المبينة جانباً متوازيات أضلاع يتغير شكلها كلما مد الذراع. في $JKLM$□ ،

إذا كان $m\angle J=47°$ و □ □□□□ فأوجد كلاً من

□ LK $\quad LK=MJ=8cm$

لأن كل ضلعين متقابلين متطابقين فى متوازى الأضلاع

□ $m\angle L$ $\quad m\angle L=m\angle J=47°$

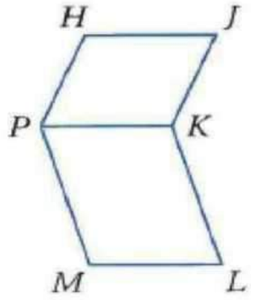
لأن كل زاويتين متقابلتين متطابقتين فى متوازى الأضلاع

□ إذا مد الذراع حتى أصبح $m\angle J=90°$ فكم يصبح قياس كل من $\angle K,\angle L,\angle M$

حسب نظرية□□□ سيصبح قياس كل منها ٩٠°

تحقق من فهمك

٤) أكتب برهاناً ذا عمودين



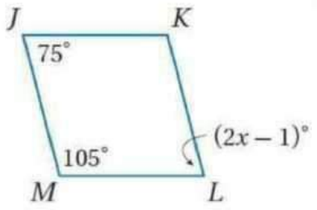
المعطيات: PKLM , HJKP متوازيا أضلاع

المطلوب : $\overline{HJ} \cong \overline{ML}$

العبارات	المبررات
$\overline{PK} \cong \overline{ML}$	كل ضلعين متقابلين متطابقين فى متوازى الأضلاع PKLM
$\overline{HJ} \cong \overline{PK}$	كل ضلعين متقابلين متطابقين فى متوازى الأضلاع PKJH
$\overline{HJ} \cong \overline{ML}$	خاصية التعدى

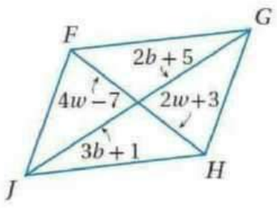
جبر : أوجد قيمة المتغير في كل من متوازيي الأضلاع الآتيين :

(2



38

(3



w=5

b=4

4) هندسة إحداثية : أوجد إحداثيي نقطة تقاطع قطري ABCD الذي رؤوسه .

$A(-4,6), B(5,6), C(4,-2), D(-5,-2)$

$(0,2)$

تأكد

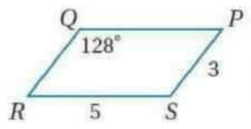
ملاحة : يستعمل البحارة مسطرتين متوازيتين، يصل بينهما ذراعان متساويا الطول لتحديد اتجاه إبحارهم، فيضعون حافة إحدى المسطرتين بمحاذاة مسار الإبحار، ثم يحركون المسطرة الأخرى حتى تصل إلى قرص بوصلة مرسوم على الخريطة. تشكل المسطرتان والذراعان الواصلتان بينهما MNPQ

a) إذا كان $MQ = 2in$ ، فأوجد NP . 2 in

b) إذا كان $\angle NMQ = 38°$ ، فأوجد $\angle MNQ$ 32°

c) إذا كان $\angle MQP = 55°$ ، فأوجد $\angle MNP$ 55°

استعمل $\square PQRS$ المبيَّن جانبًا لإيجاد كل مما يأتي :



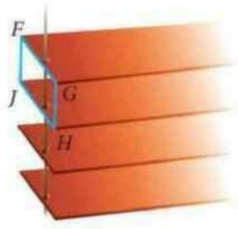
7) $m\angle R$ $52°$

8) QR 3

9) QP 5

10) $m\angle S$ $128°$

ستائر: في الشكل المقابل صورة لشرائح ستائر النوافذ المتوازية دائمًا؛ لتسمح بدخول أشعة الشمس. في $\square FGHJ$ ، إذا كان



a) JH 1 in

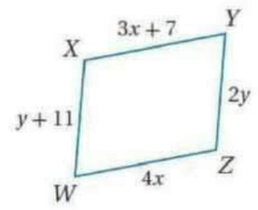
b) GH $\frac{3}{4}$ in

c) $m\angle JFG$ $62°$

d) $m\angle FJH$ $118°$

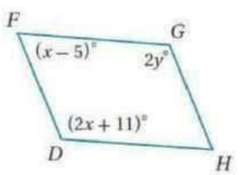
جبر: أوجد قيمتي x, y في كل من متوازيات الأضلاع الآتية :

12)



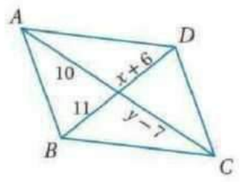
$x=7, y=11$

13)



$x=58, y=63.5$

14)



$x=5, y=17$

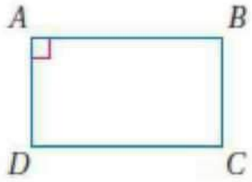
هندسة إحداثيّة: أوجد إحداثيي نقطة تقاطع قطري $\square WXYZ$ المعطاة رؤوسه في كل من السؤالين الآتيين :

15) $W(-1,7), X(8,7), Y(6,-2), Z(-3,-2)$ $(2.5, 2.5)$

16) $W(-4,5), X(5,7), Y(4,-2), Z(-5,-4)$ $(0, 1.5)$

برهان : اكتب برهانا من النوع المحدد في كل من السؤالين الآتيين :

5) برهاناً حراً .

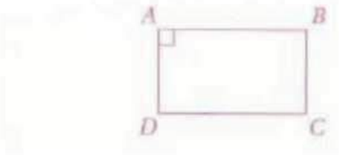


المعطيات : ABCD متوازي أضلاع ، $\angle A$ قائمة .

المطلوب : $\angle B, \angle C, \angle D$ قوائم .

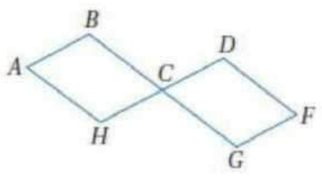
المعطيات: $\square ABCD$ متوازي أضلاع فيه $\angle A$ قائمة.

المطلوب: $\angle B, \angle C, \angle D$ قوائم. (النظرية 5.6)



البرهان: حسب تعريف متوازي الأضلاع $\overline{BC} \parallel \overline{AD}$ ولأن $\angle A$ قائمة فإنّ $\overline{AB} \perp \overline{AD}$. وحسب نظريّة القاطع العمودي يكون $\overline{AB} \perp \overline{CB}$. إذن $\angle B$ قائمة لأنّ المستقيمين المتعامدين يشكلان زاوية قائمة، وكذلك $\angle D \cong \angle B$ و $\angle C \cong \angle A$ لأنّ الزوايا المتقابلة في متوازي الأضلاع متطابقة. إذن $\angle C$ و $\angle D$ قائمتان لأنّ لجميع الزوايا المتطابقة القياس نفسه.

6) برهاناً ذا عمودين .

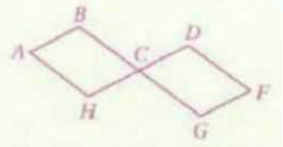


المعطيات: $ABCH$, $DCGF$ متوازيا أضلاع.

المطلوب: $\angle A \cong \angle F$.

المعطيات: $\square ABCH$ ، $\square DCGF$.

المطلوب: $\angle A \cong \angle F$



البرهان:

العبارات (المبررات)

1) $ABCH$ و $DCGF$ متوازيا أضلاع. (معطى)

2) $\angle BCH \cong \angle DCG$ (الزاويتان المتقابلتان بالرأس متطابقتان)

3) $\angle A \cong \angle BCH$ و $\angle DCG \cong \angle F$ (الزوايا المتقابلة في متوازي الأضلاع متطابقة)

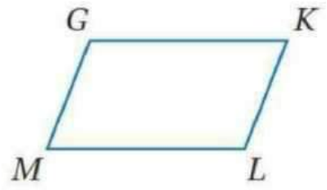
4) $\angle A \cong \angle F$ (خاصيّة التعدّي)

24) هندسة إحداثيّة: إذا كانت $A(-2,5), B(2,2), C(4,-4)$ رؤوسًا في $\square ABCD$، فأوجد إحداثيات الرأس D. وبرّر إجابتك.

$(0,-1)$؛ إجابة ممكنة: الأضلاع المتقابلة في متوازي الأضلاع متوازية، وبما أنّ ميل $\overline{BC}$ يساوي $\frac{-6}{2}$ فإن ميل $\overline{AD}$ يساوي $\frac{-6}{2}$ أيضًا. ولتعيين الرأس D، ابدأ من الرأس A وتحرّك إلى الأسفل 6 وحدات و إلى اليمين وحدتين.

برهان: اكتب برهانًا من النوع المحدد في كل مما يأتي :

25) برهانًا ذا عمودين.



المعطيات: $GKLM$ متوازي أضلاع ،

المطلوب: اثبات أن كل زاويتين في الأزواج التالية متكاملتان $\angle G$ و $\angle K$ ، $\angle K$ و $\angle L$ ، $\angle L$ و $\angle M$ ، $\angle M$ و $\angle G$.

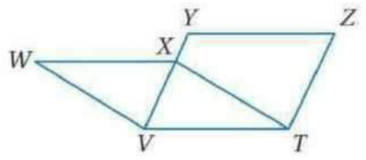
(النظرية 5.5)

1) $\square GKLM$ (معطى)

2) $\overline{GK} \parallel \overline{ML}, \overline{GM} \parallel \overline{KL}$ (الأضلاع المتقابلة لمتوازي الأضلاع متوازية)

3) $\angle G$ و $\angle K$ متكاملتان، $\angle K$ و $\angle L$ متكاملتان، $\angle L$ و $\angle M$ متكاملتان $\angle M$ و $\angle G$ متكاملتان، (الزاويتان المتحالفتان متكاملتان)

برهان: اكتب برهانًا ذا عمودين فيما يأتي :



17) المعطيات: $\square WXTV, \square ZYVT$

المطلوب: $\overline{WX} \cong \overline{ZY}$

البرهان:

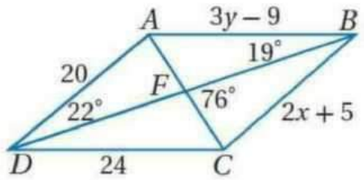
العبارات (المبررات)

1) $\square WXTV, \square ZYVT$ (معطى)

2) $\overline{WX} \cong \overline{VT}, \overline{VT} \cong \overline{YZ}$. (الأضلاع المتقابلة في متوازي الأضلاع متطابقة)

3) $\overline{WX} \cong \overline{ZY}$ (خاصية التعدّي)

جبر: استعمل $\square ABCD$ المبيَّن جانبًا لإيجاد كل مما يأتي :



18) x — 3

19) y — 6

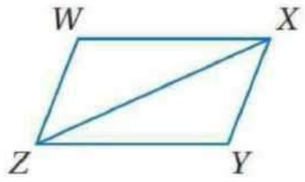
20) $m\angle AFB$ — 131°

21) $m\angle DAC$ — 72°

22) $m\angle ACD$ — 29°

23) $m\angle DAB$ — 101°

26) برهانًا ذا عمودين.



المعطيات: $WXYZ$ متوازي أضلاع ،

المطلوب: $\triangle WXZ \cong \triangle YZX$

(النظرية 5.8)

العبارات (المبررات)

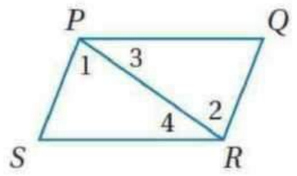
1) $\square WXYZ$ (معطى)

2) $\overline{WX} \cong \overline{ZY}, \overline{WZ} \cong \overline{XY}$ (الأضلاع المتقابلة لمتوازي الأضلاع متطابقة)

3) $\angle ZWX \cong \angle XYZ$ (الزوايا المتقابلة في متوازي الأضلاع متطابقة)

4) $\triangle WXZ \cong \triangle YZX$ (SAS)

27) برهانًا ذا عمودين.



المعطيات: $PQRS$ متوازي أضلاع.

المطلوب: $\overline{PQ} \cong \overline{RS}$, $\overline{QR} \cong \overline{SP}$

(النظرية 5.3)

العبارات (المبررات)

1) $\square PQRS$ (معطى)

2) ارسم قطعة مستقيمة مساعدة $\overline{PR}$ (قطر $PQRS$) وسمّ الزوايا 1، 2، 3، 4 كما هو مبيّن.

3) $\overline{PQ} \parallel \overline{SR}$, $\overline{PS} \parallel \overline{QR}$ (الأضلاع المتقابلة لمتوازي الأضلاع متوازية)

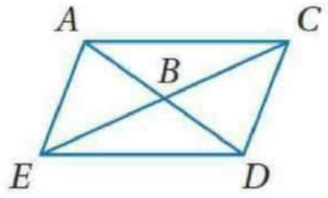
4) $\angle 2 \cong \angle 1$ و $\angle 4 \cong \angle 3$ (نظرية الزوايا المتبادلة داخليًا)

5) $\overline{PR} \cong \overline{RP}$ (خاصية الانعكاس)

6) $\triangle QPR \cong \triangle SRP$ (ASA)

7) $\overline{PQ} \cong \overline{RS}, \overline{QR} \cong \overline{SP}$ (العناصر المتناظرة في مثلثين متطابقين متطابقة)

28) برهانًا حرًّا.



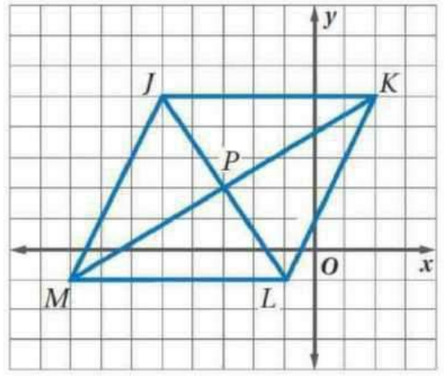
المعطيات: $ACDE$ متوازي أضلاع.

المطلوب: القطران $\overline{AC}$ وَ $\overline{AD}$ ينصف كلٌّ منهما الآخر.

(النظرية 5.7)

البرهان: معطى أن $ACDE$ متوازي أضلاع. بما أنّ الأضلاع المتقابلة لمتوازي الأضلاع متطابقة، فإنّ $\overline{EA} \cong \overline{DC}$. ومن تعريف متوازي الأضلاع $\overline{EA} \parallel \overline{DC}$. ويكون $\angle AEB \cong \angle DCB$ و $\angle EAB \cong \angle CDB$ لأنّ الزوايا المتبادلة داخليًّا متطابقة. إذن $\triangle EBA \cong \triangle CBD$ حسب ASA. و$\overline{EB} \cong \overline{BC}$ و $\overline{BD} \cong \overline{AB}$ لأن العناصر المتناظرة في المثلثين المتطابقين متطابقة ومن تعريف منصّف القطعة المستقيمة فإن $\overline{EC}$ تنصّف $\overline{AD}$ و $\overline{AD}$ تنصّف $\overline{EC}$.

29) هندسة إحداثية: استعن بالشكل المجاور في كل مما يأتي:



a) استعمل صيغة المسافة بين نقطتين لتحديد ما إذا كان قطرا $JKLM$ ينصّف كل منهما الآخر. وضّح إجابتك.

$JP = \sqrt{13}, LP = \sqrt{13}, (29$
$MP = \sqrt{34}, KP = \sqrt{3}$ ، بما أن
$JP = LP, MP = K$ فإن القطرين
صف كل منهما الآخر.

b) حدّد ما إذا كان قطرا $JKLM$ متطابقين. وضّح إجابتك.

$JP + LP \neq MP + KP$ لا،

b) حدِّد القطع المستقيمة التي تطابق $\overline{BC}$. وضّح تبريرك.

$\overline{AD}, \overline{DE}, \overline{GF}$؛ إجابة ممكنة:
$\overline{AD}$ تطابق $\overline{BC}$ لأنّ الأضلاع المتقابلة في متوازي الأضلاع متطابقة. $\overline{DE}$ تطابق $\overline{BC}$ لأن متوازيي الأضلاع متطابقان، $\overline{GF}$ تطابق $\overline{DE}$ لأن الأضلاع المتقابلة في متوازي الأضلاع متطابقة وتطابق $\overline{BC}$ حسب خاصيّة التعدّي.

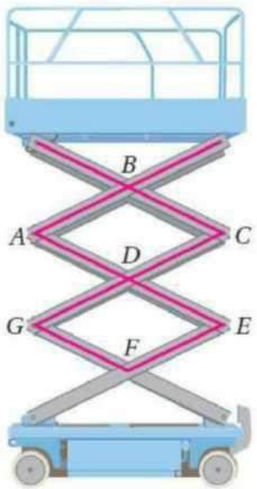
c) حدِّد الزوايا المكملة للزاوية C. وضّح تبريرك.

$\angle ABC, \angle ADC, \angle EDG, \angle EFG$؛ إجابة ممكنة: الزاويتان ABC و ADC مكملتان لـ $\angle C$؛ لأن الزوايا المتحالفة في متوازي الأضلاع متكاملة. $\angle EDG$ مكملة لـ $\angle C$ لأنها تطابق $\angle ADC$ حسب نظرية الزوايا المتقابلة بالرأس ومكملة لـ $\angle C$ بالتعويض، $\angle EFG$ تطابق $\angle EDG$ لأن الزوايا المتقابلة في متوازي الأضلاع متطابقة، ومكملة لـ $\angle C$ بالتعويض.

c) استعمل صيغة الميل لتحديد ما إذا كانت الأضلاع المتتالية متعامدة أم لا. وضّح إجابتك.

29) لا؛ ميل $\overline{IK}$ يساوي 0 ، ميل $\overline{IM}$ يساوي 2؛ أحدهما لا يساوي سالب معكوس الآخر.

30) رافعات: في الشكل المجاور: $ABCD$, $GDEF$ متوازيا أضلاع متطابقان.

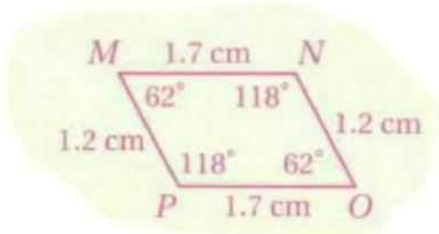


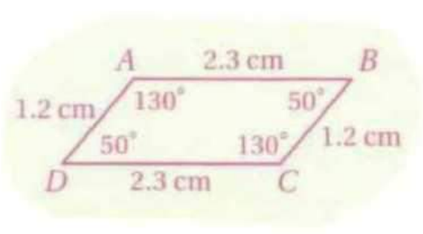
a) حدِّد الزوايا التي تطابق $\angle A$. وضّح تبريرك.

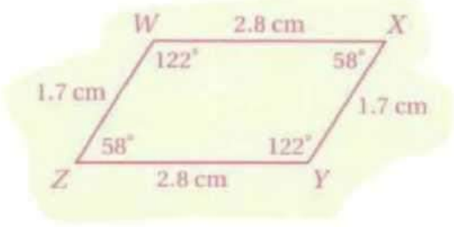
$\angle C, \angle E, \angle G$؛ إجابة ممكنة: $\angle C$ تطابق $\angle A$ لأنّ الزوايا المتقابلة في متوازي الأضلاع متطابقة. $\angle E$ تطابق $\angle A$ لأن متوازيي الأضلاع متطابقان، $\angle G$ تطابق $\angle E$ لأن الزوايا المتقابلة في متوازي الأضلاع متطابقة وتطابق $\angle A$ حسب خاصية التعدّي.

31) **تمثيلات متعدّدة:** سوف تستقصي في هذه المسألة اختبارات لتمييز متوازي الأضلاع.

a) هندسيًا: ارسم ثلاثة أزواج من القطع المستقيمة المتطابقة والمتوازية. صِل الأطراف لتكوِّن أشكالًا رباعية، وسمِّها *ABCD*, *MNOP*, *WXYZ*. ثم قِس أطوال الأضلاع وقياسات الزوايا لكل منها.







c) لفظيًا: ضع تخمينًا حول الأشكال الرباعيّة التي لها ضلعان متطابقان ومتوازيان.

متوازي الأضلاع مضلع له أربعة أضلاع كل ضلعين متقابلين فيه متطابقان، وكل زاويتين متقابلتين متطابقتان، وتعرّف الأشكال الرباعية على أنها مضلعات لها أربعة أضلاع. وبما أن متوازي الأضلاع له أربعة أضلاع فهو شكل رباعي. ويكون الشكل الرباعي متوازي أضلاع عندما تكون الأضلاع المتقابلة متوازية.

b) جدوليًا: أكمل الجدول الآتي:

الشكل الرباعي	هل الأضلاع المتقابلة متطابقة؟	هل الزوايا المتقابلة متطابقة؟	هل الشكل متوازي أضلاع؟
ABCD	نعم	نعم	نعم
MNOP	نعم	نعم	نعم
WXYZ	نعم	نعم	نعم