تهيئة الفصل الخامس

أوجد المسافة بين كل زوج من النقاط الآتية ، ثم أوجد إحداثي نقطة منتصف القطعة الواصلة بينهما .

1) (1 , 4) , (-2 , 4) $\quad 3, \left(-\frac{1}{2}, 4\right)$

2) (-5 , 3) , (-5 , 8) $\quad 5, \left(-5, \frac{11}{2}\right)$

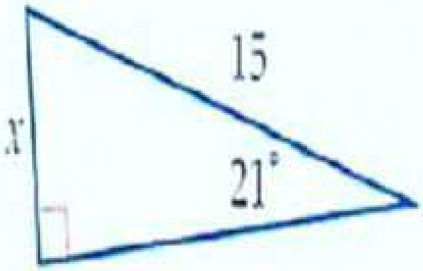
3) (2 , -9) , (-3 , -7) $\quad \sqrt{29}, \left(-\frac{1}{2}, -2\right)$

4) (-4 , -1) , (-6 , -8) $\quad \sqrt{53}, \left(-5, -\frac{9}{2}\right)$

تهيئة الفصل الخامس

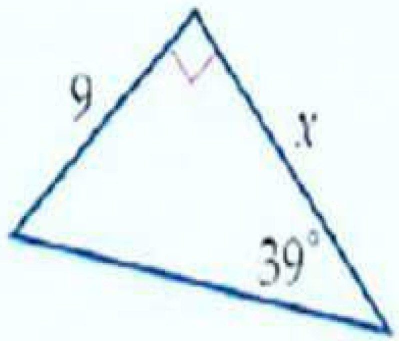
أوجد قيمة x في كل مما يأتي مقربا الناتج إلي أقرب عشر :

(5



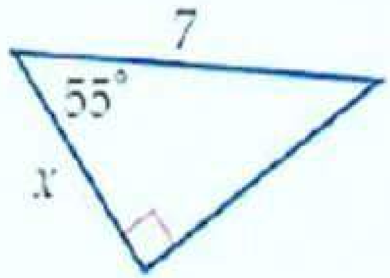
5.4

(6



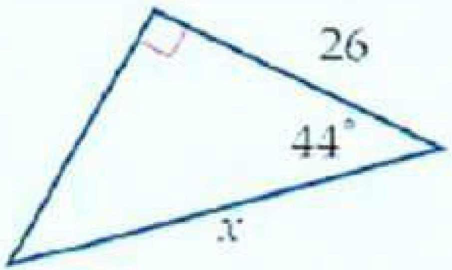
11.1

(7



4.0

(8



36.1

9) **بالون:** أطلق بالون يحتوي على هواء ساخن في الفضاء. إذا كان البالون مربوطًا بحبلين مشدودين يمسك بكلٍّ منهما شخص يقف على سطح الأرض، والمسافة بين الشخصين 35 ft ، بحيث كان قياس الزاوية بين كلٍّ من الحبلين والأرض $40°$ ، فأوجد طول كلٍّ من الحبلين إلى أقرب جزءٍ من عشرة.

$22.8ft$

أوجد جميع الحلول الممكنة لكل مثلث مما يأتي إن أمكن، وإذا لم يوجد حَلّ فاكتب " لا يوجد حَلّ " مقرِّبًا أطوال الأضلاع إلى أقرب عدد صحيح، وقياسات الزوايا إلى أقرب درجة.

10) $a = 10, b = 7, A = 128°$ $\quad B \approx 33°, C \approx 19°, c \approx 4.0$

11) $a = 15, b = 16, A = 127°$ $\quad$ لا يوجد حل

12) $a = 15, b = 18, A = 52°$ $\quad B \approx 39°, C \approx 50°, c \approx 23.0$

تدرب وحل المسائل

حدِّد الكميات المتجهة والكميات القياسية في كلٍّ مما يأتي:

1) طول محمد 125 cm. قياسية

2) مساحة مربع $20\ m^2$. قياسية

3) يركض غزال بسرعة 15 m/s باتجاه الغرب. متجهة

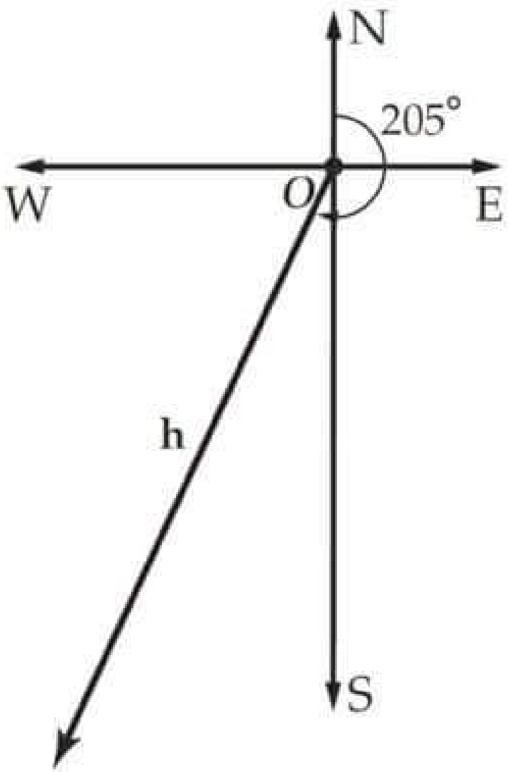
4) المسافة التي قطعتها كرة قدم 5 m. قياسية

5) إطار سيارة وزنه 7 kg معلق بحبل. متجهة

6) رمي حجر رأسيًّا إلى أعلى بسرعة 50 ft/s. متجهة

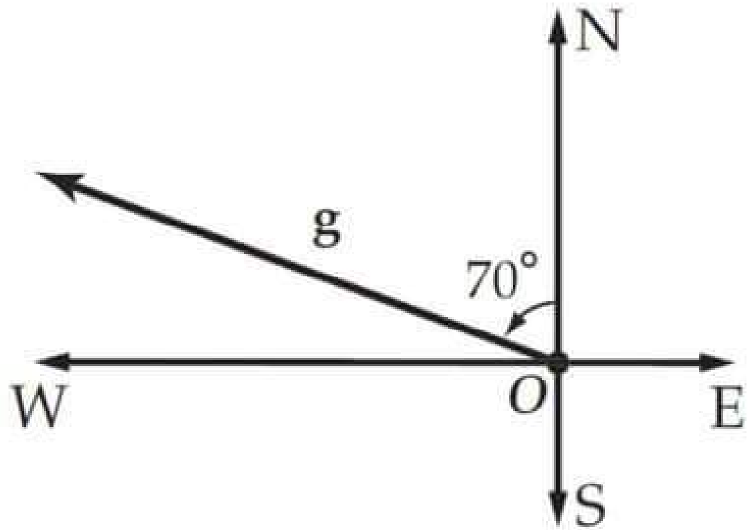
استعمل المسطرة والمنقلة؛ لرسم متجه لكلٍّ من الكميات الآتية، ثم اكتب مقياس الرسم في كل حالة.

7) $\mathbf{h} = 13$ in/s ، باتجاه °205



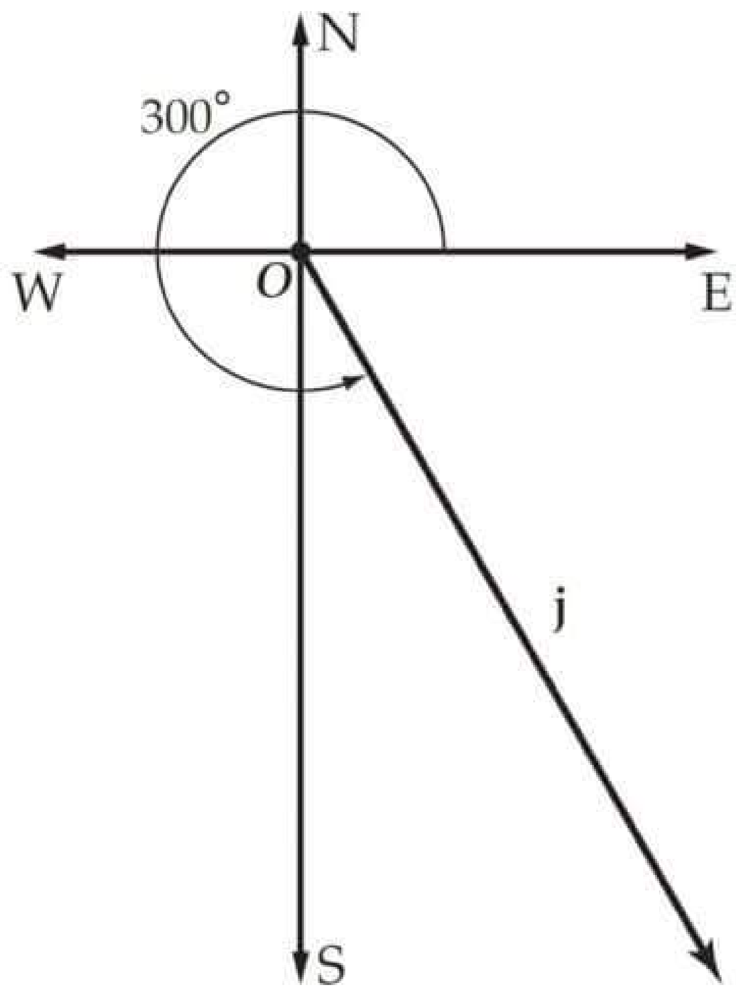
1 cm : 3 in/s

8) $\mathbf{g} = 6$ km/h ، باتجاه N 70° W



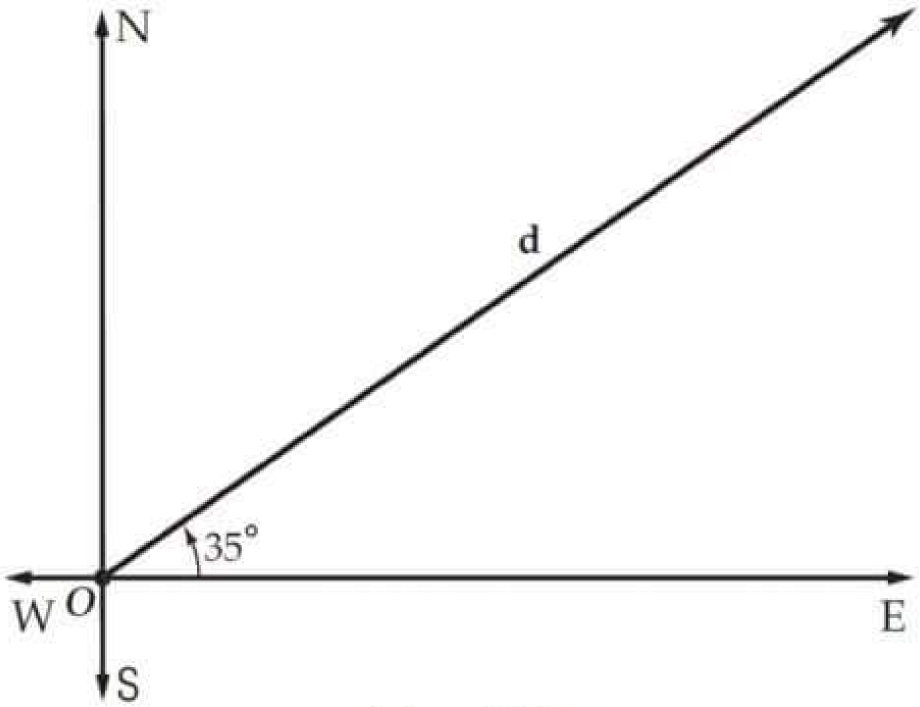
1 cm : 2 km/h

9) $\mathbf{j} = 5\ ft/s$ ، وبزاويةٍ قياسها $300°$ مع الأفقي.



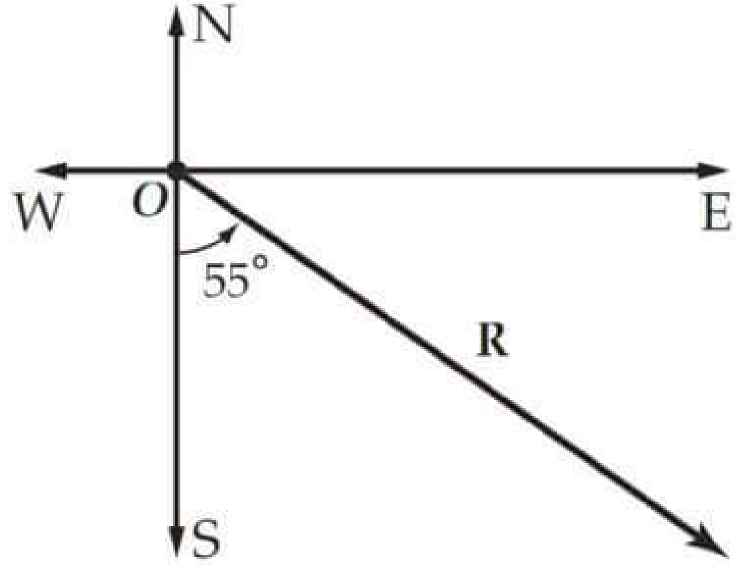
$1\ cm : 1\ ft/s$

10) $\mathbf{d} = 28\ km$ ، وبزاويةٍ قياسها $35°$ مع الأفقي.



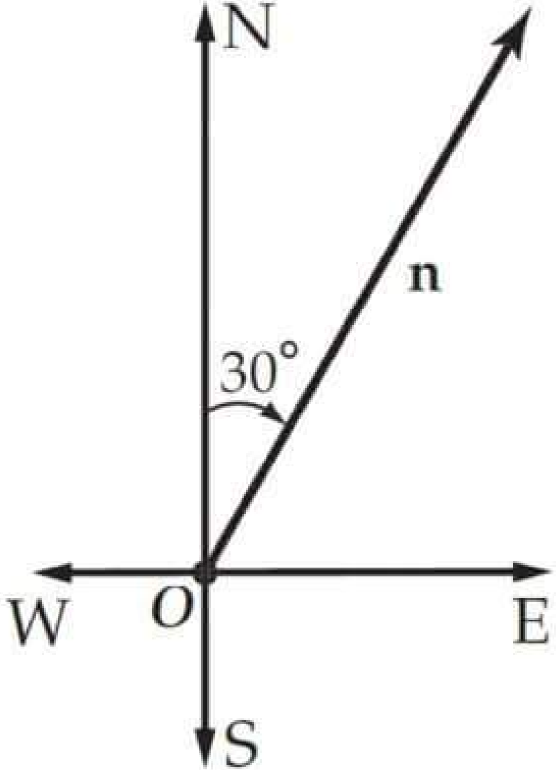
$1\ in = 10\ km$

11) $\mathbf{R} = 40$ m ، باتجاه S 55° E



1 cm = 10 m

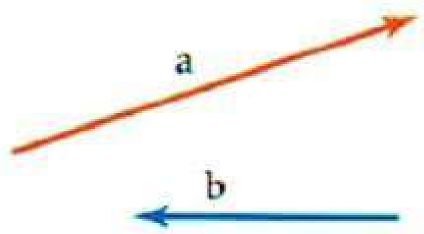
12) $\mathbf{n} = 32$ m/s ، باتجاه 030°



1 cm = 10 m/s

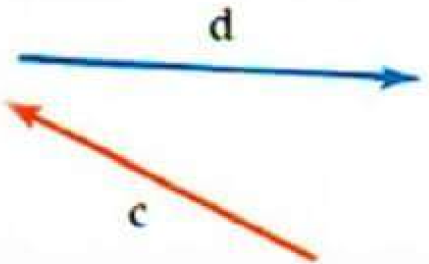
أوجد محصلة كل زوج من المتجهات الآتية باستعمال قاعدة المثلث، أو قاعدة متوازي الأضلاع، قرِّب المحصلة إلى أقرب جزء من عشرة من السنتمتر، ثم حدِّد اتجاهها بالنسبة للأفقي مستعملًا المسطرة والمنقلة:

(13



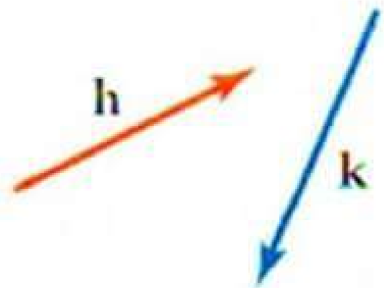
1.4 cm , 45°

(14



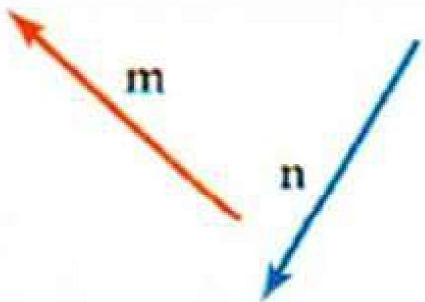
1.0 cm , 58°

(15



1.1 cm , 308°

(16



2.3 cm , 188°

17) **ركوب الزوارق:** غادر زورق أحد الموانئ باتجاه $N\,60°\,W$ ، فقطع مسافة 12 ميلًا بحريًا، ثم غيّر قائد الزورق اتجاه حركته إلى $N\,25°\,E$ ، فقطع مسافة 15 ميلًا بحريًا. أوجد بُعد الزورق، واتجاه حركته في موقعه الحالي بالنسبة إلى الميناء.

20 ميلا بحريا $N\,11.7°\,w$

حدّد مقدار المحصلة الناتجة عن جمع المتجهين، واتجاهها في كلّ مما يأتي:

18) 18 N للأمام، ثم 20 N للخلف.

2N للخلف

19) 100 m للشمال، ثم 350 m للجنوب.

250m للجنوب

20) 17 mi شرقًا، ثم 16 mi جنوبًا.

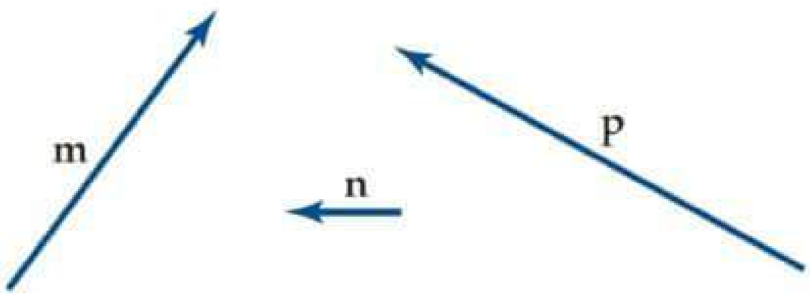
23.35 mi باتجاه $S\,47°\,E$

حلول
منصة مدرسية تعليمية

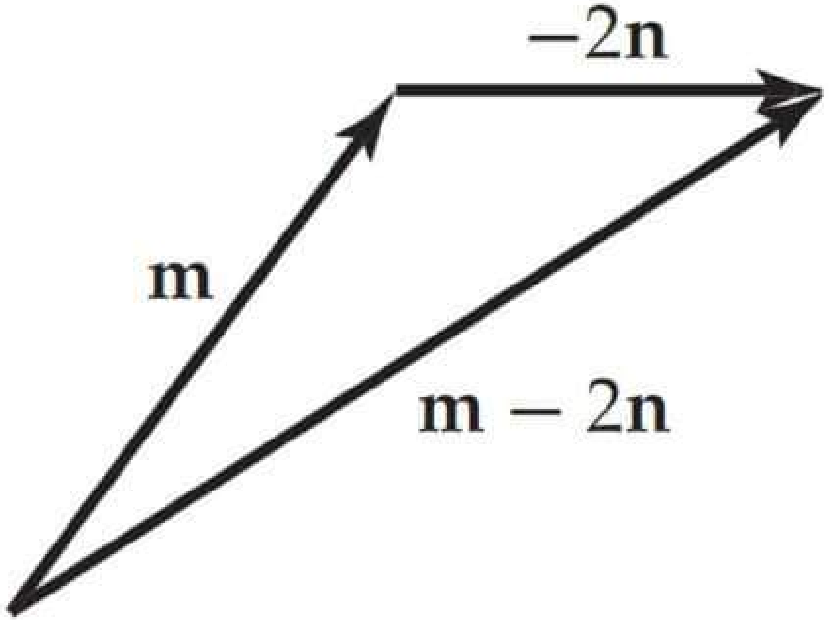
21) $15\ m/s^2$ باتجاه زاوية قياسها $60°$ مع الأفقي، ثم $9.8\ m/s^2$ إلى الأسفل.

$8\ m/s^2$ تقريبًا، $23°$ معَ الأفقي

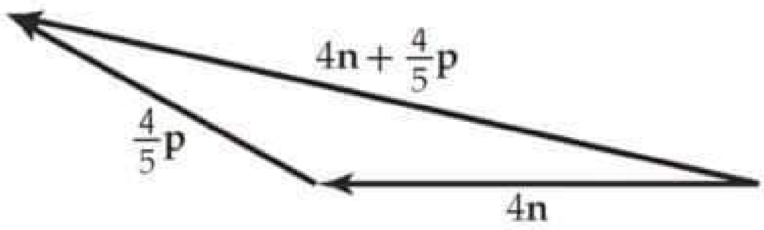
استعمل المتجهات الآتية؛ لرسم متجه يمثّل كل عبارة مما يأتي:



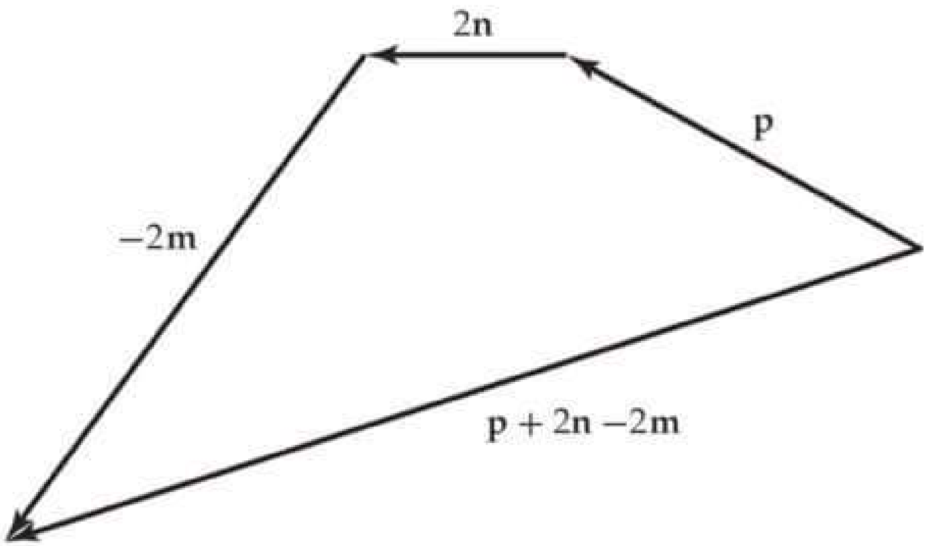
$m - 2n$ (22



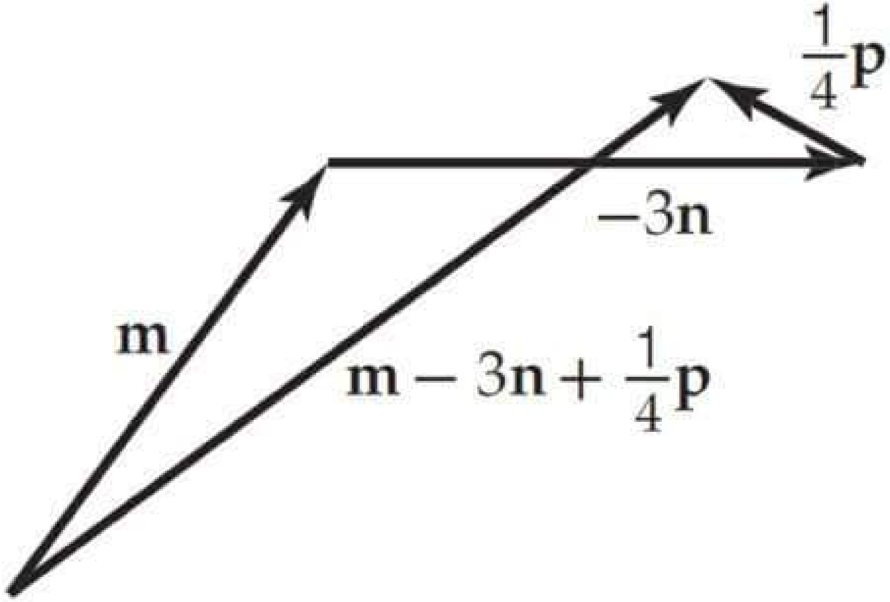
23) $4n + \frac{4}{5}p$



24) $p + 2n - 2m$



$m - 3n + \frac{1}{4}p$ (25

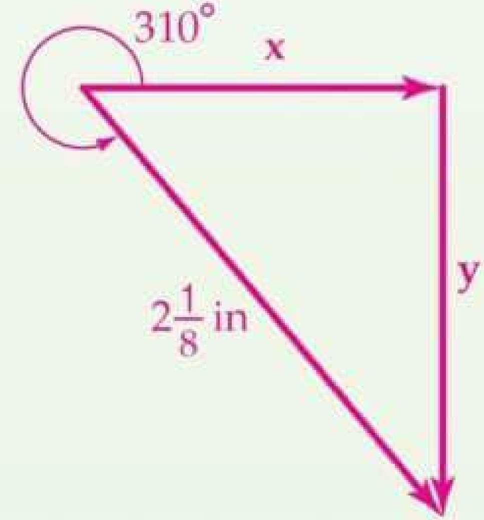


ارسم شكلًا يوضِّح تحليل كل متجه مما يأتي إلى مركبتَيه المتعامدتين، ثم أوجد مقدار كلٍّ منهما.

26) $2\frac{1}{8}$ in/s ، باتجاه °310 مع الأفقي.

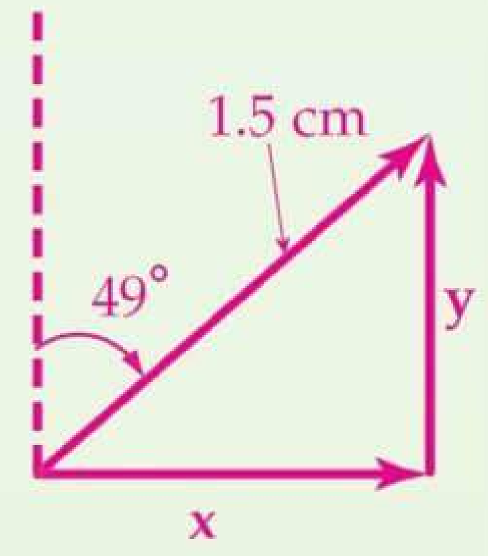
مقدار المركبة الرأسية 1.63 in/s تقريبًا

مقدار المركبة الرأسية 1.37 in/s تقريبًا



27) 1.5 cm ، باتجاه N 49° E.

1.13 cm, 0.98 cm



29) **تنظيف:** يدفع حسن عصا مكنسة التنظيف بقوة مقدارها 190 N ، وبزاوية قياسها 33° مع سطح الأرض كما في الشكل المجاور.

b) أوجد مقدار كلٍّ من المركبة الأفقية والمركبة الرأسية.

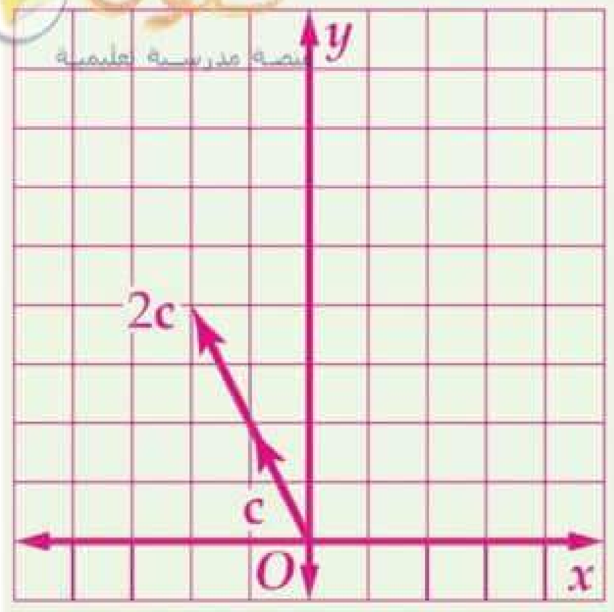
المركبة الأفقية : $159.3N$ والمركبة الرأسية : $103.5\ N$.

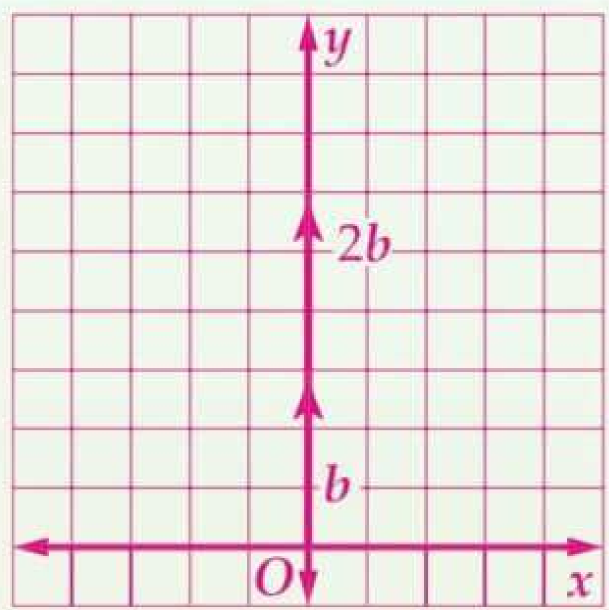
30) **لعب أطفال:** يدفع محمد عربة أخته بقوة مقدارها 100 N، وباتجاه °31 مع الأفقي، أوجد مقدار المركبة الرأسية للقوة إلى أقرب عدد صحيح.

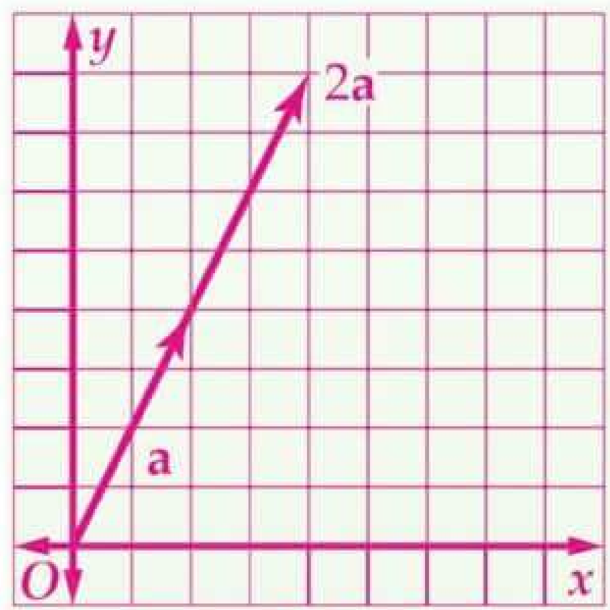
52 N تقريبًا

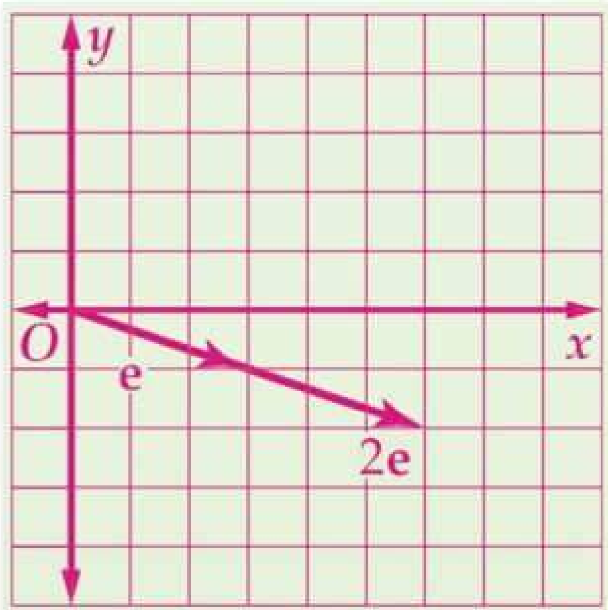
31) **تمثيلات متعددة:** في هذه المسألة ستستقصي ضرب متجه في عدد حقيقي.

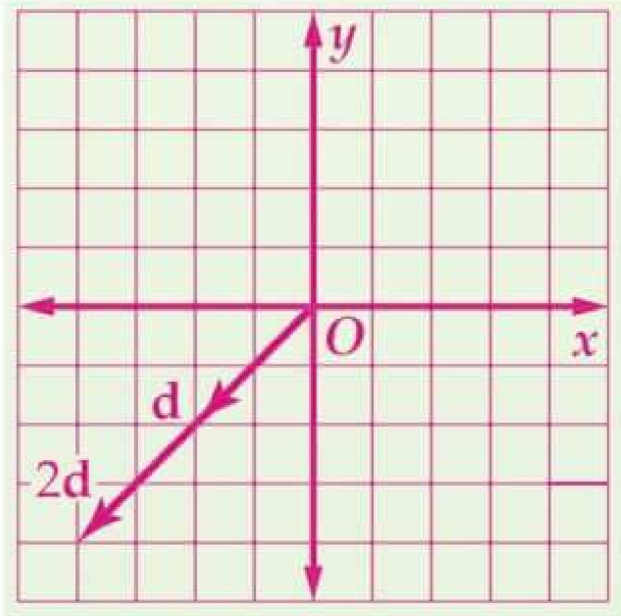
a) **بيانيًّا:** ارسم المتجه **a** على المستوى الإحداثي، بحيث تكون نقطة بدايته عند نقطة الأصل. واختر قيمة عددية لِـ k، ثم ارسم متجهًا ناتجًا عن ضرب k في المتجه الأصلي على المستوى الإحداثي نفسه. وكرّر العملية مع أربعة متجهات أخرى **b, c, d, e**، واستعمل قيمة k نفسها في كل مرة.


y
2c
c
O
x


y
2b
b
O
x


y
2a
a
O
x


y
O
x
e
2e


y
O
x
d
2d

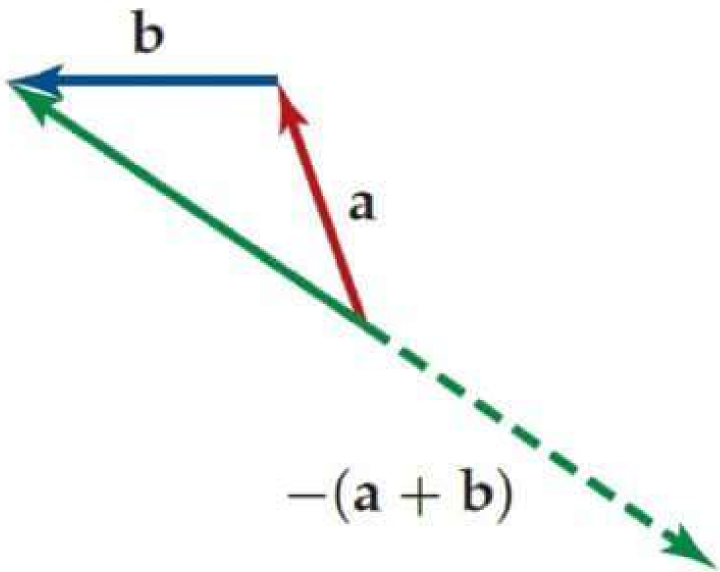
b) **جدوليًّا:** انسخ الجدول أدناه في دفترك، ثم اكتب البيانات المناسبة داخله لكل متجه رسمته في الفرع **a**.

المتجه	نقطة النهاية للمتجه	نقطة النهاية للمتجه مضروبًا في العدد k
a	(2, 4)	(4, 8)
b	(0, 3)	(0, 6)
c	(−1, 2)	(−2, 4)
d	(−2, −2)	(−4, −4)
e	(3, −1)	(6, −2)

c) **تحليليًا :** إذا كانت (a, b) نقطة النهاية للمتجه **a** ، فما إحداثيات نقطة النهاية للمتجه $k\mathbf{a}$ ؟

(ka, kb)

المتجه الموازن هو متجه يساوي متجه المحصلة في المقدار ويعاكسه في الاتجاه، بحيث إن ناتج جمع متجه المحصلة مع المتجه الموازن يساوي المتجه الصفري، والمتجه الموازن للمتجه $\mathbf{a} + \mathbf{b}$ هو $-(\mathbf{a} + \mathbf{b})$



32) أوجد طول واتجاه المتجه الموازن للمتجهين:

$\mathbf{a} = 15\ \text{mi/h}$ ، باتجاه $125°$

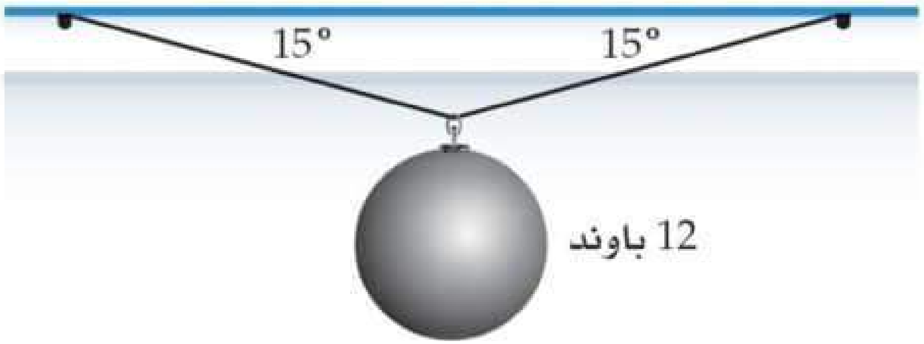
$\mathbf{b} = 12\ \text{mi/h}$ ، باتجاه $045°$ **$20.77\ \text{mi / h}$ باتجاه $270°$**

32) أوجد طول واتجاه المتجه الموازن للمتجهين:

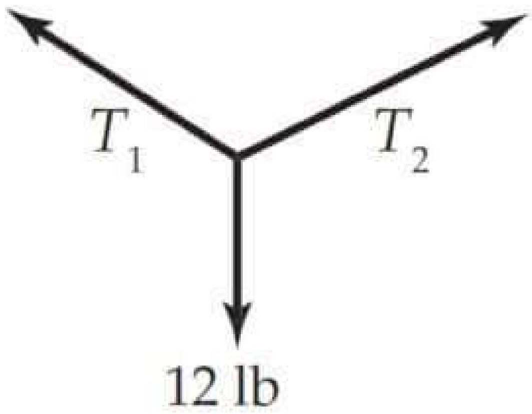
$\mathbf{a} = 15\ mi/h$ ، باتجاه $125°$

$\mathbf{b} = 12\ mi/h$ ، باتجاه $045°$ **$20.77\ mi/h$ باتجاه $270°$**

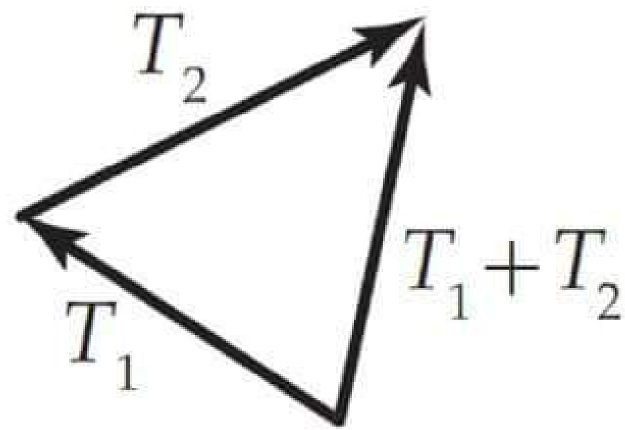
33) **كرة حديدية:** عُلِّقت كرة حديدية بحبلين متساويين في الطول كما في الشكل أدناه.



a) إذا كانت T_2 , T_1 تُمثّلان قوتَي الشدِّ في الحبلين، وكانت $T_1 = T_2$ ، فارسم شكلًا يُمثّل وضع التوازن للكرة.



b) أعد رسم الشكل باستعمال قاعدة المثلث لتجد $T_1 + T_2$



c) استعمل الشكل في الفقرة **b** وحقيقة أن محصلة $T_1 + T_2$ هي المتجه الموازن لوزن الكرة؛ لحساب مقدار كلٍّ من T_1 , T_2

$T_1 \approx 23.18\,\text{lb},\ T_2 \approx 23.18\,\text{lb}$

أوجد طول كل متجه واتجاهه مما يأتي بمعلومية مركبتَيه الأفقية والرأسية والمدى الممكن لزاوية كلٍّ منها:

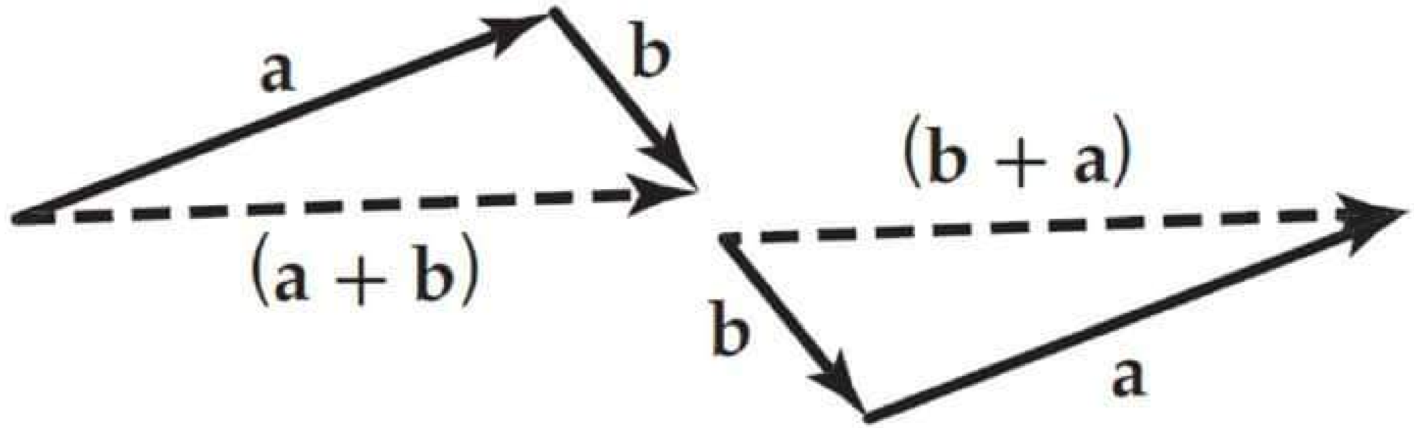
2.3 *IN.* ; 98° 34) الأفقية 0.32 in ، الرأسية 2.28 in ، $90° < \theta < 180°$.

5.2 *ft* ; 54° 35) الأفقية 3.1 ft ، الرأسية 4.2 ft ، $0° < \theta < 90°$.

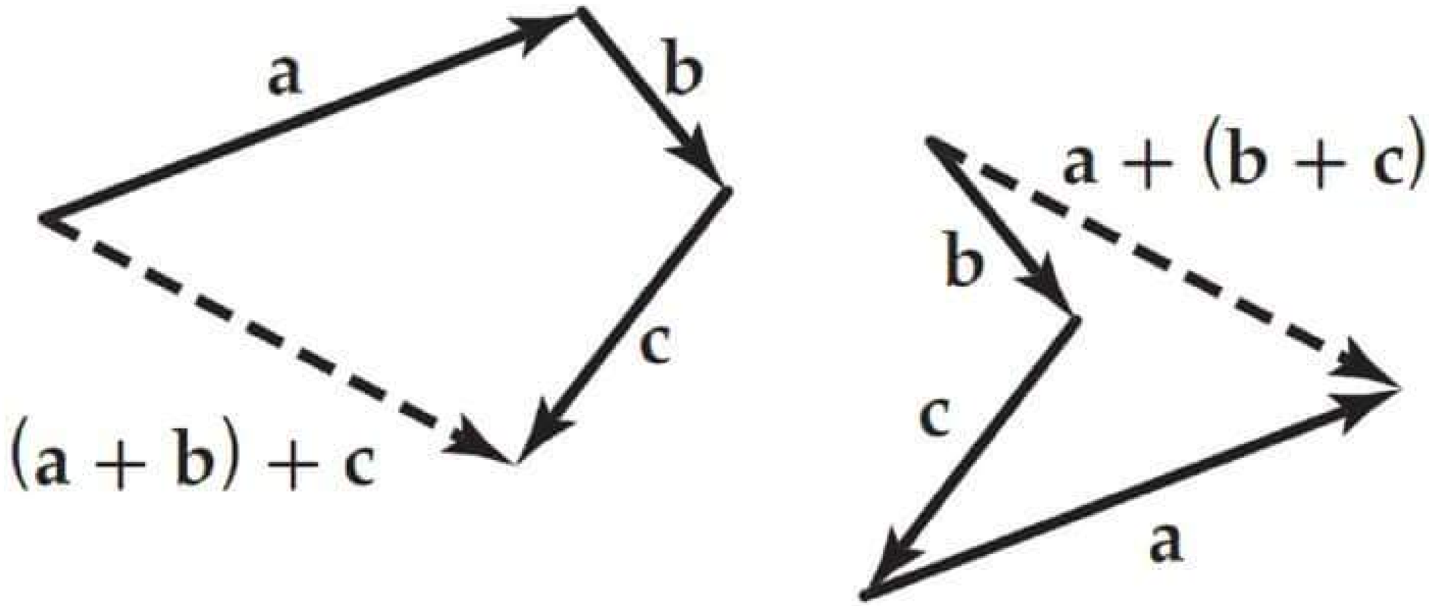
10 *cm* ; 285° 36) الأفقية 2.6 cm ، الرأسية 9.7 cm ، $270° < \theta < 360°$.

ارسم ثلاثة متجهات **a, b, c** ؛ لتوضح صحة كل خاصية من الخصائص الآتية هندسيًّا:

37) الخاصية الإبدالية $\mathbf{a} + \mathbf{b} = \mathbf{b} + \mathbf{a}$

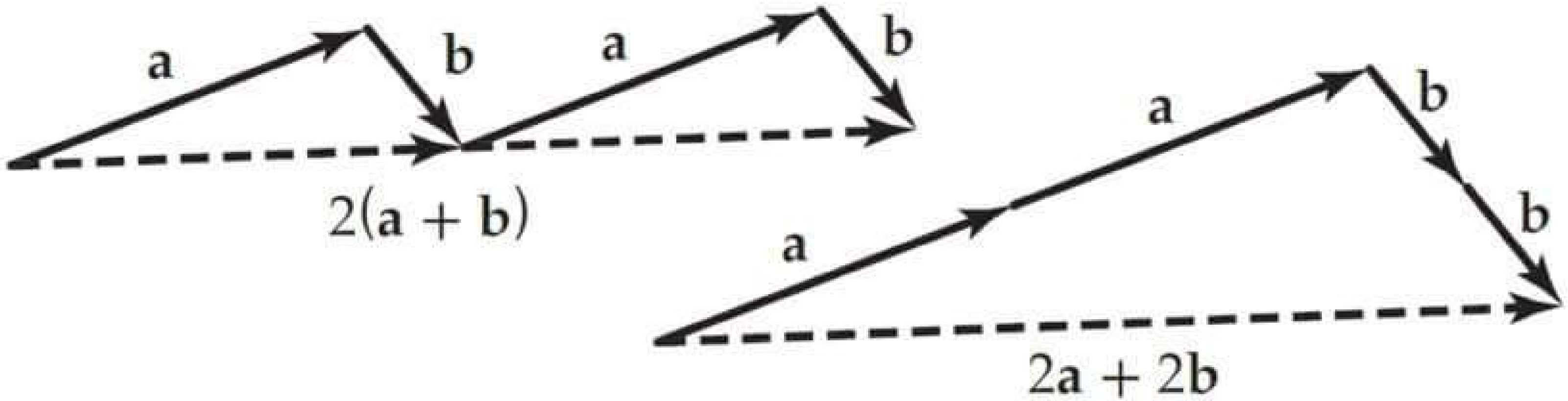


38) الخاصية التجميعية $(a + b) + c = a + (b + c)$

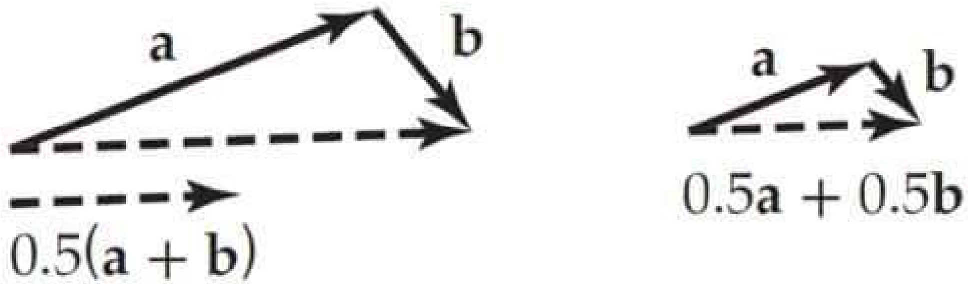


39) الخاصية التوزيعية $k(\mathbf{a}+\mathbf{b}) = k\mathbf{a} + k\mathbf{b}$، حيث $k = 2, 0.5, -2$

$k = 2$

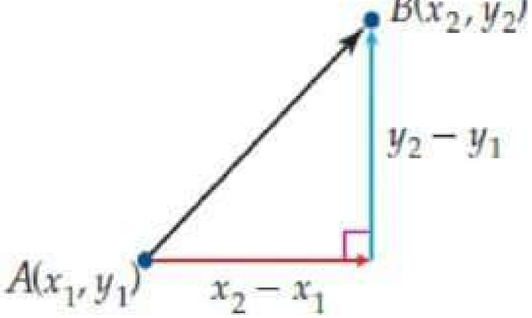


$k = 0.5$



المتجهات في المستوي الإحداثي

الصورة الاحداثية لـ $\overline{AB}$ ، الذي نقطة بدايته $A(x_1\,,y_1)$ ، ونقطة نهايته $B(x_2\,,y_2)$ هي : $\langle x_2 - x_1, y2 - y_1\rangle$



مثال التعبير عن المتجه بالصورة الإحداثية

أوجد الصورة الإحداثية لـ $\overline{AB}$ ، الذي نقطة بدايته $A(-4, 2)$ ، ونقطة نهايته $B(3, -5)$.

$\overline{AB} = \langle x_2 - x_1 - y_2 - y_1\rangle$ الصورة الإحداثية

$= \langle 3 - (-4), -5 - 2\rangle$ $(x_1, y_1) = (-4, 2), (x_2, y_2) = (3, -5)$

$= \langle 7, -7\rangle$ بسط

تدرب وحل المسائل

أوجد الصورة الإحداثية، وطول $\overrightarrow{AB}$ ، المُعطاة نقطتا بدايته ونهايته في كل ممّا يأتي:

1) $A(-3, 1), B(4, 5)$ $\langle 7, 4\rangle, \sqrt{65} \approx 8.1$

2) $A(2, -7), B(-6, 9)$ $\langle -8, 16\rangle, \sqrt{320} \approx 17.9$

3) $A(10, -2), B(3, -5)$ $\langle -7, -3\rangle, \sqrt{58} \approx 7.6$

4) $A(-2, 6), B(1, 10)$ $\langle 3, 4\rangle, 5$

5) $A(2.5, -3), B(-4, 1.5)$ $\langle -6.5, 4.5\rangle, \sqrt{62.5} \approx 7.9$

6) $A\left(\frac{1}{2}, -9\right), B\left(6, \frac{5}{2}\right)$ $\left\langle \frac{11}{2}, \frac{23}{2}\right\rangle, \sqrt{\frac{325}{2}} \approx 12.7$

إذا كان: $h = \langle -6,2 \rangle$, $g = \langle -3, -5 \rangle$, $f = \langle 8,0 \rangle$. فأوجد كلًا مما يأتي: (مثال 3)

7) $4h - g$ $\langle -21, 13 \rangle$

8) $f + 2h$ $\langle -4, 4 \rangle$

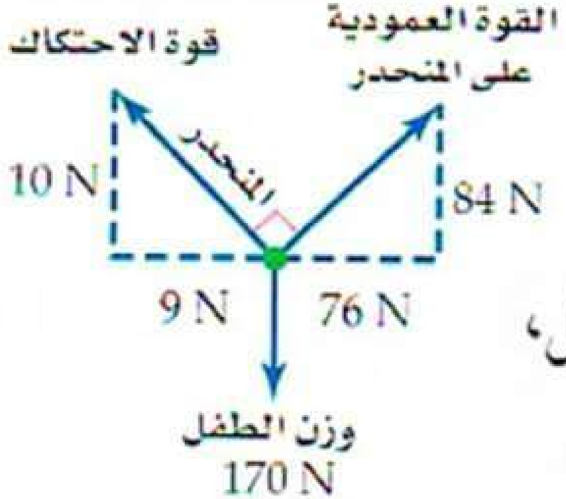
9) $2f + g - 3h$ $\langle 31, -11 \rangle$

10) $f - 2g - 2h$ $\langle 26, 6 \rangle$

11) $h - 4f + 5g$ $\langle -53, -23 \rangle$

12) $4g - 3f + h$ $\langle -42, -18 \rangle$

13) **فيزياء:** يُستعمل مخطط القوى؛ لتوضيح أثر القوى المختلفة في جسم، والمخطط أدناه يمثل القوى التي تؤثر في طفل ينزلق على منحدرٍ أسفل. (مثال 3)



a) اعتبر أن النقطة الخضراء التي تُمثّل الطفل هي نقطة الأصل، واكتب كل متجه على الصورة الإحداثية.

$$n = \langle 76, 84 \rangle, f = \langle -9, 10 \rangle, w = \langle 0, -170 \rangle$$

b) أوجد الصورة الإحداثية لمتجه المحصلة الذي يمثل القوة التي تسبب انزلاق الطفل إلى أسفل.

$$\langle 67 , -76 \rangle$$

أوجد متجه وحدة له اتجاه المتجه **v** نفسه في كلٍّ ممَّا يأتي:

14) $\mathbf{v} = \langle -2, 7 \rangle$

$$u = \left\langle -\frac{2\sqrt{53}}{53}, \frac{7\sqrt{53}}{53} \right\rangle$$

15) $\mathbf{v} = \langle 9, -3 \rangle$

$$u = \left\langle \frac{3\sqrt{10}}{10}, -\frac{\sqrt{10}}{10} \right\rangle$$

16) $\mathbf{v} = \langle -8, -5 \rangle$

$$u = \left\langle -\frac{8\sqrt{89}}{89}, -\frac{5\sqrt{89}}{89} \right\rangle$$

17) $\mathbf{v} = \langle 6, 3 \rangle$

$$u = \left\langle \frac{2\sqrt{5}}{5}, -\frac{\sqrt{5}}{5} \right\rangle$$

اكتب $\overrightarrow{DE}$ ، المُعطاة نقطتا بدايته ونهايته في كلٍ ممّا يأتي على صورة توافق خطي لمتجهَي الوحدة $\mathbf{i}, \mathbf{j}$: (مثال 5)

20) $D(4, -1), E(5, -7)$ $\quad i - 6j$

21) $D(9, -6), E(-7, 2)$ $\quad -16i + 8j$

22) $D(3, 11), E(-2, -8)$ $\quad -5i - 19j$

23) $D(9.5, 1), E(0, -7.3)$ $\quad -9.5i - 8.3j$

24) $D(-4, -6), E(9, 5)$ $\quad 13i + 11j$

25) $D\left(\frac{1}{8}, 3\right), E\left(-4, \frac{2}{7}\right)$ $\quad -\frac{33}{8}i - \frac{19}{7}j$

أوجد الصورة الإحداثية للمتجه $\mathbf{v}$ ، المُعطى طوله وزاوية اتجاهه مع الاتجاه الموجب لمحور x في كلٍّ ممَّا يأتي: (مثال 6)

26) $|\mathbf{v}| = 12, \theta = 60^\circ$

$\langle 6, 6\sqrt{3} \rangle$

27) $|\mathbf{v}| = 16, \theta = 330^\circ$

$\left\langle 8\sqrt{3, -8} \right\rangle$

28) $|\mathbf{v}| = 4, \theta = 135^\circ$

$\left\langle -2\sqrt{2, 2\sqrt{2}} \right\rangle$

29) $|\mathbf{v}| = 15, \theta = 125^\circ$

$\langle -8.6, 12.29 \rangle$

أوجد زاوية اتجاه كلٍّ من المتجهات الآتية مع الاتجاه الموجب لمحور x : (مثال 7)

30) $3\mathbf{i} + 6\mathbf{j}$

63.4°

31) $-2\mathbf{i} + 5\mathbf{j}$

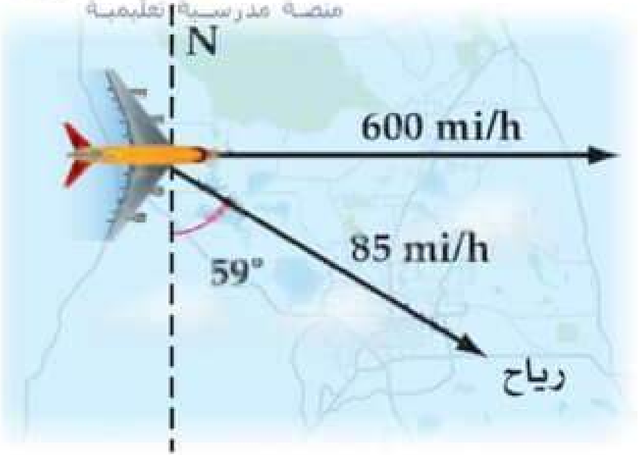
111.8°

32) $-4\mathbf{i} - 3\mathbf{j}$

216.9°

33) $\langle -5, 9 \rangle$

119.1°



34) **ملاحة جوية :** تطير طائرة جهة الشرق بسرعةٍ مقدارها $600\ mi/h$ ، وتهب الرياح بسرعةٍ مقدارها $85\ mi/h$ باتجاه $S\,59°\,E$. (مثال 8)

a) أوجد محصِّلة سرعة الطائرة. **674 mi/h**

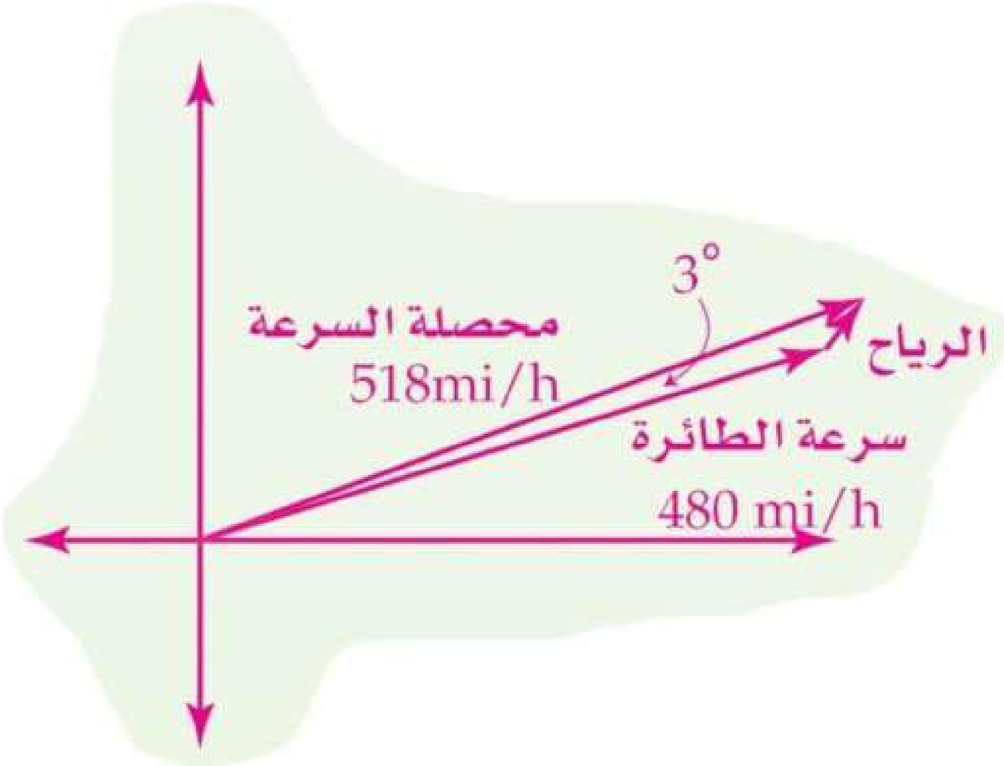
b) أوجد زاوية اتجاه مسار الطائرة. **S86°E**

35) **تجديف:** يجدف شخص بقاربه في نهر باتجاه عمودي على الشاطئ بسرعة 5 mi/h ، ويؤثر فيه تيار مائي باتجاه مجرى النهر سرعته 3 mi/h .

a) أوجد السرعة التي يتحرك بها القارب إلى أقرب جزء من عشرة **5.8 mi/h تقريبًا**

b) أوجد زاوية اتجاه حركة القارب بالنسبة للشاطئ إلى أقرب درجة. **°59 تقريبًا**

36) **ملاحة جوية :** تطير طائرة بسرعة مقدارها 480 mi/h بالاتجاه N 82° E ، وبسبب الرياح، فإن محصلة سرعة الطائرة بالنسبة لسطح الأرض أصبحت 518 mi/h باتجاه N 79° E .
ارسم شكلًا يُمثِّل هذا الموقف.



بيّن ما إذا كان $\overrightarrow{CD}$, $\overrightarrow{AB}$ المُعطاة نقطتا البداية والنهاية لكلٍّ منهما فيما يأتي متكافئين أو لا، وإذا كانا متكافئين، فأثبت أن $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$ ، وإذا كانا غير ذلك، فاذكر السبب.

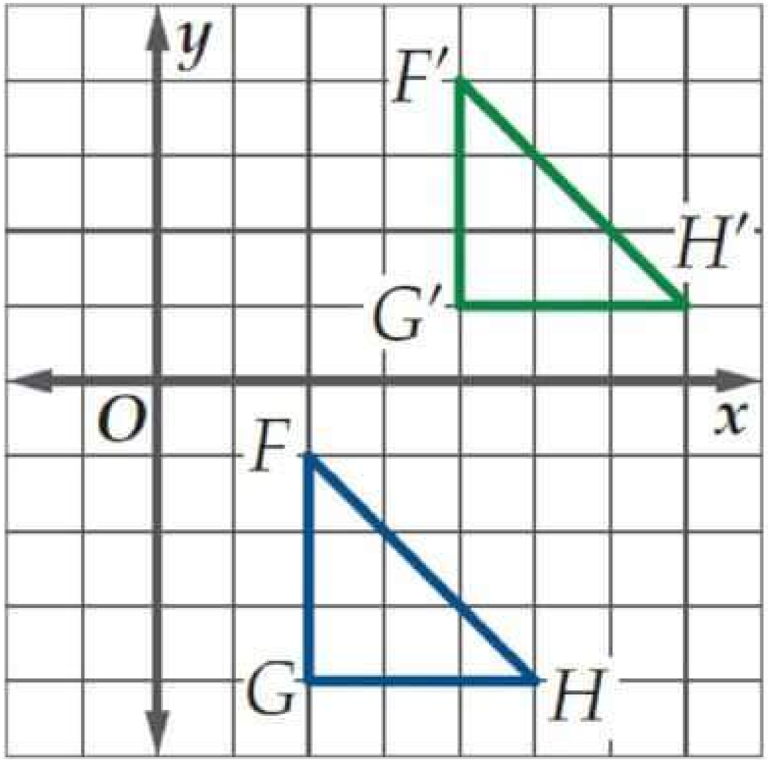
(37 $A(3, 5), B(6, 9), C(-4, -4), D(-2, 0)$

إجابة ممكنة: يختلف المقدار والاتجاه في كلٍّ من المتجهين؛ لذا فالمتجهان غير متكافئين .

(38 $A(1, -3), B(0, -10), C(11, 8), D(10, 1)$

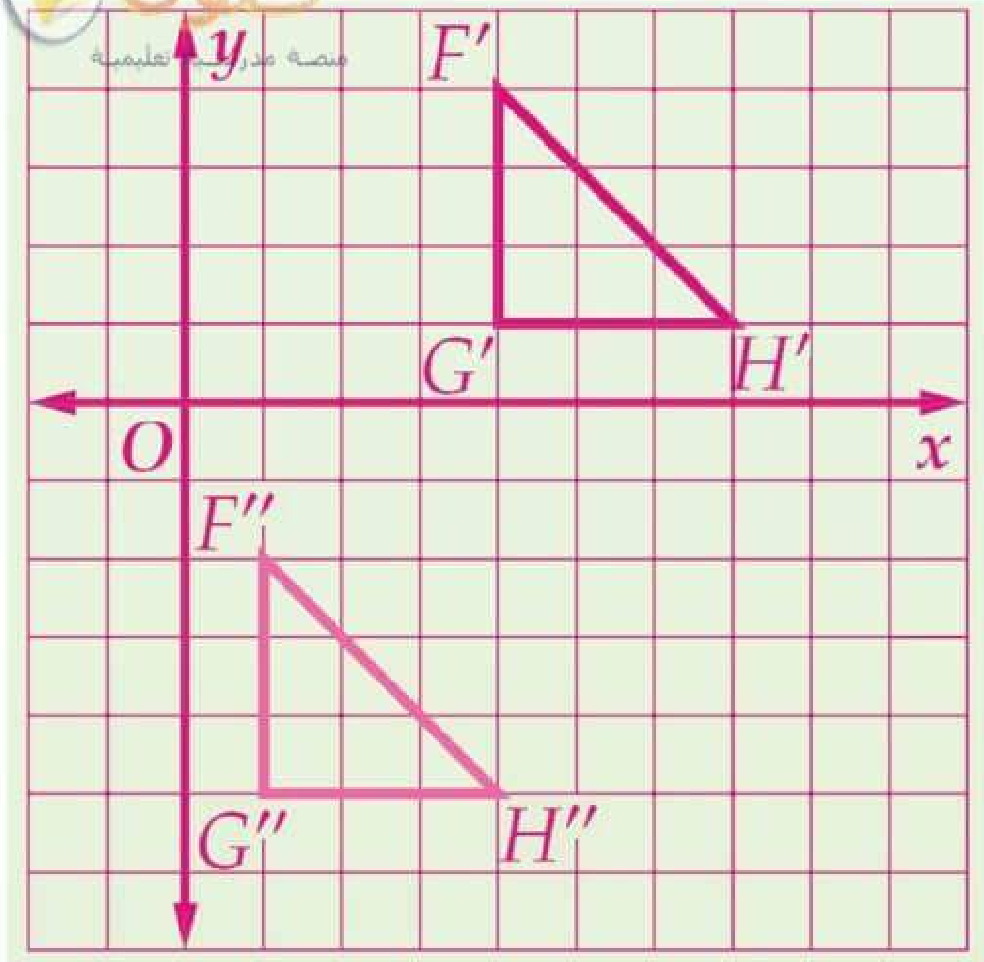
نعم؛ إجابة ممكنة : للمتجهين كلٌّ من المقدار والاتجاه نفسه؛ لذا فهما متكافئان.

39) انسحاب: يمكنك سحب شكل هندسي باستعمال المتجه $\langle a, b\rangle$؛ وذلك بإضافة a إلى الإحداثي x، وإضافة b إلى الإحداثي y.



a) حدّد المتجه الذي يُستعمل لسحب $\triangle FGH$ إلى $\triangle F'G'H'$ في الشكل المجاور.

$\langle 2, 5\rangle$



b) إذا استعمل المتجه $\langle -3, -6 \rangle$ لسحب $\triangle F'G'H'$ ، فمثّل بيانيًّا كلًّا من $\triangle F'G'H'$ ، وصورته $\triangle F''G''H''$.

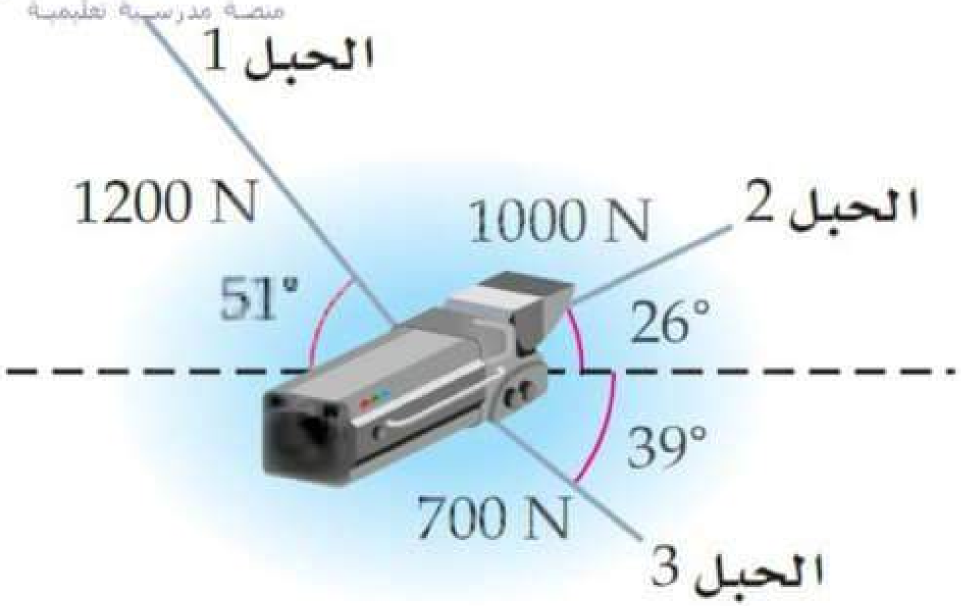
c) حدّد المتجه الذي يُستعمل لسحب $\triangle FGH$ إلى $\triangle F''G''H''$.

$\langle -1, -1 \rangle$

أوجد نقطة نهاية ممكنة لكل متجه مما يأتي، إذا علِمتُ طوله ونقطة بدايته:

40) $\sqrt{37}, (-1, 4)$ $(0, -2)$

41) $10, (-3, -7)$ $(5, -1)$



42) **آلة تصوير:** عُلِّقت آلة تصوير معدة لمتابعة حدث رياضي بثلاثة حبال كما في الشكل المجاور، إذا كان الشد في كل حبل يمثِّل متجهًا، فأجب عما يأتي:

a) أوجد الصورة الإحداثية لكل متجه لأقرب عدد صحيح.

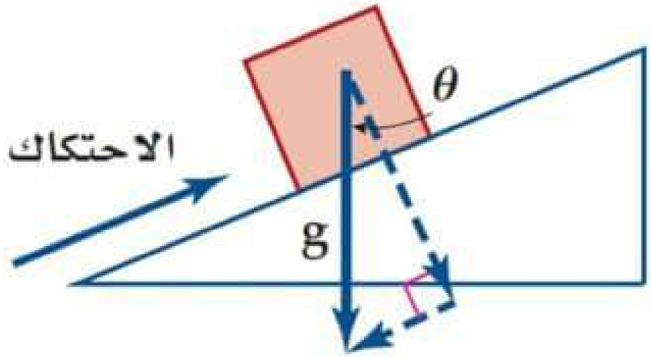
$$\langle -755, 933\rangle; \langle 899, 438\rangle; \langle 544, -441\rangle$$

b) أوجد الصورة الإحداثية لمتجه المحصلة المؤثر على آلة التصوير. $\langle 688, 930\rangle$

c) أوجد مقدار واتجاه محصلة القوى. **1157 N; 54°**

43) **قوة:** تؤثِّر قوة الجاذبية **g** وقوة الاحتكاك على صندوق في وضع السكون موضوع على سطح مائل، ويبيّن الشكل أدناه المركبتين المتعامدتين للجاذبية الأرضية (الموازية للسطح والعمودية عليه). ما الوصف الصحيح لقوة الاحتكاك ليكون هذا الوضع ممكنًا؟

يجب أن تكون قوة الاحتكاك مساوية لمركبة الجاذبية الموازية للسطح المائل.



منصة مدرسية تعليمية

الضرب الداخلي

يسمى التعبير $a_1, b_1 + a_2, b_2$ الضرب الداخلي للمتجهين $a. b$، ويرمز له بالرمز a, b، ويقرأ الضرب الداخلي للمتجهين a, b ، أو يقرأ اختصارا a . dot b

مفهوم أساسي الضرب الداخلي لمتجهين في المستوي الإحداثي

يعرف الضرب الداخلي للمتجهين $a = \langle a_1, a_2 \rangle, b = \langle b_1, b_2 \rangle$ كالآتي : $a \cdot b = a_1, b_1 + a_2, b_2$

مفهوم أساسي المتجهان المتعامدان

يكون المتجهان غير الصفريين a, b متعامدين ، إذا وفقط إذا كان $a. b = 0$.

تدرب وحل المسائل

أوجد حاصل الضرب الداخلي للمتجهين u , v، ثم تحقق ممّا إذا كانا متعامدين أم لا. (مثال 1)

1) $\mathbf{u} = \langle 3, -5 \rangle, \mathbf{v} = \langle 6, 2 \rangle$ 8 ؛ غير متعامدين

2) $\mathbf{u} = \langle 9, -3 \rangle, \mathbf{v} = \langle 1, 3 \rangle$ 0 ؛ متعامدان

3) $\mathbf{u} = \langle 4, -4 \rangle, \mathbf{v} = \langle 7, 5 \rangle$ 8 ؛ غير متعامدين

4) $\mathbf{u} = 11\mathbf{i} + 7\mathbf{j}, \mathbf{v} = -7\mathbf{i} + 11\mathbf{j}$ 0 ؛ متعامدان

5) $\mathbf{u} = \langle -4, 6 \rangle, \mathbf{v} = \langle -5, -2 \rangle$ 8 ؛ غير متعامدين

6) **زيت الزيتون:** يمثّل المتجه $\mathbf{u} = \langle 406, 297 \rangle$ أعداد علبتين مختلفتين من زيت الزيتون في متجرٍ، ويمثّل المتجه $\mathbf{v} = \langle 27.5, 15 \rangle$ سعر العلبة من كلا النوعين على الترتيب **(مثال 1)**

a) أوجد $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}$.

15620

b) فسّر النتيجة التي حصلت عليها في الفرع a في سياق المسألة.

ثمن العبوات جميعها هو 15620 ريالا

استعمل الضرب الداخلي؛ لإيجاد طول المتجه المعطى.

7) $\mathbf{m} = \langle -3, 11 \rangle$ $\quad \sqrt{130} \approx 11.4$

8) $\mathbf{r} = \langle -9, -4 \rangle$ $\quad \sqrt{97} \approx 9.8$

9) $\mathbf{v} = \langle 1, -18 \rangle$ $\quad 5\sqrt{13} \approx 18.0$

10) $\mathbf{t} = \langle 23, -16 \rangle$ $\quad \sqrt{785} \approx 28.0$

أوجد قياس الزاوية θ بين المتجهين $\mathbf{u}, \mathbf{v}$ في كل مما يأتي، وقرّب الناتج إلى أقرب جزءٍ من عشرةٍ. (مثال 3)

11) $\mathbf{u} = \langle 0, -5 \rangle, \mathbf{v} = \langle 1, -4 \rangle$

14.0°

12) $\mathbf{u} = \langle 7, 10 \rangle, \mathbf{v} = \langle 4, -4 \rangle$

100.0°

13) $\mathbf{u} = \langle -2, 4 \rangle, \mathbf{v} = \langle 2, -10 \rangle$

164.7°

14) $\mathbf{u} = -2\mathbf{i} + 3\mathbf{j}, \mathbf{v} = -4\mathbf{i} - 2\mathbf{j}$

82.9°

15) **مخيم كشفي:** غادر يوسف ويحيى مخيَّمَهما الكشفي للبحث عن حطب. إذا كان المتجه $\mathbf{u} = \langle 3, -5 \rangle$ يُمثّل الطريق الذي سلكه يوسف، والمتجه $\mathbf{v} = \langle -7, 6 \rangle$ يُمثّل الطريق الذي سلكه يحيى، فأوجد قياس الزاوية بين المتجهين. (مثال 3)

161.6°

16) **فيزياء:** يدفع طارق برميلًا على أرضٍ مستوية مسافة 1.5 m بقوة مقدارها 534 N؛ بزاوية °25، أوجد مقدار الشغل بالجول الذي يبذله طارق، وقرّب الناتج إلى أقرب عددٍ صحيحٍ. (مثال 4)

801j

أوجد متجهًا يعامد المتجه المعطى في كلٍّ مما يأتي:

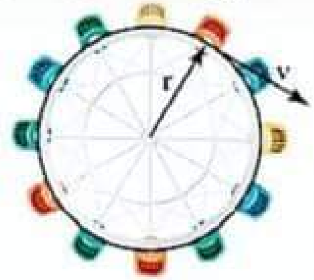
17) $\langle -2, -8 \rangle$ **إجابة ممكنة : $\langle -12, 3 \rangle$**

18) $\langle 3, 5 \rangle$ **إجابة ممكنة : $\langle 10, -6 \rangle$**

19) $\langle 7, -4 \rangle$ **إجابة ممكنة : $\langle 8, 14 \rangle$**

20) $\langle -1, 6 \rangle$ **إجابة ممكنة : $\langle 6, 1 \rangle$**

21) **عجلة دوّارة:** يعامد المتجه **r** في العجلة الدوارة في الوضع القياسي متجه السرعة المماسية **v** عند أيِّ نقطةٍ من نقاط الدائرة.



a) إذا كان طول نصف قطر العجلة 20 ft ، وسرعتها ثابتة ومقدارها 40 ft/s ، فاكتب الصورة الإحداثية للمتجه **r** في الوضع القياسي، إذا كان يصنع زاويةً قياسها °35 مع الأفقي، فاكتب الصورة الإحداثية لمتجه السرعة المماسية في هذه الحالة؟ قرّب الناتج إلى أقرب جزءٍ من مئةٍ.

$$\langle 16.38, 11.47\rangle, \langle 22.94, -32.77\rangle$$

b) ما الطريقة التي يمكن استعمالها لإثبات تعامد المتجه **r** ، ومتجه السرعة باستعمال الصورتين الإحداثيتين اللتين أوجدتهما في الفرع **a**؟ وأثبت أن المتجهين متعامدان.

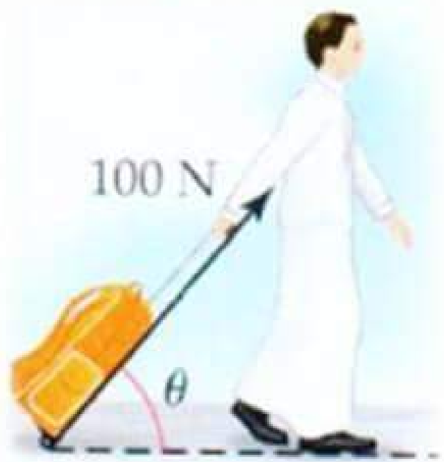
الضرب الداخلي ؛ $(20\cos 35°)(40\cos 55°) + (20\sin 35°) = 0$

إذا علمت كلًّا من $\mathbf{v}$, $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}$ ، فأوجد قيمةً ممكنةً للمتجه $\mathbf{u}$ في كل مما يأتي:

22) $v = \langle 3, -6 \rangle, u \cdot v = 33$ إجابة ممكنة : $u\langle 5, -3 \rangle$

23) $v = \langle 4, 6 \rangle, u \cdot v = 38$ إجابة ممكنة : $u\langle -1, 7 \rangle$

24) مدرسة : يسحب طالب حقيبته المدرسية بقوة مقدارها 100 N، إذا بذل الطالب شغلًا مقداره 1747 J ، لسحب حقيبته مسافة 31 m، فما قياس الزاوية بين قوة السحب والأفقي (بإهمال قوة الاحتكاك)؟



55.7° تقريبا

اختبر كل زوج من المتجهات في كلٍّ مما يأتي، من حيث كونها متعامدة، أو متوازية، أو غير ذلك.

25) $\mathbf{u} = \left\langle -\frac{2}{3}, \frac{3}{4} \right\rangle, \mathbf{v} = \langle 9, 8 \rangle$

متعامدان

بما أن $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = 0$، فإن المتجهين متعامدان .

26) $\mathbf{u} = \langle -1, -4 \rangle, \mathbf{v} = \langle 3, 6 \rangle$

غير ذلك

ليسا متعامدين، ولا متوازيين، حيث إن الزاوية بين المتجهين $\theta = 167°$.
وقياس الزاوية بين المتجهين المتوازيين إما 0 أو $180°$، وبين المتجهين المتعامدين $90°$

أوجد قياس الزاوية بين كل متجهين في كلٍّ مما يأتي، قرّب الناتج إلى أقرب عُشرٍ.

27) $\mathbf{u} = \mathbf{i} + 5\mathbf{j}, \mathbf{v} = -2\mathbf{i} + 6\mathbf{j}$

$29.7°$

28) $\mathbf{u} = 4\mathbf{i} + 3\mathbf{j}, \mathbf{v} = -5\mathbf{i} - 2\mathbf{j}$

$164.9°$

29) النقاط: $(8, 1)$, $(4, 7)$, $(2, 3)$ تُمثِّل رؤوس مثلثٍ، أوجد قياسات زواياه باستعمال المتجهات.

المتجهات التي تشكل المثلث:

$A\langle 2, 4\rangle, B\langle 4, -6\rangle, C\langle 6, -2\rangle$

$$\cos A = \frac{b.c}{|b|\ .|c|} = \frac{36}{\sqrt{52}.\ \sqrt{40}}$$

$$= \frac{9}{\sqrt{130}}$$

$$A = \cos^{-1}\frac{9}{\sqrt{130}}$$

$$\cos B = \frac{a.b}{|a|\ .|c|} = \frac{2}{5\sqrt{2}}$$

$$B = \cos^{-1} = \frac{2}{5\sqrt{2}} \approx$$

$$C = 180° - (A+B) \approx$$

إذن قياسات زوايا المثلث

إذا علمت كلًّا من $|\mathbf{v}|$,$\mathbf{u}$ والزاوية θ بين المتجهين $\mathbf{u}, \mathbf{v}$ ، فأوجد قيمةً ممكنةً للمتجه $\mathbf{v}$ ، قرّب الناتج إلى أقرب جزءٍ من مئةٍ.

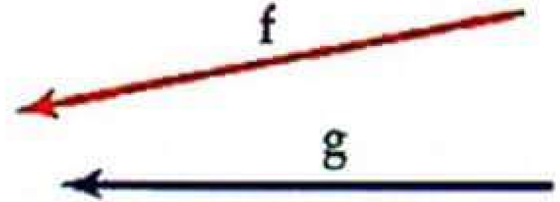
30) $\mathbf{u} = \langle 4, -2 \rangle, |\mathbf{v}| = 10, \theta = 45^\circ$ $\langle 3.16, -9.49 \rangle$

31) $\mathbf{u} = \langle 3, 4 \rangle, |\mathbf{v}| = \sqrt{29}, \theta = 121^\circ$ $\langle -5.36, 0.55 \rangle$

اختبار منتصف الفصل

أوجد محصلة كل زوج من المتجهات الآتية مستعملًا قاعدة المثلث، أو متوازي الأضلاع، قرِّب المحصلة إلى أقرب سنتمتر، ثم حدِّد اتجاهها بالنسبة للأفقي، مستعملًا المسطرة والمنقلة. (الدرس 1-5)

1)



$6.2cm\,, 185°$

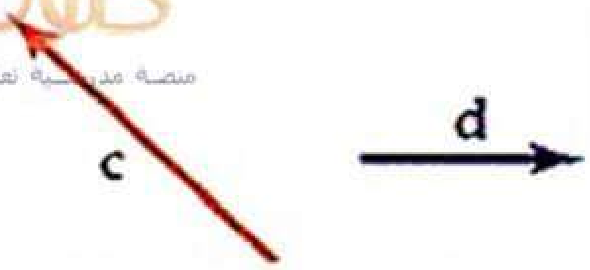
2)

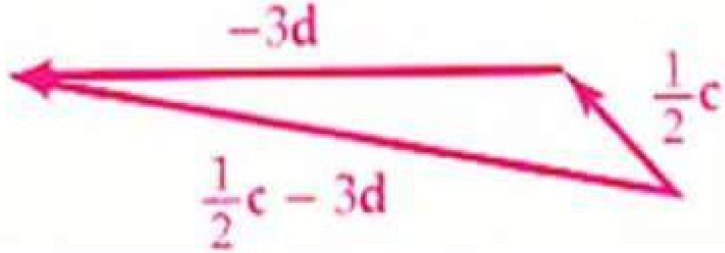
$1.1cm\,, 57°$

3) **التزلج:** يسحب شخص مزلجة على الجليد بقوة مقدارها 50N بزاوية °35 مع الأفقي. أوجد مقدار كلٍّ من المركبة الأفقية، والعمودية للقوة، قرِّب إلى أقرب جزء من مئة. (الدرس 1-5)

$40.96N;28.68N$

4) ارسم شكلًا يُمثِّل المتجه $\frac{1}{2}\mathbf{c} - 3\mathbf{d}$.





اكتب $\overrightarrow{BC}$ المُعطاة نقطتا بدايته ونهايته، في كلٍّ ممَّا يأتي بدلالة متجهَي الوحدة $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$. (الدرس 2-5)

5) $B(3,-1), C(4,-7)$ $\qquad i + -6j$

6) $B(10,-6), C(-8,2)$ $\qquad -18i + 8j$

7) $B(1,12), C(-2,-9)$ $\qquad -3i + -21j$

8) $B(4,-10), C(14,10)$ $\qquad 10i + 20j$

9) **اختيار من متعدد:** أي مما يأتي يُمثِّل الصورة الإحداثية لـ $\overrightarrow{AB}$، حيث $A(-5, 3)$ نقطة بدايته، و $B(2, -1)$ نقطة نهايته؟

A $\langle 4, -1 \rangle$

B $\boxed{\langle 7, -4 \rangle}$

C $\langle -4, 7 \rangle$

D $\langle -6, 4 \rangle$

10) **كرة سلة:** ركض راشد باتجاه السلة في أثناء مباراة بسرعة 2.5 m/s، ومن منتصف الملعب صوَّب كرة بسرعة 8 m/s بزاوية قياسها $36°$ مع الأفقي.

a) اكتب الصورة الإحداثية للمتجهين اللذين يُمثِّلان سرعة راشد، وسرعة الكرة، قرِّب الناتج إلى أقرب جزء من عشرة.

راشد : $\langle 2.5, 0 \rangle$ ؛ الكرة : $\langle 6.5, 4.7 \rangle$

b) ما السرعة المحصلة، واتجاه حركة الكرة؟ قرِّب المحصلة إلى أقرب جزء من عشرة، وقياس الزاوية إلى أقرب درجة.

$10.2 m/s$ بزاوية قياسها $28°$مع الأفقي .

أوجد الصورة الإحداثية، وطول المتجه المُعطاة نقطتا بدايته ونهايته على الترتيب في كلٍّ مما يأتي ، قرِّب الناتج إلى أقرب جزء من عشرة. (الدرس 2-5)

11) $A(-4, 2)$, $B(3,6)$ $\langle 7, 4\rangle; \sqrt{65} \approx 8.1$

12) $Q(1, -5)$, $R(-7, 8)$ $\langle -8\ , 13\rangle; \sqrt{233} \approx 15.3$

أوجد قياس الزاوية θ بين المتجهين $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$، وقرِّب الناتج إلى أقرب درجة: (الدرس 3-5)

13) $\mathbf{u}=\langle 9\ , -4\rangle$, $\mathbf{v}=\langle -1, -2\rangle$ $93°$

14) $\mathbf{u}=\langle 8, 4\rangle$, $\mathbf{v}=\langle -2, 4\rangle$ $90°$

15) $\mathbf{u}=\langle 2, -2\rangle$, $\mathbf{v}=\langle 3, 8\rangle$ $114°$

16) اختيار من متعدد: إذا كان : $\mathbf{u} = \langle 2, 3 \rangle, \mathbf{v} = \langle -1, 4 \rangle, \mathbf{w} = \langle 8, -5 \rangle$ ، فما ناتج $(\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}) + (\mathbf{w} \cdot \mathbf{v})$ ؟

A -2

B $\boxed{-18}$

C 15

D 38

أوجد الضرب الداخلي للمتجهين في كلٍّ مما يأتي، ثم تحقَّق مما إذا كانا متعامدين أم لا: (الدرس 3-5)

17) $\langle 2, -5 \rangle \cdot \langle 4, 2 \rangle$ — -2 ؛ غير متعامدين

18) $\langle 4, -3 \rangle \cdot \langle 7, 4 \rangle$ — 16 ؛ غير متعامدين

19) $\langle 1, -6 \rangle \cdot \langle 5, 8 \rangle$ — -43 ؛ غير متعامدين

20) $\langle 3, -6 \rangle \cdot \langle 10, 5 \rangle$ — 0 ؛ متعامدان

21) **عربة:** يسحب أحمد عربةً بقوةٍ مقدارها 25 N ، وبزاوية °30 مع الأفقي كما في الشكل أدناه. (الدرس 3-5)

a) ما مقدار الشغل الذي يبذله أحمد عندما يسحب العربة 150 m، قرّب الناتج إلى أقرب جزء من عشرة.

3247.6 جولا

b) إذا كانت الزاوية بين ذراع العربة والأفقي °40 ، وسحب أحمد العربة المسافة نفسها، وبالقوة نفسها، فهل يبذل شغلًا أكبر أم أقل؟ فسّر إجابتك.

أقل ؛ سيبذل 2872.7 جولا

المتجهات في الفضاء الثلاثي الأبعاد

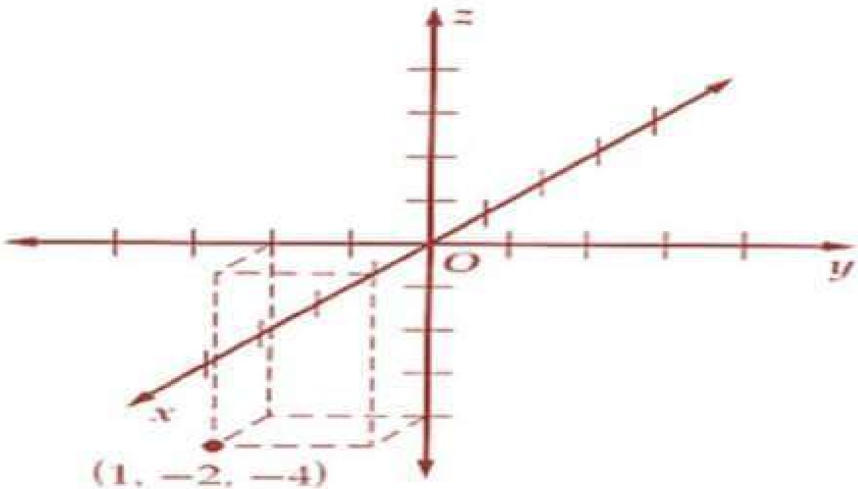
الإحداثيات في الفضاء الثلاثي الأبعاد

المستوى الإحداثي : هو نظام إحداثي ثنائي الأبعاد يشكل بواسطة خطي أعداد متعامدين ، هما المحور x والمحور y ، اللذان يتقاطعان في نقطة تسمى نقطة الأصل .

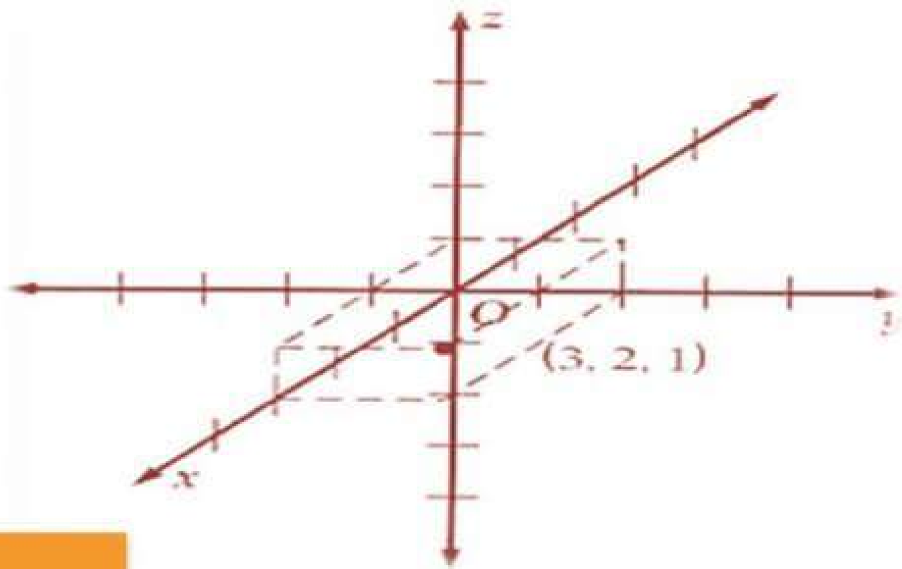
لتعيين نقطة في الفضاء تحتاج إلي نظام الإحداثيات الثلاثي الأبعاد ؛ فنبدأ بالمستوى xy ، ونضعه بصورة تظهر عمقا للشكل كما في الشكل 5.4.1 ، ثم نضيف محورا ثالثا يسمى المحور z يمر بنقطة الأصل ، ويعامد كلا من المحورين y، z كما في الشكل 5.4.2 فيكون لدينا ثلاثة مستويات هي xy , yz , xz ، وتقسم هذه المستويات الفضاء إلي ثماني مناطق ، يسمي كل منها الثمن ، ويكون تمثيل الثمن الأول بجزء الحجرة في الشكل 5.4.3 .

تدرب وحل المسائل عيِّن كل نقطة مما يأتي في نظام الإحداثيات الثلاثي الأبعاد:

1) $(1, -2, -4)$

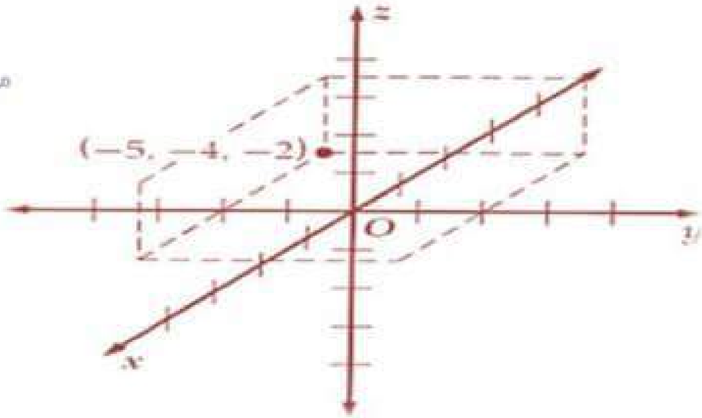


2) $(3, 2, 1)$

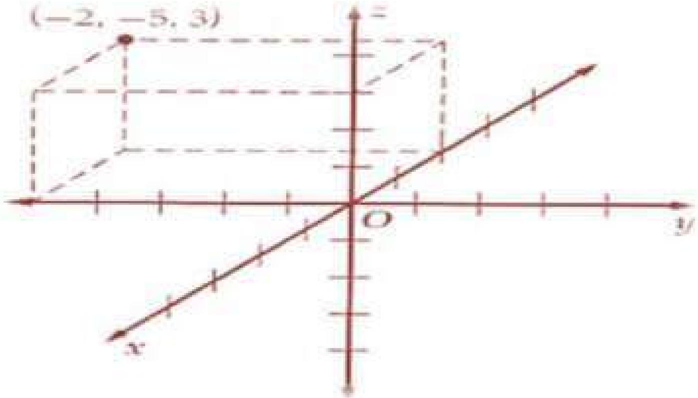


حلول
منصة مدرسية تعليمية

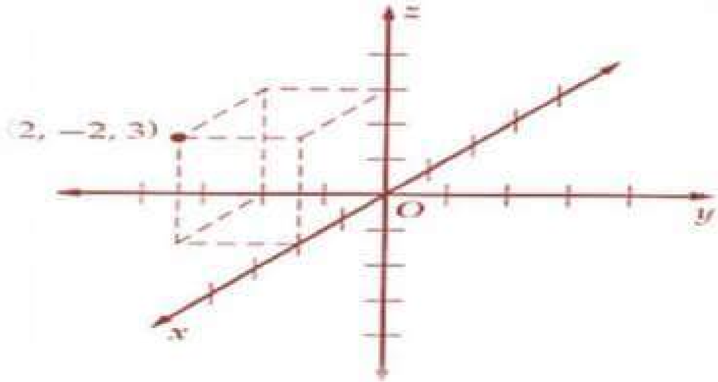
$(-5, -4, -2)$ (3



$(-2, -5, 3)$ (4



$(2, -2, 3)$ (5



أوجد طول القطعة المستقيمة المعطاة نقطتا نهايتها وبدايتها، ثم أوجد إحداثيات نقطة منتصفها في كلٍّ مما يأتي: (مثال 2)

7) $(-4, 10, 4), (1, 0, 9)$ $12.25, \left(-\frac{3}{2}, 5, \frac{13}{2}\right)$

8) $(-6, 6, 3), (-9, -2, -2)$ $9.90, \left(-\frac{15}{2}, 2, \frac{1}{2}\right)$

9) $(8, 3, 4), (-4, -7, 5)$ $15.65, \left(2, -2, \frac{9}{2}\right)$

10) $(-7, 2, -5), (-2, -5, -8)$ $9.11, \left(-\frac{9}{2}, \frac{3}{2}, -\frac{13}{2}\right)$

11) **طيّارون:** في لحظةٍ ما أثناء تدريب عسكري، كانت إحداثيات موقع طائرة (675, 121−, 19300)، وإحداثيات موقع طائرةٍ أخرى (16100 ,715 ,289−) ، علمًا بأن الإحداثيات معطاة بالأقدام.

a) أوجد المسافة بين الطائرتين مقرَّبة إلى أقرب قدم.

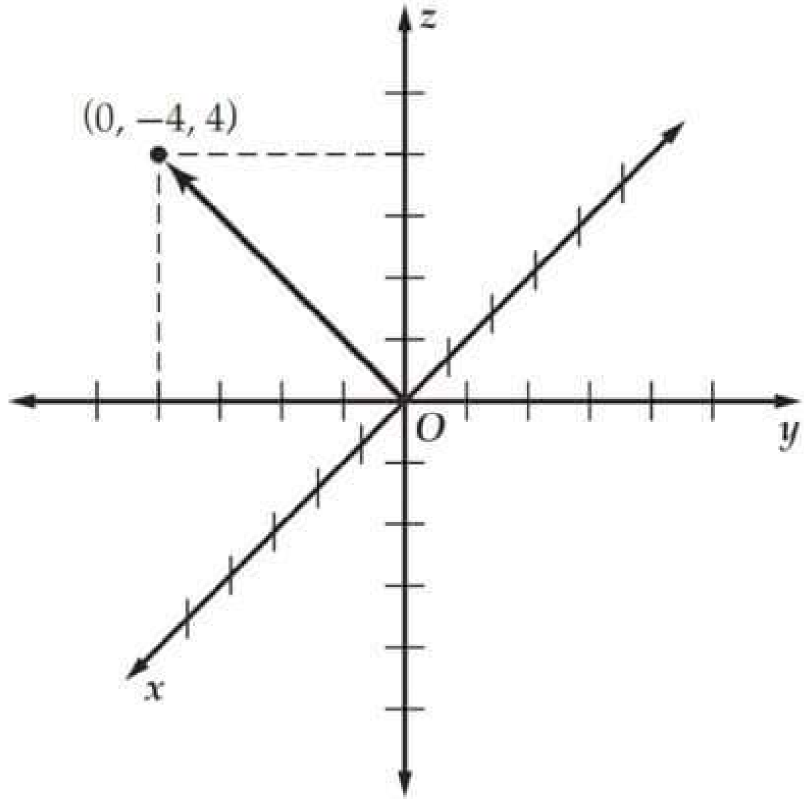
$$3445ft$$

b) عيّن إحداثيات النقطة التي تقع في منتصف المسافة بين الطائرتين في تلك اللحظة.

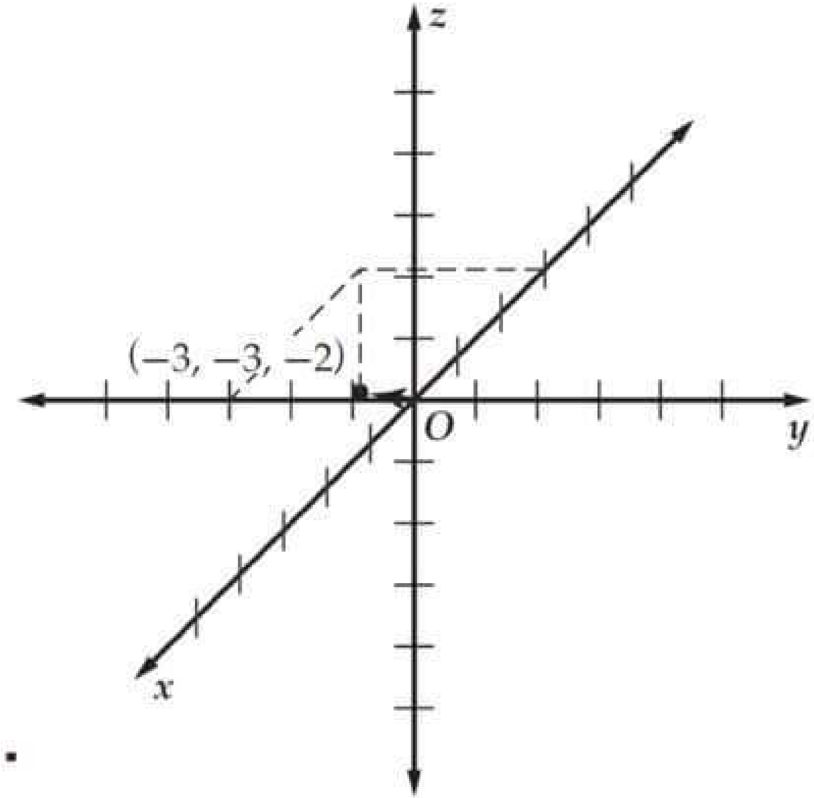
$$(193, 297, 17700)$$

مثّل بيانيًّا كلًّا من المتجهات الآتية في نظام الإحداثيات الثلاثي الأبعاد:

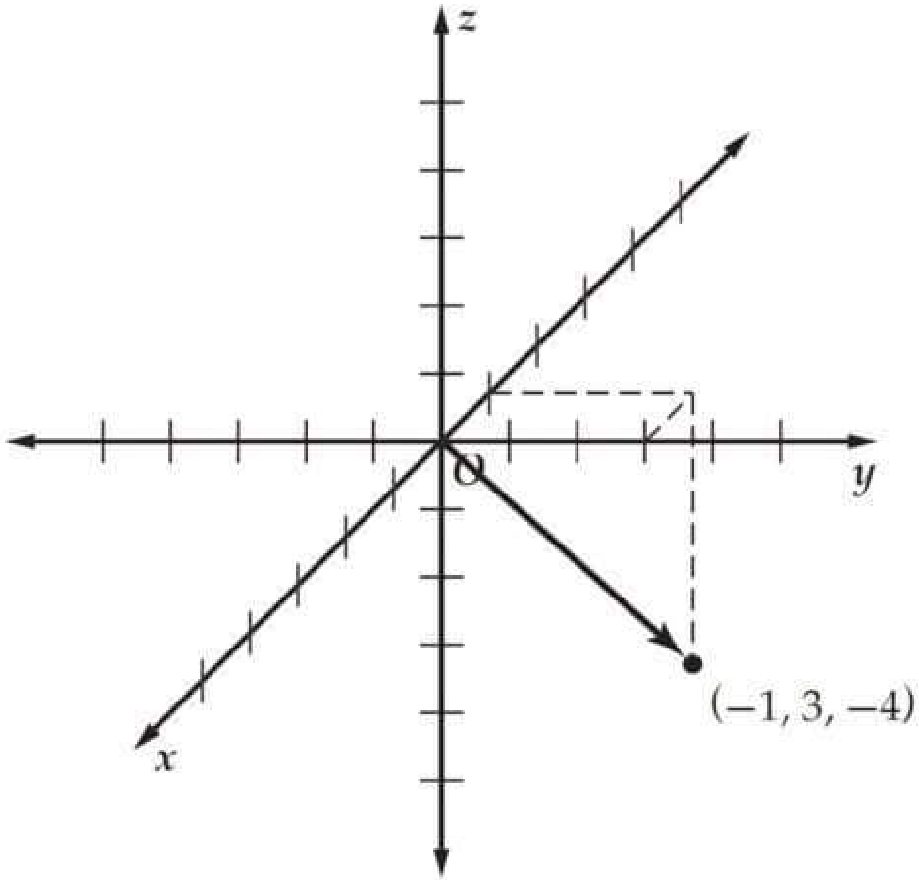
12) $\mathbf{a} = \langle 0, -4, 4 \rangle$



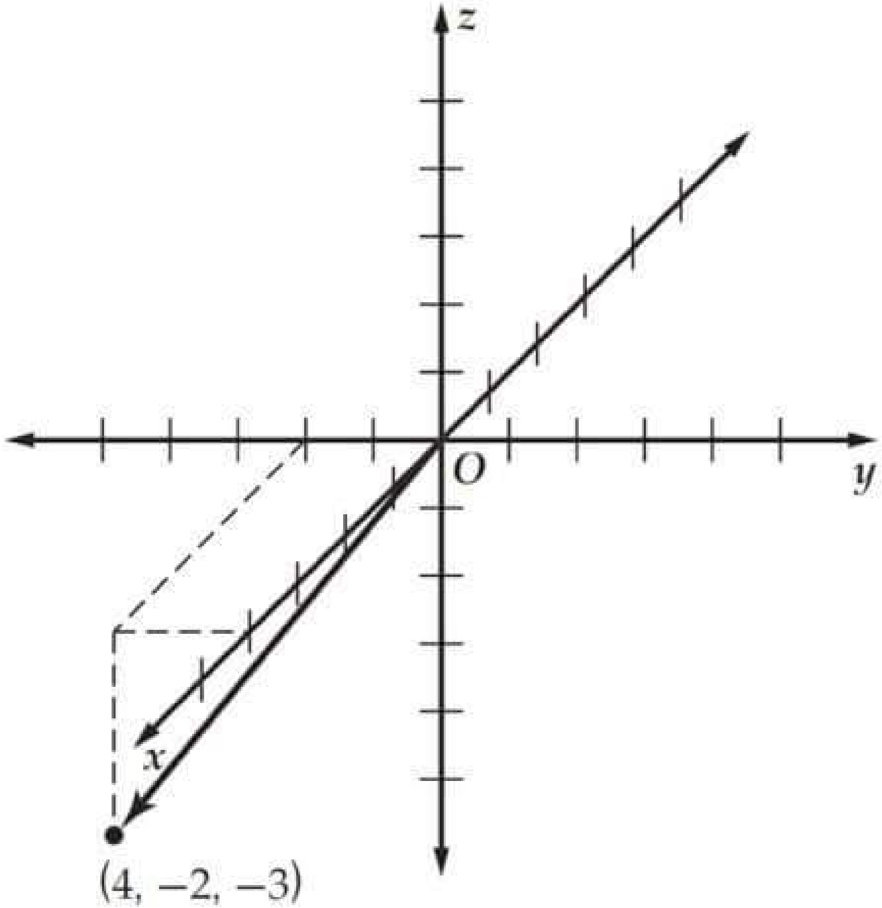
13) $\mathbf{b} = \langle -3, -3, -2 \rangle$



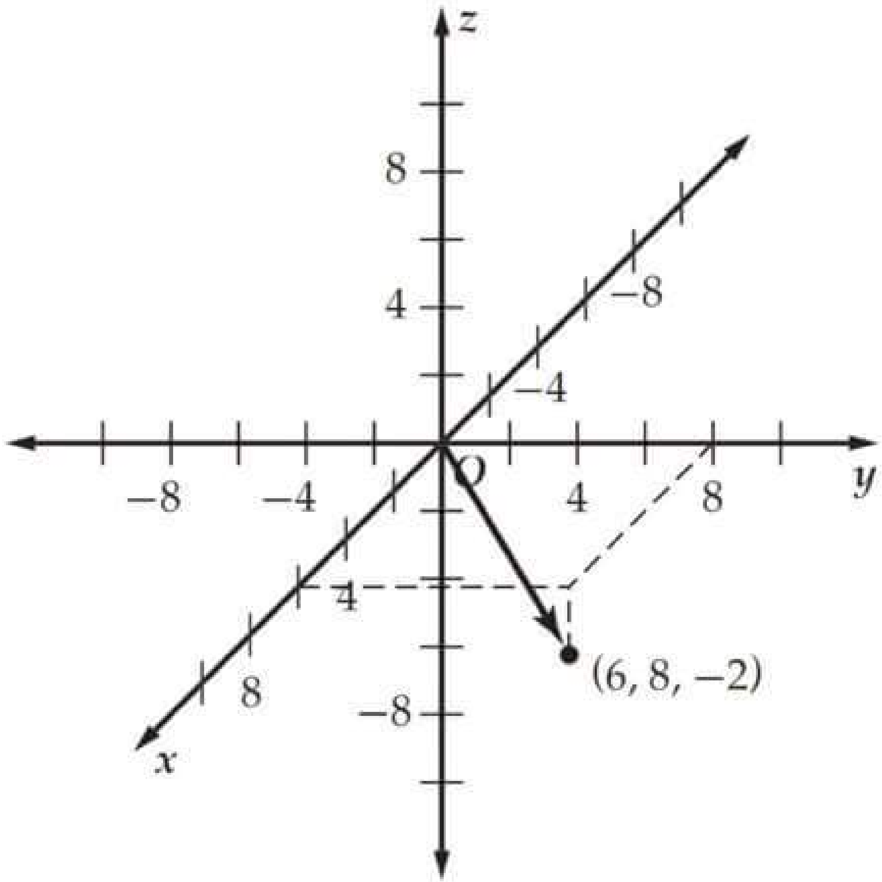
$\mathbf{c} = \langle -1, 3, -4 \rangle$ (14



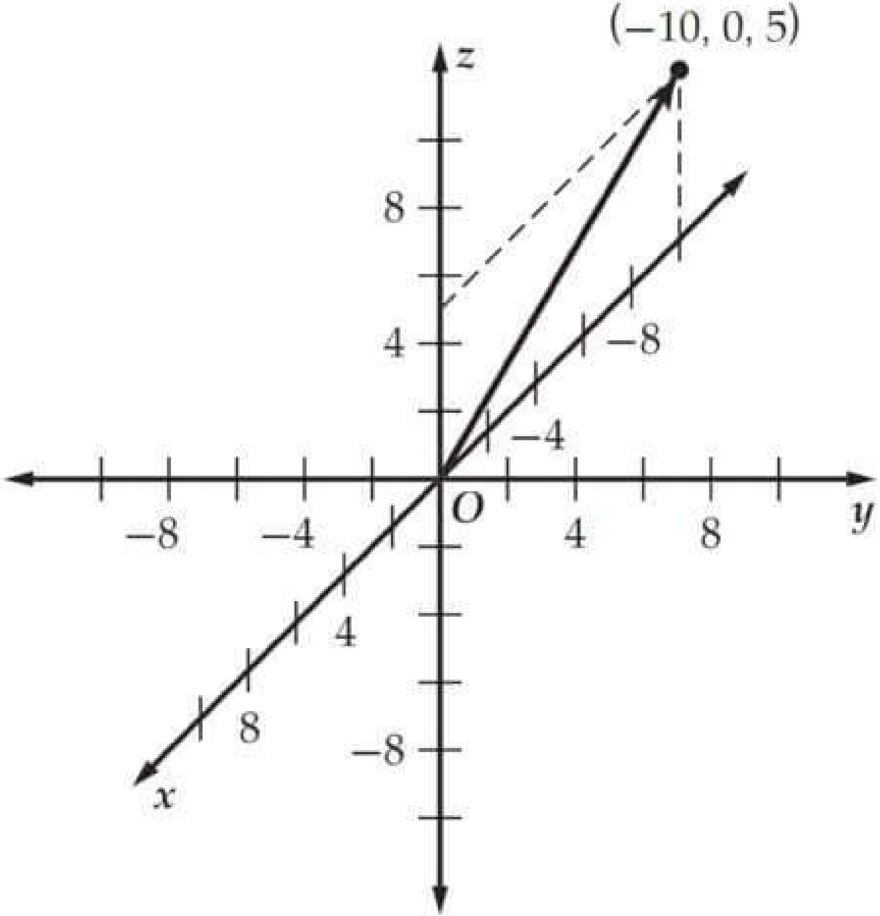
$\mathbf{d} = \langle 4, -2, -3 \rangle$ (15



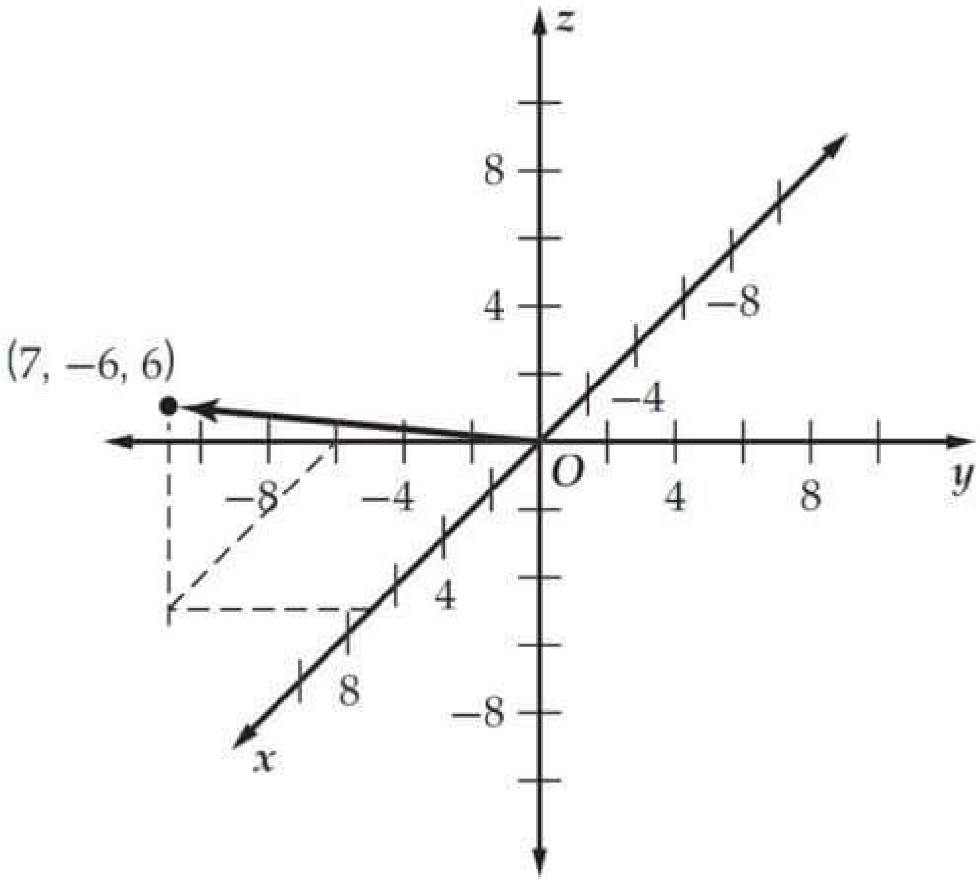
(16 $\mathbf{v} = 6\mathbf{i} + 8\mathbf{j} - 2\mathbf{k}$



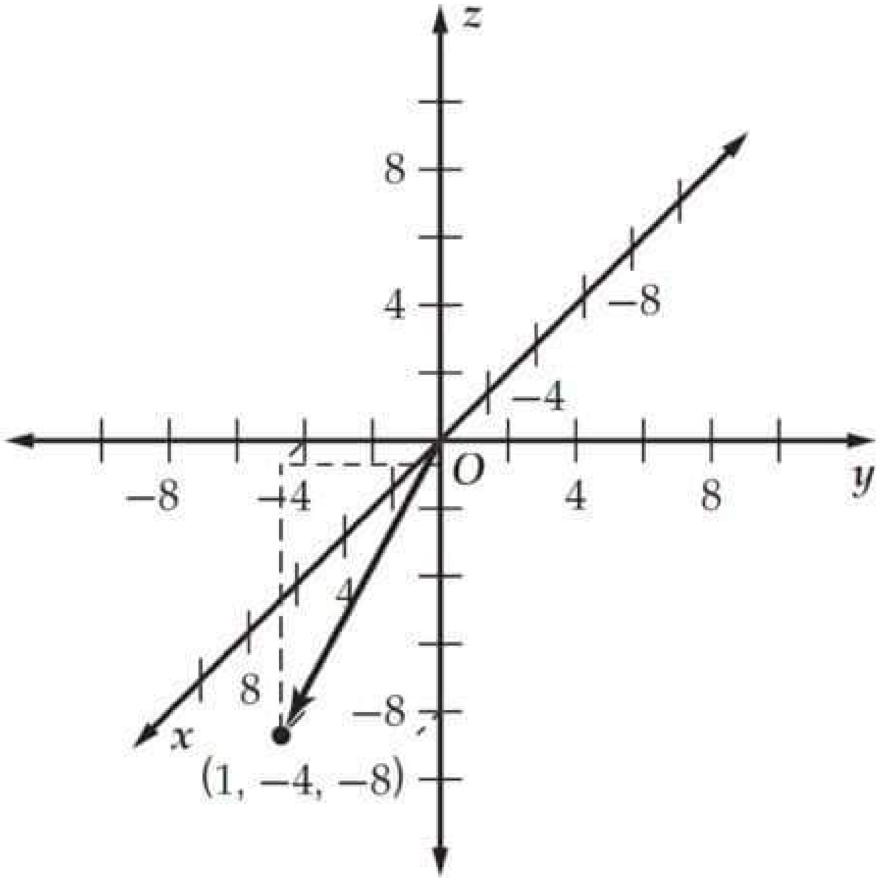
(17 $\mathbf{w} = -10\mathbf{i} + 5\mathbf{k}$



18) $\mathbf{m} = 7\mathbf{i} - 6\mathbf{j} + 6\mathbf{k}$



19) $\mathbf{n} = \mathbf{i} - 4\mathbf{j} - 8\mathbf{k}$



أوجد كلاً مما يأتي للمتجهات :
$\mathbf{a} = \langle -5, -4, 3 \rangle, \mathbf{b} = \langle 6, -2, -7 \rangle, \mathbf{c} = \langle -2, 2, 4 \rangle$.

20) $6\mathbf{a} - 7\mathbf{b} + 8\mathbf{c}$ $\langle -88, 6, 99 \rangle$

21) $7\mathbf{a} - 5\mathbf{b}$ $\langle -65, -18, 65 \rangle$

22) $2\mathbf{a} + 5\mathbf{b} - 9\mathbf{c}$ $\langle 38, -36, -65 \rangle$

23) $6\mathbf{b} + 4\mathbf{c} - 4\mathbf{a}$ $\langle 48, 12, -38 \rangle$

24) $8\mathbf{a} - 5\mathbf{b} - \mathbf{c}$ $\langle -68, -24, 55 \rangle$

25) $-6\mathbf{a} + \mathbf{b} + 7\mathbf{c}$ $\langle 22, 36, 3 \rangle$

أوجد كلًّا مما يأتي للمتجهات :

$\mathbf{x} = -9\mathbf{i} + 4\mathbf{j} + 3\mathbf{k}$, $\mathbf{y} = 6\mathbf{i} - 2\mathbf{j} - 7\mathbf{k}$, $\mathbf{z} = -2\mathbf{i} + 2\mathbf{j} + 4\mathbf{k}$.

26) $7\mathbf{x} + 6\mathbf{y}$ $\quad \langle -27, 16, -21 \rangle$

27) $3\mathbf{x} - 5\mathbf{y} + 3\mathbf{z}$ $\quad \langle -63, 28, 56 \rangle$

28) $4\mathbf{x} + 3\mathbf{y} + 2\mathbf{z}$ $\quad \langle -22, 14, -1 \rangle$

29) $-8\mathbf{x} - 2\mathbf{y} + 5\mathbf{z}$ $\quad \langle 50, -18, 10 \rangle$

30) $-6\mathbf{y} - 9\mathbf{z}$ $\quad \langle -18, -6, 6 \rangle$

31) $-\mathbf{x} - 4\mathbf{y} - \mathbf{z}$ $\quad \langle -13, 2, 21 \rangle$

أوجد الصورة الإحداثية، وطول $\overrightarrow{AB}$ المُعطاة نقطتا بدايته ونهايته، في كلٍّ مما يأتي، ثم أوجد متجه الوحدة في اتجاه $\overrightarrow{AB}$. (مثال 5)

32) $A(-5, -5, -9), B(11, -3, -1)$

$$\langle 16, 2, 8\rangle, 18, \left\langle \frac{8}{9}, \frac{1}{9}, \frac{4}{9} \right\rangle$$

33) $A(-4, 0, -3), B(-4, -8, 9)$

$$\langle 0, -8, 12\rangle, \left\langle 0, -\frac{2\sqrt{13}}{13}, \frac{3\sqrt{13}}{13} \right\rangle$$

34) $A(3, 5, 1), B(0, 0, -9)$

$$\langle -3, -5, -10\rangle, \sqrt{134},$$

$$\left\langle -\frac{3\sqrt{134}}{134}, -\frac{5\sqrt{134}}{134}, -\frac{5\sqrt{134}}{67} \right\rangle$$

35) $A(-3, -7, -12), B(-7, 1, 8)$

$$\langle -4, 8, 20\rangle, 4\sqrt{30},$$

$$\left\langle -\frac{\sqrt{30}}{30}, \frac{\sqrt{30}}{15}, \frac{\sqrt{30}}{6} \right\rangle$$

36) $A(2, -5, 4), B(1, 3, -6)$

$\langle -1, 8, -10 \rangle, \sqrt{165},$

$\left\langle -\frac{\sqrt{165}}{165}, \frac{8\sqrt{165}}{165}, -\frac{2\sqrt{165}}{33} \right\rangle$

37) $A(8, 12, 7), B(2, -3, 11)$

$\langle -6, -15, 4 \rangle, \sqrt{277},$

$\left\langle -\frac{6\sqrt{277}}{277}, -\frac{15\sqrt{277}}{277}, \frac{4\sqrt{277}}{277} \right\rangle$

38) $A(3, 14, -5), B(7, -1, 0)$

$\langle 4, -15, 5 \rangle, \sqrt{266},$

$\left\langle \frac{2\sqrt{266}}{133}, -\frac{15\sqrt{266}}{266}, \frac{5\sqrt{266}}{266} \right\rangle$

39) $A(1, -18, -13), B(21, 14, 29)$

$\langle 20, 32, 42 \rangle, 2\sqrt{797},$

$\left\langle \frac{10\sqrt{797}}{797}, \frac{16\sqrt{797}}{797}, \frac{21\sqrt{797}}{797} \right\rangle$

إذا كانت N منتصف $\overline{MP}$ ، فأوجد إحداثيات النقطة P في كلٍّ ممّا يأتي:

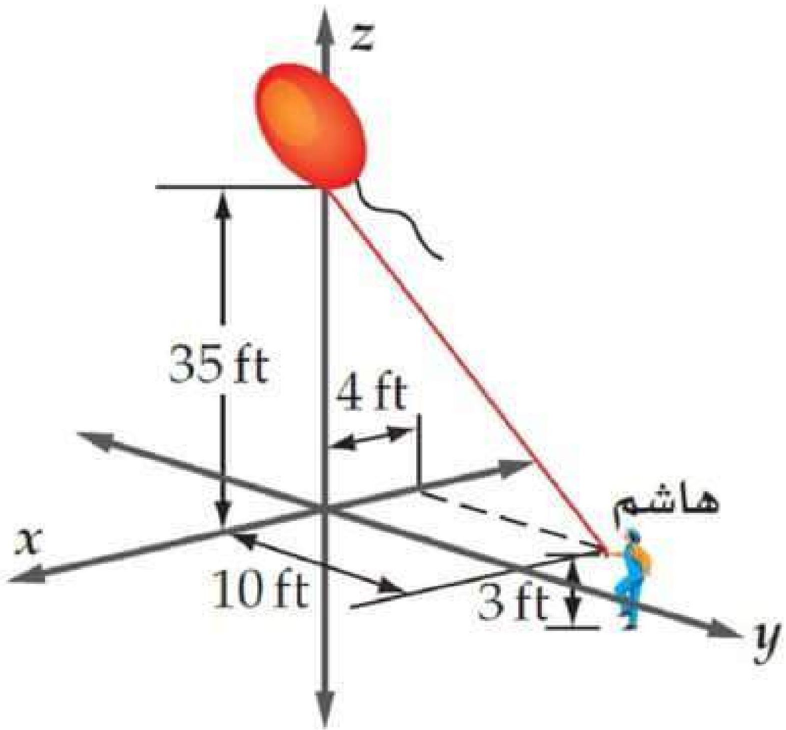
40) $M(3, 4, 5), N\left(\frac{7}{2}, 1, 2\right)$ **$(4, -2, -1)$**

41) $M(-1, -4, -9), N(-2, 1, -5)$ **$(-3, 6, -1)$**

42) $M(7, 1, 5), N\left(5, -\frac{1}{2}, 6\right)$ **$(3, -2, 7)$**

43) $M\left(\frac{3}{2}, -5, 9\right), N\left(-2, -\frac{13}{2}, \frac{11}{2}\right)$ **$\left(-\frac{11}{2}, -8, 2\right)$**

44) **تطوُّع:** تَطَوَّع هاشم لحمل بالونٍ كدليل في استعراض رياضي. إذا كان البالون يرتفع 35 ft عن سطح الأرض، ويمسك هاشم بالحبل الذي ثبت به البالون على ارتفاع 3 ft عن سطح الأرض، كما في الشكل أدناه، فأوجد طول الحبل إلى أقرب قدمٍ.



34 ft

حدّد نوع المثلث الذي رؤوسه هي النقاط الثلاث في كلٍّ مما يأتي (قائم الزاوية، أو متطابق الضلعين، أو مختلف الأضلاع):

45) $A(3, 1, 2)$, $B(5, -1, 1)$, $C(1, 3, 1)$

$$AB = \sqrt{(5-3)^2+(-1-1)^2+(1-2)^2} = \sqrt{4+4+1} = 3$$

$$Bc = \sqrt{(1-5)^2+(3+1)^2+(1-1)^2} = \sqrt{16+16} = 4\sqrt{2}$$

$$AB = \sqrt{(1-3)^2+(3-1)^2+(1-2)^2} = \sqrt{4+4+1} = 3$$

بما أن: $AB = Ac \neq Bc$ فالمثلث متطابق الضلعين.

46) $A(4, 3, 4)$, $B(4, 6, 4)$, $C(4, 3, 6)$

$$AB = \sqrt{(4-4)^2+(6-3)^2+(4-4)^2} = 3$$

$$Ac = \sqrt{(4-4)^2+(3-6)^2+(6-4)^2} = \sqrt{9+4} = \sqrt{13}$$

$$Ac = \sqrt{(4-4)^2+(3-3)^2+(6-4)^2} = 2$$

بما أن: $(\sqrt{13})^2 = (2)^2 + (3)^2$

إذن المثلث القائم الزاوية، وبما أن أطوال أضلاعه مختلفة، إذن فهو مختلف الأضلاع.

$A(-1, 4, 3)$, $B(2, 5, 1)$, $C(0, -6, 6)$ **(47**

$$AB=\sqrt{(2+1)^2+(5-4)^2+(1-3)^2} = \sqrt{9+1+4} = \sqrt{14}$$

$$Ac=\sqrt{(0-2)^2+(-6-5)^2+(6-1)^2} = \sqrt{4+121+25} = \sqrt{150} = 5\sqrt{6}$$

$$Ac=\sqrt{(0+1)^2+(-6-4)^2+(6-3)^2} = \sqrt{1+100+9} = \sqrt{110}$$

بما أن أطوال أضلاع المثلث مختلفة، إذن المثلث مختلف الأضلاع.

الكرة هي مجموعة النقاط في الفضاء التي تبعد عن مركز الكرة بُعدًا ثابتًا (نصف القطر) إذن إذا كانت النقطة (z ,y ,x) نقطة تقع على الكرة التي مركزها m(h, k, y)، فإنه يجب أن تكون المسافة بين A وَ M تساوي r

نفترض أن النقطة $A(x, y, z)$ نقطة تقع على الكرة التي مركزها $m(h, k, l)$ نستخدم صيغة المسافة بين نقطتين.

48) **كرات:** استعمل قانون المسافة بين نقطتين في الفضاء؛ لكتابة صيغة عامة لمعادلة كرة مركزها (h, k, ℓ)، وطول نصف قطرها r .
"**إرشاد:** الكرة هي مجموعة نقاط في الفضاء تبعد بعدًا ثابتًا (نصف القطر) عن نقطة ثابتة (المركز)".

$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$$

لإيجاد معادلة الكرة

$$r = \sqrt{(x - h)^2 + (y - k)^2 + (z - l)^2}$$

$$r^2 = (x - h)^2 + (y - k)^2 + (z - l)^2$$

استعمل الصيغة العامة لمعادلة الكرة التي وجدتها في السؤال 48؛ لإيجاد معادلة الكرة المعطى مركزها، وطول نصف قطرها في كلٍّ مما يأتي:

49) مركزها $(-4, -2, 3)$ ، طول نصف قطرها 4

$$(x+4)^2+(y+2)^2+(z-3)^2=16$$

50) مركزها $(6, 0, -1)$ ، طول نصف قطرها $\frac{1}{2}$

$$(x-6)^2+y^2+(z+1)^2=\frac{1}{4}$$

51) مركزها $(5, -3, 4)$ ، طول نصف قطرها $\sqrt{3}$

$$(x-5)^2+(y+3)^2+(z-4)^2=3$$

52) مركزها $(0, 7, -1)$ ، طول نصف قطرها 12

$$x^2+(y-7)^2+(z+1)^2=144$$

يعرف الضرب الداخلي للمتجهين

في الفضاء $a = \langle a_1, a_2, a_3 \rangle, b = \langle b_1, b_2, b_3 \rangle$ كالآتي :

$a.b = a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3$. ويكون المتجهان a , b متعامدين ، إذا وفقط إذا كان $a . b = 0$.

مثال إيجاد الضرب الداخلي لتحديد المتجهات المتعامدة

أوجد حاصل الضرب الداخلي للمتجهين u , v في كل مما يأتي ، ثم حدد ما إذا كانا متعامدين :

a) $u = \langle -7, 3, -3 \rangle, v = \langle 5, 17, 5 \rangle$

$$u.v = -7(5) + 3(17) + (-3)(5)$$

$$= -35 + 51 + (-15) = 1$$

وبما أن $u . v \neq 0$ ، فإن u , v غير متعامدين .

تدرب وحل المسائل

أوجد الضرب الداخلي للمتجهين $\mathbf{u}, \mathbf{v}$ في كلٍّ مما يأتي، ثم حدِّد ما إذا كانا متعامدين أم لا: (مثال 1)

1) $\mathbf{u} = \langle 3, -9, 6\rangle, \mathbf{v} = \langle -8, 2, 7\rangle$ **0 ؛ متعامدان**

2) $\mathbf{u} = \langle 5, 0, -4\rangle, \mathbf{v} = \langle 6, -1, 4\rangle$ **14 ؛ غير متعامدين**

3) $\mathbf{u} = \langle -7, -3, 1\rangle, \mathbf{v} = \langle -4, 5, -13\rangle$ **0 ؛ متعامدان**

4) $\mathbf{u} = \langle 11, 4, -2\rangle, \mathbf{v} = \langle -1, 3, 8\rangle$ **−15 ؛ غير متعامدين**

5) $\mathbf{u} = 6\mathbf{i} - 2\mathbf{j} - 5\mathbf{k}, \mathbf{v} = 3\mathbf{i} - 2\mathbf{j} + 6\mathbf{k}$ **−8 ؛ غير متعامدين**

6) $\mathbf{u} = 9\mathbf{i} - 9\mathbf{j} + 6\mathbf{k}, \mathbf{v} = 6\mathbf{i} + 4\mathbf{j} - 3\mathbf{k}$ **0 ؛ متعامدان**

7) **كيمياء:** تقع إحدى ذرتَي الهيدروجين في جُزيءٍ الماء عند $\langle 55.5, 55.5, -55.5\rangle$، والأخرى عند $\langle -55.5, -55.5, -55.5\rangle$، وذلك في الوقت الذي تقع فيه ذرة الأكسجين في نقطة الأصل. أوجد الزاوية بين المتجهين اللّذين يكوّنان رابطة الأكسجين – الهيدروجين مقرَّبة إلى أقرب جزءٍ من عشرةٍ. (مثال 2)

109.5°

أوجد قياس الزاوية θ بين المتجهين $\mathbf{u}, \mathbf{v}$ في كلٍّ مما يأتي، وقرّب الناتج إلى أقرب جزءٍ من عشرةٍ: (مثال 2)

8) $\mathbf{u} = \langle 6, -5, 1\rangle, \mathbf{v} = \langle -8, -9, 5\rangle$ 88.9°

9) $\mathbf{u} = \langle -8, 1, 12\rangle, \mathbf{v} = \langle -6, 4, 2\rangle$ 45.4°

10) $\mathbf{u} = \langle 10, 0, -8\rangle, \mathbf{v} = \langle 3, -1, -12\rangle$ 37.5°

11) $\mathbf{u} = -3\mathbf{i} + 2\mathbf{j} + 9\mathbf{k}, \mathbf{v} = 4\mathbf{i} + 3\mathbf{j} - 10\mathbf{k}$ 152.3°

أوجد الضرب الاتجاهي للمتجهين u, v في كلٍّ مما يأتي، ثم بيِّن أن $\mathbf{u} \times \mathbf{v}$ عمودي على كلٍّ من u, v : (مثال 3)

12) $\mathbf{u} = \langle -1, 3, 5\rangle, \mathbf{v} = \langle 2, -6, -3\rangle$ $\langle 21, 7, 0\rangle$

13) $\mathbf{u} = \langle 4, 7, -2\rangle, \mathbf{v} = \langle -5, 9, 1\rangle$ $\langle 25, 6, 71\rangle$

14) $\mathbf{u} = \langle 3, -6, 2\rangle, \mathbf{v} = \langle 1, 5, -8\rangle$ $\langle 38, 26, 21\rangle$

15) $\mathbf{u} = -2\mathbf{i} - 2\mathbf{j} + 5\mathbf{k}, \mathbf{v} = 7\mathbf{i} + \mathbf{j} - 6\mathbf{k}$ $\langle 7, 23, 12\rangle$

أوجد مساحة متوازي الأضلاع الذي فيه $\mathbf{v}$, $\mathbf{u}$ ضلعان متجاوران في كلٍّ مما يأتي: (مثال 4)

16) $\mathbf{u} = \langle -9, 1, 2 \rangle , \mathbf{v} = \langle 6, -5, 3 \rangle$

$13\sqrt{19}$ أو 56.7 وحدة مربعة تقريبا .

17) $\mathbf{u} = \langle 4, 3, -1 \rangle , \mathbf{v} = \langle 7, 2, -2 \rangle$

$\sqrt{186}$ أو 13.6 وحدة مربعة تقريبا .

18) $\mathbf{u} = 6\mathbf{i} - 2\mathbf{j} + 5\mathbf{k} , \mathbf{v} = 5\mathbf{i} - 4\mathbf{j} - 8\mathbf{k}$

$\sqrt{6821}$ أو 82.6 وحدة مربعة تقريبا .

19) $\mathbf{u} = \mathbf{i} + 4\mathbf{j} - 8\mathbf{k} , \mathbf{v} = -2\mathbf{i} + 3\mathbf{j} - 7\mathbf{k}$

$3\sqrt{74}$ أو 25.8 وحدة مربعة تقريبا

أوجد حجم متوازي السطوح الذي فيه $\mathbf{t}, \mathbf{u}, \mathbf{v}$ أحرف متجاورة في كل مما يأتي: (مثال 5)

$\mathbf{t} = \langle -1, -9, 2 \rangle, \mathbf{u} = \langle 4, -7, -5 \rangle, \mathbf{v} = \langle 3, -2, 6 \rangle$ (20

429 وحدة مكعبة .

$\mathbf{t} = \langle 2, -3, -1 \rangle, \mathbf{u} = \langle 4, -6, 3 \rangle, \mathbf{v} = \langle -9, 5, -4 \rangle$ (21

85 وحدة مكعبة .

$\mathbf{t} = \mathbf{i} + \mathbf{j} - 4\mathbf{k}, \mathbf{u} = -3\mathbf{i} + 2\mathbf{j} + 7\mathbf{k}, \mathbf{v} = 2\mathbf{i} - 6\mathbf{j} + 8\mathbf{k}$ (22

40 وحدة مكعبة .

$\mathbf{t} = 5\mathbf{i} - 2\mathbf{j} + 6\mathbf{k}, \mathbf{u} = 3\mathbf{i} - 5\mathbf{j} + 7\mathbf{k}, \mathbf{v} = 8\mathbf{i} - \mathbf{j} + 4\mathbf{k}$ (23

69 وحدة مكعبة .

أوجد متجهًا غير صفري يعامد المتجه المُعطى في كلٍّ ممّا يأتي:

24)	$\langle 3, -8, 4\rangle$	$\langle 4, 3, 3\rangle$
25)	$\langle -1, -2, 5\rangle$	$\langle 5, 5, 3\rangle$
26)	$\left\langle 6, -\frac{1}{3}, -3\right\rangle$	$\langle 1, 9, 1\rangle$
27)	$\langle 7, 0, 8\rangle$	$\langle -8, 0, 7\rangle$

إذا عُلم كلٌّ من $\mathbf{v}, \mathbf{u} \cdot \mathbf{v}$ ، فأوجد حالةً ممكنةً للمتجه $\mathbf{u}$ في كلٍّ مما يأتي:

28) $\mathbf{v} = \langle 2, -4, -6 \rangle, \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = -22$ $\langle 3, 4, 2 \rangle$

29) $\mathbf{v} = \left\langle \frac{1}{2}, 0, 4 \right\rangle, \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = \frac{31}{2}$ $\langle -1, -3, 4 \rangle$

30) $\mathbf{v} = \langle -2, -6, -5 \rangle, \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = 35$ $\langle -3, 1, -7 \rangle$

حدّد ما إذا كانت النقاط المعطاة واقعةً على استقامةٍ واحدةٍ أم لا؟

31) $(-1, 7, 7), (-3, 9, 11), (-5, 11, 13)$ ليست على استقامة واحدة.

32) $(11, 8, -1), (17, 5, -7), (8, 11, 5)$ ليست على استقامة واحدة.

حدّد ما إذا كان كل متجهين مما يأتي متوازيين أم لا:

(33 $\mathbf{m} = \langle 2, -10, 6 \rangle, \mathbf{n} = \langle 3, -15, 9 \rangle$ متوازيان.

(34 $\mathbf{a} = \langle 6, 3, -7 \rangle, \mathbf{b} = \langle -4, -2, 3 \rangle$ غير متوازيين.

(35 اكتب الصورة الإحداثية للمتجه $\mathbf{u}$ الذي يقع في المستوى yz، وطوله 8، ويصنع زاوية قياسها $60°$ فوق الاتجاه الموجب للمحور y.

$\langle 0, 4, 4\sqrt{3} \rangle$

حدّد ما إذا كان الشكل الرباعي $ABCD$ المُعطاة إحداثيات رؤوسه متوازي أضلاع أم لا، وإذا كان كذلك، فأوجد مساحته، وحدِّد ما إذا كان مستطيلًا أم لا:

$A(3, 0, -2), B(0, 4, -1), C(0, 2, 5), D(3, 2, 4)$ (36

ليس متوازي أضلاع

$A(7, 5, 5), B(4, 4, 4), C(4, 6, 2), D(7, 7, 3)$ (37

متوازي أضلاع ؛ 9.4 وحداتٍ مربعة تقريبًا، مستطيل

38) **عرض جوي:** أقلعت طائرتان معًا في عرض جوي، فأقلعت الأولى من موقع إحداثياته $(0, -2, 0)$ ، وبعد 3 ثوانٍ وصلت موقعًا إحداثياته $(6, -10, 15)$، في حين أقلعت الثانية من موقع إحداثياته $(0, 2, 0)$، وبعد 3 ثوانٍ وصلت موقعًا إحداثياته $(6, 10, 15)$. هل يتوازى خطّا سير الطائرتين؟ وضّح إجابتك.

لا؛ لأن الزاوية بين المتجهين لا تساوي 0° ولا 180°، وعليه فالمتجهان غير متوازيين.

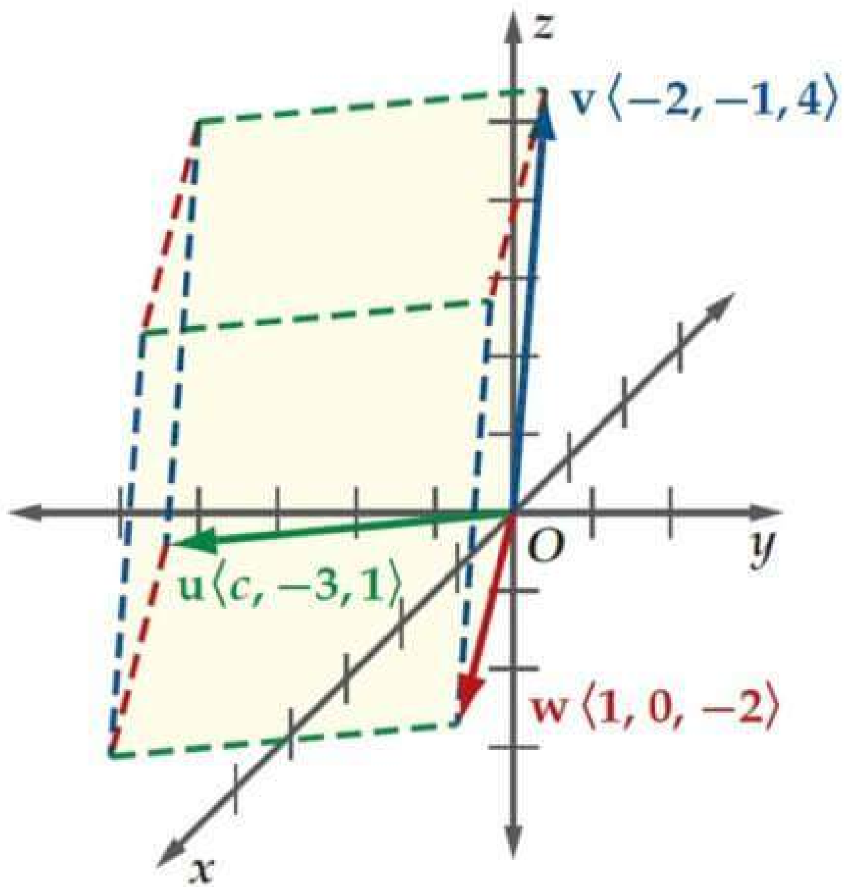
إذا كان: $\mathbf{u} = \langle 3, 2, -2 \rangle$ ، $\mathbf{v} = \langle -4, 4, 5 \rangle$ ، فأوجد كلًّا مما يأتي إن أمكن:

(39 $\mathbf{u} \cdot (\mathbf{u} \times \mathbf{v})$ $\quad 0$

(40 $\mathbf{v} \times (\mathbf{u} \cdot \mathbf{v})$

ليس ممكنًا؛ لأن **u.v** كمية قياسية وليست متجهًا، والضرب الاتجاهي يكون لمتجهين.

41) إذا كانت **v, w, u** تُمثِّل ثلاثة أحرف متجاورة لمتوازي السطوح في الشكل المجاور، وكان حجمه 7 وحداتٍ مكعبةٍ، فما قيمة **c**؟



حجم متوازي السطوح يساوي

$$|\mathbf{u}.(\mathbf{v}\times\mathbf{w})|$$

$$\mathbf{v}\times\mathbf{w} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ -2 & -1 & 4 \\ 1 & 0 & -2 \end{vmatrix} = 2i + k$$

$$u.(v\times w) = \langle c, -3, 1\rangle . \langle 2, 0, 1\rangle$$

$$= 2c + 1$$

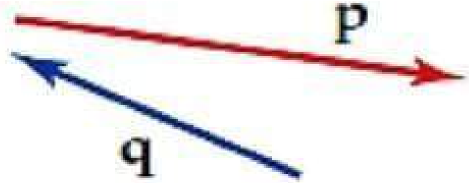
$$|2c+1| = 7$$

إذن $c = 3$ أو $c = -4$

الفصل 5 اختبار الفصل

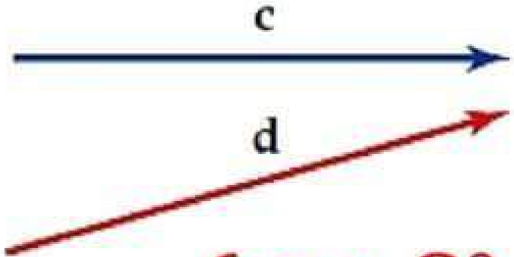
أوجد محصِّلة كل زوج من المتجهات الآتية باستعمال قاعدة المثلث، أو قاعدة متوازي الأضلاع، قرِّب المحصلة إلى أقرب جزءٍ من عشرةٍ من السنتمتر، ثم حدِّد اتجاهها بالنسبة للأفقي مستعملاً المسطرة، والمنقلة.

(1



$0.8cm, 25°$

(2



$6cm, 8°$

أوجد الصورة الإحداثية، وطول $\overrightarrow{AB}$ المعطاة نقطتا بدايته ونهايته في كلٍّ مما يأتي:

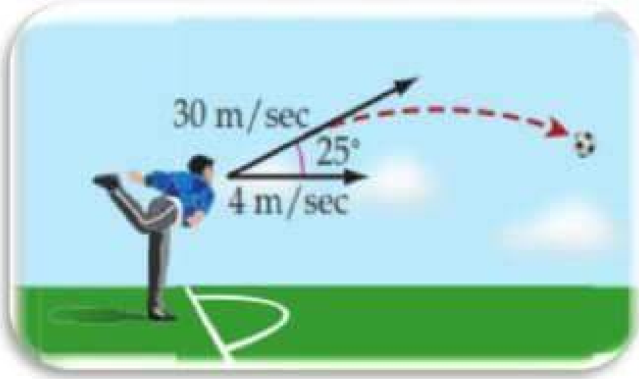
(3 $A(1, -3), B(-5, 1)$

$\langle -6, 4\rangle 0, \sqrt{52} \approx 7.2$

(4 $A\left(\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right), B(-1, 7)$

$\left\langle -\frac{3}{2}, \frac{11}{2}\right\rangle, \sqrt{32.5} \approx 5.7$

5) **كرة قدم:** ركض لاعب بسرعة 4 m/s ؛ للتصدي لكرة قادمة من الاتجاه المعاكس لحركته، فضربها برأسه بسرعة 30 m/s ، وبزاوية قياسها $25°$ مع الأفقي، فما محصّلة سرعة الكرة، واتجاه حركتها؟



$$33.7m\ /s;22°$$

أوجد متجه وحدة باتجاه **u** في كلٍّ مما يأتي:

6) $\mathbf{u} = \langle -1, 4 \rangle$

$$\left\langle -\frac{\sqrt{17}}{17}, \frac{4\sqrt{17}}{17} \right\rangle$$

7) $\mathbf{u} = \langle 6, -3 \rangle$

$$\left\langle \frac{2\sqrt{5}}{5}, -\frac{\sqrt{5}}{5} \right\rangle$$

أوجد الضرب الداخلي للمتجهين $\mathbf{u}, \mathbf{v}$ في كلٍّ مما يأتي، ثم بيّن ما إذا كانا متعامدين أم لا:

8) $\mathbf{u} = \langle 2, -5 \rangle, \mathbf{v} = \langle -3, 2 \rangle$ -16 ؛ غير متعامدين

9) $\mathbf{u} = \langle 4, -3 \rangle, \mathbf{v} = \langle 6, 8 \rangle$ 0 ؛ متعامدان

10) $\mathbf{u} = 10\mathbf{i} - 3\mathbf{j}, \mathbf{v} = \mathbf{i} + 8\mathbf{j}$ -14 ؛ غير متعامدين

11) **اختيار من متعدد:** إذا علمت أن: $\mathbf{u} = \langle 1, 3 \rangle$, $\mathbf{v} = \langle -4, 2 \rangle$ ، فأيٌّ مما يأتي يُمثّل ناتج جمع متجهين متعامدين أحدهما مسقط $\mathbf{u}$ على $\mathbf{v}$ ؟

A $\mathbf{u} = \left\langle \frac{2}{5}, -\frac{3}{5} \right\rangle + \left\langle \frac{3}{5}, \frac{18}{5} \right\rangle$

B $\mathbf{u} = \left\langle \frac{2}{5}, \frac{3}{5} \right\rangle + \left\langle \frac{3}{5}, \frac{12}{5} \right\rangle$

C $\mathbf{u} = \left\langle -\frac{4}{5}, \frac{2}{5} \right\rangle + \left\langle \frac{9}{5}, \frac{13}{5} \right\rangle$

D $\boxed{\mathbf{u} = \left\langle -\frac{2}{5}, \frac{1}{5} \right\rangle + \left\langle \frac{7}{5}, \frac{14}{5} \right\rangle}$

إذا كان: $\mathbf{a} = \langle 2, 4, -3\rangle$ ، $\mathbf{b} = \langle -5, -7, 1\rangle$ ، $\mathbf{c} = \langle 8, 5, -9\rangle$

فأوجد كلًّا مما يأتي:

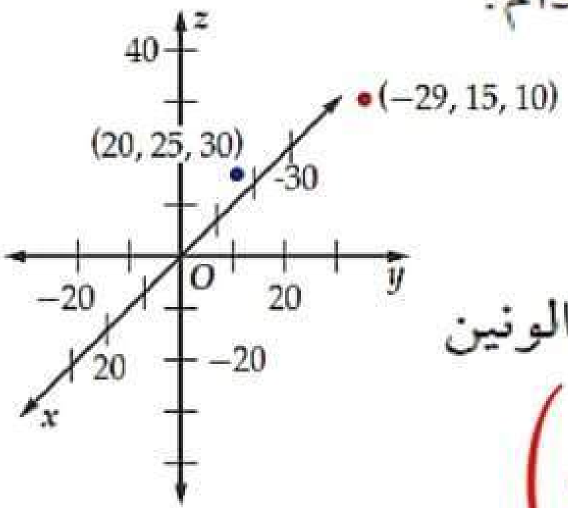
12) $2\mathbf{a} + 5\mathbf{b} - 3\mathbf{c}$

$\langle -45, -42, 26\rangle$

13) $\mathbf{b} - 6\mathbf{a} + 2\mathbf{c}$

$\langle -1, -21, 1\rangle$

14) **بالونات الهواء الساخن:** أُطلق 12 بالونًا تحوي هواءً ساخنًا في أحد المهرجانات، وبعد عدة دقائق من الإطلاق، كانت إحداثيات البالونين الأول والثاني هي: $(20, 25, 30)$ ، $(-29, 15, 10)$ كما في الشكل أدناه، علمًا بأن الإحداثيات معطاة بالأقدام.



a) أوجد المسافة بين البالونين الأول والثاني في تلك اللحظة.

$53.9ft$

b) إذا كان البالون الثالث عند نقطة منتصف المسافة بين البالونين الأول والثاني، فأوجد إحداثياته.

$\left(-\frac{9}{2}, 20, 20\right)$

أوجد الزاوية θ بين المتجهين $\mathbf{u}, \mathbf{v}$ في كلٍّ ممَّا يأتي:

15) $\mathbf{u} = \langle -2, 4, 6 \rangle, \mathbf{v} = \langle 3, 7, 12 \rangle$

$27.9°$

16) $\mathbf{u} = -9\mathbf{i} + 5\mathbf{j} + 11\mathbf{k}, \mathbf{v} = -5\mathbf{i} - 7\mathbf{j} - 6\mathbf{k}$

$110.8°$