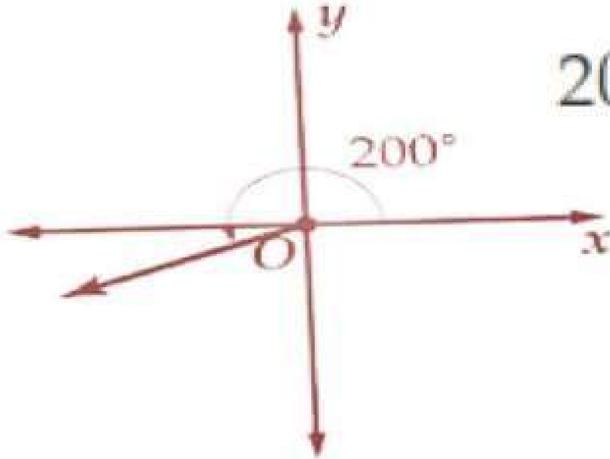
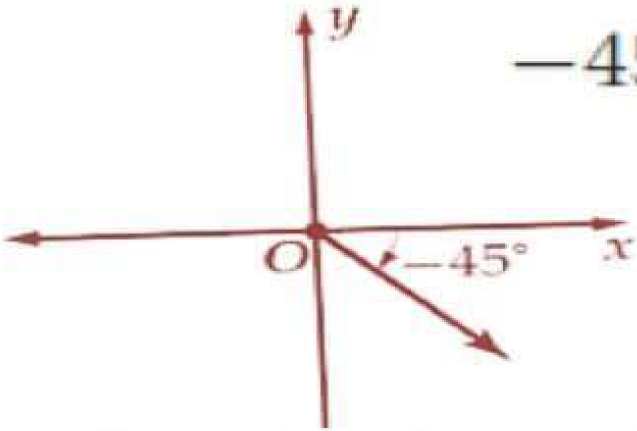
تهيئة الفصل السادس

ارسم كلًّا من الزاويتين المعطى قياسهما فيما يأتي في الوضع القياسي:

1) $200°$



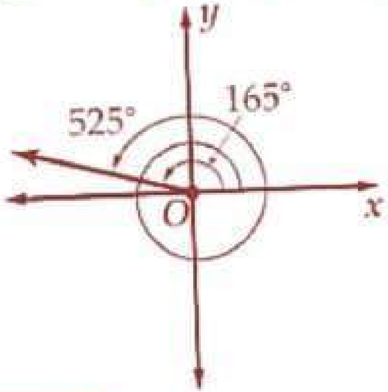
2) $-45°$

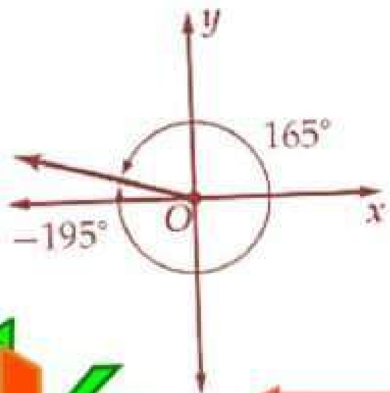


أوجد زاوية بقياس موجب، وأخرى بقياس سالب مشتركتين في ضلع الانتهاء مع كل من الزوايا الآتية، ومثِّلهما في الوضع القياسي:

3) $165°$

$525°, -195°$

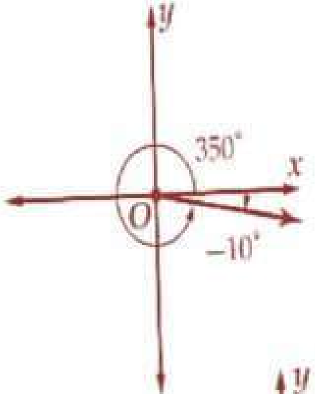


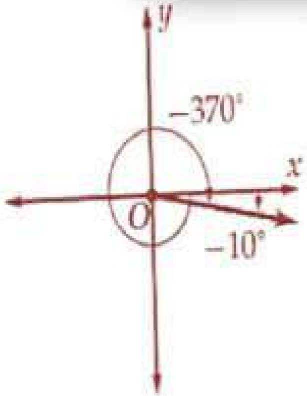


تهيئة الفصل السادس

4) -10°

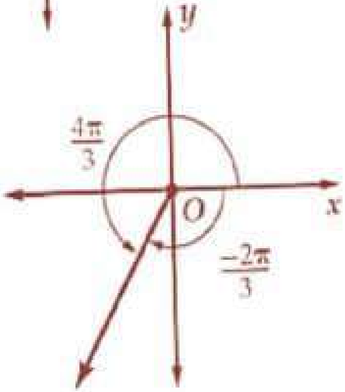
$$350^\circ, -370^\circ$$

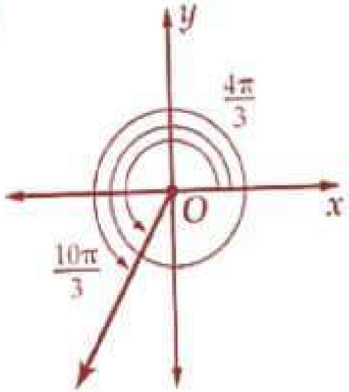




5) $\frac{4\pi}{3}$

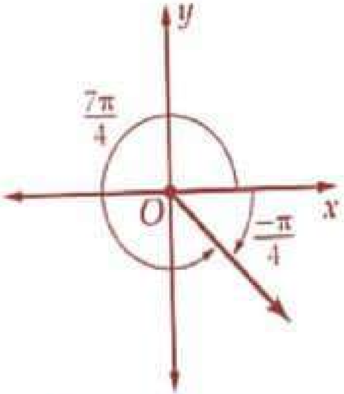
$$\frac{10\pi}{3}, -\frac{2\pi}{3}$$

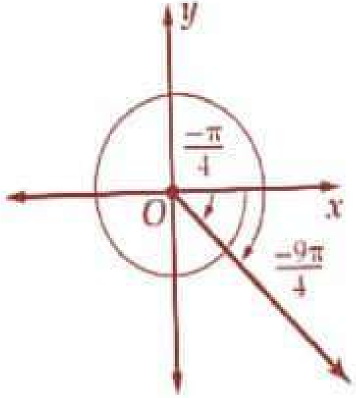




6) $-\frac{\pi}{4}$

$$\frac{7\pi}{4}, -\frac{9\pi}{4}$$





تهيئة الفصل السادس

حوِّل قياس الزاوية المكتوبة بالدرجات إلى الراديان، والمكتوبة بالراديان إلى درجات في كل مما يأتي:

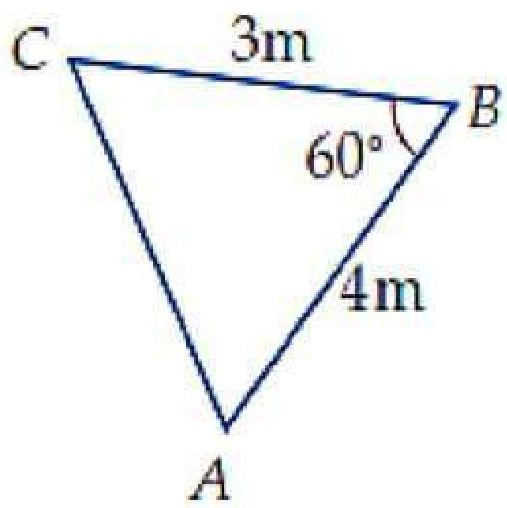
7) $-60°$ $\quad -\frac{\pi}{3}$

8) $\frac{3\pi}{2}$ $\quad 270°$

9) أوجد القيمة الدقيقة لِـ sin 15 باستعمال متطابقة الفرق بين زاويتين.

$$\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$$

10) أوجد طول الضلع AC في المثلث المرسوم أدناه (قرِّب إلى أقرب جزء من عشرة).



$3.6m$ تقريبا

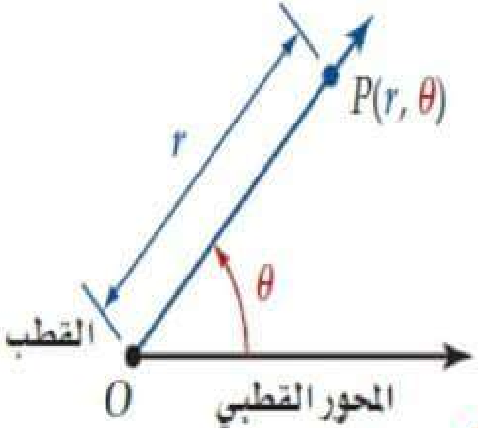
الاحداثيات القطبية

يتكون الاحداثيات الديكارتية من المحوران x , y هما المحوران الأفقي الرأسي ، وتسمى نقطة تقاطعها نقطة الأصل ، ويرمز لها بالحرف O.

يتكون الاحداثيات القطبية من النقطة O وهى نقطة الاصل وهى نقطة ثابتة وتسمى القطب والمحور القطبى وهو مستقيم يمتد أفقيا من القطب إلي اليمين .

يمكن تعيين موقع نقطة P في نظام الإحداثيات القطبية باستعمال الإحداثيات (r, θ) ، حيث r المسافة المتجهة (أي تتضمن قيمة واتجاها ، فمن الممكن أن تكون r سالبة) من القطب إلي النقطة P ، وθ الزاوية المتجهة (أي تتضمن قيمة واتجاها) من المحور القطبي إلي $\overrightarrow{OP}$.

نظام الإحداثيات القطبية

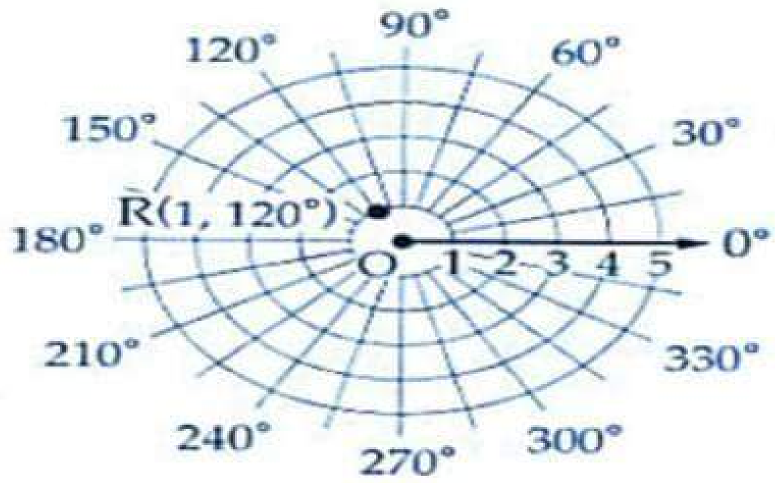


تكملة الشرح

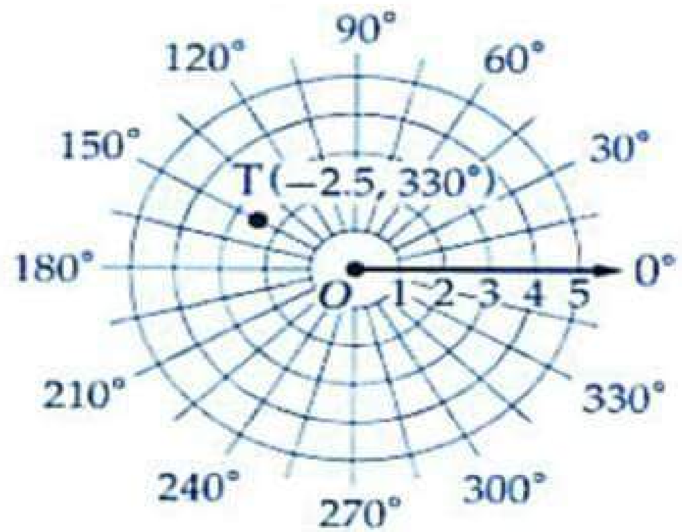
تدرب وحل المسائل

مثِّل كل نقطة مما يأتي في المستوى القطبي.

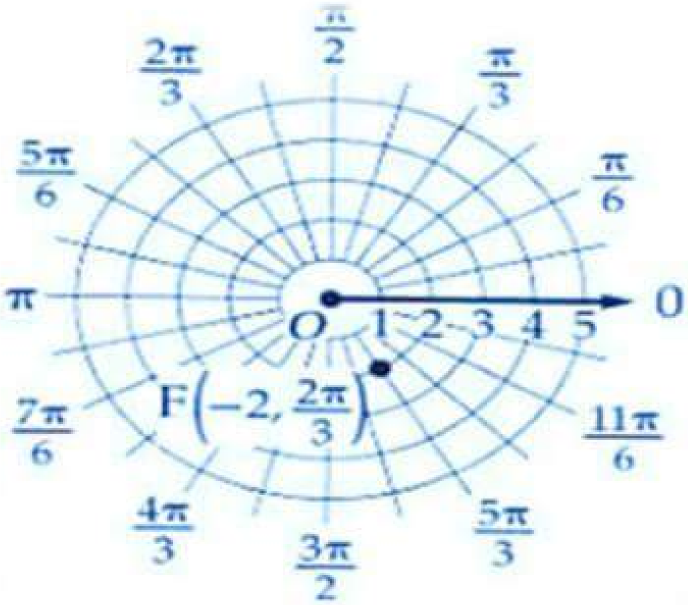
(1 $R(1, 120°)$



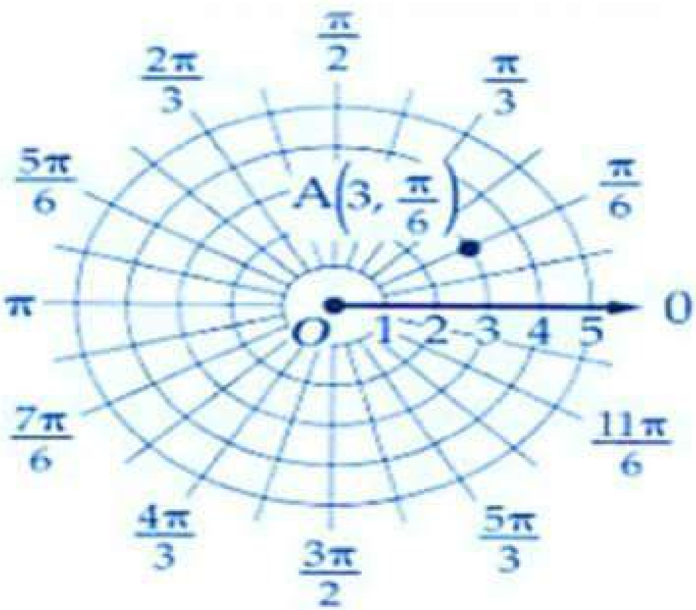
(2 $T(-2.5, 330°)$



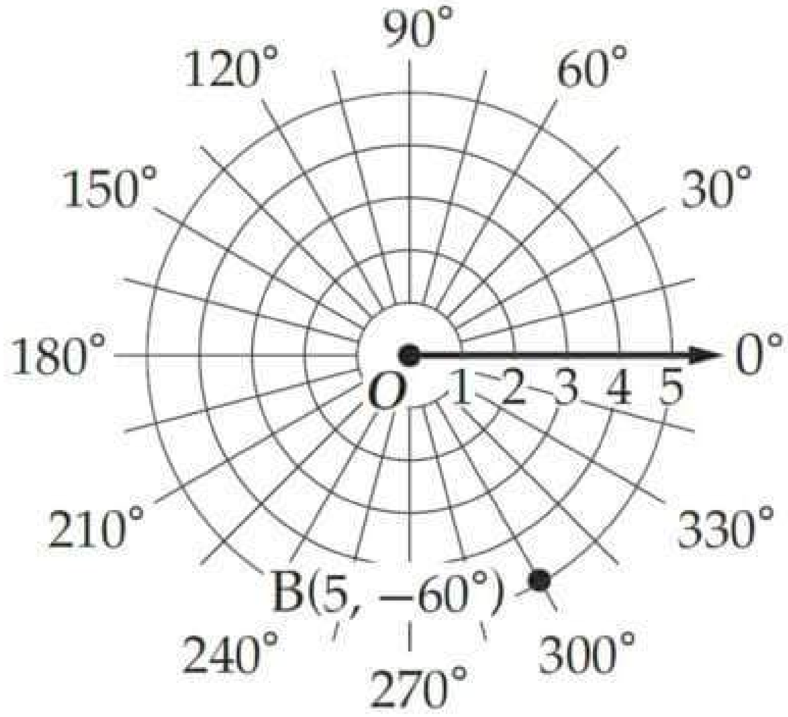
$F\left(-2, \frac{2\pi}{3}\right)$ (3



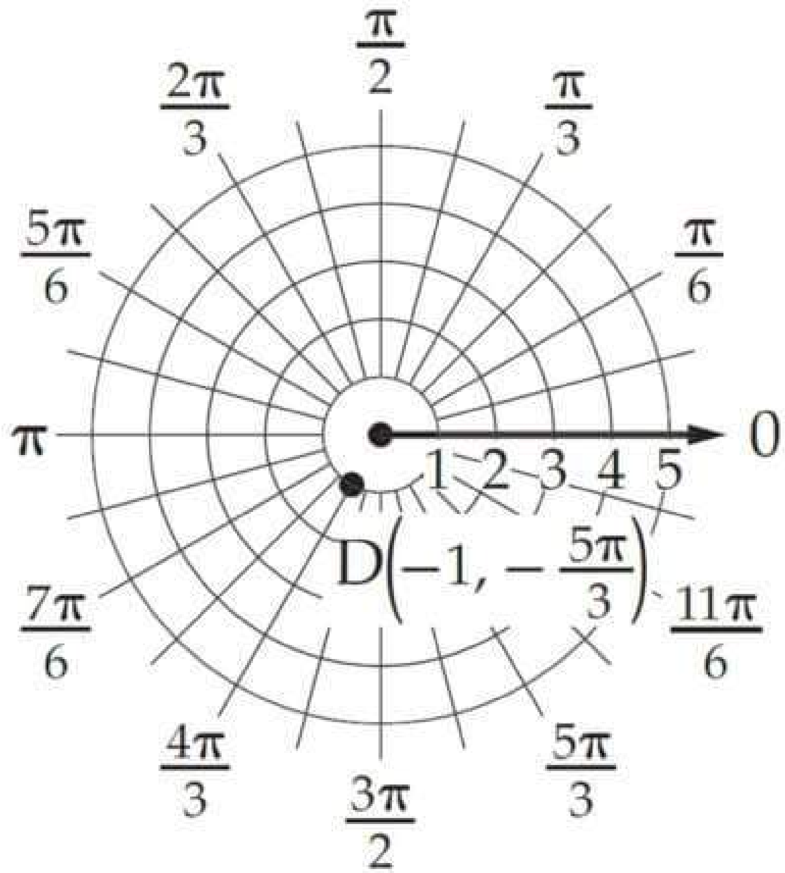
$A\left(3, \frac{\pi}{6}\right)$ (4



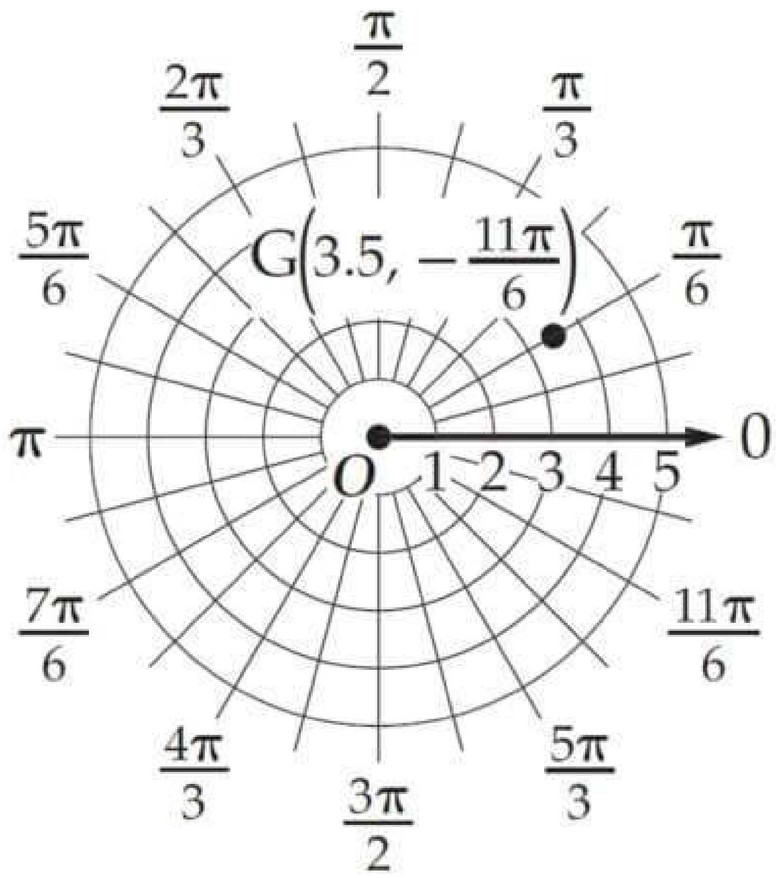
$B(5, -60^\circ)$ (5



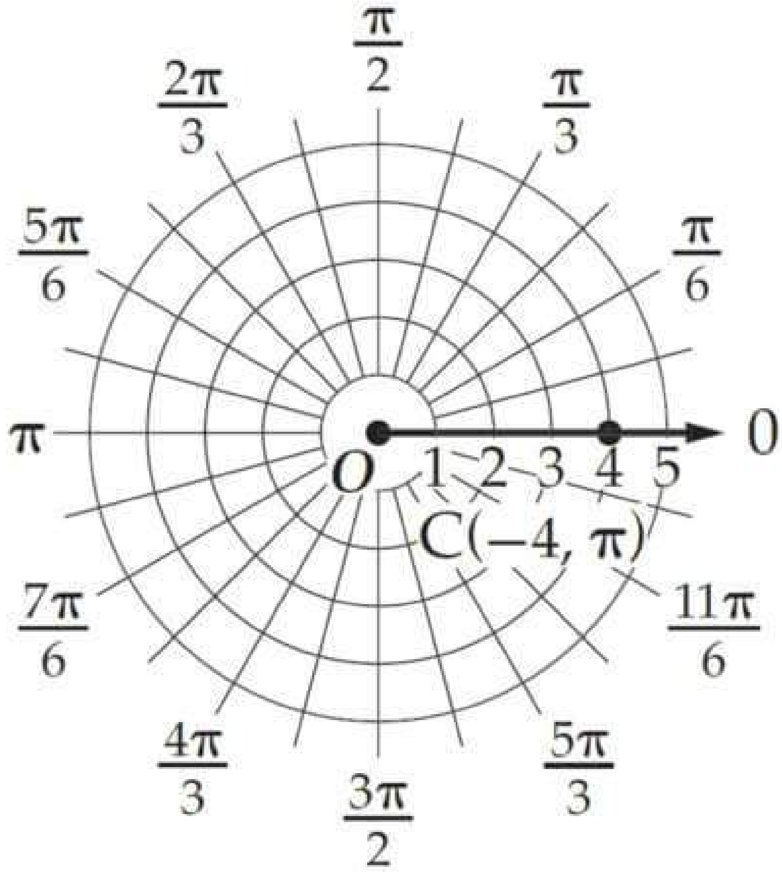
$D\left(-1, -\frac{5\pi}{3}\right)$ (6



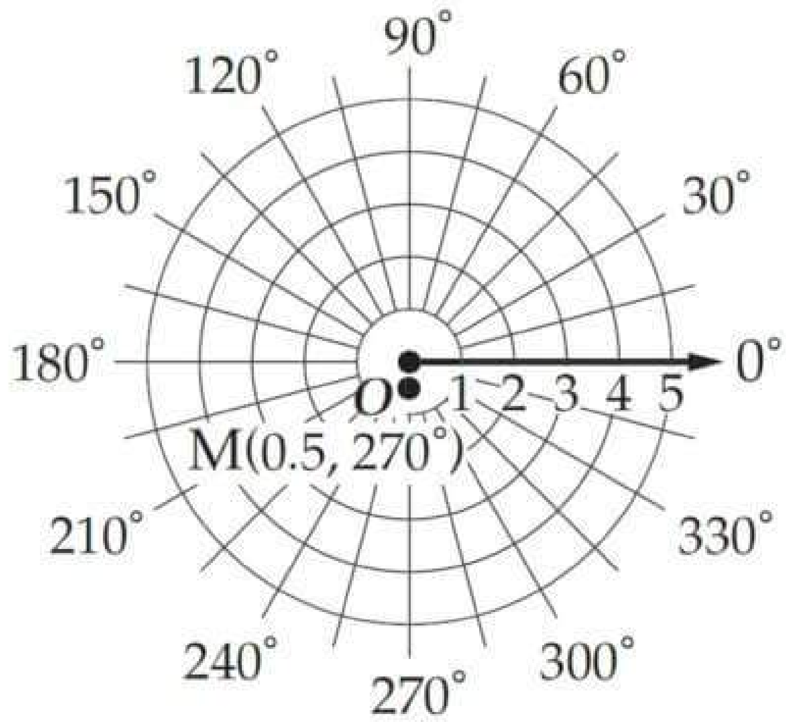
$G\left(3.5,-\frac{11\pi}{6}\right)$ (7



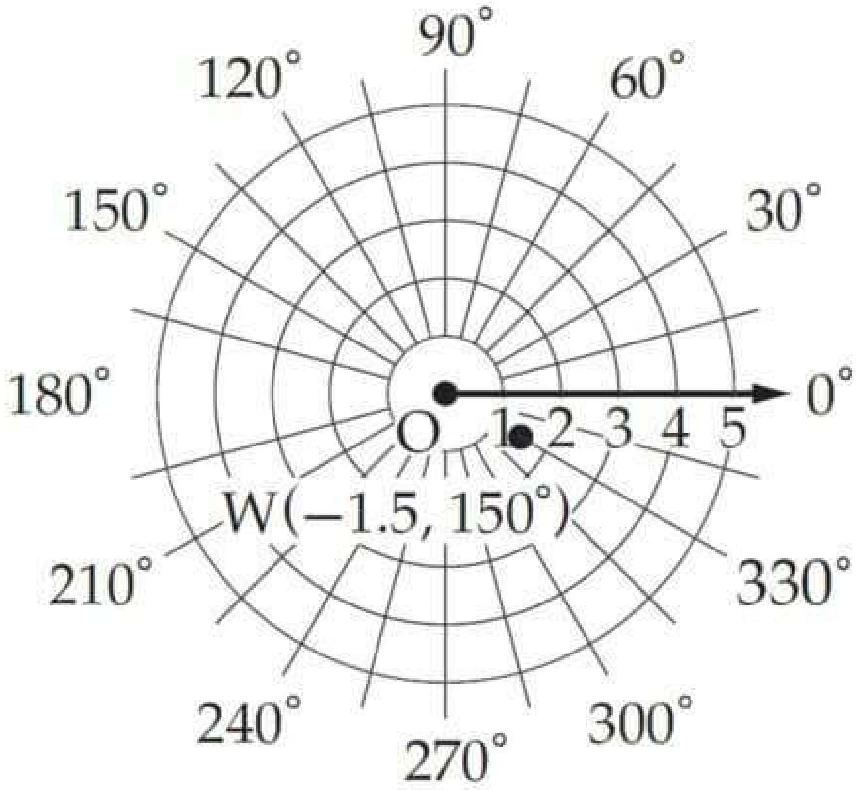
$C(-4,\pi)$ (8



9) $M(0.5, 270°)$

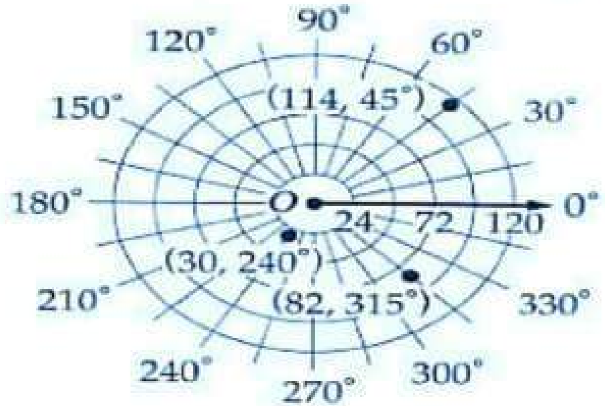


10) $W(-1.5, 150°)$



11) رماية : يتكون هدف في منافسة للرماية من 10 دوائر متحدة المركز. ويتدرج عدد النقاط المكتسبة من 1 إلى 10 من الحلقة الدائرية الخارجية إلى الدائرة الداخلية على الترتيب. افترض أن راميًا يستعمل هدفًا نصف قطره 120 cm، وأنه قد أطلق ثلاثة أسهم، فأصابت الهدف عند النقاط $(30, 240°)$, $(82, 315°)$, $(114, 45°)$. إذا كان لجميع الحلقات الدائرية السمك نفسه، ويساوي طول نصف قطر الدائرة الداخلية. (المثالان 2 , 1)

a) فمثِّل النقاط التي أصابها الرَّامي في المستوى القطبي.



b) ما مجموع النقاط التي حصل عليها الرَّامي؟

13 نقطة .

إذا كانت $-360° \leq \theta \leq 360°$ ، فأوجد ثلاثة أزواج مختلفة كل منها يمثّل إحداثيين قطبيين للنقطة في كلٍّ مما يأتي: (مثال 3)

12) $(1, 150°)$ $\quad$ $(-1, 330°), (1, 210°), (-1, -30°)$

13) $(-2, 300°)$ $\quad$ $(2و120°), (2, -240°), (-2, -60°)$

14) $\left(4, -\frac{7\pi}{6}\right)$ $\quad$ $\left(4, \frac{5\pi}{6}\right), \left(-4, \frac{11\pi}{6}\right), \left(-4, -\frac{-\pi}{6}\right)$

15) $\left(-3, \frac{2\pi}{3}\right)$ $\quad$ $\left(3, \frac{5\pi}{3}\right), \left(3, \frac{-\pi}{3}\right), \left(-3, -\frac{-4\pi}{3}\right)$

16) $\left(5, \frac{11\pi}{6}\right)$ $\quad$ $\left(5, \frac{-\pi}{6}\right), \left(-5, \frac{5\pi}{6}\right), \left(-5, -\frac{-7\pi}{6}\right)$

$\left(-5, -\frac{4\pi}{3}\right)$ **(17**

$(5, \frac{5\pi}{3}), (5, \frac{-\pi}{3}), (-5, \frac{2\pi}{3})$

$(2, -30°)$ **(18**

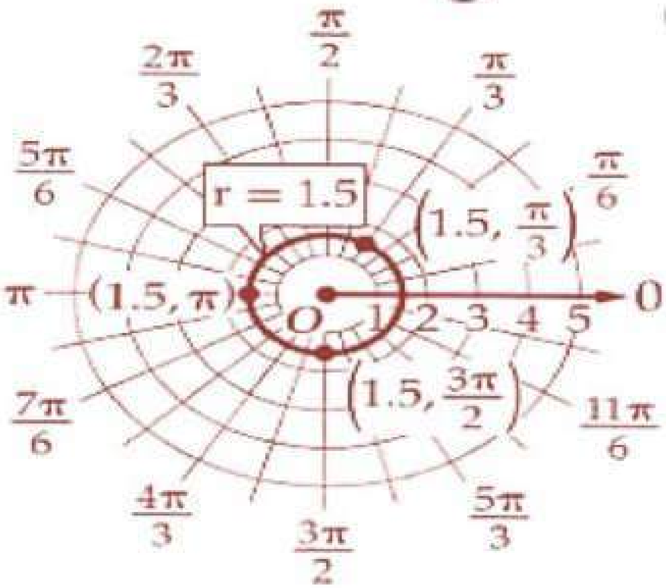
$(2, 330°), (-2, 150°), (-2, -210°)$

$(-1, -240°)$ **(19**

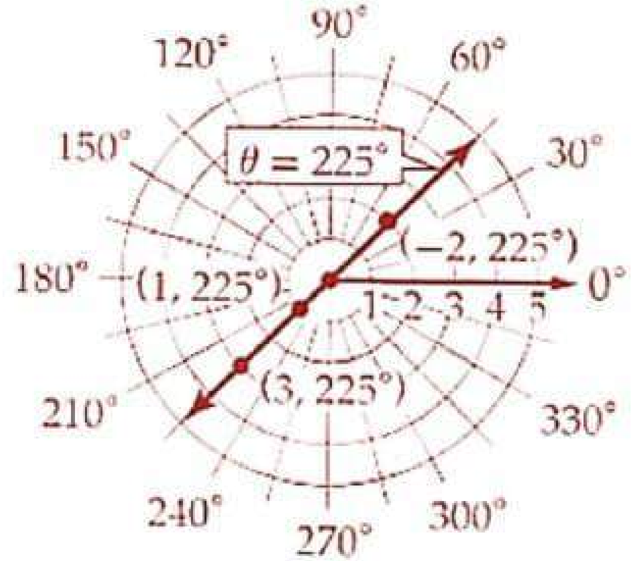
$(1, 300°), (1, -60°), (-1, 120°)$

مَثِّل كل معادلة من المعادلات القطبية الآتية بيانيًّا:

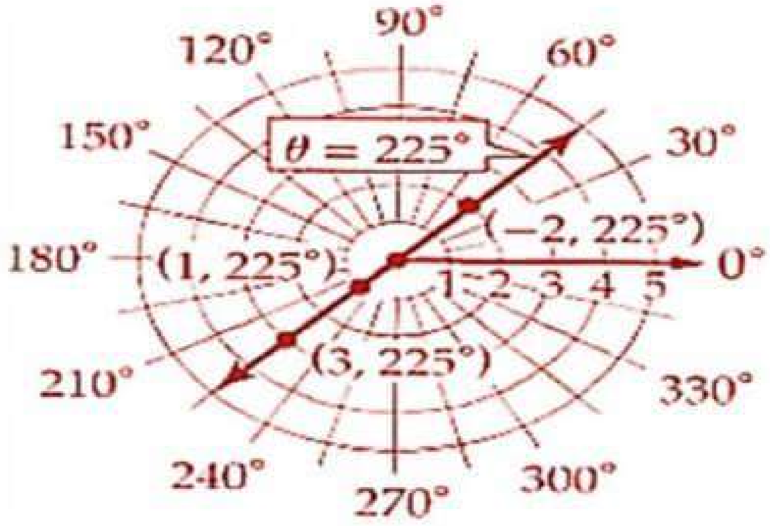
20) $r = 1.5$



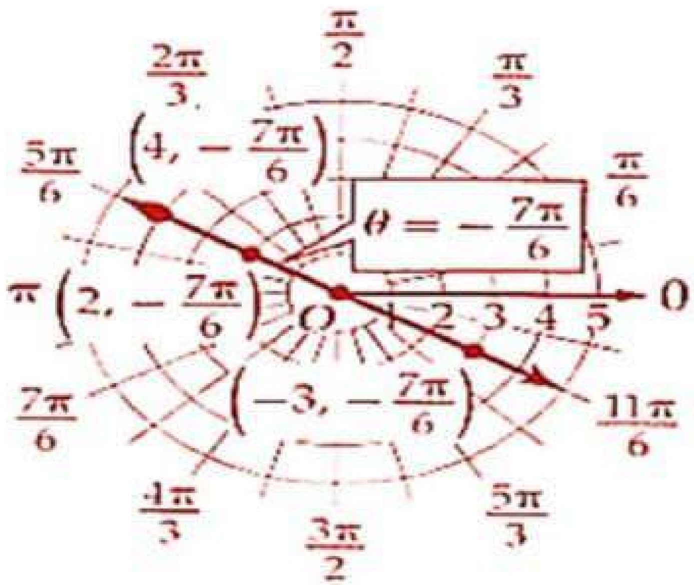
21) $\theta = 225^\circ$



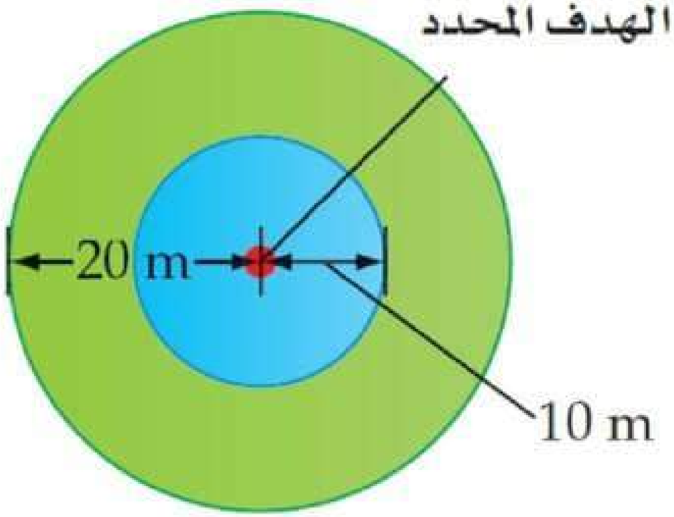
$\theta = -\frac{7\pi}{6}$ (22



$r = -3.5$ (23



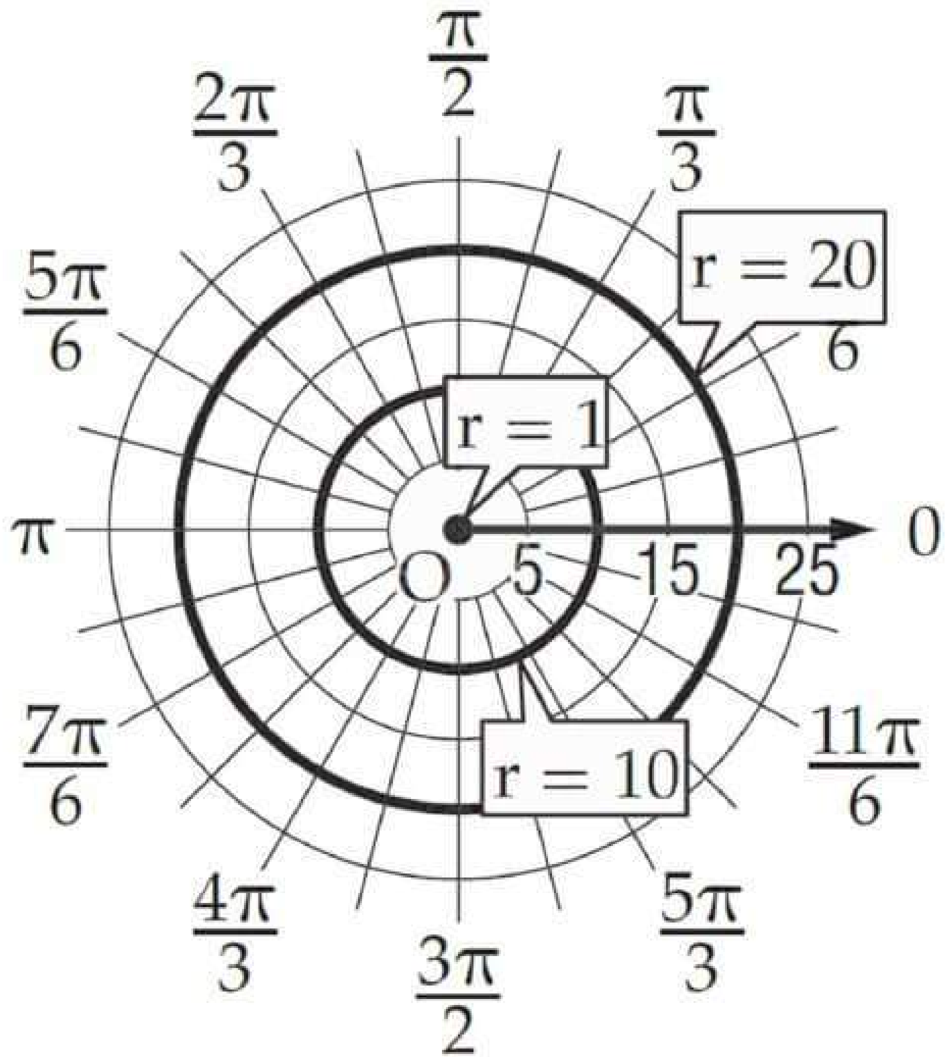
24) **القفز بالمظلات:** في مسابقة لتحديد دقة موقع الهبوط، يحاول مظلي الوصول إلى «مركز الهدف المحدد»؛ ومركز الهدف عبارة عن دائرة حمراء طول قطرها 2 m. كما يشمل الهدف دائرتين طولا نصفي قطريهما 10 m و 20 m .



a) اكتب 3 معادلات قطبية تمثِّل حدود المناطق الثلاث للهدف.

$$r = 1, r = 10, r = 20$$

b) مَثِّل هذه المعادلات في المستوى القطبي.



أوجد المسافة بين كل زوج من النقاط فيما يأتي.

25) $(2, 30°), (5, 120°)$ 5.39

26) $\left(3, \frac{\pi}{2}\right), \left(8, \frac{4\pi}{3}\right)$ 10.70

27) $(6, 45°), (-3, 300°)$ 5.97

28) $\left(7, -\frac{\pi}{3}\right), \left(1, \frac{2\pi}{3}\right)$ 8

29) $\left(-5, \frac{7\pi}{6}\right), \left(4, \frac{\pi}{6}\right)$ 1

30) $(4, -315°), (1, 60°)$ 3.05

31) $(-2, -30°), (8, 210°)$ 7.21

32) $\left(-3, \frac{11\pi}{6}\right), \left(-2, \frac{5\pi}{6}\right)$

5

33) $\left(1, -\frac{\pi}{4}\right), \left(-5, \frac{7\pi}{6}\right)$

≈ 4.84

34) $(7, -90^\circ), (-4, -330^\circ)$

≈ 6.08

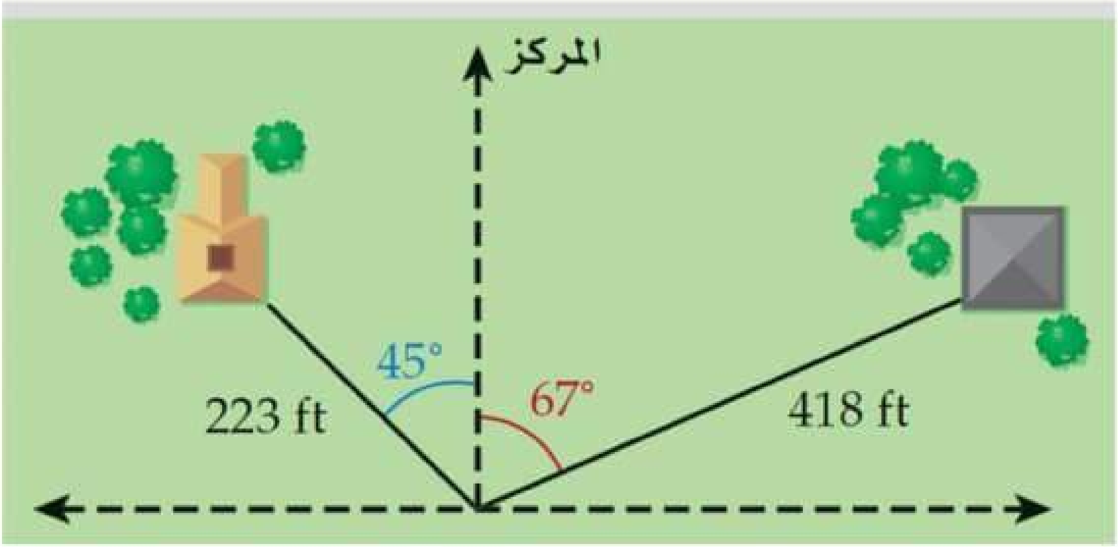
35) $\left(8, -\frac{2\pi}{3}\right), \left(4, -\frac{3\pi}{4}\right)$

≈ 4.26

36) $(-5, 135^\circ), (-1, 240^\circ)$

≈ 5.35

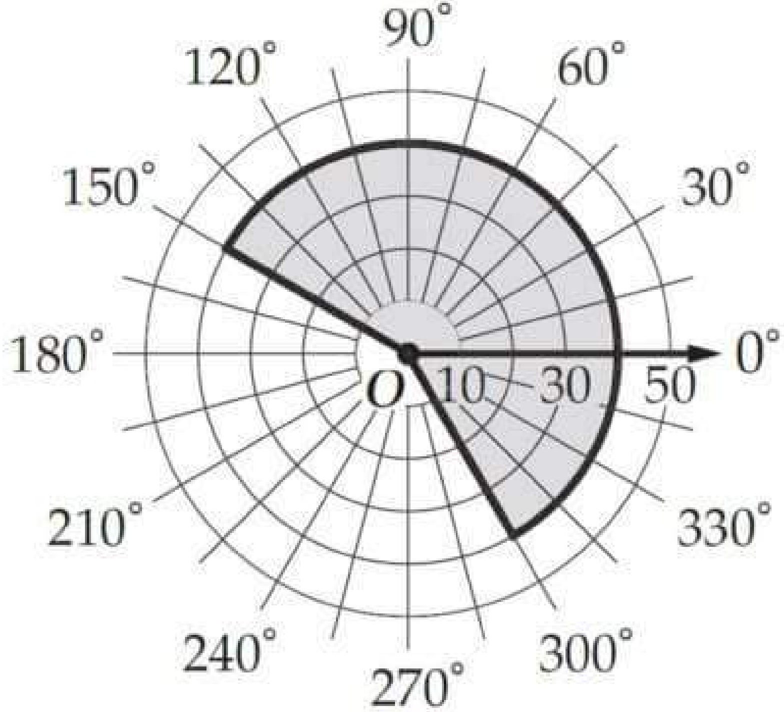
37) **مسّاحون:** أراد مسَّاح تحديد حدود قطعة أرض، فحدّد أثرًا يبعُد 223 ft ، بزاوية °45 إلى يسار المركز ، وأثرًا آخر على بُعد 418 ft ، بزاوية °67 إلى يمين المركز، كما في الشكل أدناه، أوجد المسافة بين الأثرين. **(مثال 5)**



≈ 542.5 ft

38) مراقبة: تراقب آلة تصوير مثبتة منطقة جبلية تمثّل جزءًا من دائرة، وتُحدَّدُ بالمتباينتين $0 \le r \le 40$ ، $-60^\circ \le \theta \le 150^\circ$ ، حيث r بالأمتار.

a) مثّل في المستوى القطبي المنطقة التي يمكن لآلة التصوير مراقبتها.



b) أوجد مساحة المنطقة (مساحة القطاع الدائري تساوي:

$$\frac{\text{قياس زاوية القطاع بالدرجات}}{360^\circ} \times \text{مساحة الدائرة}).$$

حوالي $2932.2\ m^2$

إذا كانت $0 \le \theta \le 180°$ ، فأوجد زوجًا آخر من الإحداثيات القطبيّة لكلّ نقطة مما يأتي:

39) $(5, 960°)$ $\quad$ $(-5, 60°)$

40) $\left(-2.5, \frac{15\pi}{6}\right)$ $\quad$ $\left(-2.5, \frac{\pi}{2}\right)$

41) $\left(4, \frac{33\pi}{12}\right)$ $\quad$ $\left(4, \frac{3\pi}{4}\right)$

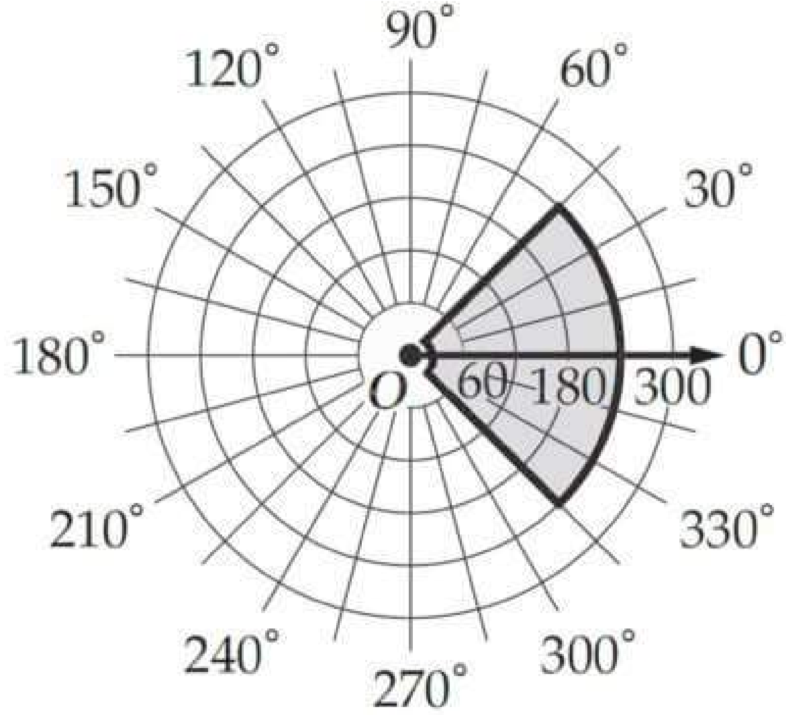
42) $(1.25, -920°)$ $\quad$ $(1.25, 160°)$

43) $\left(-1, -\frac{21\pi}{8}\right)$ $\quad$ $\left(1, \frac{3\pi}{8}\right)$

44) $(-6, -1460°)$ $\quad$ $(6, 160°)$

45) **مسرح:** يلقي شاعر قصيدة في مسرح. ويمكنُ وصف المسرح بمستوى قطبي، بحيث يقف الشاعر في القطب باتجاه المحور القطبي. افترض أن الجمهور يجلس في المنطقة المحددة بالمتباينتين $30 \le r \le 240$ ، $-\frac{\pi}{4} \le \theta \le \frac{\pi}{4}$ ، حيث r بالأقدام.

a) مثِّل المنطقة التي يجلس بها الجمهور في المستوى القطبي.

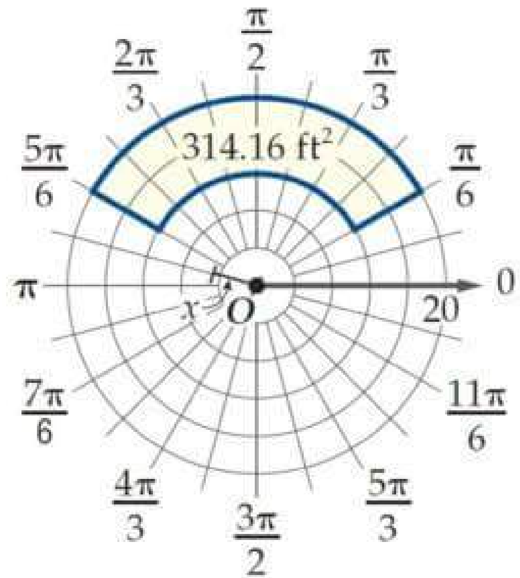


b) إذا كان كل شخص بحاجة إلى 5 ft^2، فكم مقعدًا يتسع المسرح؟

8906 مقاعد تقريبًا

46) **أمن:** يضيء مصباح مراقبة مثبت على سطح أحد المنازل منطقة على شكل جزء من قطاع دائري محدَّد بالمتباينتين $\frac{\pi}{6} \leq \theta \leq \frac{5\pi}{6}$ ، $x \leq r \leq 20$ ، حيث r بالأقدام. إذا كانت مساحة المنطقة 314.16 ft^2 ، كما هو مبين في الشكل أدناه، فأوجد قيمة x .

10 ft تقريبًا



أوجد الإحداثي المجهول الذي يحقِّق الشروط المعطاة في كل مما يأتي:

47) $P_1 = (3, 35°)\,,\, P_2 = (r, 75°)\,,\, P_1P_2 = 4.174$ $\quad$ $r = 6$ أو $r = -1.40$

48) $P_1 = (5, 125°)\,,\, P_2 = (2, \theta)\,,\, P_1P_2 = 4\,,\, 0 \leq \theta \leq 180°$

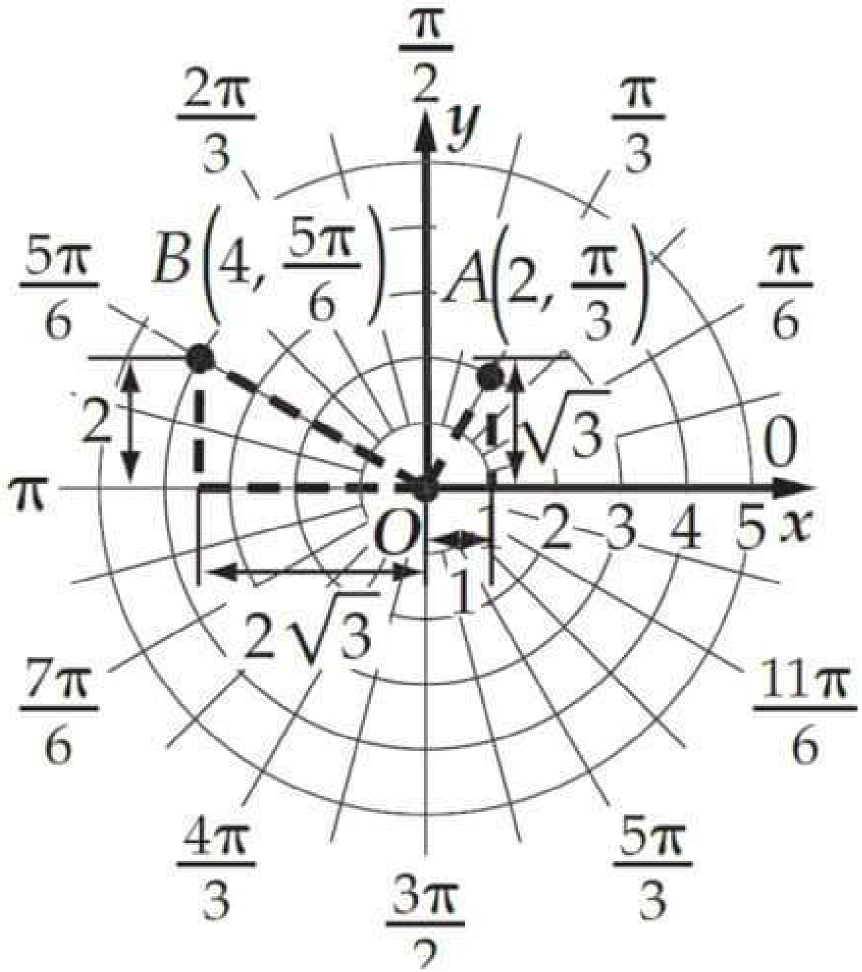
$\theta \approx 75.5$ أو $\theta \approx 174.46°$

49) $P_1 = (3, \theta)\,,\, P_2 = \left(4, \frac{7\pi}{9}\right),\, P_1P_2 = 5\,,\, 0 \leq \theta \leq \pi$ $\quad$ $\theta \approx \frac{5\pi}{18}$

50) $P_1 = (r, 120°)\,,\, P_2 = (4, 160°)\,,\, P_1P_2 = 3.297$ $\quad$ $r \approx 5.13$ أو $r \approx 1$

51) **تمثيلات متعددة:** في هذه المسألة، سوف تستقصي العلاقة بين الإحداثيات القطبية والإحداثيات الديكارتية.

a) **بيانيًا:** عيِّن $A\left(2, \frac{\pi}{3}\right)$ في المستوى القطبي، وارسم نظام الإحداثيات الديكارتية فوق المستوى القطبي بحيث تنطبق نقطة الأصل على القطب، والجزء الموجب من المحور x على المحور القطبي. وبالتالي سينطبق المحور y على المستقيم $\theta = \frac{\pi}{2}$. ارسم مثلثًا قائمًا بوصل A مع نقطة الأصل، وارسم منها عمودًا على المحور x.



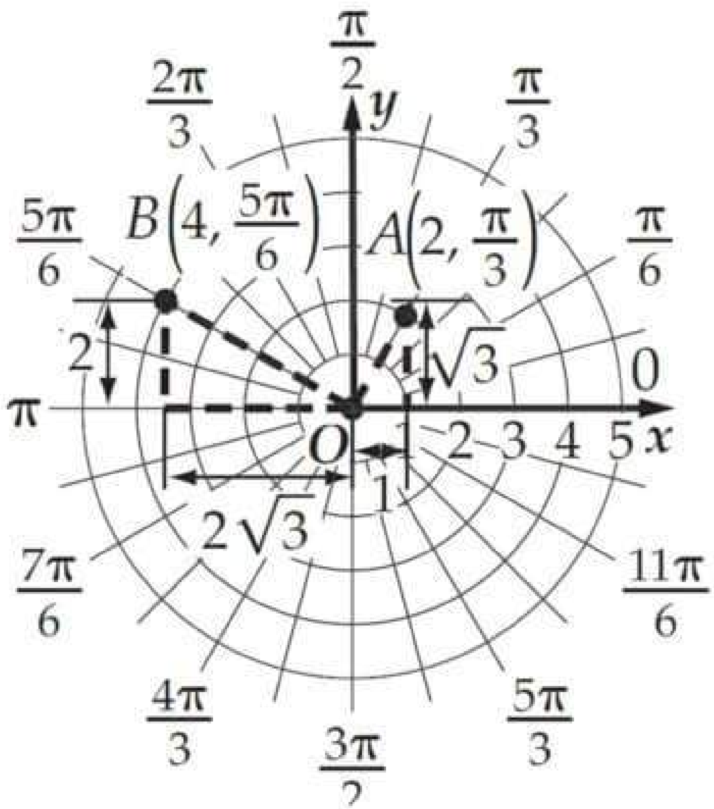
$$x = r\cos\frac{\pi}{3} = 2 \times \frac{1}{2} = 1$$

$$y = r\sin\frac{\pi}{3} = 2 \times \frac{\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3}$$

b) **عدديًا:** احسب طولي ضلعي الزاوية القائمة باستعمال طول الوتر والمتطابقات المثلثية.

يمثِّل طولا الضلعين الأفقي والرأسي القيمة المطلقة للإحداثيين x, y على الترتيب.

c) **بيانيًا:** عيِّن $B\left(4, \frac{5\pi}{6}\right)$ على المستوى القطبي نفسه، وارسم مثلثًا قائمًا بوصل B مع نقطة الأصل، وارسم منها عمودًا على المحور x، واحسب طولي ضلعي الزاوية القائمة.



$$x = r\cos\frac{\pi}{3} = 2 \times \frac{1}{2} = 1$$

$$y = r\sin\frac{\pi}{3} = 2 \times \frac{\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3}$$

d) **تحليليًّا:** كيف ترتبط أطوال أضلاع المثلث بالإحداثيات الديكارتية لكل نقطة؟

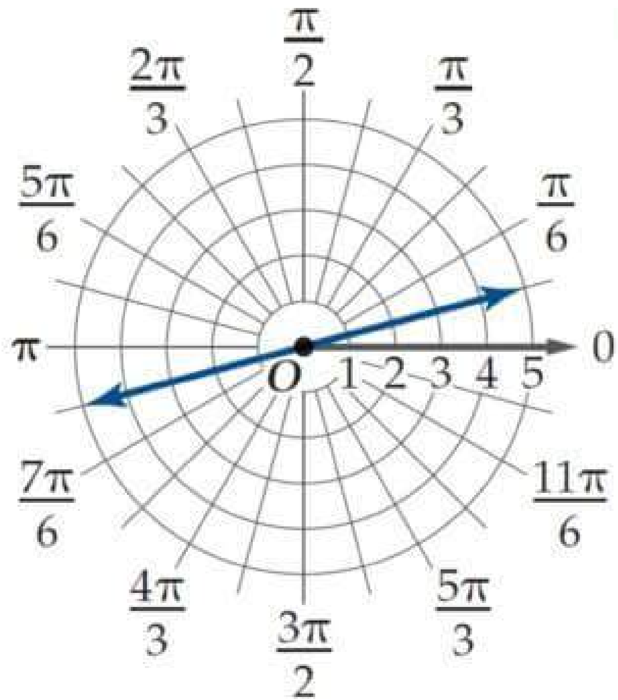
يمثّل طولا الضلعين الأفقي والرأسي القيمة المطلقة للإحداثيين x, y على الترتيب.

e) **تحليليًّا:** اشرح العلاقة بين الإحداثيات القطبية (r, θ)، والإحداثيات الديكارتية (x, y).

إذا كانت إحداثيات النقطة القطبية (r, θ)، فإن إحداثياتها الديكارتية هي $(r\cos\theta, r\sin\theta)$.

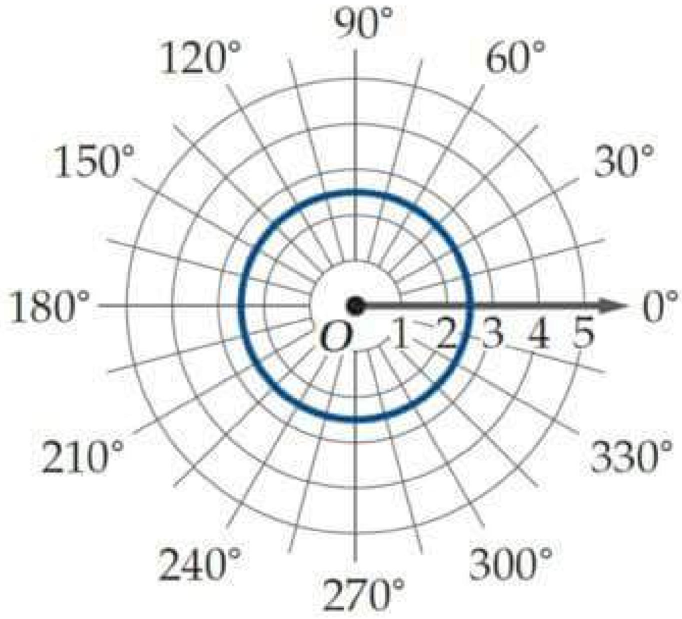
اكتب المعادلة لكل تمثيل قطبي مما يأتي:

(52



$$\theta = \frac{\pi}{12}$$

(53

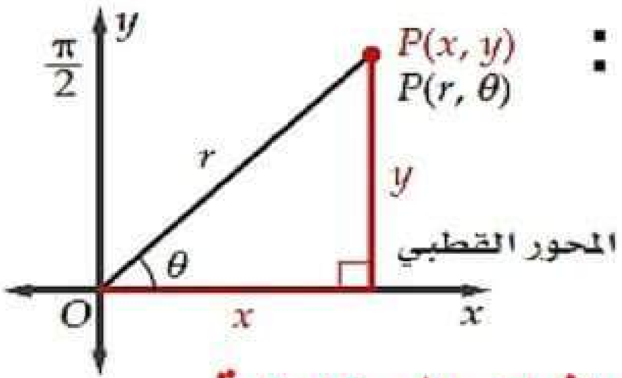


$r = 2.5$ أو $r = -2.5$

الصورة القطبية و الصورة الديكارتية للمعادلات

اولا :- تحويل الاحداثيات القطبية الى احداثيات الديكارتية ويعطى بالقاعدة الاتية :-

إذا كان للنقطة P الإحداثيات القطبية (r, θ) ، فإن الإحداثيات الديكارتية (x, y) للنقطة P هي :



$$x = r\cos\theta \qquad , \qquad y = r\sin\theta$$

أي أن $(x, y) = (r\cos\theta, r\sin\theta)$

مثال تحويل الإحداثيات القطبية إلي الإحداثيات الديكارتية

حول الإحداثيات القطبية إلي إحداثيات ديكارتية لكل نقطة مما يأتي :

$P(4, \frac{\pi}{6})$ (a

بما أن إحداثيات النقطة $(r, \theta) = (4, \frac{\pi}{6})$ ، فإن $r = 4, \theta = \frac{\pi}{6}$

تكملة الشرح

تدرب وحل المسائل

حوّل الإحداثيات القطبية إلى إحداثيات ديكارتية لكلٍّ نقطة مما يأتي:

1) $\left(2, \frac{\pi}{4}\right)$ $\quad$ $\left(\sqrt{2}, \sqrt{2}\right)$

2) $\left(\frac{1}{4}, \frac{\pi}{2}\right)$ $\quad$ $\left(0, \frac{1}{4}\right)$

3) $(5, 240^\circ)$ $\quad$ $(-2.5$ و $-4.33)$ أو $(-2.5$ و $-2.5\sqrt{3})$

4) $(2.5, 250^\circ)$ $\quad$ $(-0.86, -2.35)$

5) $\left(-2, \frac{4\pi}{3}\right)$ $\quad$ $(-0.86, -2.35)$

6) $(-13, -70^\circ)$ $\quad$ $(-4.45, -12.22)$

7) $\left(\frac{1}{2}, \frac{3\pi}{4}\right)$ $\quad$ $\left(-\frac{\sqrt{2}}{4}, \frac{\sqrt{2}}{4}\right)$

8) $(-2, 270°)$ $(0, 2)$

9) $(4, 210°)$ $\left(-2\sqrt{3}, -2\right)$

10) $\left(-1, -\frac{\pi}{6}\right)$ $\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}\right)$

أوجد زوجين مختلفين كل منهما يمثّل إحداثيين قطبيين لكل نقطة معطاة بالإحداثيّات الديكارتيّة في كلٍّ مما يأتي: (مثال 2)

11) $(7, 10)$ $(12.21, 0.96), (-12.21, 4.1)$

12) $(-13, 4)$ $(13.6, 2.84), (-13.6, 5.98)$

13) $(-6, -12)$ $(13.42, 4.25), (-13.42, 1.11)$

14) $(4, -12)$ $(12.65, 5.03), (-12.65, 1.89)$

15) $(2, -3)$ $(3.61, 5.30), (-3.61, 2.16)$

16) $(0, -173)$ $\left(173, \frac{3\pi}{2}\right), \left(-173, \frac{\pi}{2}\right)$

17) $(1, 3)$ $(3.16, 1.25), (-3.16, 4.39)$

18) $(-14, 14)$

$\approx (19.8, 0.75\pi)$, $\approx (-19.8, 1.75\pi)$

أو $\approx (19.8, 135°)$, $\approx (-19.8, 315°)$

19) $(52, -31)$

$\approx (60.54, 0.54)$, $\approx (-60.54, 2.61)$

أو $\approx (60.54, 31°)$, $\approx (-60.54, 150°)$

20) $(3, -4)$

$\approx (5, -0.93)$, $\approx (-5, 2.21)$

أو $\approx (5, 53°)$, $\approx (-5, 127°)$

21) $(1, -1)$

$\approx \left(1.41, -\frac{\pi}{4}\right)$, $\approx \left(-1.41, \frac{3\pi}{4}\right)$

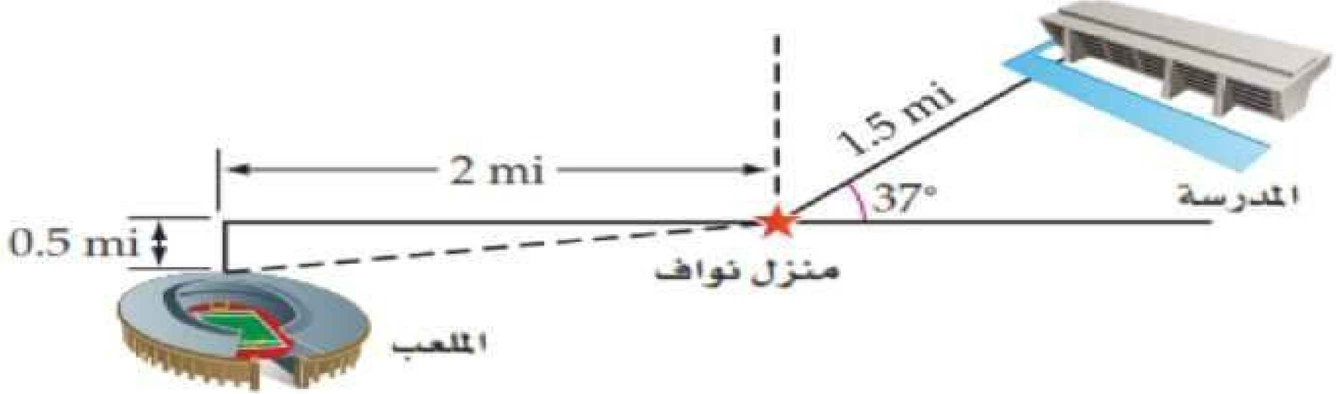
أو $\approx (1.41, -45°)$, $\approx (-1.41, 135°)$

22) $(2, \sqrt{2})$

$(2.45, 0.62)$, $(-2.45, 3.76)$

أو $\approx (2.45, 36°)$, $\approx (-2.45, 216°)$

23) **مسافات:** إذا كانت مدرسة نواف تبعُد 1.5 mi عن منزله، وتصنع زاوية مقدارها °53 شمال الشرق كما في الشكل أدناه، فأجب عن الفرعين **a , b**. (مثال 3)



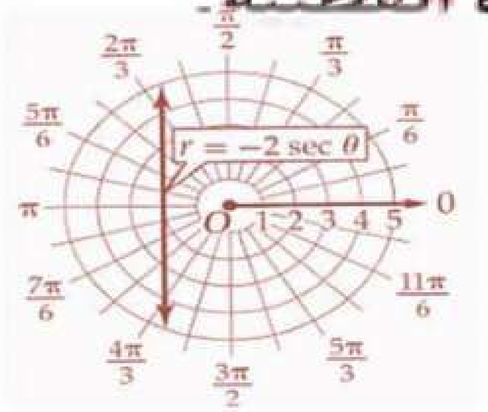
a) إذا سلك نواف طريقًا للشرق ثم للشمال؛ كي يصل إلى المدرسة، فكم ميلًا يتحرك في كل اتجاه؟

$1.2mi$ شرقا و $0.90mi$ شمالا

b) إذا كان الملعب على بُعد 2 mi غربًا، و 0.5 mi جنوبًا، ومنزل نواف يمثِّل القطب، فما إحداثيات موقع الملعب على الصورة القطبية؟

$(2.06, 194.04°)$

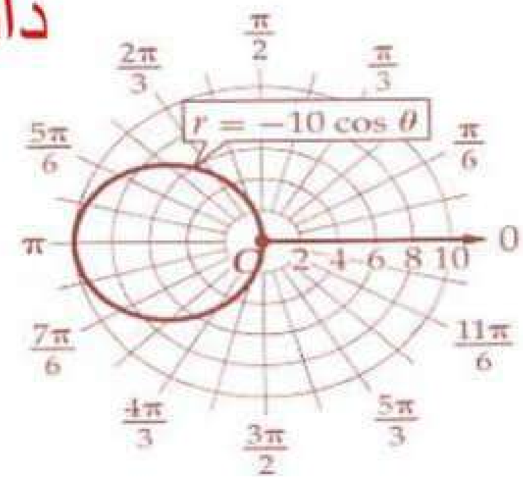
اكتب كلَّ معادلة مما يأتي على الصورة القطبية:

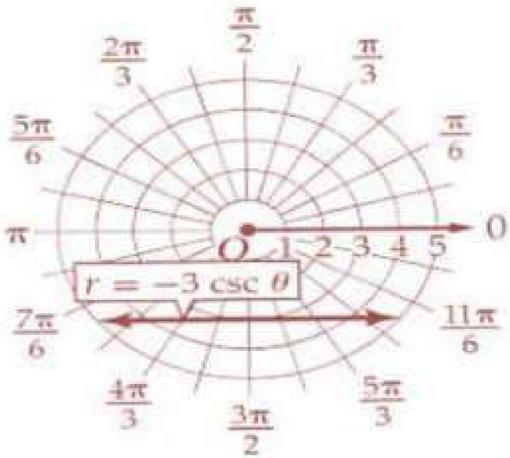


24) $x = -2$ مستقيم ، $r = -2\sec\theta$

25) $(x+5)^2 + y^2 = 25$

دائرة ، $r = -10\cos\theta$





26) $y = -3$ مستقيم ، $r = -3\sec\theta$

$x = 5$ (27

$r = 5 \sec \theta$

$(x-2)^2 + y^2 = 4$ (28

$r = 4 \cos \theta$

$x^2 + (y+3)^2 = 9$ (29

$r = -6 \sin \theta$

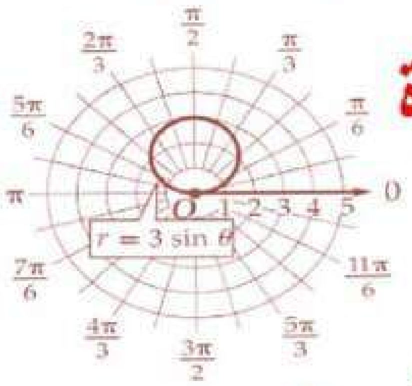
$y = \sqrt{3}x$ (30

$\theta = \frac{\pi}{3}$

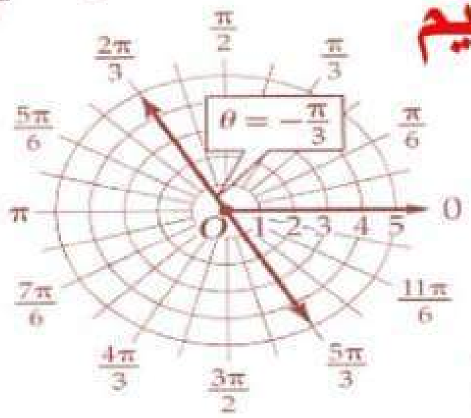
$x^2 + (y+1)^2 = 1$ (31

$r = -2 \sin \theta$

اكتب كلّ معادلة قطبيّة مما يأتي على الصورة الديكارتية:

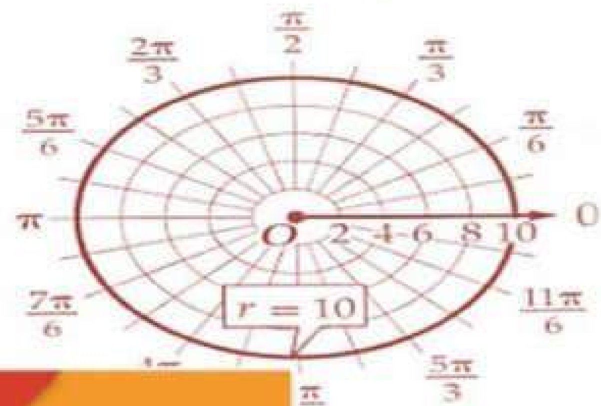


(32 $r = 3\sin\theta$ $\quad x^2 + y^2 - 3y = 0$ ، دائرة



(33 $\theta = -\frac{\pi}{3}$ $\quad y = -\sqrt{3}x$ ، مستقيم

(34 $r = 10$ $\quad x^2 + y^2 = 100$ ، دائرة



اكتب كلّ معادلة قطبيّة مما يأتي على الصورة الديكارتية:

35) $r = 4\cos\theta$

$x^2 - 4x + y^2 = 0$

36) $\tan\theta = 4$

$y = 4x$

37) $r = 8\csc\theta$

$y = 8$

38) $r = -4$

$x^2 + y^2 = 16$

$\cot \theta = -7$ (39

$-\frac{1}{7}x = y$ أو $x = -7y$

$\theta = \frac{3\pi}{4}$ (40

$y = -x$

$r = \sec \theta$ (41

$x = 1$

42) **زلازل:** تُنمذَج حركة أمواج الزلازل بالمعادلة $r = 12.6 \sin \theta$، حيث r مقاسه بالأميال. اكتب معادلة أمواج الزلازل على الصورة الديكارتية. (مثال 5)

دائرة ، $x^2 + y^2 - 12.6y = 0$

اكتب كلّ معادلة قطبيّة مما يأتي على الصورة الديكارتية:

43) $r = \dfrac{1}{\cos\theta + \sin\theta}$

$x + y = 1$ أو $y = 1 - x$

44) $r = 10\csc\left(\theta + \dfrac{7\pi}{4}\right)$

$\dfrac{\sqrt{2}}{2}y - \dfrac{\sqrt{2}}{2}x = 10$ أو $y = x + 10\sqrt{2}$

45) $r = 3\csc\left(\theta - \dfrac{\pi}{2}\right)$

$x = -3$

46) $r = -2\sec\left(\theta - \dfrac{11\pi}{6}\right)$

$\dfrac{\sqrt{3}}{2}x - \dfrac{1}{2}y = -2$ أو $y = \sqrt{3}x + 4$

47) $r = 4\sec\left(\theta - \dfrac{4\pi}{3}\right)$

$-\dfrac{1}{2}x - \dfrac{\sqrt{3}}{2}y = 4$ أو $y = -\dfrac{\sqrt{3}}{3}x - \dfrac{8\sqrt{3}}{3}$

48) $r = \dfrac{5\cos\theta + 5\sin\theta}{\cos^2\theta - \sin^2\theta}$

$x - y = 5$ أو $y = x - 5$

(49 $r = 2\sin\left(\theta + \frac{\pi}{3}\right)$ $\quad x^2 + y^2 - \sqrt{3}\,x - y = 0$ أو $\left(x - \frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{1}{2}\right)^2 = 1$

(50 $r = 4\cos\left(\theta + \frac{\pi}{2}\right)$ $\quad x^2 + y^2 + 4y = 0$ أو $x^2 + (y + 2)^2 = 4$

اكتب كلَّ معادلة مما يأتي على الصورة القطبية:

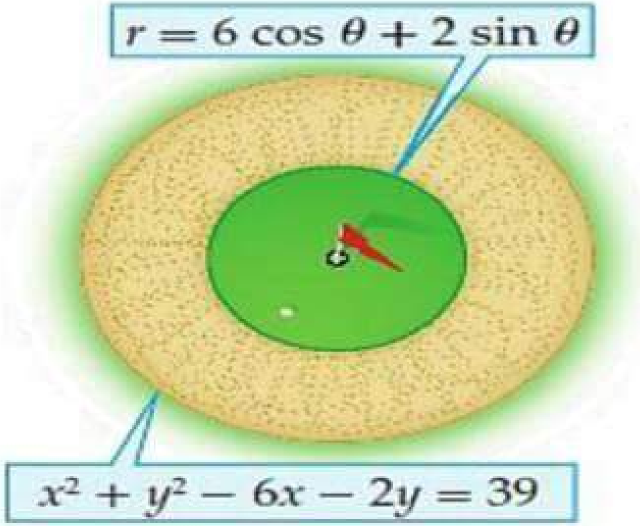
51) $6x - 3y = 4$ $\quad r = \dfrac{4}{6\cos\theta - 3\sin\theta}$

52) $2x + 5y = 12$ $\quad r = \dfrac{12}{2\cos\theta + 5\sin\theta}$

53) $(x-6)^2 + (y-8)^2 = 100$ $\quad r = 12\cos\theta + 16\sin\theta$

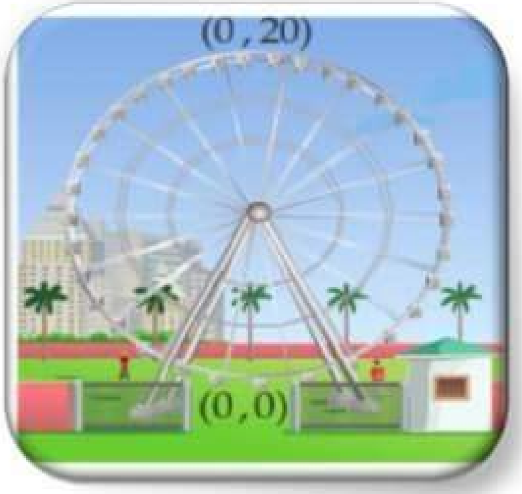
54) $(x+3)^2 + (y-2)^2 = 13$ $\quad r = -6\cos\theta + 4\sin$

55) **جولف:** في أحد ملاعب الجولف، يحيط بثقب الهدف منطقة خضراء محاطة بمنطقة رملية، كما في الشكل أدناه. أوجد مساحة المنطقة الرملية على فرض أن الثقب يمثّل القطب لكلتا المعادلتين، وأن المسافات تُقاس بوحدة الياردة.



$$39\pi yd^2 \approx 122.52yd^2$$

56) **عجلة دوَّارة:** إذا كانت إحداثيات أدنى نقطة في عجلة دوَّارة (0 ,0)، وأعلى نقطة فيها (0, 20).



a) فاكتب معادلة العجلة الدوَّارة الموضحة بالشكل المجاور على الصورة الديكارتية.

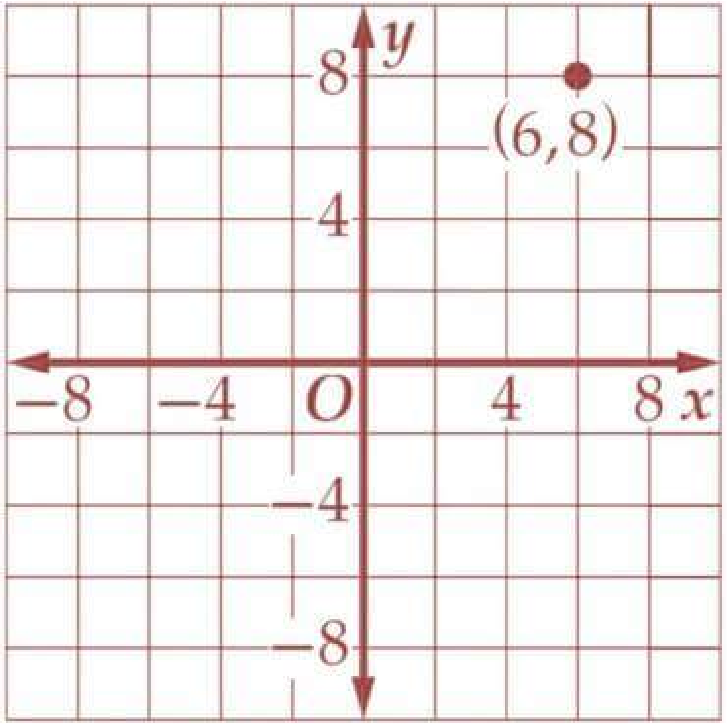
$$x^2 + (y - 10)^2 = 100$$

b) اكتب المعادلة في الفرع **a** بالصيغة القطبية.

$$r = 20 \sin \theta$$

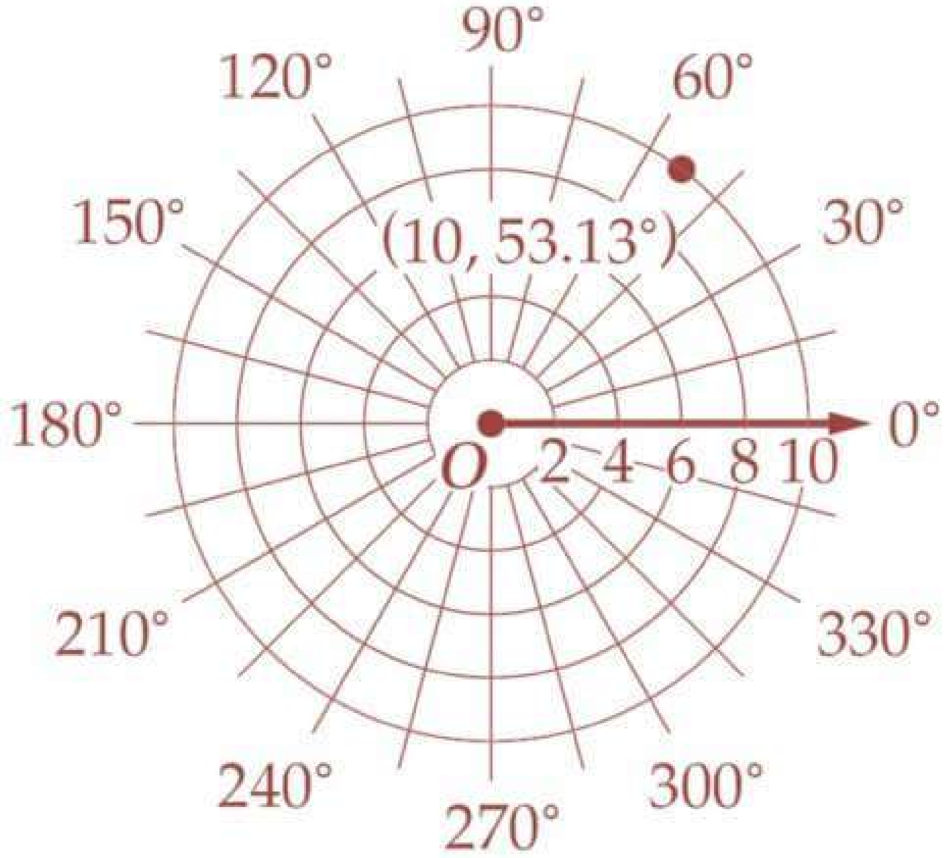
57) **تمثيلات متعددة:** في هذه المسألة سوف تكتشف العلاقة بين الأعداد المركبة والإحداثيات القطبية.

a) **بيانيًا:** يمكن تمثيل العدد المركب $a + bi$ في المستوى الديكارتي بالنقطة (a, b). مَثِّل العدد المركب $6 + 8i$ في المستوى الديكارتي.

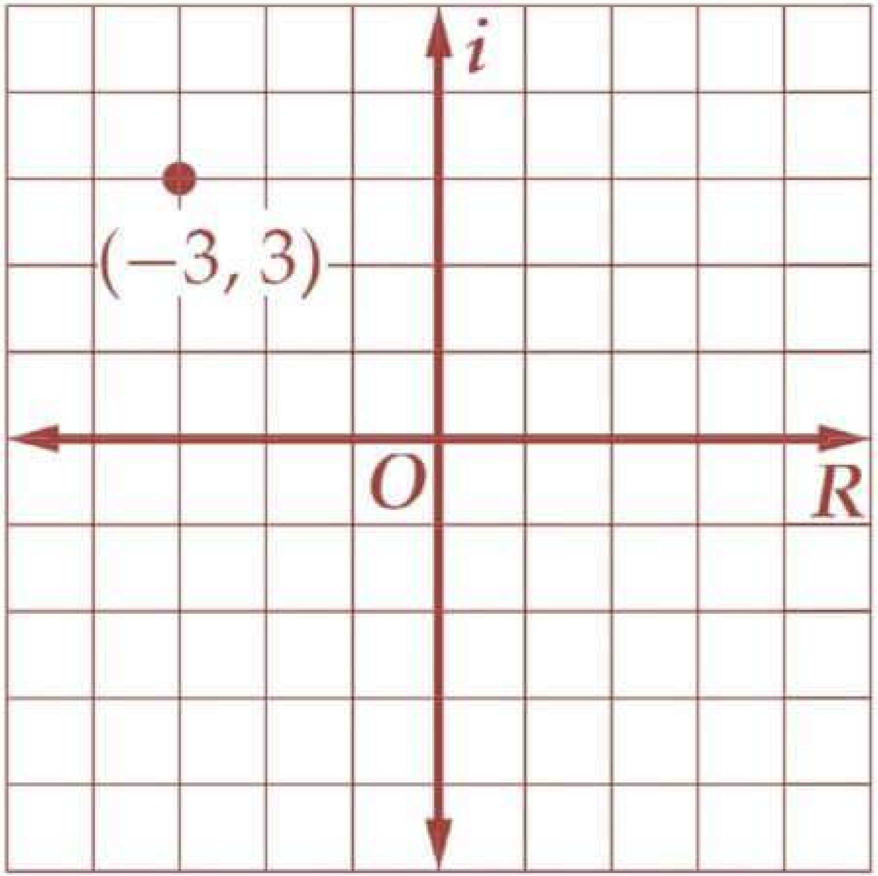


b) **عدديًا:** أوجد الإحداثيات القطبية للعدد المركب باستعمال الإحداثيات الديكارتية التي أوجدتها في الفرع **a** . $(10, 0.93)$ أو $(10, 53.13°)$

c) **بيانيًا :** عزِّز إجابتك في الفرع b بتمثيل الإحداثيات القطبية في المستوى القطبي.

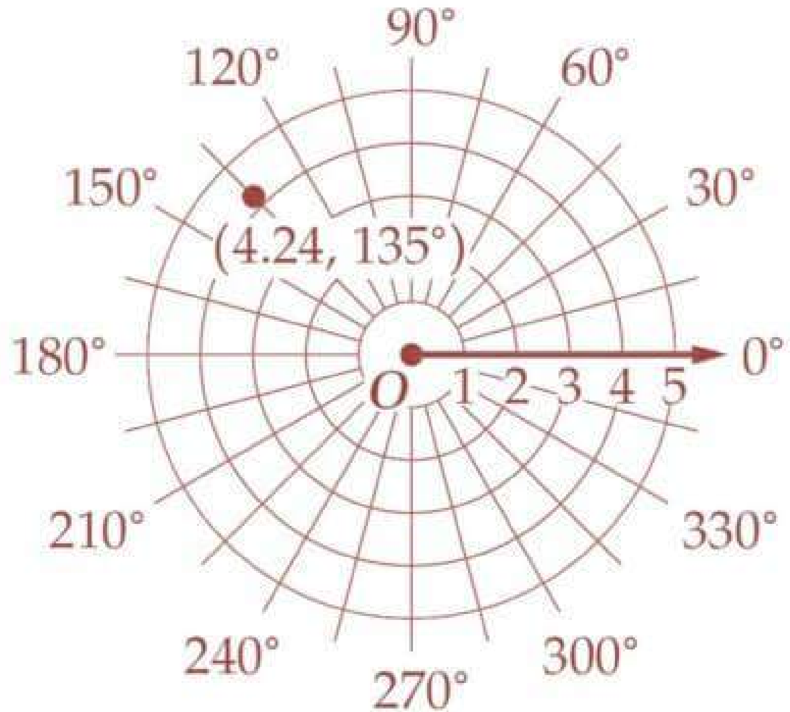


d) بيانيًا : مَثِّل بيانيًّا العدد المركب $-3 + 3i$ في المستوى الديكارتي.



e) **بيانيًا:** أوجد الإحداثيات القطبية للعدد المركب باستعمال الإحداثيات الديكارتية التي أوجدتها في الفرع **d**. ومَثِّل الإحداثيات القطبية في المستوى القطبي.

$\left(4.24, \frac{3\pi}{4}\right)$ أو $(4.24, 135°)$



f) **تحليليًّا:** أوجد العبارات الجبرية التي تبيّن كيفية كتابة العدد المركب $a + bi$ بالإحداثيات القطبية.

$$r = \sqrt{a^2 + b^2},$$

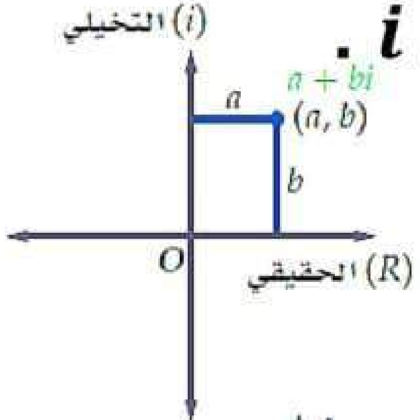
$\theta = \text{Tan}^{-1} \frac{b}{a},$ عندما a موجبة،

$\theta = \text{Tan}^{-1} \frac{b}{a} + \pi$ عندما a سالبة.

الأعداد المركبة

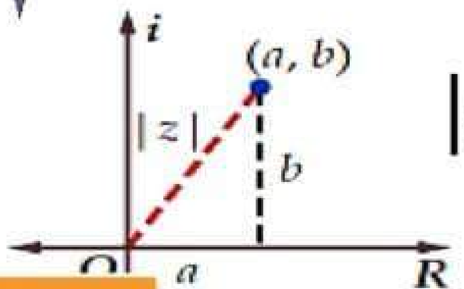
الصيغة القطبية للأعداد المركبة :- ويعطى بالصيغة $a + bi$ حيث a هو الجزء الحقيقي وbi هو الجزء التخيلي .

تمثيلة وهو يمثل على المستوى المركب بالنقطة (a, b) . ويتكون المستوى من محورين المحور الحقيقي ويرمز له بالرمز R، والمحور التخيلي ويرمز له بالرمز i .



مفهوم أساسي ## القيمة المطلقة لعدد مركب

القيمة المطلقة للعدد المركب $z = a + bi$ هي :

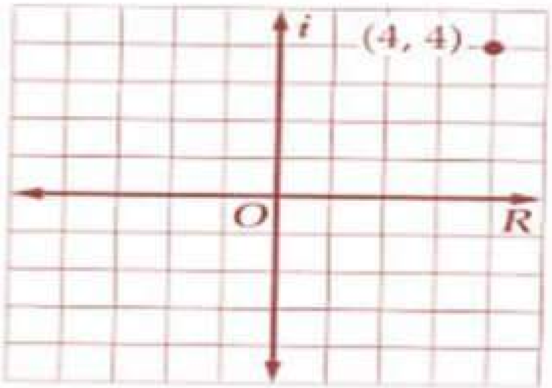


$$|z| = |a + bi| = \sqrt{a^2 + b^2}$$

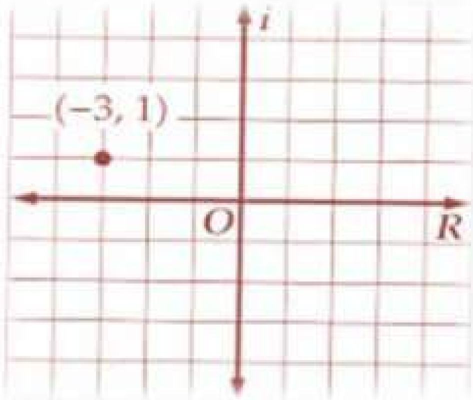
تدرب وحل المسائل

مَثِّل كل عدد مما يأتي في المستوى المركب، وأوجد قيمته المطلقة:

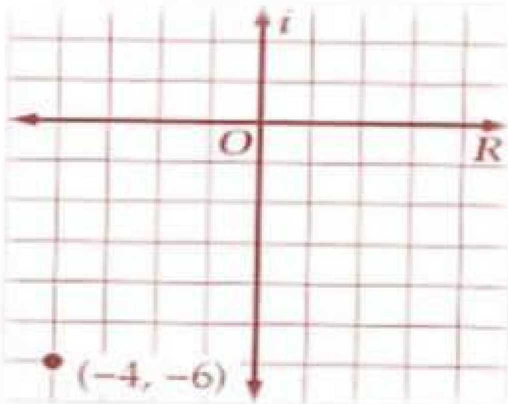
1) $z = 4 + 4i$ ≈ 5.66



2) $z = -3 + i$ ≈ 3.16

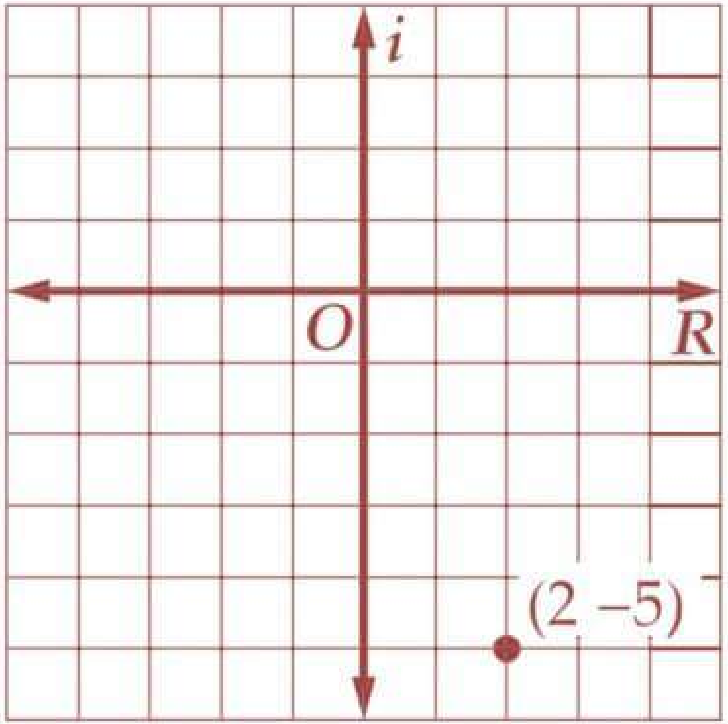


3) $z = -4 - 6i$ ≈ 7.21



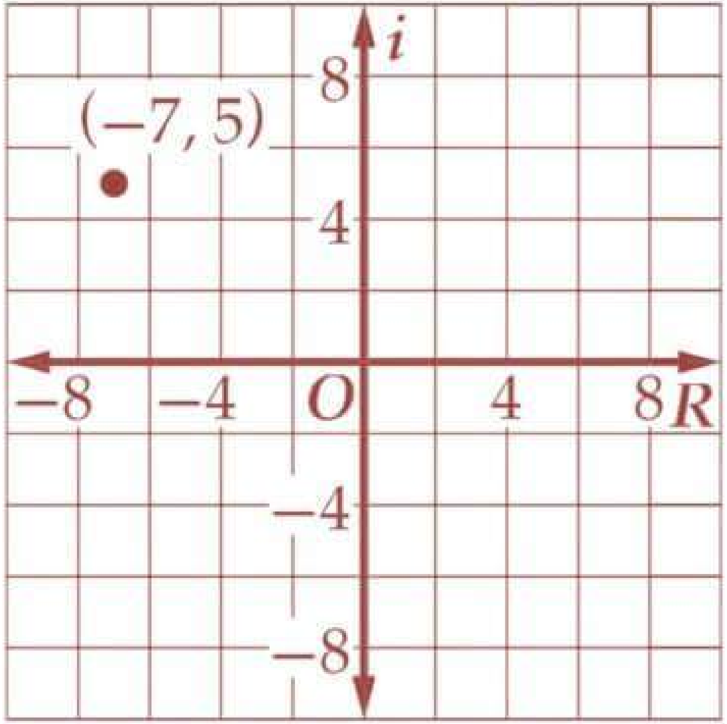
4) $z = 2 - 5i$

≈ 5.39

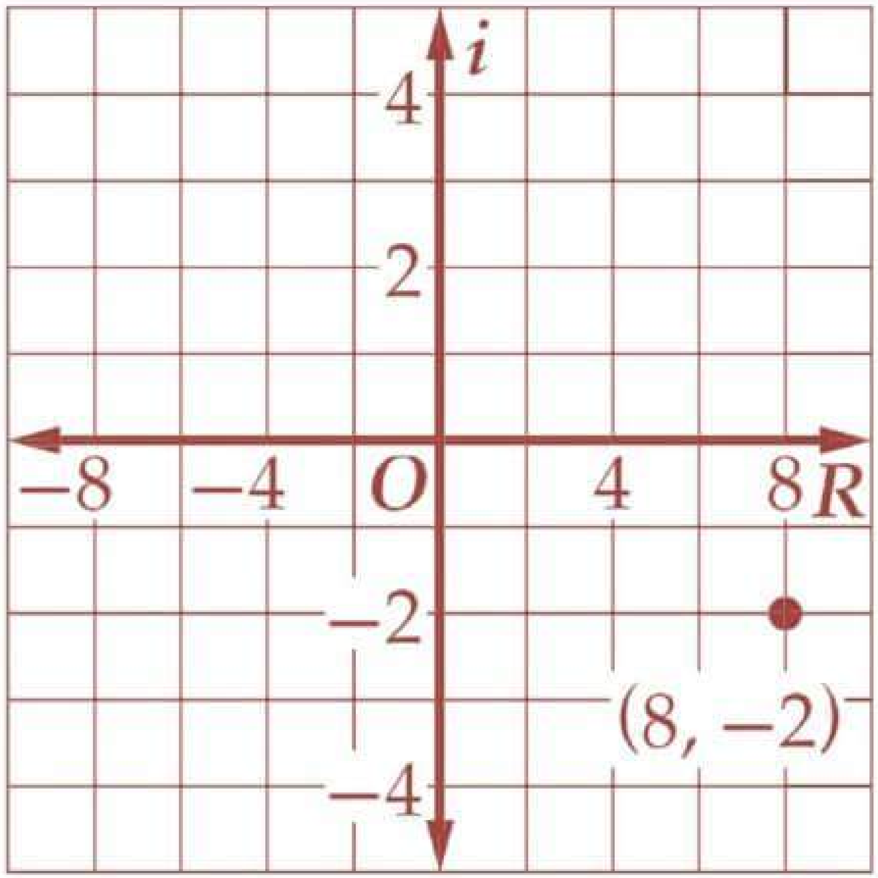


5) $z = -7 + 5i$

≈ 8.60

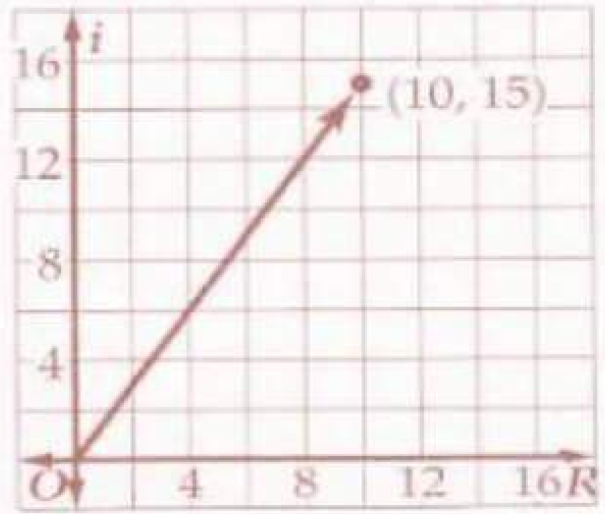


$z = 8 - 2i$ (6 ≈ 8.25



7) **متجهات:** تُعطى القوة المؤثرة على جسم بالعلاقة $z = 10 + 15i$ ، حيث تُقاس كل مركبة للقوة بالنيوتن (N) . (مثال 1)

a) مَثِّل z كمتجه في المستوى المركب.



b) أوجد طول المتجه واتجاهه.

مقياسه $18.03N$ ، اتجاهه محدد بالزاوية $56.31°$

عبِّر عن كل عدد مركب مما يأتي بالصورة القطبية:

8) $4+4i$ $\quad 4\sqrt{2}\left(cos\frac{\pi}{4}+i\ sin\frac{\pi}{4}\right)$

9) $-2+i$ $\quad \sqrt{5}(cos\ 2.68+i\ sin\ 2.68)$

10) $4-\sqrt{2}i$ $\quad 3\sqrt{2}(cos\ -.034+i\ \sin\ -0.34)$

11) $2-2i$ $\quad 2\sqrt{2}\left(\cos\frac{7\pi}{4}+i\ \sin\frac{7\pi}{4}\right)$

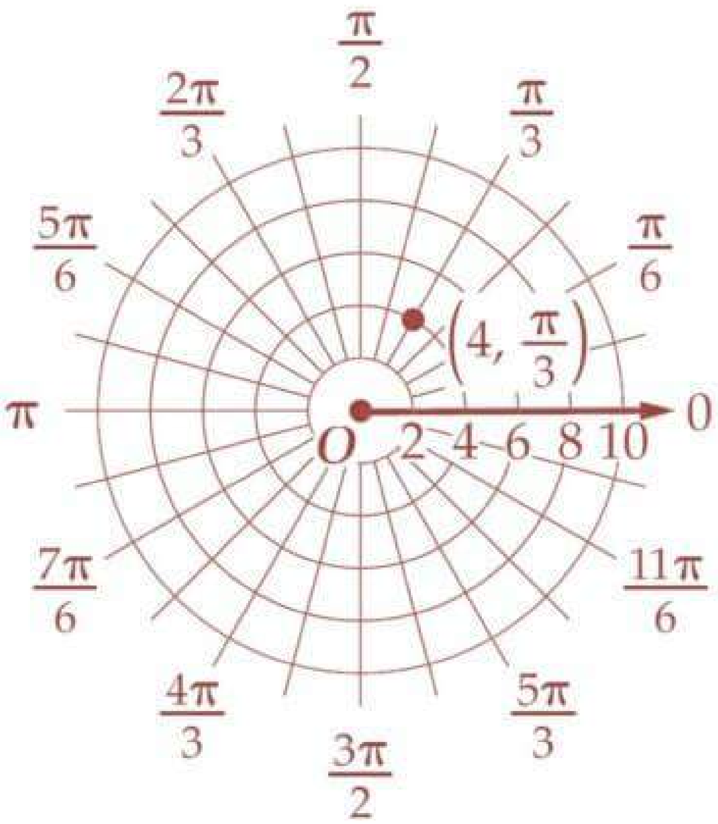
12) $4+5i$ $\quad \sqrt{41}(\cos 0.09+i\sin 0.09)$

13) $-1-\sqrt{3}i$ $\quad 2\left(\cos\frac{4\pi}{3}+i\sin\frac{4\pi}{3}\right)$

مَثِّل كل عدد مركب مما يأتي في المستوى القطبي، ثم عبِّر عنه بالصورة الديكارتية:

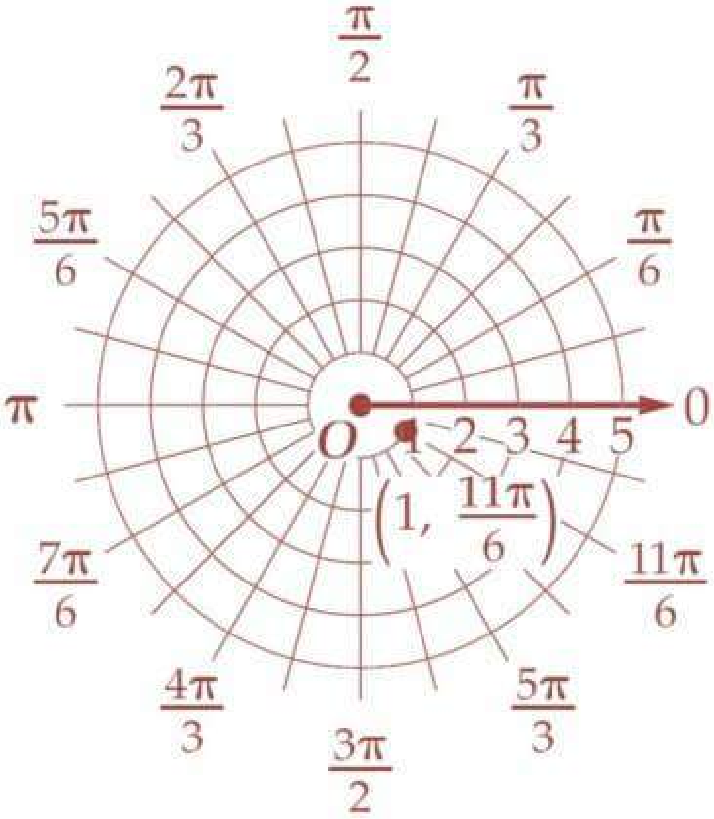
14) $4\left(\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}\right)$

$2+2\sqrt{3}\,i$



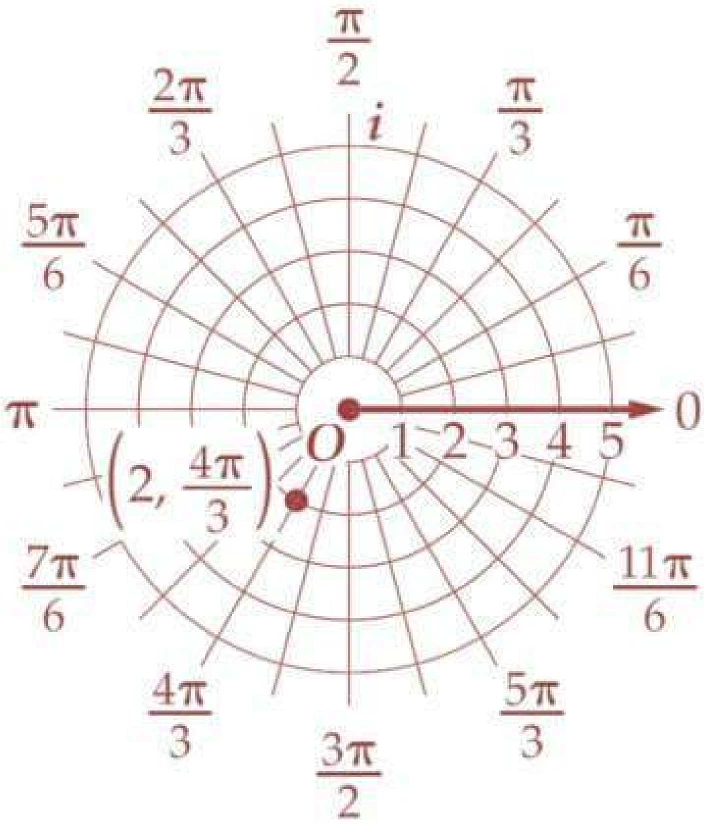
$\left(\cos\frac{11\pi}{6} + i\sin\frac{11\pi}{6}\right)$ (15

$\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i$



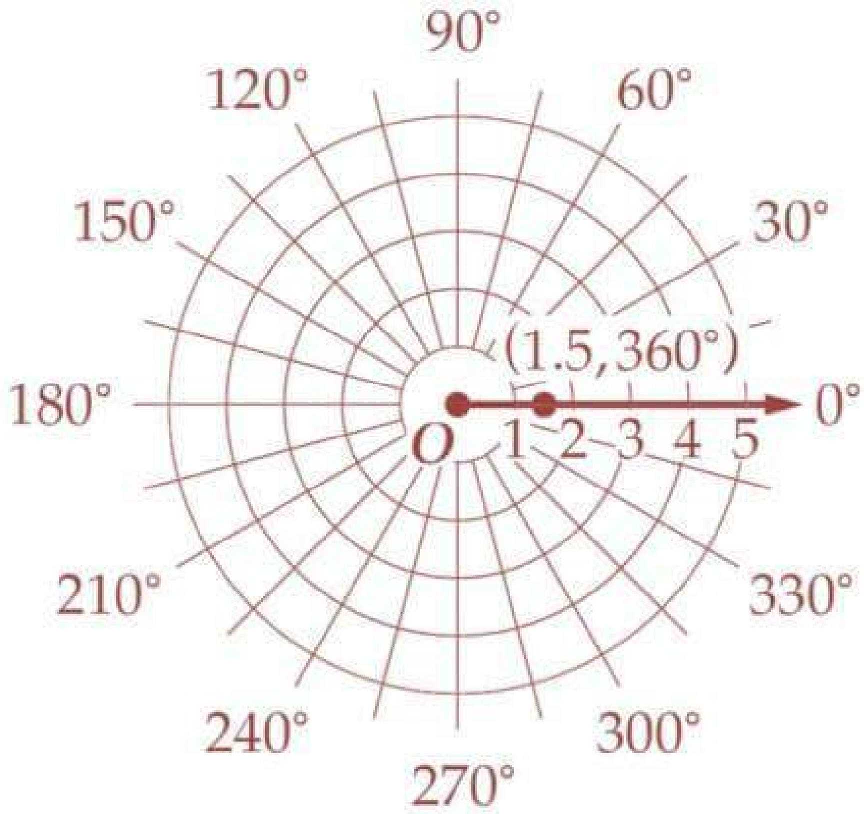
$2\left(\cos\frac{4\pi}{3} + i\sin\frac{4\pi}{3}\right)$ (16

$-1 - \sqrt{3}i$



17) $\frac{3}{2}(\cos 360^\circ + i \sin 360^\circ)$

$\frac{3}{2}$



أوجد الناتج في كلٍّ مما يأتي على الصورة القطبية، ثم عبِّر عنه بالصورة الديكارتية:

18) $6\left(\cos\frac{\pi}{2}+i\sin\frac{\pi}{2}\right)\cdot 4\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right)$

$$24\left(\cos\frac{3\pi}{4}+i\sin\frac{3\pi}{4}\right), -12\sqrt{2}+12\sqrt{2}i$$

$5(\cos 135° + i \sin 135°) \cdot 2(\cos 45° + i \sin 45°)$ **(19**

$10(\cos 180° + i \sin 180°), -10$

$3\left(\cos \frac{3\pi}{4} + i \sin \frac{3\pi}{4}\right) \div \frac{1}{2}(\cos \pi + i \sin \pi)$ **(20**

$6\left[\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) + i \sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right], 3\sqrt{2} - 3\sqrt{2}i$

$2(\cos 90° + i \sin 90°) \cdot 2(\cos 270° + i \sin 270°)$ **(21**

$4(\cos 360° + i \sin 360°), 4$

$$3\left(\cos\frac{\pi}{6}+i\sin\frac{\pi}{6}\right)\div 4\left(\cos\frac{2\pi}{3}+i\sin\frac{2\pi}{3}\right) \quad (22$$

$$\frac{3}{4}\left[\cos\left(-\frac{\pi}{2}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right)\right], -\frac{3}{4}i$$

$$4\left(\cos\frac{9\pi}{4}+i\sin\frac{9\pi}{4}\right)\div 2\left(\cos\frac{3\pi}{2}+i\sin\frac{3\pi}{2}\right) \quad (23$$

$$2\left(\cos\frac{3\pi}{4}+i\sin\frac{3\pi}{4}\right), -\sqrt{2}+\sqrt{2}i$$

$$\frac{1}{2}(\cos 60^\circ + i\sin 60^\circ)\cdot 6(\cos 150^\circ + i\sin 150^\circ) \quad (24$$

$$3(\cos 210^\circ + i\sin 210^\circ), -\frac{3\sqrt{3}}{2}-\frac{3}{2}i$$

$$6\left(\cos\frac{3\pi}{4}+i\sin\frac{3\pi}{4}\right)\div 2\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right) \quad (25$$

$$3\left(\cos\frac{\pi}{2}+i\sin\frac{\pi}{2}\right), 3i$$

$$5(\cos 180^\circ + i\sin 180^\circ)\cdot 2(\cos 135^\circ + i\sin 135^\circ) \quad (26$$

$$10(\cos 315^\circ + i\sin 315^\circ), 5\sqrt{2}-5\sqrt{2}i$$

$$\frac{1}{2}\left(\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}\right)\div 3\left(\cos\frac{\pi}{6}+i\sin\frac{\pi}{6}\right) \quad (27$$

$$\frac{1}{6}\left(\cos\frac{\pi}{6}+i\sin\frac{\pi}{6}\right), \frac{\sqrt{3}}{12}+\frac{1}{12}i$$

أوجد الناتج لكل مما يأتي بالصورة القطبية، ثم عبِّر عنه بالصورة الديكارتية: (مثال 6)

28) $(2+2\sqrt{3}i)^6$

4096

29) $\left[4\left(\cos\frac{\pi}{2}+i\sin\frac{\pi}{2}\right)\right]^4$

256

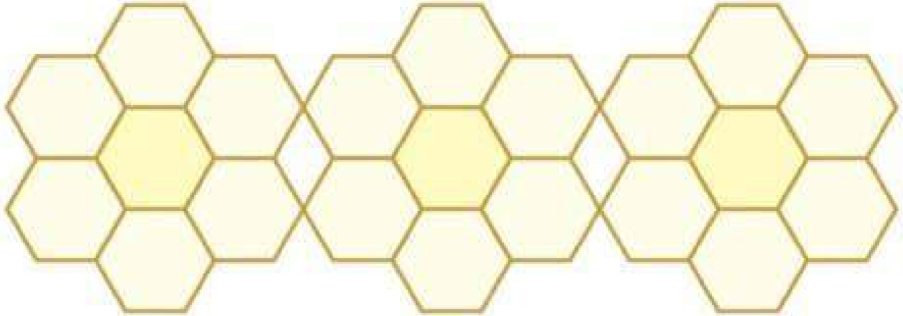
30) $(2+3i)^{-2}$

$-0.03-0.07i$

31) $\left[2\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right)\right]^4$

-16

32) **تصميم:** يعمل سالم في وكالة للإعلانات. ويرغب في تصميم لوحة مكونة من أشكال سداسية منتظمة كما هو مبيّن أدناه. ويستطيع تعيين رؤوس أحد هذه الأشكال السداسية بتمثيل حلول المعادلة $x^6 - 1 = 0$ في المستوى المركب. أوجد رؤوس أحد هذه الأشكال السداسية. (مثال 7)



$$1, \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i, -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i, -1,$$
$$-\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i, \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$$

أوجد جميع الجذور المطلوبة للعدد المركب في كل مما يأتي:

33) الجذور السداسية للعدد i

$$\approx 0.97 + 0.26i, \approx 0.26 + 0.97i, \approx -0.71 + 0.71i,$$
$$\approx -0.97 - 0.26i, \approx -0.26 - 0.97i, \approx 0.71 - 0.71i$$

34) الجذور الرباعية للعدد $4\sqrt{3} - 4i$

$$\approx 0.22 + 1.67i, \approx -1.67 + 0.22i,$$
$$\approx -.22 - 1.67i, \approx 1.67 - 0.22i$$

35) الجذور التربيعية للعدد $-3 - 4i$ $\quad -1 + 2i, 1 - 2i$

36) **كهرباء:** تُعطَى معاوقة أحد أجزاء دائرة كهربائية موصولة على التوالي بالعبارة $5(\cos 0.9 + j \sin 0.9)\Omega$، وتُعطَى في الجزء الآخر من الدائرة بالعبارة $8(\cos 0.4 + j \sin 0.4)\Omega$.

a) حَوِّل كلًّا من العبارتين السابقتين إلى الصورة الديكارتية.

$$3.11+3.92j, 7.37+3.12j$$

b) اجمع الناتجين في الفرع a؛ لإيجاد المعاوقة الكلية في الدائرة.

$$(10.48+7.04j)\Omega$$

c) حَوِّل المعاوقة الكلية إلى الصورة القطبية.

$$\approx 12.63(\cos 0.59 + j \sin 0.59)\Omega$$

37) **كسريات:** الكسريات شكل هندسي يتكون من نمط مكرر بشكل مستمر، وتكون الكسريات ذاتية التشابه؛ أي أن الأجزاء الصغيرة للشكل لها الخصائص الهندسية نفسها للشكل الأصلي، كما في الشكل أدناه.

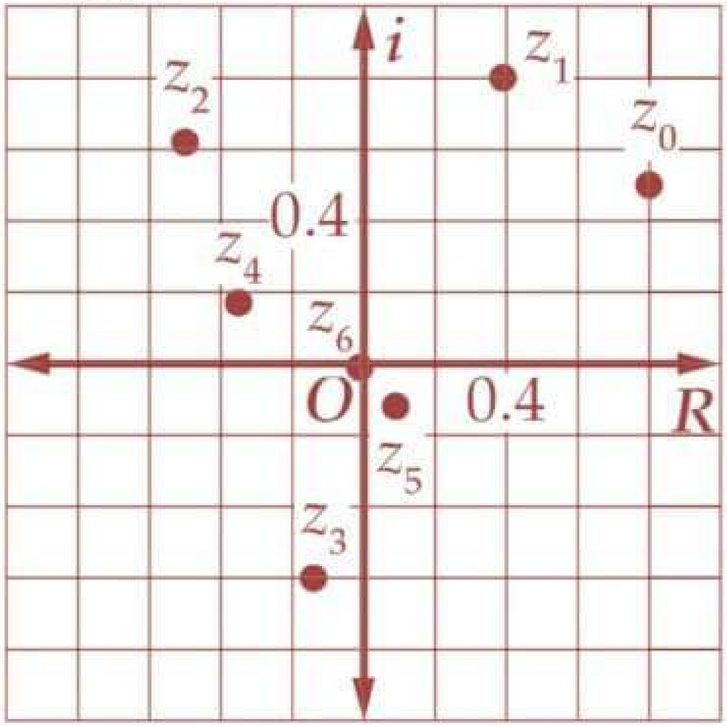
في هذا السؤال سوف تنتج كسريات من خلال تكرار $f(z) = z^2$، حيث $z_0 = 0.8 + 0.5i$.

a) احسب $z_1, z_2, z_3, z_4, z_5, z_6$، حيث $z_1 = f(z_0)$، $z_2 = f(z_1)$، وهكذا.

$z_1 \approx 0.39 + 0.8i, z_2 \approx -0.49 + 0.62i,$ (

$z_3 \approx -0.14 - 0.61i, z_4 \approx -0.35 + 0.17i,$

$z_5 \approx 0.09 - 0.12i, z_6 \approx -0.0063 - 0.0216i$



b) مَثِّل كل عدد في المستوى المركب.

c) صِف النمط الناتج.

إجابة ممكنة: عند تطبيق $f(z) = z^2$ في كل مرة، فإن العدد المركب الناتج يقترب من نقطة الأصل وتقترب قيمته المطلقة من الصفر.

38) أوجد العدد المركب z إذا علمت أن $(-1-i)$ هو أحد جذوره الرباعية، ثم أوجد جذوره الرباعية الأخرى.

إجابة ممكنة: أوجد الصورة القطبية للجذر $(-1-i)$

فستكون $\sqrt{2}\left(\cos\frac{5\pi}{4}+i\sin\frac{5\pi}{4}\right)$،

ثم أوجد $\left[\sqrt{2}\left(\cos\frac{5\pi}{4}+i\sin\frac{5\pi}{4}\right)\right]^4$

تحصل على العدد المركب z ، ثم أوجد جذوره الأخرى، وتكون الإجابة النهائية هي:

$-4; 1+i, -1+i, -1-i, 1-i$

حُلّ كلًّا من المعادلات الآتية باستعمال صيغة الجذور المختلفة:

39) $x^3 = i$

$\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i, -\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i, -i$

40) $x^4 = 81i$

$2.77 + 1.15i, -1.15 + 2.77i,$
$\approx -2.77 - 1.15i, 1.15 - 2.77i$

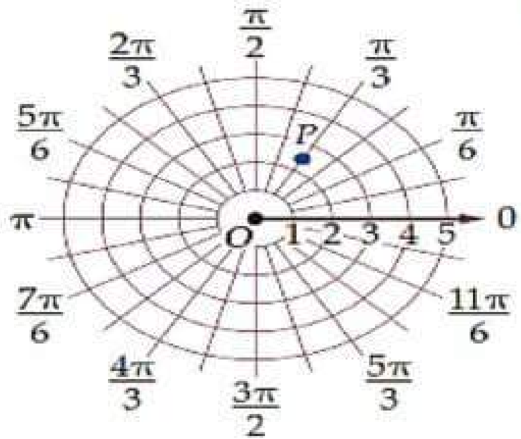
41) $x^3 + 1 = i$

$0.79 + 0.79i, -1.08 + 0.29i,$
$0.29 - 1.08i$

6 الفصل اختبار الفصل

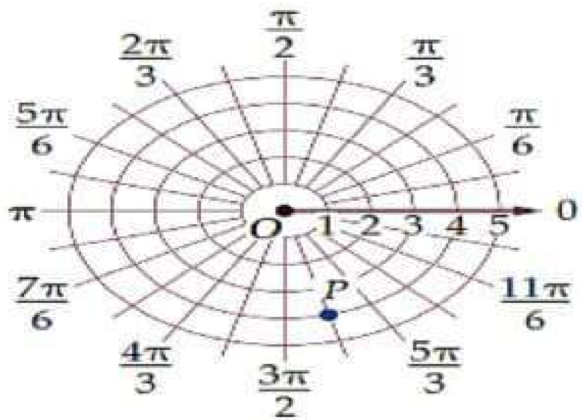
أوجد ثلاثة أزواج مختلفة يمثِّل كل منها إحداثيات قطبية للنقطة P في كل من التمثيلين 1, 2 ، حيث $-2\pi \le \theta \le 2\pi$.

(1



$$\left(2.5, \frac{\pi}{3}\right), \left(2.5, -\frac{5\pi}{3}\right), \left(-2.5, \frac{4\pi}{3}\right)$$

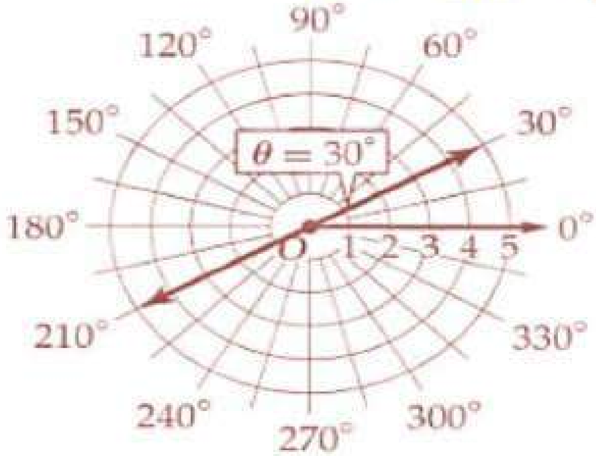
(2



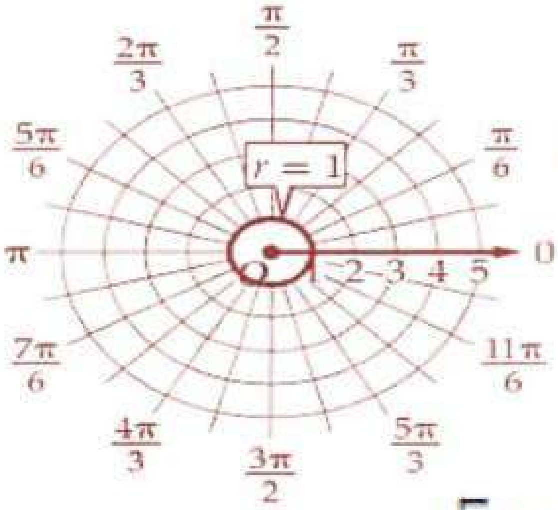
$$\left(4, \frac{19\pi}{12}\right), \left(4, -\frac{5\pi}{12}\right), \left(-4, \frac{7\pi}{12}\right)$$

مَثِّل بيانيًا في المستوى القطبي كلًّا من المعادلات الآتية:

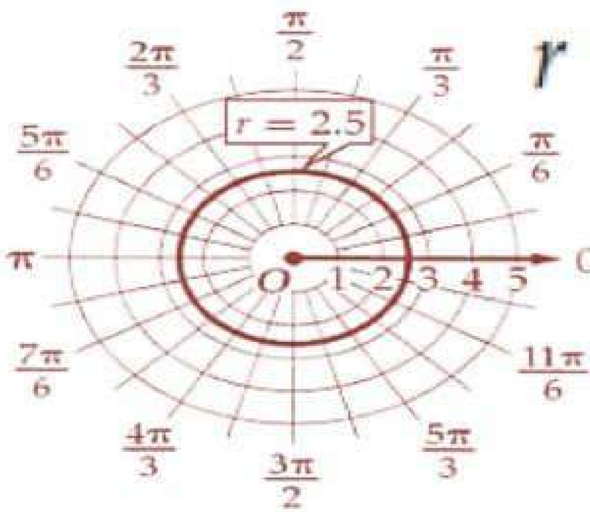
3) $\theta = 30^\circ$



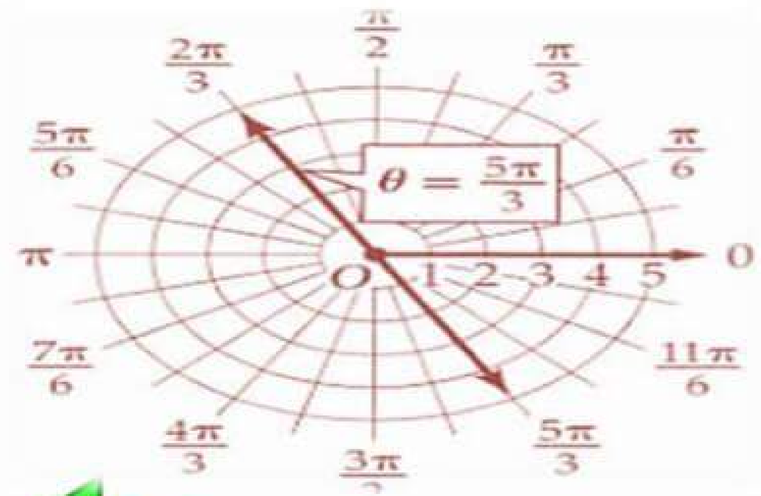
4) $r = 1$



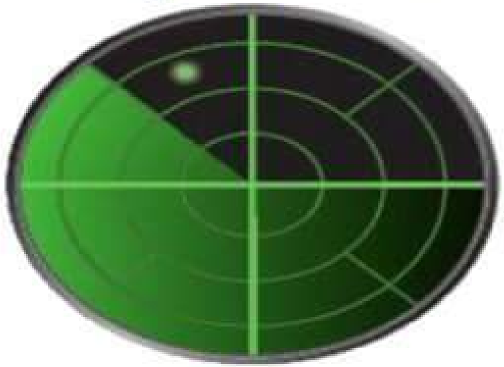
5) $r = 2.5$



6) $\theta = \frac{5\pi}{3}$



7) **رادار:** يقوم مراقب الحركة الجوية بتتبع مسار طائرة موقعها الحالي عند النقطة $(66, 115°)$ ، حيث r بالأميال.



a) عيِّن الإحداثيين الديكارتيين للطائرة. مقرِّبًا الناتج إلى أقرب ميل.

$$(-28, 60)$$

b) إذا وُجدت طائرة عند نقطة إحداثياتها الديكارتية $(50, -75)$، فعيِّن الإحداثيين القطبيين لها مقرِّبًا المسافة إلى أقرب ميل، والزاوية إلى أقرب جزء من عشرة إذا لزم الأمر.

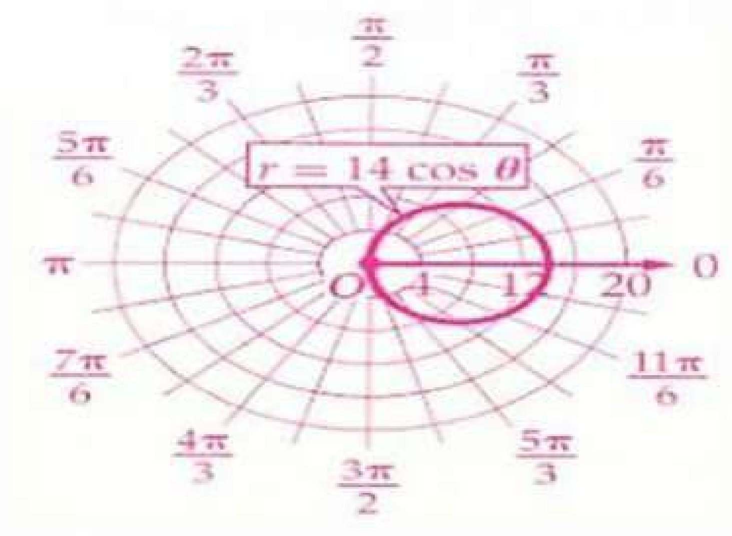
إجابة ممكنة : $(90, 303.7°)$

c) ما المسافة بين الطائرتين؟ قرِّب الناتج إلى أقرب ميل.

$$156mi$$

8) عبِّر عن المعادلة $(x-7)^2 + y^2 = 49$ ، بالصورة القطبية.

دائرة ، $r = 14\cos\theta$

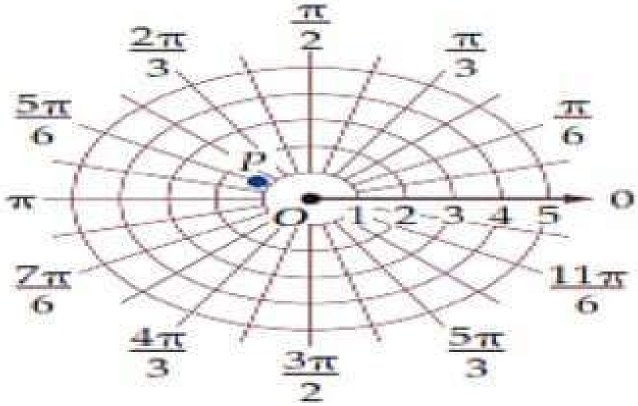


9) **كهرباء:** إذا كان فرق الجهد V في دائرة كهربائية $135V$، وكانت شدة التيار المار بها I هو $(3-4j)$ أمبير، فأوجد معاوقة الدائرة z بالإحداثيات الديكارتية مستعملًا المعادلة $V = I \cdot Z$.

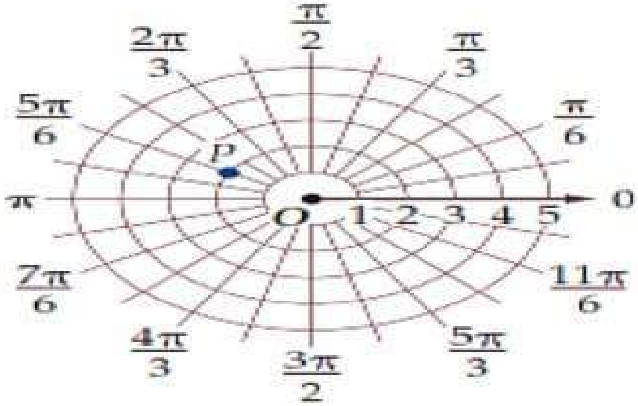
$$(16.2 + 21.6)\pi$$

10) **اختيار من متعدد:** أي مما يأتي يبين تمثيل العدد المركب الذي إحداثياته الديكارتية $(-\sqrt{3}, -1)$ في المستوى القطبي؟

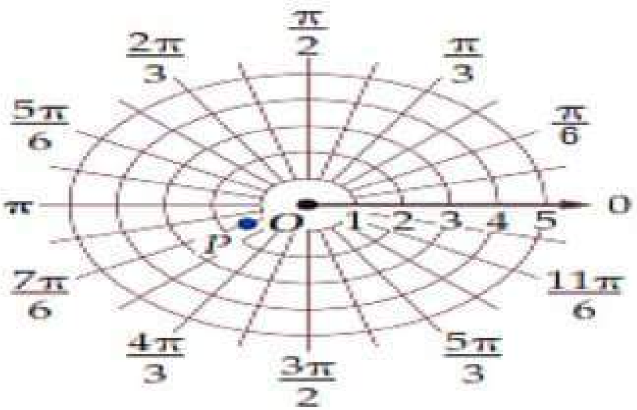
A



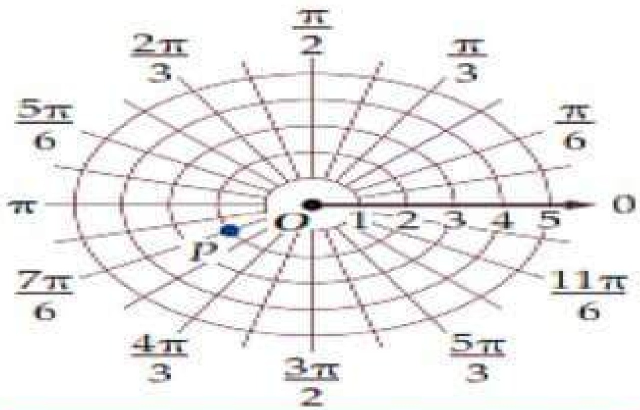
C



B



D



أوجد كل قوة مما يأتي على الصورة الديكارتية، وقرِّب إلى أقرب عدد صحيح إذا لزم الأمر:

11) $(-1+4i)^3$

$$47-52i$$

12) $(6+i)^4$

$$1081+840i$$