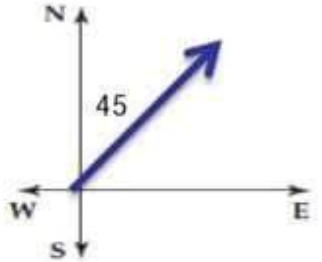
مقدمة في المتجهات

1-1 مقدمة في المتجهات

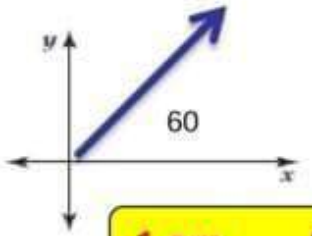
استعمل مسطرة ومنقلة لرسم متجه يمثّل كل كمية مما يأتي، واكتب مقياس الرسم في كل حالة :

1) $\mathbf{r} = 60$ m باتجاه N 45° E



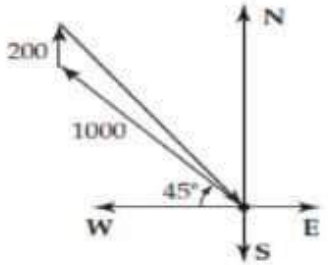
1 cm , 20m

2) 100 باوند = t باتجاه 60° مع الأفقي



1 cm , 25pond

3) **تسوُّق:** سار محمد مسافة 1000 ft من منزله في اتجاه 45° شمال الغرب، ثم سار 200 ft في اتجاه الشمال؛ فوصل إلى مركز التسوُّق. كم أصبح بُعد محمد عن منزله؟ وفي أي اتجاه؟



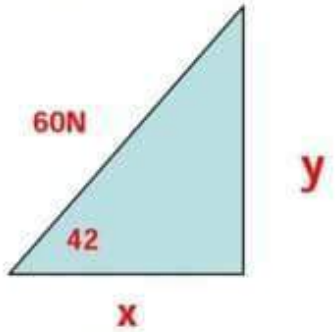
1150 ft بأتجاه 52.1 شمال غرب

الفصل الأول: المتجهات

مقدمة في المتجهات

4) **بناء:** يدفع عبد الله صندوقًا يحتوي على مواد بناء بقوة مقدارها 60 N وبزاوية قياسها 42° مع الأفقي.

a) ارسم شكلًا يُبيّن تحليل القوة التي يؤثّر بها عبد الله في الصندوق إلى مركبتيها المتعامدتين.



b) أوجد مقدار كل من المركبتين الأفقيّة والرأسيّة للقوة.

44.6N, 40.1 N

5) **طيران:** تحلّق طائرة بسرعة 500 mi/h في اتجاه الشمال. إذا هبت الرياح بسرعة 50 mi/h في اتجاه الغرب فأوجد محصلة سرعة الطائرة.

502.49 mi/h

1-2 المتجهات في المستوى الإحداثي

أوجد الصورة الإحداثية، وطول $\overrightarrow{AB}$ المُعطاة نقطتا بدايته ونهايته في كلٍّ مما يأتي:

1) $A(2, 4), B(-1, 3)$ — $\langle -3, -1 \rangle$, $\sqrt{10}$

2) $A(4, -2), B(5, -5)$ — $\langle 1, -3 \rangle$, $\sqrt{10}$

3) $A(-3, -6), B(8, -1)$ — $\langle 11, 5 \rangle$, $\sqrt{146}$

إذا كان $\mathbf{w} = \langle -3, 5 \rangle$, $\mathbf{v} = \langle 2, -1 \rangle$ ، فأوجد كلًّا مما يأتي:

4) $3\mathbf{v}$ — $\langle 6, -3 \rangle$

5) $\mathbf{w} - 2\mathbf{v}$ — $\langle -7, 7 \rangle$

6) $4\mathbf{v} + 3\mathbf{w}$ — $\langle -1, 11 \rangle$

7) $5\mathbf{w} - 3\mathbf{v}$ — $\langle -21, 28 \rangle$

أوجد متجه وحدة $\mathbf{u}$ له اتجاه $\mathbf{v}$ نفسه في كلٍّ مما يأتي:

8) $\mathbf{v} = \langle -3, 6 \rangle$ — $\left\langle -\frac{\sqrt{5}}{5}, \frac{2\sqrt{5}}{5} \right\rangle$

9) $\mathbf{v} = \langle -8, -2 \rangle$ — $\left\langle -\frac{4\sqrt{17}}{17}, -\frac{\sqrt{17}}{17} \right\rangle$

المتجهات فى المستوى الإحداثى

اكتب $\overrightarrow{DE}$ المُعطاة نقطتا بدايته ونهايته بدلالة متجهي الوحدة i , j في كلٍّ مما يأتي:

10) $D(4, -5), E(6, -7)$ — 2i - 2j

11) $D(-4, 3), E(5, -2)$ — 9i - 5j

12) $D(4, 6), E(-5, -2)$ — -9i - 8j

13) $D(2, 1), E(3, 7)$ — i + 6j

أوجد الصورة الإحداثية للمتجه **v** المُعطى طوله وزاوية اتجاهه مع المحور الأفقي في كلٍّ مما يأتي:

14) $|\mathbf{v}| = 12, \theta = 42°$ — ⟨8.9, 8.0⟩

15) $|\mathbf{v}| = 8, \theta = 132°$ — ⟨-5.4, 5.9⟩

16) بستنة: يقوم علي ومحمد بدفع حجر من حديقتهم. إذا كان علي يدفع الحجر بقوة مقدارها 120 N بزاوية تميل °60 عن المحور الأفقي، في حين يدفع محمد الحجر بقوة مقدارها 180 N بزاوية تميل °40 عن المحور الأفقي، فأوجد مقدار محصلة القوى الناتجة عن تأثير قوتي الدفع معًا.

295.6 N

الضرب الداخلي

1-3 الضرب الداخلي

أوجد الضرب الداخلي للمتجهين $\mathbf{u}, \mathbf{v}$ ، ثم تحقق مما إذا كانا متعامدين في كلٍّ مما يأتي :

1) $\mathbf{u} = \langle 3, 6 \rangle, \mathbf{v} = \langle -4, 2 \rangle$ — 0 ,متعامدان

2) $\mathbf{u} = -\mathbf{i} + 4\mathbf{j}, \mathbf{v} = 3\mathbf{i} - 2\mathbf{j}$ — 11-،غير متعامدان،

3) $\mathbf{u} = \langle 2, 0 \rangle, \mathbf{v} = \langle -1, -1 \rangle$ — 2-،غير متعامدان،

أوجد قياس الزاوية θ بين المتجهين $\mathbf{u}, \mathbf{v}$ في كلٍّ مما يأتي، وقرِّب الناتج إلى أقرب جزء من عشرة:

4) $\mathbf{u} = \langle -1, 9 \rangle, \mathbf{v} = \langle 3, 12 \rangle$ — 20.4°

5) $\mathbf{u} = \langle -6, -2 \rangle, \mathbf{v} = \langle 2, 12 \rangle$ — 117.9°

6) $\mathbf{u} = 27\mathbf{i} + 14\mathbf{j}, \mathbf{v} = \mathbf{i} - 7\mathbf{j}$ — 109.3°

7) $\mathbf{u} = 5\mathbf{i} - 4\mathbf{j}, \mathbf{v} = 2\mathbf{i} + \mathbf{j}$ — 65.2°

الضرب الداخلي

أوجد مسقط **u** على **v** ، ثم اكتب **u** في صورة مجموع متجهين متعامدين أحدهما مسقط **u** على **v** في كلٍّ مما يأتي:

8) $\mathbf{u} = \langle 4, 8 \rangle, \mathbf{v} = \langle -1, 2 \rangle$

$\left\langle -\frac{12}{5}, \frac{24}{5} \right\rangle \quad \left\langle -\frac{12}{5}, \frac{24}{5} \right\rangle + \left\langle \frac{32}{5}, \frac{16}{5} \right\rangle$

9) $\mathbf{u} = \langle 62, 21 \rangle, \mathbf{v} = \langle -12, 4 \rangle$

$\left\langle \frac{99}{2}, \frac{-33}{2} \right\rangle \quad \left\langle \frac{99}{2}, \frac{-33}{2} \right\rangle + \left\langle \frac{25}{2}, \frac{75}{2} \right\rangle$

10) $\mathbf{u} = \langle -2, -1 \rangle, \mathbf{v} = \langle -3, 4 \rangle$

$\left\langle -\frac{6}{25}, \frac{8}{25} \right\rangle \quad \left\langle -\frac{6}{25}, \frac{8}{25} \right\rangle + \left\langle -\frac{44}{25}, -\frac{33}{25} \right\rangle$

11) مواصلات: انطلق القطاران A , B من نقطة واحدة. إذا كان $\langle 33, 12 \rangle$ يُمثّل مسار القطار A ، و $\langle 55, 4 \rangle$ يُمثّل مسار القطار B ، فأوجد قياس الزاوية بين المتجهين.

15.8°

12) فيزياء: يدفع شخص عربة بقوة مقدارها 100 N إلى أعلى سطح مائل طوله 6 m ، ويميل بزاوية قياسها 30° عن الأفقي. أوجد مقدار الشغل بالجول الذي يبذله الشخص في الاتجاه الرأسي، وَقرّب الناتج إلى أقرب عدد صحيح. (إرشاد: استعمل نسبة الجيب، والصيغة $W = F.d$ ، حيث W الشغل بالجول، وَ F القوة بالنيوتن، وَ d المسافة بالأمتار).

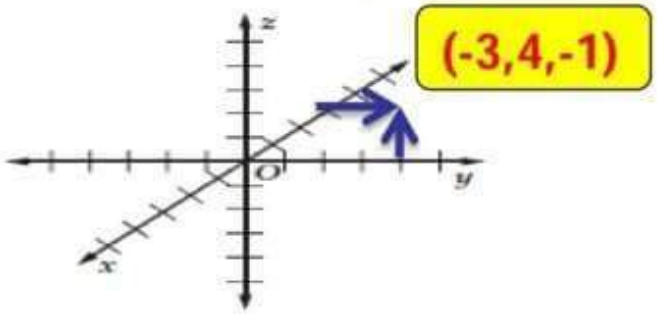
300 جول

المتجهات في الفضاء الثلاثي الأبعاد

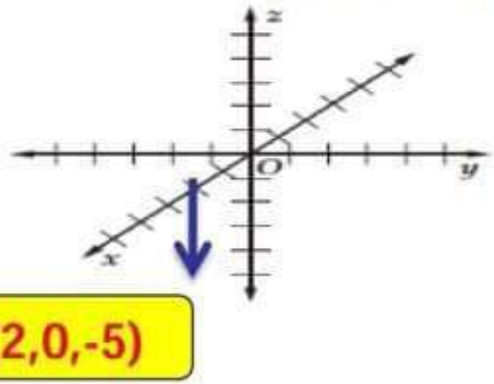
1 - 4 المتجهات في الفضاء الثلاثي الأبعاد

عيّن كل نقطة مما يأتي في نظام الإحداثيات الثلاثي الأبعاد أدناه :

1) $(-3, 4, -1)$

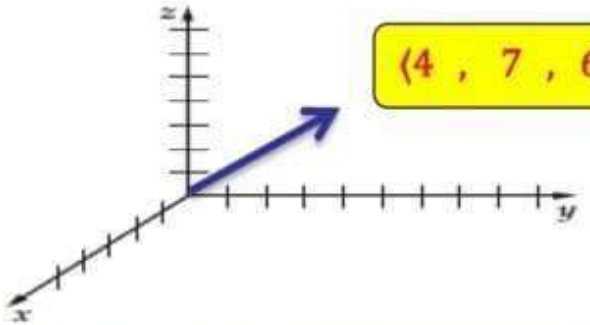


2) $(2, 0, -5)$

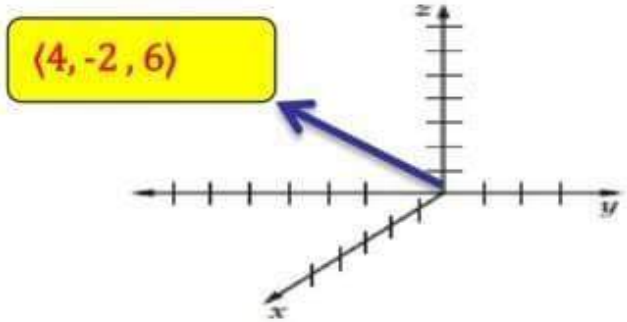


مثّل كلًّا من المتجهات الآتية في نظام الإحداثيات الثلاثي الأبعاد أدناه :

3) $\langle 4, 7, 6 \rangle$



4) $\langle 4, -2, 6 \rangle$



المتجهات في الفضاء الثلاثي الأبعاد

أوجد الصورة الإحداثية، وطول $\overrightarrow{AB}$ المُعطاة نقطتا بدايته ونهايته في كلٍّ مما يأتي، ثم أوجد متجه وحدة في اتجاه $\overrightarrow{AB}$:

5) $A(2, 1, 3), B(-4, 5, 7)$

$\left\langle -\frac{3\sqrt{17}}{17}, \frac{2\sqrt{17}}{17}, \frac{2\sqrt{17}}{17} \right\rangle$

6) $A(4, 0, 6), B(7, 1, -3)$

$\left\langle \frac{3\sqrt{91}}{91}, \frac{\sqrt{91}}{91}, -\frac{9\sqrt{91}}{91} \right\rangle$

7) $A(-4, 5, 8), B(7, 2, -9)$

$\left\langle \frac{11\sqrt{419}}{419}, \frac{3\sqrt{491}}{491}, -\frac{17\sqrt{491}}{491} \right\rangle$

8) $A(6, 8, -5), B(7, -3, 12)$

$\left\langle \frac{\sqrt{411}}{411}, -\frac{11\sqrt{411}}{411}, \frac{17\sqrt{411}}{411} \right\rangle$

أوجد إحداثيي نقطة المنتصف، وطول القطعة المستقيمة المُعطاة نقطتا طرفيها في كلٍّ مما يأتي :

9) $(3, 4, -9), (-4, 7, 1)$

$\sqrt{158}, \left(-\frac{1}{2}, \frac{11}{2}, -4\right)$

10) $(-17, -3, 2), (3, -9, 5)$

$\sqrt{445}, \left(-7, -6, \frac{7}{2}\right)$

أوجد كلًّا مما يأتي للمتجهين $\mathbf{v} = \langle 2, -4, 5 \rangle$, $\mathbf{w} = \langle 6, -8, 9 \rangle$:

11) $\mathbf{v} + \mathbf{w}$

$\langle 8, -12, 14 \rangle$

12) $5\mathbf{v} - 2\mathbf{w}$

$\langle -2, -4, 7 \rangle$

1-5 الضرب الداخلي والضرب الاتجاهي للمتجهات في الفضاء

أوجد الضرب الداخلي للمتجهين في كلٍّ مما يأتي، ثم حدِّد ما إذا كانا متعامدين:

1) $\langle -2, 0, 1\rangle , \langle 3, 2, -3\rangle$ — -9 ،غير متعامدان

2) $\langle -4, -1, 1\rangle , \langle 1, -3, 4\rangle$ — 3، غير متعامدان

3) $\langle 0, 0, 1\rangle , \langle 1, -2, 0\rangle$ — 0 ، غير متعامدان

أوجد قياس الزاوية θ بين المتجهين $\mathbf{u}, \mathbf{v}$ في كلٍّ مما يأتي، وقرّب الناتج إلى أقرب جزء من عشرة:

4) $\mathbf{u} = \langle 1, -2, 1\rangle$, $\mathbf{v} = \langle 0, 3, -2\rangle$ — 194.9° تقريبا

5) $\mathbf{u} = \langle 3, -2, 1\rangle$, $\mathbf{v} = \langle -4, -2, 5\rangle$ — 96.9° تقريبا

6) $\mathbf{u} = \langle 2, -4, 4\rangle$, $\mathbf{v} = \langle -2, -1, 6\rangle$ — 51.3° تقريبا

الضرب الداخلي والضرب الاتجاهي للمتجهات في الفضاء

منصة مدرسية تعليمية

أوجد الضرب الاتجاهي للمتجهين $\mathbf{u}, \mathbf{v}$ في كلٍّ مما يأتي، ثم بيّن أن $\mathbf{u} \times \mathbf{v}$ عمودي على كلٍّ من $\mathbf{u}, \mathbf{v}$:

7) $\mathbf{u} = \langle 1, 3, 4 \rangle , \mathbf{v} = \langle -1, 0, -1 \rangle$

$=\langle -3,-3,3 \rangle, \langle -3,-3,3 \rangle, \langle 1,3,4 \rangle$

$=-3(1)+-3(3)+3(4)=0$

$=\langle -3,-3,3 \rangle, \langle -1, 0,-1 \rangle$

$=-3(-1) - 3(0) + 3(-1) = 0$

8) $\mathbf{u} = \langle 3, 1, -6 \rangle , \mathbf{v} = \langle -2, 4, 3 \rangle$

$=\langle 27, 3,14 \rangle, \langle 27, 3,14 \rangle, \langle 3,1,-6 \rangle$

$=27(3)+-3(1)+14(-6)=0$

$=\langle 27, 3,14 \rangle, \langle -2, 4, 3 \rangle$

$=27(-2) +3(4) + 14(3) = 0$

9) $\mathbf{u} = \langle 3, 1, 2 \rangle , \mathbf{v} = \langle 2, -3, 1 \rangle$

$=\langle 7, 1,-11 \rangle, \langle 7, 1,-11 \rangle, \langle 3,1,2 \rangle$

$=7(3)+-1(1)+-11(2)=0$

$=\langle 7, 1,-11 \rangle, \langle 2, -3, 1 \rangle$

$=-7(-2) + 1(-3) - 11(1) = 0$

10) $\mathbf{u} = \langle 4, -1, 0 \rangle , \mathbf{v} = \langle 5, -3, -1 \rangle$

$=\langle 1,4,-7 \rangle, \langle 1,4,-7 \rangle, \langle 4,-1,0 \rangle$

$=1(4)+-4(-1)+-7(0)=0$

$=\langle 1,4,-7 \rangle, \langle 5, -3,-1 \rangle$

$=1(5) + 4(-3) + -7(-1) = 0$

أوجد مساحة سطح متوازي الأضلاع الذي فيه $\mathbf{u}, \mathbf{v}$ ضلعان متجاوران في كلٍّ مما يأتي:

11) $\mathbf{u} = \langle 9, 4, 2 \rangle, \mathbf{v} = \langle 6, -4, 2 \rangle$

62.4 وحدة مربعة

12) $\mathbf{u} = \langle 2, 0, -8 \rangle, \mathbf{v} = \langle -3, -8, -5 \rangle$

74.2 وحدة مربعة

13) أوجد حجم متوازي السطوح الذي تكون فيه المتجهات $\langle 2, -5, -8 \rangle , \langle -7, -2, 6 \rangle , \langle 9, -2, 3 \rangle$ أحرفًا متجاورة.

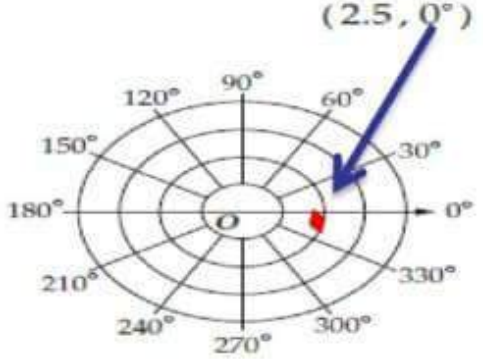
643 وحدة مكعبة

الإحداثيات القطبية

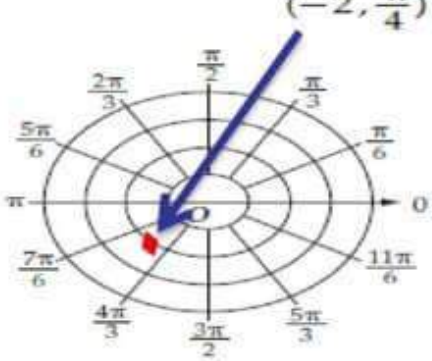
2 - 1 الإحداثيات القطبية

مثّل كل نقطة مما يأتي في المستوى القطبي أدناه:

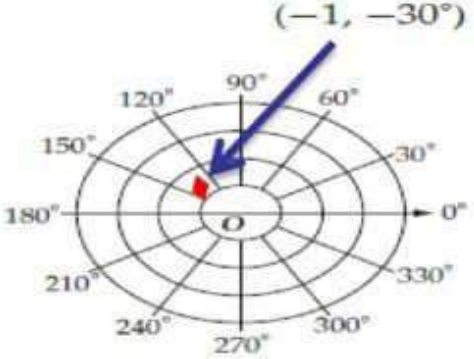
1) $(2.5, 0°)$



2) $(-2, \frac{\pi}{4})$

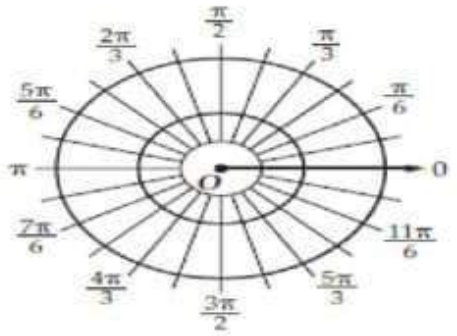


3) $(-1, -30°)$

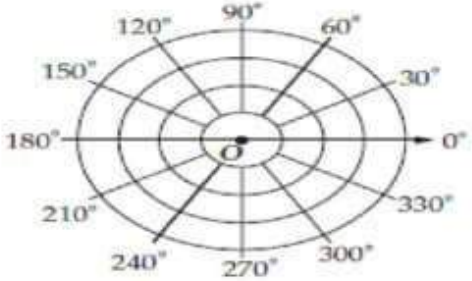


مثّل كل معادلة قطبية مما يأتي بيانيًا في المستوى القطبي أدناه:

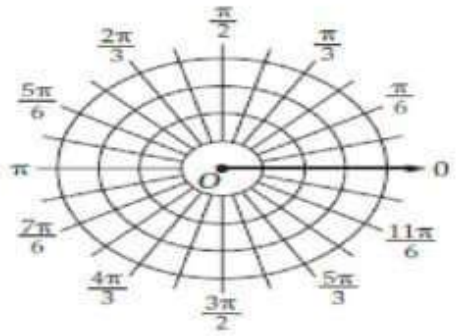
4) $r = 3$



5) $\theta = 60°$



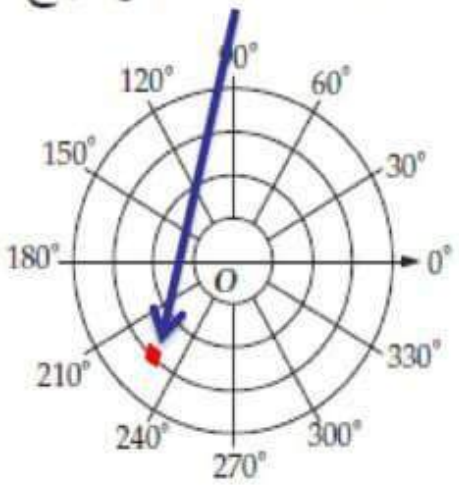
6) $r = 4$



الإحداثيات القطبية

7) **منظر طبيعي:** صمَّم أحد المعماريين حديقة في مبنى جديد.

a) إذا وضع المصمِّم نخلة عند النقطة $(3, -135°)$، فمثِّل موقع النخلة في المستوى القطبي أدناه.



b) إذا أراد المصمم وضع مقعد عند $(4, 85°-)$ ، وإنشاء بركة عند $(1, 105°)$ فأوجد المسافة بين المقعد والبركة.

4.95 وحدات

2-2 الصورة القطبية والصورة الديكارتية للمعادلات

حوّل الإحداثيات القطبية إلى إحداثيات ديكارتية، لكل نقطة مما يأتي:

1) $(6, 120^\circ)$ $(-3 \ , \ 3\sqrt{3})$ 2) $(-4, 45^\circ)$ $(-2\sqrt{2} \ , \ -2\sqrt{2})$ 3) $(4, \frac{\pi}{6})$ $(2\sqrt{3} \ , \ 2)$

أوجد زوجين مختلفين كل منهما يمثل إحداثيين قطبيين لكل نقطة معطاة بالإحداثيات الديكارتية، بحيث $0 \leq \theta < 2\pi$ ، في كلٍّ مما يأتي:

4) $(2, 2)$ $\left(2\sqrt{2} \ , \ \frac{\pi}{4}\right), \left(-2\sqrt{2}, 5\frac{\pi}{4}\right)$

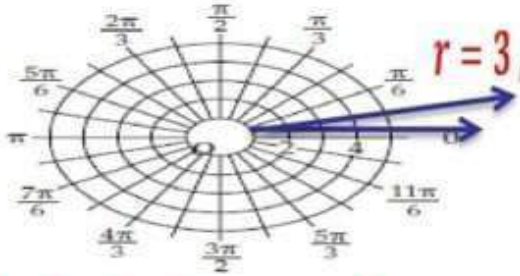
5) $(2, -3)$ $(3.61 \ , \ 5.30), (-3.61 \ , 2.16)$

6) $(-3, \sqrt{3})$ $\left(2\sqrt{3} \ , \ \frac{5\pi}{6}\right), \left(-2\sqrt{3}, \frac{11\pi}{6}\right)$

الصورة القطبية والصورة الديكارتية للمعادلات

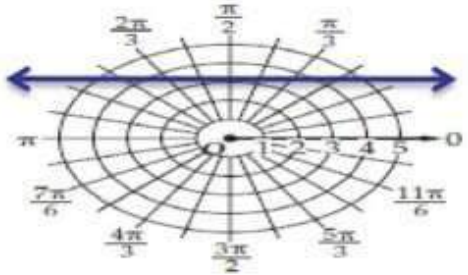
حدّد شكل التمثيل البياني لكل من المعادلتين الديكارتيتين الآتيتين، ثم اكتب كلًّا منهما على الصورة القطبية:

7) $x^2 + y^2 = 9$



$r = \pm 3$ دائرة مركزها $(0,0)$ ونصف قطرها 3

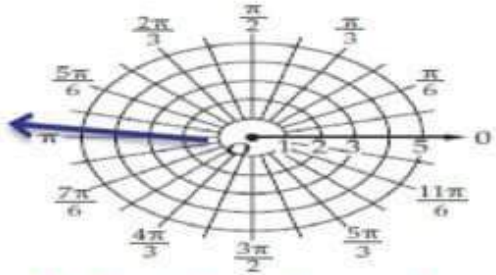
8) $y = 3$



$r = 3 \sec\theta$ أفقي مستقيم $r = 3 \sec\theta$

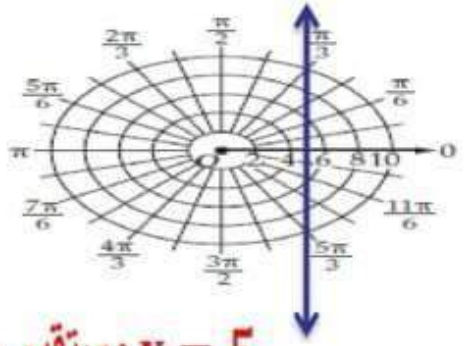
اكتب كلًّا من المعادلتين القطبيتين الآتيتين على الصورة الديكارتية، وحدّد نوع التمثيل البياني لكلٍّ منهما:

9) $r = 4$



$x^2 + y^2 = 16$ دائرة نصف قطرها 4 مركزها $(0,0)$

10) $r\cos\theta = 5$



$x = 5$ مستقيم رأسي يمر بالنقطة $(5,0)$

11) **مساحة:** وجد مسّاح حدًّا لأرض عند نقطة إحداثياها القطبيين $(40, 62°)$. ما الإحداثيات الديكارتية لهذه النقطة؟

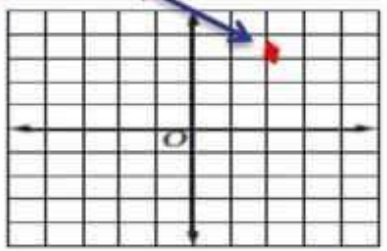
$(18.78 \ , 35.32)$

الأعداد المركبة ونظرية ديموافر

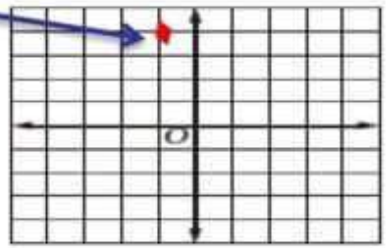
2-3 الأعداد المركبة ونظرية ديموافر

مثّل كلًّا من العددين المركبين الآتيين في المستوى المركب، وأوجد قيمته المطلقة (قرب إلى أقرب جزء من مئة):

1) $2+3i$ $(2\ ,3)$



2) $-1+4i$ $(-1\ ,4)$



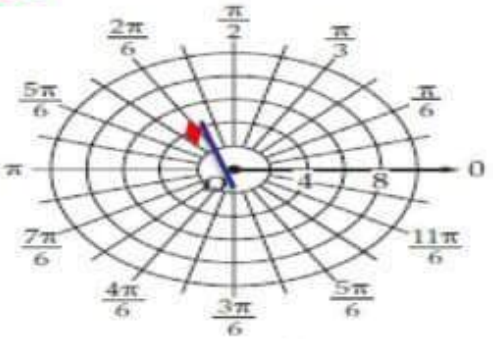
اكتب كلًّا من العددين المركبين الآتيين على الصورة القطبية:

3) $2+2\sqrt{3}\,i$ $4(\cos\frac{\pi}{3}\ ,i\sin\frac{\pi}{3})$

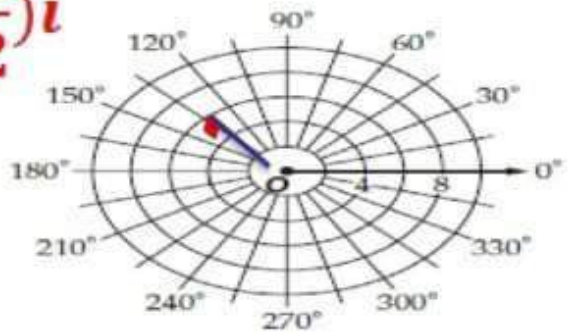
4) $3\sqrt{3}-3i$ $6(\cos\frac{11\pi}{6}\ ,i\sin\frac{11\pi}{6})$

مثّل كلًّا من العددين المركبين الآتيين في المستوى القطبي، ثم عبّر عنه بالصورة الديكارتية:

5) $4\left(\cos\frac{3\pi}{4}+i\sin\frac{3\pi}{4}\right)$ $-2\sqrt{2}+2\sqrt{2}i$



6) $5\ (\cos 150^\circ + i\sin 150^\circ)$ $-\frac{5\sqrt{3}}{2}+(\frac{5}{2})i$



الأعداد المركبة ونظرية ديموافر

أوجد الناتج لكلٍّ مما يأتي، ثم عبّر عنه بالصورة الديكارتية:

7) $2\left(\cos\frac{\pi}{6}+i\sin\frac{\pi}{6}\right)\cdot 5\left(\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}\right)$ $10i, 10\left(\cos\frac{\pi}{2}, i\sin\frac{\pi}{2}\right)$

8) $8(\cos 240^\circ + i\sin 240^\circ) \div 4(\cos 210^\circ + i\sin 210^\circ)$ $\sqrt{3}+i, 2(\cos 30^\circ, i\sin 30^\circ)$

أوجد الناتج لكلٍّ مما يأتي، ثم عبّر عنه بالصورة الديكارتية:

9) $(-\sqrt{3}+i)^5$ $16\sqrt{3}+16i$

10) $(1+i)^{10}$ $32i$

أوجد جميع الجذور المطلوبة للعددين المركبين الآتيين:

11) الجذور الرباعية للعدد $-8+8\sqrt{3}\,i$ $\sqrt{3}+i, -1+\sqrt{3}\,i, -\sqrt{3}-i, 1-\sqrt{3}\,i$

12) الجذور السباعية للعدد i $\pm 0.97+0.22i, \pm 0.43+0.90i, \pm 0.78-0.62i$

13) **كهرباء:** أوجد شدة التيار المار في دائرة كهربائية فرق جهدها 12v، ومعاوقتها Ω $(4\mathbf{j}-2)$ مستعملاً الصيغة $E=I\cdot Z$، حيث E فرق الجهد بالفولت، و I التيار بالأمبير، و Z المعاوقة بالأوم (قرب إلى أقرب جزء من عشرة).

(إرشاد: يستعمل مهندسو الكهرباء الرمز $\mathbf{j}$ للدلالة على العدد التخيلي i؛ لذا فهم يكتبون العدد المركب على الصورة $a+b\mathbf{j}$. عبِّر عن كلّ عدد على الصورة القطبية وعوضها في الصيغة المعطاة، ثم اكتب مقدار شدّة التيار على الصورة الديكارتية). $(1.2+2.4i)$ امبير

3 - 1 الدراسات التجريبية والمسحية وبالملاحظة

حدد ما إذا كان كل من الموقفين الآتيين يمثل دراسة تجريبية أو دراسة بالملاحظة، وإذا كانت دراسة تجريبية؛ فحدد المجموعة التجريبية والمجموعة الضابطة، ثم بيّن ما إذا كانت منحازة أم لا:

1) اختر 300 طالب نصفهم ممن يلعبون الشطرنج، وقارن بين درجاتهم.

دراسة بالملاحظة

2) اختر 1000 شخص ووزّعهم عشوائيًا في مجموعتين، أعطِ إحدى المجموعتين فيتامينًا، ولا تُعْطِ للأخرى شيئًا.

دراسة تجريبية:والمجموعة التجريبية هم الذين تناولوا الفيتامين والمجموعة الضابطة هى المجموعة التى لم تتناول الفيتامين والدراسة غير متحيزة

حدّد ما إذا كانت كل حالة من الحالتين الآتيتين تتطلب دراسة مسحية أم دراسة بالملاحظة أم دراسة تجريبية، وفسّر إجابتك.

3) تريد مقارنة صحّة الطلاب الذين يذهبون إلى المدرسة سيرًا على الأقدام والذين يأتون بالحافلات المدرسية.

دراسة بالملاحظة :- مقارنة السجلات الطبية للطلاب من النوعين

4) تريد معرفة ما إذا كان الطلاب الذين يأكلون حلوى قبل الاختبار مباشرة يحصلون على درجات أعلى من أولئك الذين لا يأكلون الحلوى.

دراسة تجريبية :- المجموعة التجريبية هى مجموعة الطلاب الذين يأكلون الحلوى

الدراسات التجريبية والمسحية وبالملاحظة

بيّن ما إذا كانت العبارات الآتية تُظهر ارتباطًا أم سببية، وفسّر إجابتك:

5) إذا مارستُ رياضة الركض يوميًّا، فسأكمل السباق في ثلاث ساعات.

ارتباط:- يوجد عوامل اخرى تؤثر فى وقت إكمال السباق

6) عندما لا تكون السماء غائمة، فلن تمطر.

سببية:- الامطار تهطل من الغيوم

7) دلت الدراسات على أن تناول الفيتامينات المركّبة يحافظ على صحة الجسم.

ارتباط:- يوجد عوامل اخرى تؤثر فى صحة الانسان

8) إذا درست لمدة ثلاث ساعات، سأحصل على درجة 100% في اختبار التاريخ.

ارتباط:- يوجد عوامل اخرى تؤثر فى وقت الاداء اثناء الاختبارات

منصة مدرسية تعليمية

3-2 التحليل الإحصائي

أيّ مقاييس النزعة المركزية يناسب البيانات الآتية بشكل أفضل؟ ولماذا؟

1) {12.1, 14.9, 6.7, 10, 12.8, 14, 18}

الوسط ، لا يوجد قيم متطرفة او بيانات متكررة

2) {77.9, 101, 78.9, 105, 4.2, 110, 87.9}

الوسيط: توجد قيم متطلرفة هى4.2

3) {10, 14.7, 14.7, 21, 7.4, 14.7, 8, 14.7}

المنوال: يوجد قيم متكررة

4) {29, 36, 14, 99, 16, 15, 12, 30}

الوسيط: توجد قيم متطلرفة هى99

التحليل الإحصائي

5) **سيارات:** في دراسة مسحية شملت 56 شخصًا اختيروا عشوائيًا في إحدى المدن وُجِد أن 14% منهم يقودون سيارات بيضاء اللون. ما هامش خطأ المعاينة؟ وما الفترة الممكنة التي تتضمن نسبة المجتمع الكلي الذين يقودون سيارات بيضاء؟

هامش خطأ العينة = +,-0.1336 والفترة الممكنة تقع بين 0.64%,27.36%

6) **شواطئ البحر:** في دراسة مسحية شملت 812 شخصًا اختيروا عشوائيًا وُجِد أن 57% ذهبوا إلى شاطئ البحر أربع مرات على الأقل خلال العام الماضي. ما هامش خطأ المعاينة؟ وما الفترة الممكنة التي تحتوي على نسبة المجتمع الكلي الذين ذهبوا إلى شاطئ البحر أربع مرات على الأقل خلال العام الماضي؟

هامش خطأ العينة = +,-0.0351 والفترة الممكنة تقع بين 53.49%,60.51%

7) أوجد الانحراف المعياري للبيانات في كل من a, b وقرّبه إلى أقرب جزء من مئة.

(a

عدد مرات فوز كل لاعب في فريق تنس الطاولة في الموسم الماضي					
8	4	17	9	2	10
5	19	15	10	9	9

الانحراف المعيارى = 44.8

(b

الدرجات التي حصل عليها 18 طالبًا اختيروا عشوائيًا من طلاب الصف الثالث الثانوي					
9	10	5	4	10	7
3	4	4	6	5	11
9	3	5	8	7	12

عينة الانحراف المعيارى=2.86

3-3 الاحتمال المشروط

أُلقي مكعبان مرقمان متمايزان مرة واحدة. أوجد احتمال كل ممّا يأتي:

1) ظهور العدد 5 على وجهي المكعبين علمًا بأن العدد نفسه ظهر عليهما. $\frac{1}{6}$

2) ظهور العدد 4 على وجهي المكعبين علمًا بأن العددين الظاهرين، كل منهما يزيد على 3. $\frac{1}{9}$

3) عدم ظهور العدد 2 على أي من الوجهين علمًا بأن العددين الظاهرين زوجيان. $\frac{4}{9}$

4) **كيمياء:** يختبر كل من أحمد ووليد درجة الحموضة (PH) لِـ32 مركّبًا في إحدى تجارب الكيمياء، وقد قسموا العمل بينهما كما في الجدول المجاور. إذا اختير مركب عشوائيًّا، فأوجد كل احتمال فيما يأتي:

نتائج	وليد	أحمد
حامضي	12	8
قاعدي	9	3

a) أن يكون المركب حامضيًّا علمًا بأن وليد هو الذي اختبره. $\frac{4}{7}$

b) أن يختبر أحمد المركب علمًا بأن النتيجة "قاعدي". $\frac{1}{4}$

الاحتمال المشروط

5) **انتخابات:** تنافس المرشحان (A) ، (B) على رئاسة اللجنة الإجتماعية ضمن منطقة تشتمل على أربع مجمعات سكنية (المجمع 1، والمجمع 2، والمجمع 3، والمجمع 4). والجدول أدناه يمثل الأصوات التي حصل عليها المرشّحانِ.

	المجمع 1	المجمع 2	المجمع 3	المجمع 4
المرشح (A)	61	54	40	30
المرشح (B)	65	50	40	45

إذا اختير شخص عشوائيًا، فأوجد احتمال كل مما يأتي:

a) أن يكون الشخص قد انتخب المرشح A علمًا بأنه من المجمع 4. $\frac{2}{5}$

b) أن يكون الشخص قد انتخب المرشح B علمًا بأنه من المجمع 3. $\frac{1}{2}$

6) **كرة سلة:** أحرز أحد لاعبي كرة السلة 194 هدفًا خلال العام الحالي، بينما كان رصيده من الأهداف في الأعوام السابقة 2162 هدفًا. إذا علمت أن الجدول أدناه يُمثّل الأهداف التي سجَّلها خلال العام الحالي والأعوام السابقة، واختير هدف عشوائيًا، فأوجد احتمال كل مما يأتي:

	هدف بنقطة	هدف بنقطتين	هدف بثلاث نقاط	مجموع الأهداف
العام الحالي	150	39	5	194
الأعوام السابقة	1721	386	55	2162

a) الهدف بنقطة واحدة علمًا بأن الهدف قد سجل خلال العام الحالي. $\frac{75}{97}$

b) الهدف بنقطتين علمًا بأن الهدف قد سجل في الأعوام السابقة. $\frac{193}{1081}$

3-4 الاحتمال والتوزيعات الاحتمالية

1) **بالونات:** يحتوي كيس على بالونة خضراء، و 4 بالونات حمراء، و 5 بالونات صفراء. إذا سُحِبت منه بالونتان عشوائيًا، فأوجد كلًّا ممّا يأتي:

a) P(البالونتان حمراوان) $\frac{2}{15}$ b) P(بالونة حمراء والأخرى صفراء) $\frac{1}{9}$ c) P(بالونة صفراء والأخرى خضراء) $\frac{1}{9}$

d) P(البالونتان خضراوان) 0 e) P(بالونتان حمراوان وبالونة صفراء) 0 f) P(بالونة حمراء والأخرى خضراء) $\frac{1}{45}$

2) **نقود:** يحتوي صندوق على 3 أوراق نقدية من فئة الريال، و 8 أوراق من فئة 5 ريالات، و4 أوراق من فئة 10 ريالات، و 10 أوراق من فئة 20 ريالًا. إذا سُحبت ورقتان بصورة عشوائية، فأوجد كلًّا ممّا يأتي:

a) P(الورقتان من فئة الريال) $\frac{1}{100}$

b) P(الورقتان من فئة 10 ريالات) $\frac{1}{50}$

c) P(ورقة من فئة 5 ريالات، وأخرى من فئة 10 ريالات) $\frac{8}{75}$

d) P(ورقتان من فئة 10 ريالات، وأخرى من فئة 20 ريالًا) 0

3) **ورق الجدران:** زار جاسم معرض ورق الجدران؛ ليشتري ورقًا لمنزله الجديد. ووجد لدى المعرض 28 كتابًا يحتوون على عينات ورق الجدران، منها 10 كتب لعيّنات تخطيط ورسم، و 18 كتابًا لعيّنات مناظر طبيعية. إذا سمح المعرض لجاسم أن يصطحب معه 4 كتب إلى البيت لينتقي منها، فاختار 4 كتب عشوائيًا، فما احتمال أن تكون الكتب جميعها من كتب التخطيط والرسم؟ $\frac{2}{195}$

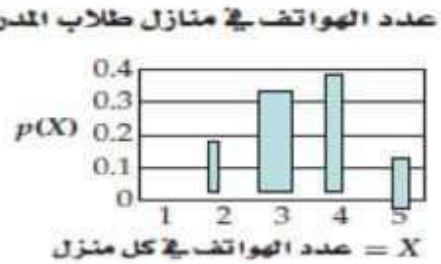
4) **اتصالات:** استعمل الجدول أدناه الذي يُبيّن التوزيع الاحتمالي لعدد الهواتف النقالة في منزل كل طالب من طلاب مدرسة.

X عدد الهواتف النقالة	1	2	3	4	5
الاحتمال	0.01	0.16	0.34	0.39	0.10

a) بيّن أن هذه البيانات تمثّل توزيعًا احتماليًا. $0.01+0.16+0.34+0.39+0.10=1$

b) إذا اختير أحد الطلاب عشوائيًا، فما احتمال أن يكون في منزله أكثر من 3 هواتف؟ 0.49

c) مثّل البيانات بالأعمدة.



التوزيع الطبيعي

3-5 التوزيع الطبيعي

حدد ما إذا كانت البيانات الآتية تظهر التواءً موجبًا أم التواءً سالبًا أم موزَّعة طبيعيًّا:

1)

زمن البقاء في المتحف بالدقيقة	
الزمن بالدقيقة	التكرار
0–25	27
26–50	46
51–75	89
76–100	57
101–125	24

توزيع طبيعي تقريبا

2)

أعمار موظفي إحدى الشركات الخاصة	
العمر بالسنوات	العدد
31–35	3
36–40	8
41–45	15
46–50	32
51–55	40
56–60	38
61–65	4

التواء سالب

3) **دراسة:** يوضّح الجدول المجاور عدد ساعات الدراسة في الأسبوع لـ 100 طالب في مدرسة ثانوية.

عدد ساعات الدراسة	الطلاب
0–8	30
9–17	45
18–26	20
27–35	5

a) ما النسبة المئوية للطلاب الذين تتراوح عدد ساعات دراستهم بين 9–17 ساعة؟ **45%**

b) هل تُظهر البيانات التواءً موجبًا، أم التواءً سالبًا، أم موزَّعة طبيعيًّا؟ وضِّح إجابتك. **التواء موجب ، ترتفع القيم من الجهة اليسرى**

التوزيع الطبيعي

4) **اختبارات:** وزّعت درجات اختبار طُبّق على بعض المستخدمين، توزيعًا طبيعيًّا بمتوسط 100 وانحراف معياري 15.

a) ما النسبة التقريبية للدرجات التي تقع بين 70، 130؟ **95%**

b) ما النسبة التقريبية للدرجات التي تقع بين 85، 130؟ **81.5%**

c) ما النسبة التقريبية للدرجات التي تزيد على 115؟ **16%**

d) ما النسبة التقريبية للدرجات التي تقل عن 85 أو تزيد على 115؟ **32%**

e) إذا تقدّم للاختبار 80 مستخدمًا، فكم تتوقّع عدد الذين يحصلون على درجات تزيد على 130؟ **2**

5) **درجات حرارة:** إذا كان المتوسط لدرجات حرارة ماء البحر في أحد الأشهر $27.5^{\circ}c$، والانحراف المعياري $2.0^{\circ}c$. وكنت تُفضّل ألاّ تقل درجة حرارة الماء عن $25.5^{\circ}c$ كي تسبح في البحر، فما نسبة الأيام التي تكون فيها درجات الحرارة مناسبة لك للسباحة؟ **84%**

التوزيعات ذات الحدين

3 - 6 التوزيعات ذات الحدين

1) **قطع نقود:** إذا أُلقيت قطعة نقد 6 مرات متتالية. أوجد كلًّا مما يأتي:

a) P(ظهور الكتابة 3 مرات بالضبط)

b) P(ظهور الكتابة 5 مرات بالضبط)

c) P(عدم ظهور الكتابة)

d) P(ظهور الكتابة 4 مرات على الأقل)

2) **ضربات حرة:** احتمال أن يحرز لاعب كرة قدم هدفًا من ضربة حرة $\frac{2}{3}$. إذا ضرب 5 ضربات حرة، فأوجد كلًّا ممّا يأتي:

a) P(عدم إحراز أي هدف)

b) P(إحراز أهداف من جميع الضربات)

c) P(إحراز هدفين بالضبط)

d) P(إحراز هدفين على الأكثر)

4-1 تقدير النهايات بيانيًّا

قدِّر كل نهاية مما يأتي إذا كانت موجودة:

1) $\lim_{x\to 0^+}(4-\sqrt{x})$ 4

2) $\lim_{x\to 3^+}\frac{3-x}{|x-3|}$ -1

3) $\lim_{x\to 4}\frac{x^2-16}{x-4}$ 8

4) $\lim_{x\to -1^-}\frac{x+7}{x^2+8x+7}$ $-\infty$

5) $\lim_{x\to -1^+}\frac{x+7}{x^2+8x+7}$ ∞

6) $\lim_{x\to 0}\frac{x^2+1}{x^2}$ ∞

تقدير النهايات بيانيا

قدِّر كل نهاية مما يأتي إذا كانت موجودة:

7) $\lim_{x\to-\infty} \frac{-4x^2}{x^2+1}$ **-4**

8) $\lim_{x\to\infty} \frac{3x-2}{x-1}$ **3**

9) $\lim_{x\to 0} \frac{\sin 2x}{x}$ **2**

10) $\lim_{x\to\infty} (2.7)^{3x+2}$ **∞**

11) **مُعَدل التغيّر:** يرتكز سلم طوله 20 ft على جدار. سُحِبت قاعدة السلم بعيدًا عن الجدار بمُعدّل 3 ft/sec. فبدأ الطرف العلوي للسلم في بالهبوط بمُعدّل $r(x) = \frac{3x}{\sqrt{400-x^2}}$ قدمًا لكل ثانية، حيث x المسافة بين قاعدة السلم والجدار. قدّر $\lim_{x\to 20^-} r(x)$ باستعمال التمثيل البياني. **∞**

12) **تلوُّث:** يمكن تقدير تكلفة تنظيف بقعة ملوثة بمخلفات كيميائية بالدالة $C(x) = \frac{312x}{100-x}$، حيث C التكلفة بالريال، و x كمية المخلفات الكيميائية بالجرامات، $0 \le x < 100$. أوجد $\lim_{x\to 100^-} C(x)$. **∞**

4 - 2 حساب النهايات جبريًا

احسب كل نهاية مما يأتي إذا كانت موجودة:

1) $\lim_{x\to 3}(x^2+3x-8)$ **10**

2) $\lim_{x\to -6}\frac{x^2-36}{x+6}$ **-12**

3) $\lim_{x\to 0}\frac{(3+x)^2-9}{x}$ **6**

4) $\lim_{x\to 4}\sqrt{x^2-2x+1}$ **3**

5) $\lim_{x\to 1}\frac{x^2-x}{2x^2+5x-7}$ $\frac{1}{9}$

6) $\lim_{x\to 3^+}\frac{x^2}{2+\sqrt{x-3}}$ $\frac{9}{2}$

7) $\lim_{x\to \infty}(2-6x+5x^3)$ ∞

8) $\lim_{x\to -\infty}\frac{x^5-8x^2}{4x^5+3x}$ $\frac{1}{4}$

حساب النهايات جبريا

احسب كل نهاية مما يأتي إذا كانت موجودة:

9) $\lim_{x\to\infty} \frac{2x^3-4x+1}{5x^4-2x^2}$

10

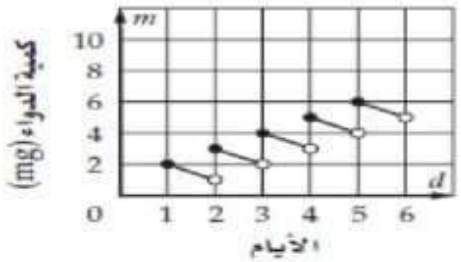
10) $\lim_{x\to-\infty} (6x^7-x^2)$

$-\infty$

11) **كتب:** تمثل الدالة $v(t)=\frac{300}{6+35(0.2)^t}$ سعر كتاب بالريال بعد t سنة من نشره. كم يكون الثمن النهائي للكتاب؟ أيْ أوجد $\lim_{t\to\infty} v(t)$.

50ريالا

12) **دواء:** يتناول عامر 2mg من الدواء يوميًّا، ويبيّن الشكل المجاور كمية الدواء $m(d)$ المتبقية في دمه بعد d يومًا. أوجد $\lim_{d\to3^-} m(d)$ ، $\lim_{d\to3^+} m(d)$.



4mg , 2 mg

4-3 المماسّ والسرعة المتجهة

أوجد ميل مماسّ منحنى كل دالةٍ مما يأتي عند النقطة المعطاة :

1) $y = x^2 - x, (3, 6)$

5

2) $y = \frac{5}{x}, (-1, -5)$

-5

أوجد معادلة ميل منحنى كل دالةٍ مما يأتي عند أي نقطة عليه:

3) $y = -2x + 1$

m=-2

4) $y = x^3 - 2x^2$

$m = 3x^2 - 4x$

تمثّل $h(t)$ في كلٍّ مما يأتي، بُعد جسم متحرك بالأقدام بعد t ثانية. أوجد السرعة المتجهة اللحظية لهذا الجسم عند الزمن المعطى :

5) $h(t) = 300 - 16t^2, t = 2$

r(2)=-64 ft/sec

6) $h(t) = -16t^2 + 200t + 700, t = 3$

r(3)=104 ft/sec

المماس والسرعة المتجهة

تمثل $h(t)$ في كل مما يأتي مسار جسم متحرك. أوجد معادلة السرعة المتجهة اللحظية $v(t)$ للجسم عند أي زمن :

7) $h(t) = 17t^2 + 8$ r(t)=34 t

8) $h(t) = 5t^3 - 6t^2 + 4t + 1$

$$r(t) = 15t^2 - 12t + 4$$

9) $h(t) = \sqrt{t} - 2t^2$

$$r(t) = \frac{\sqrt{t}}{2t} - 4t$$

10) $h(t) = \frac{3}{t} + 2t$

$$r(t) = \frac{-3}{t^2} + 2$$

11) **مظلّيّ:** يمكن تمثيل ارتفاع مظلّيّ عن سطح الأرض بالأقدام بعد t ثانية بالدالة $h(t) = 18000 - 16t^2$. أوجد سرعة المظلي المتجهة اللحظية $v(t)$. p(t)=-32 t

12) **كرة قدم:** ركل علي كرةً بسرعة ابتدائية مقدارها 58 ft/sec. وتمثل الدالة $h(t) = -16t^2 + 58t + 6$ ارتفاع الكرة بالأقدام بعد t ثانية.

a) أوجد سرعة الكرة المتجهة اللحظية $v(t)$. v(t)=-32 t +58

b) ما سرعة الكرة المتجهة بعد 1.5 sec ؟

10 ft/s

4-4 المشتقّات

أوجد مشتقة كلِّ دالة مما يأتي باستعمال النهايات، ثم احسب قيمة المشتقة عند النقاط المعطاة :

1) $g(x) = 3x^2 - 5x, x = -2, 1$

6x-5 , -17 , 1

2) $h(x) = 4x^3 - x^2, x = 3, 0$

$12x^2 - 2x$, 102 , 0

3) $f(x) = x^2 - 4x + 7, x = 2, -3$

2x-4 , 0 , -10

4) $m(x) = -2x^2 - 6x + 1, x = 0, -3$

-4x-6 , -6 , 6

5) $q(x) = -1 + x^3 - 2x^4, x = -1, 3$

$3x^2 - 8x^3$, 11 , −189

6) $t(x) = 3x^7 - 1, x = -1, 1$

$21x^6$, 21 , 21

المشتقات

أوجد مشتقة كل دالة مما يأتي:

7) $f(x) = (x^2 + 5x)^2$

$$4x^3 + 30\,x^2 + 50x$$

8) $f(x) = x^2\,(x^3 + 3x^2)$

$$5x^4 + 12\,x^3$$

9) $f(x) = \sqrt[5]{x^6}$

$$\frac{6}{5}\sqrt[5]{x}$$

10) $h(x) = -\frac{3}{x^6}$

$$\frac{18}{x^7}$$

11) $p(x) = -4x^5 + 6x^3 - 5x^2$

$$-20x^4 + 18\,x^2 - 10x$$

12) $n(x) = (3x^2 - 2x)(x^3 + x^2)$

$$15x^4 + 4\,x^3 - 6x^2$$

13) $r(x) = \frac{3x - 1}{x^2 + 2}$

$$\frac{-3x^2 + 2\,x + 6}{(x^2 + 2)^2}$$

14) $q(x) = \sqrt{x}\,(x^2 - 3)$

$$\frac{5}{2}x^{\frac{3}{2}} - \frac{3}{2}\,x^{-\frac{1}{2}}$$

15) **فيزياء:** تسارع جسم متحرك هو مُعدّل تغيّر سرعته. تمثل الدالة $v(t) = 3t^2 - 6t + 5$ سرعة جسم متحرك بالمتر لكل ثانية. أوجد تسارع الجسم بالمتر لكل ثانية تربيع بعد 5 sec (إرشاد: التسارع هو مشتقة السرعة).

$$24 \quad m/s2$$

4-5 المساحة تحت المنحنى والتكامل

قرّب مساحة المنطقة المحصورة بين منحنى $f(x)$ والمحور x ، على الفترة المعطاة في كلٍّ مما يأتي باستعما
الطرف المعطى لمستطيلات عرض كل منها وحدة واحدة :

1) $f(x) = x + 3$

$[1, 5]$

الطرف الأيسر

22 وحدة مربعة

2) $f(x) = -x^2 + 6x - 4$

$[2, 5]$

الطرف الأيمن

10 وحدة مربعة

3) $f(x) = 3x^3$

$[0, 4]$

الطرف الأيسر

108 وحدة مربعة

4) $f(x) = 1 + x^2$

$[1, 6]$

الطرف الأيمن

95 وحدة مربعة

المساحة تحت المنحنى والتكامل

استعمل النهايات؛ لتقريب مساحة المنطقة المحصورة بين منحنى الدالة والمحور x ، والمعطى بالتكامل المحدد في كلٍّ مما يأتي:

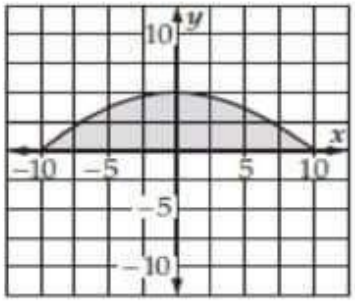
5) $\int_0^2 x^2\,dx$ **$\frac{8}{3}$ وحدة مربعة**

6) $\int_1^6 6x^2\,dx$ **430 وحدة مربعة**

7) $\int_1^3 (x^2 - x)\,dx$ **$\frac{14}{3}$ وحدة مربعة**

8) $\int_{-2}^1 (-x^2 - 2x + 11)\,dx$ **33 وحدة مربعة**

9) **تصميم وعمارة:** يصمم مهندس نافذة زجاجية يمكن نمذجتها بِـ $y = 5 - 0.05\,x^2$ ، والممثلة بيانيًّا في الشكل المجاور. ما مساحة سطح النافذة؟



66.67 وحدة مربعة تقريبا

4-6 النظرية الأساسية في التفاضل والتكامل

أوجد جميع الدوال الأصلية لكل دالة مما يأتي :

1) $f(x) = 4x^3$

$$f(x) = x^4 + c$$

2) $f(x) = 2x + 3$

$$f(x) = x^2 - 3x + c$$

3) $f(x) = x(x^2 - 3)$

$$f(x) = \frac{1}{4}x^4 - \frac{3}{2}x^2 + c$$

4) $f(x) = 8x^2 + 2x - 3$

$$f(x) = \frac{8}{3}x^3 + x^2 - 3x + c$$

احسب كل تكامل مما يأتي :

5) $\int 8dx$

$$8x + c$$

6) $\int (2x^3 + 6x)dx$

$$= \frac{1}{2}x^4 + 3x^2 + c$$

النظرية الاساسية فى التفاضل والتكامل

احسب كل تكامل مما يأتي :

7) $\int (-6x^5 - 2x^2 + 5x)\,dx$

$= x^6 - \frac{2}{3}x^3 + \frac{5}{2}x^2 + c$

8) $\int_2^5 2x\,dx$ **21**

9) $\int_{-5}^{-1} (-4x^3 - 3x^2)\,dx$ **500**

10) $\int_{-2}^{1} (1 - x)(x + 3)\,dx$ **9**

11) **فيزياء:** الشُّغل اللازم بوحدة الجول لضغط نابض مسافة ℓ قدم من وضعه الطبيعي يُعطى بالصيغة $W = \int_0^{\ell} 2x\,dx$. ما مقدار الشُّغل اللازم لضغط النابض مسافة 6 in من وضعه الطبيعي؟ **0.25j**

12) **أعمال التجارة:** افرض أن عدد الساعات التي يحتاج إليها نجار لصناعة p قطعة أثاث مُعطى بالتكامل $h = \int_0^{p} (30 - 3x)\,dx$ ، فكم ساعة يحتاج هذا النجار لصناعة 6 قطع أثاث؟

126 h