المملكة العربية السعودية

وزارة التعليم
Ministry of Education

قررت وزارة التعليم تدريس
هذا الكتاب وطبعه على نفقتها

رياضيات ٣

التعليم الثانوي
(نظام المقررات)

(مسار العلوم الطبيعية)

قام بالتأليف والمراجعة
فريق من المتخصصين

طبعة ١٤٣٩ ـ ١٤٤٠هـ
٢٠١٨ ـ ٢٠١٩م

يُوزع مجّانا ولا يُباع

ⓒ وزارة التعليم ، ١٤٣٨هـ

فهرسة مكتبة الملك فهد الوطنية أثناء النشر
وزارة التعليم
الرياضيات ٣ (كتاب الطالب) التعليم الثانوي نظام المقررات (مسار العلوم الطبيعية). وزارة التعليم.– الرياض ، ١٤٣٨هـ
٢٣٦ ص ؛ ٢٧,٥ x ٢١سم
ردمك : ٤ – ٤٧٣ – ٥٠٨ – ٦٠٣ – ٩٧٨

١– الرياضيات – مناهج – السعودية ٢– التعليم الثانوي – مناهج – السعودية أ. العنوان
ديوي ٣٧٥٠,٥١ ١٤٣٨/٤٥٧٥

رقم الإيداع : ١٤٣٨/٤٥٧٥
ردمك : ٤ - ٤٧٣ - ٥٠٨ - ٦٠٣ - ٩٧٨

حول الغلاف

ندرس في الفصل الرابع من هذا الكتاب تمثيل دوال الجذور التربيعية وحلها.
وتُعدّ حركة البندول مثالاً على دالة جذرية.

مواد إثرائية وداعمة على "منصة عين"

IEN.EDU.SA

تواصل بمقترحاتك لتطوير الكتاب المدرسي

FB.T4EDU.COM

بِسْمِ اللَّهِ الرَّحْمَٰنِ الرَّحِيمِ

المقدمة

تعد مادة الرياضيات من المواد الدراسية الأساسية التي تهيِّئ للطالب فرص اكتساب مستويات عُليا من الكفايات التعليمية، ممَّا يتيح له تنمية قدرته على التفكير وحل المشكلات، ويساعده على التعامل مع مواقف الحياة وتلبية متطلباتها.

ومن منطلق الاهتمام الذي توليه حكومة خادم الحرمين الشريفين بتنمية الموارد البشرية، وعيًا بأهمية دورها في تحقيق التنمية الشاملة، كان توجه وزارة التعليم نحو تطوير المناهج الدراسية وفي مقدمتها مناهج الرياضيات، بدءًا من المرحلة الابتدائية، سعيًا للارتقاء بمخرجات التعليم لدى الطلاب، والوصول بهم إلى مصاف أقرانهم في الدول المتقدمة.

وتتميز هذه الكتب بأنها تتناول المادة بأساليب حديثة، تتوافر فيها عناصر الجذب والتشويق، التي تجعل الطالب يقبل على تعلمها ويتفاعل معها، من خلال ما تقدمه من تدريبات وأنشطة متنوعة، كما تؤكد هذه الكتب على جوانب مهمة في تعليم الرياضيات وتعلمها، تتمثل فيما يأتي:

- الترابط الوثيق بين محتوى الرياضيات وبين المواقف والمشكلات الحياتية.
- تنوع طرائق عرض المحتوى بصورة جذابة مشوقة.
- إبراز دور المتعلم في عمليات التعليم والتعلم.
- الاهتمام بالمهارات الرياضية، والتي تعمل على ترابط المحتوى الرياضي وتجعل منه كلًّا متكاملًا، ومن بينها: مهارات التواصل الرياضي، ومهارات الحس الرياضي، ومهارات جمع البيانات وتنظيمها وتفسيرها، ومهارات التفكير العليا.
- الاهتمام بتنفيذ خطوات أسلوب حل المشكلات، وتوظيف استراتيجياته المختلفة في كيفية التفكير في المشكلات الرياضية والحياتية وحلها.
- الاهتمام بتوظيف التقنية في المواقف الرياضية المختلفة.
- الاهتمام بتوظيف أساليب متنوعة في تقويم الطلاب بما يتناسب مع الفروق الفردية بينهم.

ولمواكبة التطورات العالمية في هذا المجال، فإن المناهج سوف توفر للمعلم مجموعة متكاملة من المواد التعليمية المتنوعة التي تراعي الفروق الفردية بين الطلاب، بالإضافة إلى البرمجيات والمواقع التعليمية، التي توفر للطالب فرصة توظيف التقنيات الحديثة والتواصل المبني على الممَّارسة، ممَّا يؤكد دوره في عملية التعليم والتعلم.

ونحن إذ نقدّم هذه الكتب لأعزائنا الطلبة، لنأمل أن تستحوذ على اهتمامهم، وتلبي متطلباتهم وتجعل تعلمهم لهذه المادة أكثر متعة وفائدة.

والله ولي التوفيق.

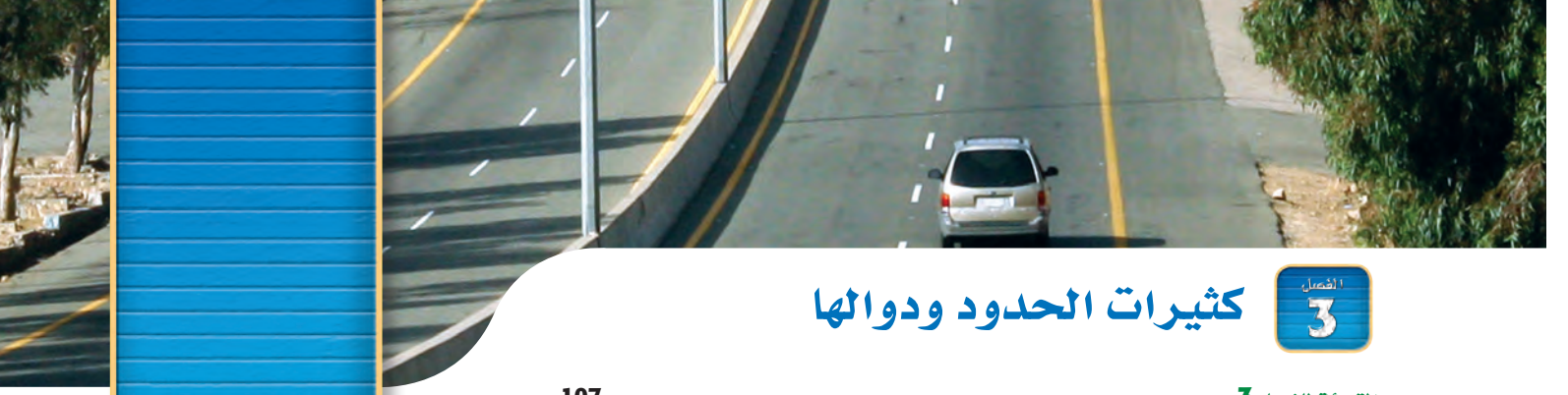
الفهرس

الفصل 1 الدوال والمتباينات

التهيئة للفصل 1 11
1-1 خصائص الأعداد الحقيقية 12
1-2 العلاقات والدوال 18
توسع 1-2 معمل الجبر: الدوال المنفصلة والدوال المتصلة 24
1-3 دوال خاصة 25
اختبار منتصف الفصل 31
1-4 تمثيل المتباينات الخطية ومتباينات القيمة المطلقة بيانيًا 32
1-5 حل أنظمة المتباينات الخطية بيانيًا 37
توسع 1-5 معمل الحاسبة البيانية: أنظمة المتباينات الخطية 43
1-6 البرمجة الخطية والحل الأمثل 44
دليل الدراسة والمراجعة 50
اختبار الفصل 55
الإعداد للاختبارات المعيارية 56
اختبار تراكمي 58

الفصل 2 المصفوفات

التهيئة للفصل 2 61
2-1 مقدمة في المصفوفات 62
توسع 2-1 معمل الجداول الإلكترونية: تنظيم البيانات 68
2-2 العمليات على المصفوفات 69
2-3 ضرب المصفوفات 75
اختبار منتصف الفصل 82
2-4 المحدّدات وقاعدة كرامر 83
2-5 النظير الضربي للمصفوفة وأنظمة المعادلات الخطية 91
توسع 2-5 معمل الحاسبة البيانية: المصفوفات الموسعة 97
دليل الدراسة والمراجعة 98
اختبار الفصل 101
الإعداد للاختبارات المعيارية 102
اختبار تراكمي 104



الفهرس

الفصل 3 كثيرات الحدود ودوالها

التهيئة للفصل 3 107
3-1 الأعداد المركبة 108
3-2 القانون العام والمميز 115
توسع 3-2 معمل الجبر: مجموع الجذرين وحاصل ضربهما 123
3-3 العمليات على كثيرات الحدود 125
3-4 قسمة كثيرات الحدود 131
اختبار منتصف الفصل 137
3-5 دوال كثيرات الحدود 138
3-6 حل معادلات كثيرات الحدود 145
توسع 3-6 معمل الحاسبة البيانية: حل متباينات كثيرات الحدود 153
3-7 نظريتا الباقي والعوامل 154
3-8 الجذور والأصفار 160
دليل الدراسة والمراجعة 167
اختبار الفصل 171
الإعداد للاختبارات المعيارية 172
اختبار تراكمي 174

الفصل 4 العلاقات والدوال العكسية والجذرية

التهيئة للفصل 4 177
4-1 العمليات على الدوال 178
4-2 العلاقات والدوال العكسية 185
توسع 4-2 معمل الحاسبة البيانية: الدالة العكسية 190
4-3 دوال ومتباينات الجذر التربيعي 191
4-4 الجذر النوني 196
توسع 4-4 معمل الحاسبة البيانية: تمثيل دالة الجذر النوني بيانيًا 201
اختبار منتصف الفصل 202
4-5 العمليات على العبارات الجذرية 203
4-6 الأسس النسبية 209
4-7 حل المعادلات والمتباينات الجذرية 215
توسع 4-7 معمل الحاسبة البيانية: حل المعادلات والمتباينات الجذرية 221
دليل الدراسة والمراجعة 223
اختبار الفصل 228
الإعداد للاختبارات المعيارية 229
اختبار تراكمي 231
الصيغ والرموز 233

ستركز في دراستك هذا العام على عدة موضوعات رياضية، تشمل مايلي:

- الدوال وخصائصها.
- المتباينات وتمثيلها بيانيًا.
- المصفوفات والعمليات عليها.
- كثيرات الحدود والعمليات عليها.
- نظريتا الباقي والعوامل واستعمالهما.
- العلاقات والدوال العكسية والجذرية.

وفي أثناء دراستك، ستتعلم طرائق لحل المسائل الجبرية وتمثيلها بصور متعددة وسوف تفهم لغة الرياضيات وتستعمل أدواتها، وتنمي قدراتك الذهنية وتفكيرك الرياضي.

كيف تستعمل كتاب الرياضيات؟

- **اقرأ** فقرة **فيما سبق** لتعرف ارتباط هذا الدرس بما درسته من قبل، ولتعرف أفكار الدرس الجديد
  اقرأ فقرة **والآن** .
- **ابحث** عن **المفردات** المظللة **باللون الأصفر** باللغتين العربية والإنجليزية ، واقرأ تعريف كل منها.
- **راجع** المسائل الواردة في **مثال** والمحلولة بخطوات تفصيلية؛ لتوضيح أفكار الدرس الرئيسة.
- **تذكَّر** بعض المفردات التي تعلَّمتها من قبل، بالرجوع إلى فقرة **مراجعة المفردات**
- **ارجع** إلى المثال المشار إليه مقابل بعض التمارين في فقرتي **تأكد** و **تدرب وحل المسائل** ليساعدك
  على حل هذه التمارين وما شابهها.
- **استعن** بأسئلة **تدريب على اختبار** لتتعرف بعض أنماط أسئلة الاختبارات.
- **ارجع** إلى **مراجعة تراكمية** لتراجع أفكار الدروس السابقة.
- **ارجع** إلى **إرشادات للدراسة** حيث تجد معلومات وتوجيهات تساعدك في متابعة الأمثلة المحلولة.
- **ارجع** إلى فقرة **قراءة الرياضيات** ؛ لتتذكر نُطق بعض الرموز والمصطلحات الرياضية.
- **ارجع** إلى فقرة **تنبيه!** دائماً لتعرف الأخطاء الشائعة التي يقع فيها كثير من الطلاب حول بعض المفاهيم
  الرياضية فتجتنبها.
- **نفِّذ** **اختبار الفصل** في نهاية كل فصل، بعد أن تُراجع أفكار الدرس مستفيدًا مما دوَّنته
  من أفكار في **المطويات**
- **استعن** بصفحتَي **الإعداد للاختبارات** ؛ لتتعرف أنواع أسئلة الاختبارات وبعض طرق حلِّها .
- **نفذ** **الاختبار التراكمي** في نهاية كل فصل لمراجعة الأفكار الرئيسة للفصل وماقبله من فصول.

الفصل 1

الدوال والمتباينات
Functions and Inequalities

فيما سبق:
درستُ حل المعادلات والمتباينات الخطية.

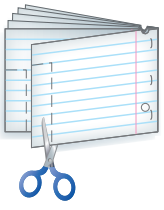
والآن:
- أستعمل معادلات العلاقات والدوال.
- أحل أنظمة المتباينات الخطية بيانيًا.
- أحل مسائل من واقع الحياة مستعملًا البرمجة الخطية.

لماذا؟
مصانع: تسعى المصانع عادة لتحقيق أعلى ربح ممكن، ويتطلب ذلك من إداراتها إتقان مهارات رياضية معينة لتخفيض التكلفة، وفي هذا الفصل ستتعلم كيفية زيادة الربح أو تقليل التكلفة لتحقيق أكبر ربح ممكن من خلال استعمال البرمجة الخطية.

المطويات منظم أفكار

الدوال والمتباينات: اعمل هذه المطوية لتساعدك على تنظيم ملاحظاتك حول الدوال والمتباينات. مبتدئًا بثلاث أوراق من دفتر الملاحظات.

1. **اطو** كل ورقة من المنتصف.
2. **قُصَّ** الأوراق مع خط الطي، ثم ثبت أنصاف الأوراق الست الناتجة لتحصل على كُتيبٍ صغير.
3. **قُصَّ** أطراف الأوراق، بحيث تترك سطرين من طرف الورقة الأولى و4 أسطر من طرف الورقة الثانية وهكذا.
4. **سمِّ** طرف كل ورقة برقم درس من دروس الفصل، واكتب عنوان الفصل.



رابط الدرس الرقمي

www.ien.edu.sa

التهيئة للفصل 1

تشخيص الاستعداد:

أجب عن الاختبار الآتي، وارجع إلى "المراجعة السريعة" ؛ لمساعدتك على ذلك.

اختبار سريع

أوجد الناتج في كلٍّ مما يأتي: (تستعمل مع الدروس 1-1 إلى 1-6)

1) $15.7 + (-3.45)$

2) $-18.54 - (-32.05)$

3) $(-9.8)(6.75)$

4) $4 \div (-0.5)$

5) $3\frac{2}{3} + \left(-1\frac{4}{5}\right)$

6) $\frac{54}{7} - \frac{26}{6}$

7) $\left(\frac{6}{5}\right)\left(-\frac{10}{9}\right)$

8) $-3 \div \frac{7}{8}$

9) صناعات يدوية: تحتاج فاطمة إلى $\frac{7}{8}$ m من الخيوط لصنع رباط شعر، فكم مترًا من الخيوط يلزمها لصنع 12 رباطًا؟

أوجد قيمة كلَّ عبارة فيما يأتي إذا كانت: $a = -3, b = 4, c = -2$ (تستعمل مع الدروس 1-1 إلى 1-6)

10) $4a - 3$

11) $2b - 5c$

12) $b^2 - 3b + 6$

13) $\frac{2a + 4b}{c}$

14) اتصالات: تستعمل إحدى شركات الاتصالات العبارة $0.25m + 20$ لإيجاد التكلفة بالريال لـ m من دقائق الاتصال. أوجد تكلفة 80 دقيقة اتصال.

مثِّل في المستوي كل مستقيم مما يأتي بيانيًّا: (يستعمل مع الدروس 3-1 إلى 3-6)

15) $y = 3$

16) $x + y = 1$

17) $3x - y = 6$

18) $x + 2y = 5$

19) $y = 4x - 1$

20) $5x - 4y = 12$

21) مشتريات: اشترى صلاح ثلاجة بالتقسيط، على أن يدفع 900 ريال دفعة أولى، ويدفع 400 ريال كل شهر. اكتب معادلة للمبلغ الكلِّي الذي سيدفعه بعد x شهرًا، ثم مثِّلها بيانيًّا.

مراجعة سريعة

مثال 1

أوجد ناتج: $\left(\frac{3}{16}\right)\left(-\frac{4}{5}\right)$.

$\left(\frac{3}{16}\right)\left(-\frac{4}{5}\right) = \left(\frac{3}{\cancel{16}_{4}}\right)\left(-\frac{\cancel{4}^{1}}{5}\right)$ — اقسم العددين 16 , 4 على قاسمهما المشترك الأكبر (4)

$= \left(\frac{3}{4}\right)\left(-\frac{1}{5}\right)$ — اضرب البسطين ← اضرب المقامين

$= \frac{-3}{20}$ — بسّط

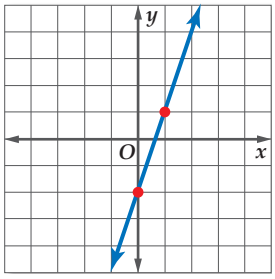
مثال 2

أوجد قيمة العبارة $3a^2 - 2ab + b^2$ إذا كانت: $a = 4$، $b = -3$

$$\begin{aligned} 3a^2 - 2ab + b^2 &= 3(4^2) - 2(4)(-3) + (-3)^2 \\ &= 3(16) - 2(4)(-3) + 9 \\ &= 48 - (-24) + 9 \\ &= 48 + 24 + 9 \\ &= 81 \end{aligned}$$

مثال 3

مثِّل في المستوي المستقيم $y = 3x - 2$ بيانيًّا.



كوّن جدولًا يتضمن قيمتين على الأقل للإحداثي x، وأوجد الإحداثي y لكلٍّ منهما، ثم كوّن أزواجًا مرتبة ومثِّلها بيانيًّا.

x	y	(x, y)
0	−2	(0, −2)
1	1	(1, 1)

رابط الدرس الرقمي

www.ien.edu.sa

1-1 خصائص الأعداد الحقيقية
Properties of Real Numbers

فيما سبق:
درست الأعداد الحقيقية، والعمليات عليها. (مهارة سابقة)

والآن:
- أصنّف الأعداد الحقيقية.
- أستعمل خصائص الأعداد الحقيقية لتبسيط قيم العبارات الجبرية.

المفردات

الأعداد الحقيقية
real numbers
الأعداد النسبية
rational numbers
الأعداد غير النسبية
irrational numbers
الأعداد الصحيحة
integers
الأعداد الكلية
whole numbers
الأعداد الطبيعية
natural numbers

لماذا؟

يبيع محل للأدوات الرياضية 3 أنواع من الكرات بالسعر نفسه. إن شراء عدة أنواع لكل منها السعر نفسه يسهل عليك إيجاد المبلغ الإجمالي للشراء، وذلك باستعمال خاصية توزيع الضرب على الجمع.

الأعداد الحقيقية: تتضمن **الأعداد الحقيقية** مجموعات مختلفة من الأعداد منها:

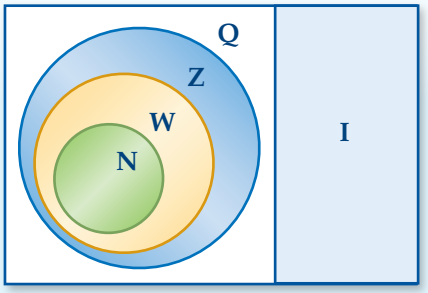
- **الأعداد النسبية** هي الأعداد التي يمكن كتابتها على الصورة $\frac{a}{b}$، حيث a وَ b عددان صحيحان، والعدد b لا يساوي صفرًا. وتكون الصورة العشرية للعدد النسبي إما عددًا عشريًّا منتهيًا أو دوريًّا.
- **الأعداد غير النسبية** وتكون الصورة العشرية للعدد غير النسبي ليست منتهية وليست دورية. لذا فإنّ الجذور التربيعية للأعداد التي ليست مربعات كاملة هي أعداد غير نسبية.
- مجموعة **الأعداد الصحيحة** هي : $\{\ldots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \ldots\}$، ومجموعة **الأعداد الكلية** هي: $\{0, 1, 2, 3, 4, \ldots\}$. ومجموعة **الأعداد الطبيعية** هي: $\{1, 2, 3, 4, 5, \ldots\}$، وكل منها مجموعة جزئية من مجموعة الأعداد النسبية؛ وذلك لأن كل عدد صحيح n يمكن كتابته على الصورة $\frac{n}{1}$.

مفهوم أساسي
الأعداد الحقيقية (R)

أضف إلى مطويتك

الرمز	المجموعة	أمثلة
Q	الأعداد النسبية	$0.125, -\frac{7}{8}, \frac{2}{3} = 0.66\ldots$
I	الأعداد غير النسبية	$\pi = 3.14159\ldots$ $\sqrt{3} = 1.73205\ldots$
Z	الأعداد الصحيحة	$-5,\ 17,\ -23,\ 8$
W	الأعداد الكلية	$2,\ 96,\ 0,\ \sqrt{36}$
N	الأعداد الطبيعية	$3,\ 17,\ 6,\ 86$

الأعداد الحقيقيّة R



مثال 1
تصنيف الأعداد

حدِّد مجموعات الأعداد التي ينتمي إليها كل عدد مما يأتي:

a) -23 مجموعة الأعداد الصحيحة (Z)، مجموعة الأعداد النسبية (Q)، مجموعة الأعداد الحقيقية (R)

b) $\sqrt{50}$ مجموعة الأعداد غير النسبية (I)، مجموعة الأعداد الحقيقية (R)

c) $-\frac{4}{9}$ مجموعة الأعداد النسبية (Q)، مجموعة الأعداد الحقيقية (R)

تحقق من فهمك

1A) -185 **1B)** $-\sqrt{49}$ **1C)** $\sqrt{95}$ **1D)** $-\frac{6}{7}$

إرشادات للدراسة

تصنيف الأعداد
يمكن أن ينتمي العدد إلى أكثر من مجموعة أعداد، فمثلًا يُعدّ أي عدد طبيعي عددًا كليًّا وصحيحًا، ونسبيًّا، وحقيقيًّا.

خصائص الأعداد الحقيقية: يلخص الجدول الآتي بعض خصائص الأعداد الحقيقية:

ملخص المفهوم

أضف إلى مطويتك

خصائص الأعداد الحقيقية

لأي أعداد حقيقية a, b, c فإن:

الخاصية	الجمع	الضرب
التبديلية	$a + b = b + a$	$a \cdot b = b \cdot a$
التجميعية	$(a + b) + c = a + (b + c)$	$(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$
العنصر المحايد	$a + 0 = a = 0 + a$	$a \cdot 1 = a = 1 \cdot a$
النظير	$a + (-a) = 0 = (-a) + a$	$a \cdot \frac{1}{a} = 1 = \frac{1}{a} \cdot a,\ a \neq 0$
الانغلاق	$(a + b)$ عدد حقيقي	$(a \cdot b)$ عدد حقيقي
التوزيع	$a(b + c) = ab + ac,\ (b + c)a = ba + ca$	

مثال 2 تمييز خصائص الأعداد الحقيقية

ما الخاصية الموضّحة في: $13 \cdot (4 \cdot 5) = (13 \cdot 4) \cdot 5$ ؟

الخاصية التجميعية في عملية الضرب.

وتنص الخاصية التجميعية لعملية الضرب على أن ناتج الضرب لا يتأثر بالطريقة التي يتم بها تجميع العوامل.

تحقق من فهمك

2) $2(x + 3) = 2x + 6$ ؟

يمكنك إيجاد كلٍّ من النظير الجمعي والضربي لأي عدد حقيقي لا يساوي الصفر.

مثال 3 النظير الجمعي و النظير الضربي

أوجد النظير الجمعي والنظير الضربي للعدد $-\frac{5}{8}$

بما أن $-\frac{5}{8} + \frac{5}{8} = 0$، فإن النظير الجمعي للعدد $-\frac{5}{8}$ هو $\frac{5}{8}$

وبما أن $\left(-\frac{5}{8}\right)\left(-\frac{8}{5}\right) = 1$، فإن النظير الضربي للعدد $-\frac{5}{8}$ هو $-\frac{8}{5}$

تحقق من فهمك

3A) 1.25 **(3B** $2\frac{1}{2}$

إرشادات للدراسة

النظير الجمعي والنظير الضربي

إشارة النظير الجمعي لعدد هي عكس إشارة ذلك العدد، أمّا إشارة النظير الضربي لعدد فهي ذاتها إشارة ذلك العدد.

تتطلب الكثير من التطبيقات الحياتية التعامل مع الأعداد الحقيقية.

مثال 4 من واقع الحياة — خاصية التوزيع

الجهاز أو الملحق	السعر (بالريال)
حاسوب	1000
شاشة	600
آله طابعة	500
كاميرا رقمية	150
برمجيات ملحقة	300

مبيعات: يبين الجدول المجاور أسعار جهاز حاسوب وملحقاته في أحد العروض. فإذا زاد السعر الأصلي للجهاز وملحقاته، بنسبة 6% فأوجد قيمة هذه الزيادة.

يمكن إيجاد قيمة هذه الزيادة بطريقتين هما:

الطريقة 1: اضرب ثم اجمع .

اضرب كل قيمة في 6%، أو 0.06، ثم اجمع.

$$T = 0.06(1000) + 0.06(600) + 0.06(500) + 0.06(150) + 0.06(300)$$

$$= 60 + 36 + 30 + 9 + 18$$

$$= 153$$

الطريقة 2: اجمع ثم اضرب.

أوجد السعر الكلي لجهاز الحاسوب وملحقاته قبل الزيادة، ثم اضربه في العدد 0.06

$$T = 0.06(1000 + 600 + 500 + 150 + 300)$$

$$= 0.06(2550)$$

$$= 153$$

فتكون قيمة الزيادة 153 ريالًا. لاحظ أن النتيجة متساوية في الطريقتين.

الربط مع الحياة

زادت ملحقات أجهزة الحاسوب على نحو مطرد في السنوات الأخيرة، حتى أصبح الحاسوب يقوم مقام الكثير من الأجهزة الإلكترونية كآلات التصوير والتسجيل وغيرها.

تحقق من فهمك

4) أعمال: يتقاضى أحمد 20 ريالًا عن كل ساعة عمل في محل تجاري. فإذا كانت ساعات عمله في أحد الأسابيع هي 4, 3, 2.5, 3, 4 ، فما المبلغ الذي حصل عليه أحمد في ذلك الأسبوع؟

يمكنك استعمال خصائص الأعداد الحقيقية لتبسيط العبارات الجبرية.

مثال 5 تبسيط العبارات الجبرية

بسّط العبارة: $3(2q + r) + 5(4q - 7r)$

$3(2q + r) + 5(4q - 7r) = 3(2q) + 3(r) + 5(4q) - 5(7r)$	خاصية التوزيع
$= 6q + 3r + 20q - 35r$	اضرب
$= 6q + 20q + 3r - 35r$	الخاصية التبديلية للجمع
$= (6 + 20)q + (3 - 35)r$	خاصية التوزيع
$= 26q - 32r$	بسّط

تحقق من فهمك

5) $3(4x - 2y) - 2(3x + y)$.

تأكد

مثال 1 حدِّد مجموعات الأعداد التي ينتمي إليها كل عدد مما يأتي:

1) 62 **2)** $\frac{5}{4}$ **3)** $\sqrt{11}$ **4)** -12

مثال 2 ما الخاصية الموضّحة في كلٍّ ممَّا يأتي؟

5) $(6 \cdot 8) \cdot 5 = 6 \cdot (8 \cdot 5)$ **6)** $7(9 - 5) = 7 \cdot 9 - 7 \cdot 5$

7) $84 + 16 = 16 + 84$ **8)** $(12 + 5)6 = 12 \cdot 6 + 5 \cdot 6$

مثال 3 أوجد النظير الجمعي والنظير الضربي لكل عدد مما يأتي:

9) -7 **10)** $\frac{4}{9}$ **11)** 3.8 **12)** $\sqrt{5}$

مثال 4 **13) تخفيضات:** يبين الجدول المجاور أسعار أربعة أصناف من الملابس في أحد العروض. فإذا زاد السعر الأصلي لكلٍّ منها بنسبة 8% فأوجد قيمة هذه الزيادة.

الصنف	السعر (بالريال)
قميص	40
بنطال	60
ثوب	100
معطف	200

مثال 5 بسّط كل عبارة مما يأتي:

14) $5(3x + 6y) + 4(2x - 9y)$ **15)** $6(6a + 5b) - 3(4a + 7b)$

16) $-4(6c - 3d) - 5(-2c - 4d)$ **17)** $-5(8x - 2y) - 4(-6x - 3y)$

تدرب وحل المسائل

مثال 1 حدِّد مجموعات الأعداد التي ينتمي إليها كل عدد مما يأتي:

18) $-\frac{4}{3}$ **19)** -8.13 **20)** $\sqrt{25}$ **21)** $0.\overline{61}$

22) $\frac{9}{3}$ **23)** $-\sqrt{144}$ **24)** $\frac{21}{7}$ **25)** $\sqrt{17}$

مثال 2 ما الخاصية الموضّحة في كلٍّ ممَّا يأتي؟

26) $-7y + 7y = 0$ **27)** $8\sqrt{11} + 5\sqrt{11} = (8 + 5)\sqrt{11}$

28) $(16 + 7) + 23 = 16 + (7 + 23)$ **29)** $\left(\frac{22}{7}\right)\left(\frac{7}{22}\right) = 1$

مثال 3 أوجد النظير الجمعي والنظير الضربي لكل عدد مما يأتي:

30) -8 **31)** 12.1 **32)** -0.25

33) $\frac{6}{13}$ **34)** $-\frac{3}{8}$ **35)** $\sqrt{15}$

مثال 4 **36) ترشيد:** يبين الجدول المجاور أوجه إنفاق إحدى الأسر خلال شهر. إذا قررت الأسرة ترشيد إنفاقها بنسبة 15% من كل وجه لشراء سيارة جديدة، فما مقدار ما توفره في الشهر؟

وجه الإنفاق	المبلغ (بالريال)
الطعام والشراب	3000
المواصلات	1000
الفواتير	500
أخرى	750

مثال 5 بسّط كل عبارة مما يأتي:

37 $8b - 3c + 4b + 9c$

38 $-2a + 9d - 5a - 6d$

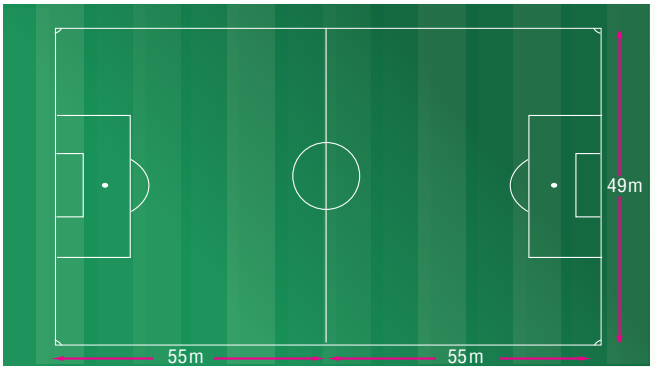
39 $4(4x - 9y) + 8(3x + 2y)$

40 $6(9a - 3b) - 8(2a + 4b)$

41 $-2(-5g + 6k) - 9(-2g + 4k)$

42 $-5(10x + 8z) - 6(4x - 7z)$

43 **كرة قدم:** وضِّح خاصية التوزيع من خلال كتابة عبارتين تمثلان مساحة الملعب في الشكل أدناه. ثم أوجد مساحته.



44 **تخفيضات:** يبين الجدول المجاور أسعار بعض الأجهزة الكهربائية في محل. فإذا انخفض سعرُ كلٍّ منها بنسبة 30%، وأراد أحمد أن يشتري من ذلك المحل جهاز تسجيل ومكنسة ومروحة.

نوع السلعة	السعر (بالريال)
جهاز تسجيل	170
مكنسة	350
مروحة	110

a) وضِّح خاصية التوزيع من خلال كتابة عبارتين تمثل كل منهما المبلغ الذي سيدفعه أحمد.

b) احسب المبلغ الذي سيدفعه أحمد بطريقتين مختلفتين مستعملاً خصائص العمليات على الأعداد.

بسّط كل عبارة مما يأتي:

45 $\frac{1}{3}(5x + 8y) + \frac{1}{4}(6x - 2y)$

46 $\frac{2}{5}(6c - 8d) + \frac{3}{4}(4c - 9d)$

47 $-6(3a + 5b) - 3(6a - 8c)$

48 $-9(3x + 8y) - 3(5x + 10z)$

49 **ديكور:** يريد محمد شراء 5 ستائر لنوافذ منزله: نافذتان كبيرتان، و 3 نوافذ صغيرة . فإذا كانت النافذة الكبيرة تحتاج إلى ستارة طولها $3\frac{3}{4}$ m من القماش، في حين تحتاج النافذة الصغيرة إلى ستارة طولها $2\frac{1}{3}$ m من القماش.

a) كم مترًا من القماش يحتاج إليه محمد ؟

b) استعمل خصائص الأعداد الحقيقية لتبين كيف يمكن لمحمد حساب كمية القماش التي يحتاج إليها ذهنيًّا.

50 **تمثيلات متعددة:** مستعملًا الأعداد: $\sqrt{36}, \frac{3}{8}, 0, \pi, 4.1, \frac{-15}{3}, 3, -\sqrt{6}$.
أجب عما يأتي:

a) **جدوليًّا:** نظِّم هذه الأعداد في جدول وفقًا لمجموعة الأعداد التي تنتمي إليها.

b) **جبريًّا:** اكتب كل عدد من الأعداد أعلاه على الصورة العشرية، ثم رتبها تصاعديًّا.

c) **بيانيًّا:** مثِّل هذه الأعداد على خط الأعداد.

d) **لفظيًّا:** اكتب تخمينًا حول ترتيب الأعداد الحقيقية باستعمال الصورة العشرية لها.

مسائل مهارات التفكير العليا

51) ما العدد المختلف عن باقي الأعداد؟ وضِّح إجابتك.

$\sqrt{21}$	$\sqrt{35}$	$\sqrt{67}$	$\sqrt{81}$

52) تحدَّ: أوجد قيمة العبارة $48(30r + 36t)$ بدلالة w، علمًا بأن $w = 12(5r + 6t)$.

53) اكتشف الخطأ: بسّطت كلٌّ من فاطمة وخديجة العبارة: $4(14a - 10b) - 6(b + 4a)$. فهل أيٌّ منهما تبسيطها صحيح؟ وضِّح إجابتك.

فاطمة

$4(14a - 10b) - 6(b + 4a)$

$56a - 40b - 6b + 24a$

$80a - 46b$

خديجة

$4(14a - 10b) - 6(b + 4a)$

$56a - 40b - 6a - 24b$

$50a - 64b$

54) تبرير: هل العبارة الآتية صحيحة أحيانًا، أو صحيحة دائمًا، أو غير صحيحة أبدًا. وضِّح إجابتك.

"العدد غير النسبي يتضمن رمز الجذر".

55) مسألة مفتوحة: حدِّد إذا كانت خاصية الانغلاق للضرب تنطبق على الأعداد غير النسبية. وإذا لم تكن كذلك، فأعط مثالًا مضادًا.

56) اكتب: اشرح وأعطِ أمثلة توضّح أن عمليتي الطرح والقسمة لا تحققان الخاصية التبديلية.

تدريب على اختبار

57) ما الحد العاشر في المتتابعة $2, 4, 7, 11, 16, \ldots$ ؟

A 46 **B** 67 **C** 56 **D** 72

58) ما أبسط صورة للعبارة: $2(x - y) - 3(y - 2x)$؟

A $5x - 8y$ **B** $8x - 5y$ **C** $-4y$ **D** $-4x - 5y$

مراجعة تراكمية

59) أوجد قيمة: $8(4 - 2)^3$. (مهارة سابقة)

أوجد ناتج الضرب في كلٍّ ممَّا يأتي: (مهارة سابقة)

60) $(x + 2)(x - 3)$

61) $(b - 7)(b - 3)$

أوجد قيمة كلٍّ مما يأتي؛ علمًا بأن $a = 3, b = \frac{2}{3}, c = -1.7$. (مهارة سابقة)

62) $\frac{1}{6}b + 1$

63) $\frac{a \cdot b}{c}$

رابط الدرس الرقمي

www.ien.edu.sa

1-2 العلاقات والدوال
Relations and Functions

فيما سبق:
درستُ تحديد كل من مجال ومدى علاقة معطاة. (مهارة سابقة)

والآن:
- أحلّل العلاقات والدوال.
- أستعمل معادلات العلاقات والدوال.

المفردات

الدالة المتباينة
one-to-one function

العلاقة المنفصلة
discrete relation

العلاقة المتصلة
continuous relation

اختبار الخط الرأسي
vertical line test

المتغير المستقل
independent variable

المتغير التابع
dependent variable

رمز الدالة
function notation

لماذا؟

يبين الجدول أدناه المعدل الشهري التقريبي لأعلى درجة حرارة وأدناها في مدينة الرياض، لاحظ أن معدل كلٍّ من درجتي الحرارة الدنيا والعليا لكل شهر يمكن تمثيله بزوج مرتب. فعلى سبيل المثال، يمكن تمثيل معدلي درجات الحرارة لشهر يناير بالزوج المرتب (9, 20).

معدل درجات الحرارة الشهرية (°C) في مدينة الرياض

الشهر	يناير	فبراير	مارس	إبريل	مايو	يونيو	يوليو	أغسطس	سبتمبر	أكتوبر	نوفمبر	ديسمبر
الدنيا	9	11	15	20	26	28	29	29	26	21	15	11
العليا	20	23	27	33	39	42	43	43	40	35	27	22

العلاقات والدوال: تذكر أن الدالة هي علاقة يرتبط فيها كل عنصر في المجال بعنصر واحد فقط في المدى.

مفهوم أساسي الدالة المتباينة

أضف إلى مطويتك

الدالة المتباينة: هي دالة يرتبط فيها كل عنصر من المجال بعنصر مختلف من المدى، وهذا يعني أنه لايمكن أن يرتبط عنصران من المجال بالعنصر نفسه من المدى.

مثال 1 المجال والمدى

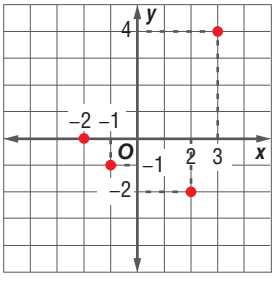
حدِّد مجال كلِّ علاقة فيما يأتي ومداها، وبيِّن ما إذا كانت دالةً أم لا ، وإذا كانت كذلك فهل هي متباينة أم لا ؟

a) $\{(-6, -1), (-5, -9), (-3, -7), (-1, 7), (-6, -9)\}$

المجال $= \{-6, -5, -3, -1\}$ المدى $= \{-9, -7, -1, 7\}$

هل هي دالة: لا، لأن العنصر -6 في المجال ارتبط بكل من العنصرين -9 ,-1 في المدى.

b)



المجال $= \{-2, -1, 2, 3\}$

المدى $= \{-2, -1, 0, 4\}$

هذه العلاقة دالة؛ لأن كل عنصر في المجال ارتبط بعنصر واحد فقط من المدى. وهي متباينة؛ لأن كل عنصر من المدى ارتبط بعنصر واحد فقط من المجال.

إرشادات للدراسة

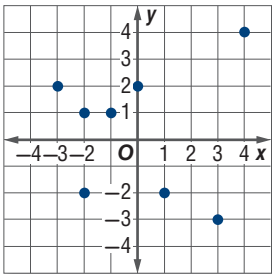
العلاقة: تمثل العلاقة عادة على شكل أزواج مرتبة (x, y)، كما يمكن وصفها بعدة طرق أخرى، منها المخطط السهمي، والجدول، والتمثيل البياني.

المجال: مجموعة إحداثيات x في الأزواج المرتبة الممثلة للعلاقة.

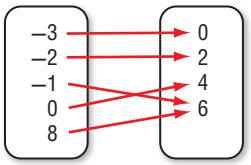
المدى: مجموعة إحداثيات y في الأزواج المرتبة الممثلة للعلاقة.

تحقق من فهمك

(1A



(1B



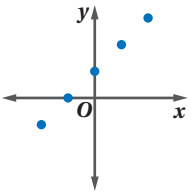
العلاقة التي يكون فيها المجال مجموعة من العناصر المنفردة، وتمثل بيانيًّا بنقاطٍ منفصلةٍ، مثل العلاقة A أدناه تسمى **علاقة منفصلة**. لاحظ أن تمثيلها البياني يتكون من نقاط غير متصلة، والعلاقة التي يكون مجالها فترة جزئية من الأعداد الحقيقية وأمكن تمثيلها بيانيًّا بمستقيم أو بمنحنى متصل مثل العلاقة B أدناه، فإنها تكون **علاقة متصلة**.

إرشادات للدراسة

العلاقة المتصلة

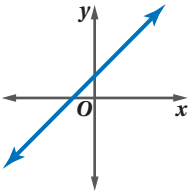
يمكنك تمثيل العلاقة المتصلة بيانيًّا دون رفع القلم عن الورقة.

العلاقة A



علاقة منفصلة

العلاقة B



علاقة متصلة

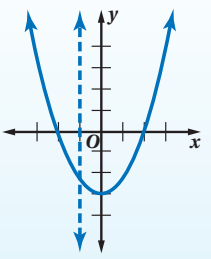
يمكنك استعمال **اختبار الخط الرأسي** مع كل من العلاقات المتصلة والمنفصلة لمعرفة إذا كانت العلاقة دالة أم لا.

مفهوم أساسي — **اختبار الخط الرأسي**

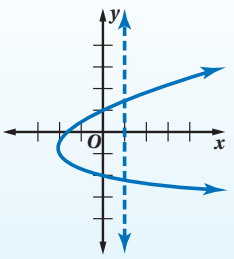
أضف إلى مطويتك

التعبير اللفظي: إذا لم يقطع أي خط رأسي التمثيل البياني للعلاقة بأكثر من نقطة، فالعلاقة دالة.

النموذج:



التعبير اللفظي: إذا قطع خط رأسي التمثيل البياني للعلاقة في أكثر من نقطة فالعلاقة ليست دالة.

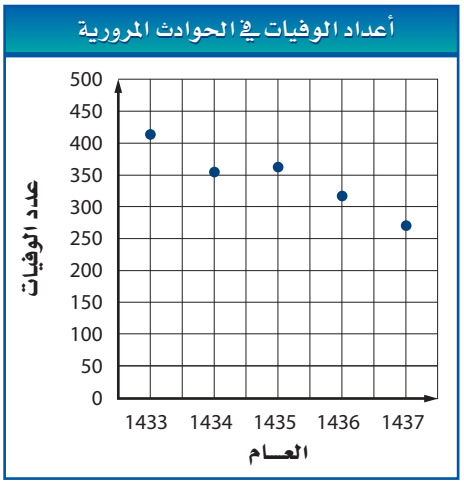


مثال 2 من واقع الحياة

تمييز العلاقة

حوادث المرور: يبين التمثيل البياني المجاور أعداد الوفيات في إحدى مدن المملكة نتيجة الحوادث المرورية من عام 1433 هـ إلى عام 1437 هـ ، هل العلاقة التي يمثلها منفصلة أم متصلة؟ وهل تمثل دالة؟

بما أن التمثيل البياني مكون من نقاط منفصلة، فالعلاقة منفصلة. وباستعمال اختبار الخط الرأسي نلاحظ أنه لا يمكن رسم أي خط رأسي يمر بأكثر من نقطة من نقاط التمثيل، إذن فالعلاقة تمثل دالة.



تحقق من فهمك

2) عمال: إذا كان عدد العاملين في إحدى المؤسسات في الأعوام من 1433هـ إلى 1438هـ على الترتيب هو: 33, 34, 35, 36, 37, 38. مثّل هذه البيانات بيانيًّا، وهل العلاقة التي تمثلها هذه البيانات منفصلة أم متصلة. وهل تمثل دالة؟

الربط مع الحياة

هل تعلم أن لكل 8 حوادث مرورية في المملكة العربية السعودية يحدث 6 إصابات، بينما النسبة العالمية إصابة واحدة لكل 8 حوادث؟!

معادلات العلاقات والدوال: يمكنك تمثيل العلاقات والدوال بمعادلات، وقيم المتغيرين x , y في المعادلة هي مجموعة الأزواج المرتبة (x, y) التي تحقق المعادلة. ومن السهل في أغلب الأحيان تحديد إذا كانت المعادلة تمثل دالة من خلال تمثيلها البياني.

إرشادات للدراسة

تمثيل الدالة بيانيًّا

لتمثل دالة ما بيانيًّا، أولًا يجب أن تحدِّد مجالها (جميع قيم x التي تكون عندها الدالة معرفة أي قيم x التي تكون عندها $f(x) \in \mathbb{R}$، وهذا يمكّنك من معرفة بعض الأزواج المرتبة التي تسهّل عليك تمثيل الدالة بيانيًّا. ثم تحدِّد مداها (جميع قيم y التي تقابل قيم x) ويكون من السهل إيجاد المدى من التمثيل البياني، ومن الجدير بالذكر أن المجال والمدى لجميع الدوال الخطية هو مجموعة الأعداد الحقيقية.

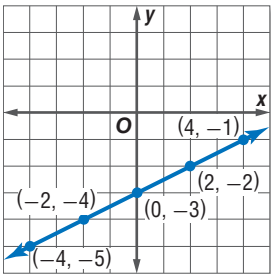
مثال 3

تمثيل العلاقة بيانيًّا

مثّل المعادلة $y = \frac{1}{2}x - 3$ بيانيًّا، ثم حدِّد مجالها ومداها، وحدِّد ما إذا كانت تمثل دالة أم لا، وإذا كانت كذلك، فهل هي متباينة أم لا؟ ثم حدِّد ما إذا كانت منفصلة أم متصلة.

كوّن جدولًا لبعض القيم التي تحقق المعادلة، ثم مثّل المعادلة بيانيًّا.

x	y
−4	−5
−2	−4
0	−3
2	−2
4	−1



مجال هذه العلاقة ومداها هو مجموعة الأعداد الحقيقية، لأن أي عدد حقيقي يمكن أن يكون الإحداثي x لنقطة ما على المستقيم، كما أن أي عدد حقيقي أيضًا يمكن أن يكون الإحداثي y لنقطة ما على المستقيم.

التمثيل البياني للعلاقة يحقق اختبار الخط الرأسي؛ لذا فإن المعادلة تمثل دالة؛ لأن كل قيمة لـ x ترتبط بقيمة واحدة فقط لـ y،

وحيث إن كل قيمة لـ y مرتبطة بقيمة واحدة فقط لـ x، لذا فالدالة متباينة.

وبما أن التمثيل البياني عبارة عن مستقيم متصل دون انقطاع، فالدالة متصلة.

تحقق من فهمك

3) $y = x^2 + 1$

إذا كانت المعادلة تمثل دالة، فإن المتغير من المجال (غالبًا ما يكون x)، يسمى **المتغير المستقل**. والمتغير الثاني (غالبًا ما يكون y)، يسمى **المتغير التابع** لأن قيمه تعتمد على قيم المتغير x.

المعادلات التي تمثل دوالّ تكتب عادة باستعمال **رمز الدالة**. فالمعادلة $y = 5x - 1$ يمكن كتابتها على الصورة $f(x) = 5x - 1$. وإذا أردنا إيجاد قيمة في المدى ترتبط بالعنصر -6 في مجال الدالة f، فإن هذه القيمة هي $f(-6)$ ويمكن إيجادها بالتعويض عن كل x في المعادلة بالعدد -6؛ لذا فإن $f(-6) = 5(-6) - 1 = -31$.

قراءة الرياضيات

رمز الدالة

يستعمل الرمز $f(x)$ للدوال بدلاً من y، ويُقرأ f لـ x؛ حيث f هو اسم الدالة وليس متغيرًا مضروبًا في x.

مثال 4 إيجاد قيمة الدالة

لتكن $f(x) = 2x^2 - 8$، أوجد قيمة كلٍّ مما يأتي:

a) $f(6)$

الدالة الأصلية	$f(x) = 2x^2 - 8$
عوّض	$f(6) = 2(6)^2 - 8$
$6^2 = 36$	$= 2(36) - 8$
بسّط	$= 72 - 8 = 64$

b) $f(2y)$

الدالة الأصلية	$f(x) = 2x^2 - 8$
عوّض	$f(2y) = 2(2y)^2 - 8$
$(2y)^2 = 2^2y^2$	$= 2(4y^2) - 8$
بسّط	$= 8y^2 - 8$

تحقق من فهمك

$g(x) = 0.5x^2 - 5x + 3.5$

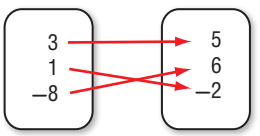
4A) $g(2.8)$

4B) $g(4a)$

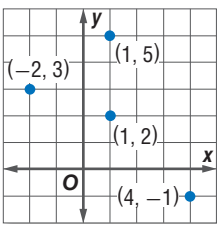
تأكد

مثال 1 حدِّد مجال كل علاقة فيما يأتي ومداها، وبيِّن ما إذا كانت دالة أم لا، وإذا كانت كذلك، فهل هي متباينة أم لا؟

1)



2)



3)

x	y
−2	−4
1	−4
4	−2
8	6

مثال 2

4) كرة قدم: يبين الجدول المجاور متوسط عدد الأهداف التي أحرزها فريق كرة قدم في مبارياته خلال 4 مواسم ومتوسط أعمار الفريق في كل موسم.

الموسم	متوسط أعمار الفريق	متوسط عدد الأهداف في الموسم الواحد
1434–1435	22	16.2
1435–1436	23	24.1
1436–1437	24	27.2
1437–1438	25	23.5

a) مثِّل البيانات الواردة في الجدول بيانيًّا، على أن يمثل المحور الأفقي متوسط أعمار الفريق، والمحور الرأسي متوسط عدد الأهداف في كل مباراة.

b) حدِّد كلًّا من المجال والمدى.

c) هل العلاقة التي تمثل البيانات منفصلة أم متصلة؟

d) هل تمثل العلاقة دالة أم لا؟ وضِّح إجابتك.

مثال 3 مثِّل كلَّ معادلة فيما يأتي بيانيًّا، ثم حدِّد مجالها، ومداها، وحدِّد ما إذا كانت تمثل دالة أم لا، وإذا كانت كذلك، فهل هي متباينة أم لا؟ ثم حدِّد إذا كانت منفصلة أم متصلة.

5) $y = 5x + 4$ **6)** $y = -4x - 2$ **7)** $y = 3x^2$ **8)** $x = 7$

مثال 4 أوجد قيمة كلٍّ مما يأتي:

9) $f(-3)$ إذا كانت $f(x) = -4x - 8$

10) $g(5)$ إذا كانت $g(x) = -2x^2 - 4x + 1$

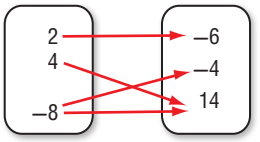
تدرب وحل المسائل

مثال 1 حدِّد مجال كل علاقة فيما يأتي ومداها، وبيِّن ما إذا كانت دالة أم لا، وإذا كانت كذلك، فهل هي متباينة أم لا؟

11)

x	y
−0.3	−6
0.4	−3
1.2	−1

12)



13) $\{(3,-4),(-1,0),(3,0),(5,3)\}$

مثال 2

14) سكان: يبين الجدول المجاور عدد الذكور وعدد الإناث في 4 مناطق إدارية مختلفة في المملكة لعام 1438هـ .

المنطقة الإدارية	عدد الذكور	عدد الإناث
المدينة المنورة	1194428	938251
حائل	386210	313564
تبوك	511413	398617
الجوف	289414	219061

a) مثّل البيانات الواردة في الجدول بيانيًّا على أن يمثل المحور الأفقي عدد الذكور والمحور الرأسي عدد الإناث.

b) حدِّد كلًّا من المجال والمدى.

c) هل العلاقة التي تمثل البيانات منفصلة أم متصلة؟

d) هل تمثل العلاقة دالة أم لا؟ وضِّح إجابتك.

مثال 3 مثّل كل معادلة فيما يأتي بيانيًّا، ثم حدِّد مجالها ومداها، وحدِّد إذا كانت تمثل دالة أم لا، وإذا كانت كذلك، فهل هي متباينة أم لا؟ ثم حدِّد إن كانت منفصلة أم متصلة.

15) $y=-5x^2$ **16)** $y=4x^2-8$

مثال 4 أوجد قيمة كلٍّ مما يأتي:

17) $f(-8)$ إذا كانت $f(x)=5x^3+1$ **18)** $f(2.5)$ إذا كانت $f(x)=16x^2$

19) غوص: يبين الجدول المجاور مقدار الضغط الواقع على الغواص عند أعماق معينة تحت سطح الماء:

العمق (ft)	0	20	40	60	80	100
الضغط	1	1.6	2.2	2.8	3.4	4

a) مثّل العلاقة بيانيًّا.

b) حدِّد كلًّا من مجال العلاقة ومداها، وهل هي منفصلة أم متصلة؟

c) هل هذه العلاقة دالة أم لا؟ وضِّح إجابتك.

إذا كانت $f(x)=3x+2, g(x)=-2x^2, h(x)=-4x^2-2x+5$ ، فأوجد قيمة كلٍّ مما يأتي:

20) $g(-6)$ **21)** $h(3)$ **22)** $h(8)$

23) $f\left(\frac{2}{3}\right)$ **24)** $g\left(\frac{3}{2}\right)$ **25)** $h\left(\frac{1}{5}\right)$

26) تمثيلات متعددة: ستكتشف في هذا السؤال الدوال المتباينة.

a) بيانيًّا: مثّل كل دالة مما يأتي بيانيًّا:

$j(x)=x^2+2$ $\quad h(x)=-x^2$ $\quad g(x)=2^x$ $\quad f(x)=x^2$

b) جدوليًّا: استعمل التمثيلات البيانية في الفرع **a** لعمل جدول يبين عدد المرات الممكن أن يقطع فيها أي خط أفقي، التمثيل البياني لكل دالة مما سبق.

c) تحليليًّا: حتى تكون الدالة متباينة يجب ألا يقطع أي خط أفقي تمثيلها البياني في أكثر من نقطة واحدة. أي الدوال السابقة تحقق هذا الشرط وأيها لا تحققه؟

d) جدوليًّا: كوّن جدولًا، وصنّف فيه الدوال السابقة إلى متباينة أو غير متباينة.

الربط مع الحياة

الضغط الواقع على الغواص عندما يكون على عمق 10 أمتار تحت الماء يعادل ضعف الضغط الجوي على السطح تقريبًا.

27) يملك فهد 800 ريال، فإذا قرر أن يضيف إلى هذا المبلغ 200 ريال شهريًّا، فإن الدالة $p(t) = 800 + 200t$ ؛ تمثل مقدار ما معه من نقود $p(t)$ بعد t شهرًا. فكم يكون معه بعد 8 أشهر؟

مسائل مهارات التفكير العليا

28) **اكتشف الخطأ:** أوجد كل من أحمد وخالد قيمة $f(3d)$ حيث $f(x) = -4x^2 - 2x + 1$. فأيٌّ منهما حله صحيح؟ وضِّح إجابتك.

أحمد

$$f(3d) = -4(3d)^2 - 2(3d) + 1$$
$$= -4(9d^2) - 6d + 1$$
$$= -36d^2 - 6d + 1$$

خالد

$$f(3d) = -4(3d)^2 - 2(3d) + 1$$
$$= 12d^2 - 6d + 1$$

29) **مسألة مفتوحة:** مثِّل كلًّا من العلاقات الآتية بيانيًّا:

a) سرعة سيارة متجهة نحو نقطة معينة وزمنها إذا علمت أنها توقفت عند إشارتين ضوئيتين.

b) طول شخص وعمره في الفترة من 5 سنوات إلى 60 سنة.

c) درجة الحرارة في أحد الأيام خلال الفترة من الساعة 6 صباحًا إلى الساعة 11 مساءً.

30) **تحدّ:** إذا كانت $f(x), g(x)$ دالتين بحيث $g(b) = 51, f(b) = 31, g(a) = 33, f(a) = 19$. وكانت $a = 5, b = 8$ فأوجد دالتين $f(x), g(x)$ تحقِّقان المعطيات السابقة.

31) **اكتب:** وضِّح كيف يحدِّد اختبار الخط الرأسي إذا كانت العلاقة دالة أم لا.

تدريب على اختبار

32) تحتوي بركة سباحة على 19500 جالون من الماء إذا تم تفريغها بمعدل 6 جالونات لكل دقيقة. فأي المعادلات الآتية تمثل عدد جالونات الماء g المتبقية في البركة بعد m دقيقة؟

A $g = 19500 - 6m$ **B** $g = 19500 + 6m$

C $g = \frac{19500}{6m}$ **D** $g = \frac{6m}{19500}$

33) إذا كان $g(x) = x^2$، فأي عبارة مما يأتي تساوي $g(x + 1)$؟

A 1

B $x^2 + 1$

C $x^2 + 2x + 1$

D $x^2 - x$

مراجعة تراكمية

بسّط كل عبارة فيما يأتي: (الدرس 1-1)

34) $6(3a - 2b) + 3(5a + 4b)$ **35)** $-4(5x - 3y) + 2(y + 3x)$ **36)** $-7(2c - 4d) + 8(3c + d)$

حل كل معادلة فيما يأتي، ثم تحقق من صحة الحل: (الدرس 1-1)

37) $4(2y - 3) + 5(3y + 1) = -99$ **38)** $8d - 4 + 3d = 2d - 100 - 7d$ **39)** $10y - 5 - 3y = 4(2y + 3) - 20$

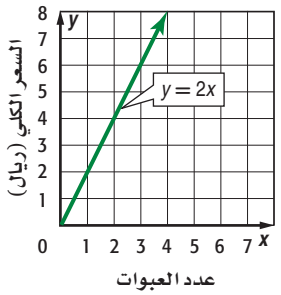
1-2 الدوال المنفصلة والدوال المتصلة

رابط الدرس الرقمي
www.ien.edu.sa

الهدف
أستعمل الدوال المنفصلة والدوال المتصلة لحل مسائل حياتية.

تُباع عبوة العصير الواحدة من أحد الأنواع بسعر 2 ريال، ويمكن إيجاد سعر x عبوة عصير باستعمال الدالة المتصلة $y = 2x$ حيث y السعر الكلي بالريال. ويمكن تمثيل هذه الدالة بيانيًّا كما هو موضّح في التمثيل المجاور.

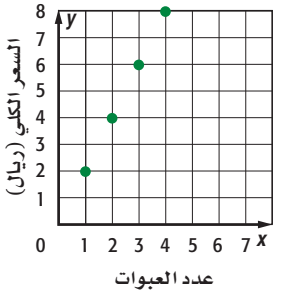
سعر عبوات العصير



بالنظر إلى التمثيل البياني، يمكن أن ترى أن سعر عبوتي عصير يساوي 4 ريالات، وسعر 3 عبوات يساوي 6 ريالات وهكذا. يبين التمثيل البياني أن سعر 1.5 عبوة هو 2(1.5) ويساوي 3 ريالات. إلا أن عبوات العصير لا تُباع مملوءة جزئيًّا. فهذه الدالة تُمثل بدقة أكثر بدالة منفصلة.

التمثيل البياني المجاور هو تمثيل الدالة المنفصلة التي تمثل سعر عبوات العصير. والمجال في هذا التمثيل البياني مقبول ومنطقي في هذا الموقف.

سعر عبوات العصير

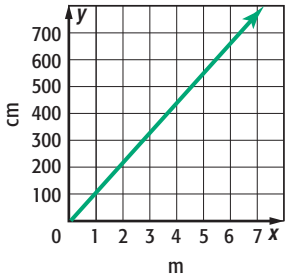


عند اختيار دالة منفصلة أو متصلة لتمثيل موقف من واقع الحياة يجب الأخذ بعين الاعتبار إذا كانت كل الأعداد الحقيقية تعد منطقية ومقبولة كعناصر في المجال أم لا.

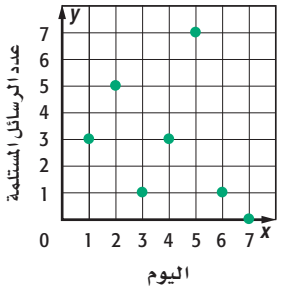
تمارين

بيِّن إذا كانت كل علاقة فيما يأتي متصلة أو منفصلة، وفسر إجابتك.

1) تحويل الوحدات



2) البريد الإلكتروني



3) y تمثل المسافة التي تقطعها سيارة في زمن مقداره x ساعة.

4) y تمثل العدد الكلي لراكبي لعبة العجلة الدوارة بعد x دورة من تشغيل اللعبة.

5) **اكتب:** مثالًا من واقع الحياة على دالة منفصلة وآخر على دالة متصلة، وفسر إجابتك.

رابط الدرس الرقمي

www.ien.edu.sa

1-3 دوال خاصة
Special Functions

فيما سبق:
درستُ حل معادلات تتضمن القيمة المطلقة.
(مهارة سابقة)

والآن:
- أكتب الدوال المتعددة التعريف وأمثّلها بيانيًّا.
- أكتب الدوال الدرجية ودوال القيمة المطلقة وأمثّلها بيانيًّا.

المفردات:
الدالة المتعددة التعريف
piecewise-defined function
الدالة المتعددة التعريف الخطية
piecewise-linear function
الدالة الدرجية
step function
دالة أكبر عدد صحيح
greatest integer function
دالة القيمة المطلقة
absolute value function

لماذا؟

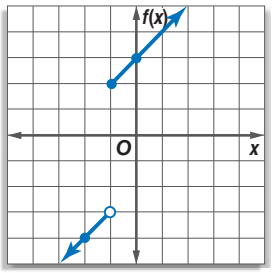
السمنة حالة مرضية يمكن تعريفها طبيًّا أنها زيادة الدهون في الجسم، وتنتج السمنة عن أخذ مقدار طاقة أكبر من حاجة الجسم دون استهلاكها. ويبين الجدول المجاور نسب المصابات بالسمنة لفئات عمرية مختلفة في المملكة.

نسب المصابات بالسمنة في المملكة حسب الفئة العمرية		
من	إلى	النسبة
15	24	19%
25	34	38%
35	44	53%
45	54	58%
55	64	49%

المصدر: مسح المعلومات الصحية في المملكة، وزارة الصحة، 1435هـ

الدالة المتعددة التعريف: الدالة التي تربط بين العمر ونسبة المصابات بالسمنة ليست خطية؛ لأن كل فترة من مجال الدالة معرّفة بعبارة مختلفة، فالدالة التي تكتب باستعمال عبارتين أو أكثر تسمى **دالة متعددة التعريف**. وعند تمثيل الدالة المتعددة التعريف بيانيًّا توضع دائرة صغيرة مظلّلة عند الطرف لتشير إلى أن النقطة تنتمي إلى التمثيل البياني، وتوضع دائرة غير مظلّلة لتشير إلى أن النقطة لا تنتمي إلى التمثيل البياني.

مثال 1 تمثيل الدالة متعددة التعريف



مثّل الدالة $f(x) = \begin{cases} x - 2 & , \ x < -1 \\ x + 3 & , \ x \geq -1 \end{cases}$ بيانيًّا.
ثم حدّد كلًّا من مجالها ومداها.

الخطوة 1: مثّل $f(x) = x - 2$ بيانيًّا عندما $x < -1$.

احسب قيمة المقدار $x - 2$ عندما $x = -1$، وعند قيمة أخرى لِـ x أقل من -1 ولتكن -2

$f(x) = x - 2$ $\qquad$ $f(x) = x - 2$
$f(-1) = (-1) - 2 = -3$ $\qquad$ $f(-2) = (-2) - 2 = -4$

حدِّد النقطتين $(-2, -4)$, $(-1, -3)$ وصل بينهما بنصف مستقيم

وبما أن العدد -1 لا يحقق المتباينة لذا نبدأ بدائرة غير مظللة عند النقطة $(-1, -3)$.

الخطوة 2: مثّل $f(x) = x + 3$ بيانيًّا عندما $x \geq -1$.

احسب قيمة المقدار $x + 3$ عندما $x = -1$، وعند قيمة أخرى لِـ x أكبر من -1 ولتكن 0

$f(x) = x + 3$ $\qquad$ $f(-1) = (-1) + 3 = 2$
$f(x) = x + 3$ $\qquad$ $f(0) = (0) + 3 = 3$

حدِّد النقطتين $(0, 3)$, $(-1, 2)$ وصل بينهما بنصف مستقيم.

وبما أن العدد -1 يحقق المتباينة، لذا نبدأ بدائرة مظلّلة عند النقطة $(-1, 2)$.

وبما أن الدالة معرّفة عند جميع قيم x، لذا فالمجال هو مجموعة الأعداد الحقيقية.

قيم $f(x)$ للأزواج المرتبة في التمثيل البياني للدالة هي جميع الأعداد الحقيقية الأقل من -3 وكل الأعداد الحقيقية الأكبر من أو تساوي 2، لذا فإن المدى هو $\{f(x) \mid f(x) < -3 \text{ أو } f(x) \geq 2\}$

تحقق من فهمك

1) $f(x) = \begin{cases} x + 2 & , \ x < 0 \\ x & , \ x \geq 0 \end{cases}$.

تمثّل الدوال المتعددة التعريف غالبًا بعدة دوال خطية. وتسمى حينئذٍ **الدالة المتعددة التعريف الخطية** .

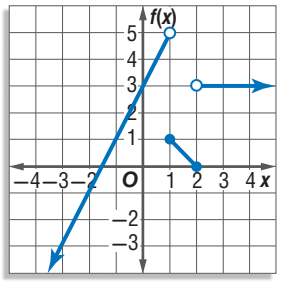
إرشادات للدراسة

تمثيل الدوال المتعددة التعريف بيانيًا

قد تكون الدوال المتعددة التعريف متصلة أو غير متصلة.

مثال 2 كتابة الدالة المتعددة التعريف

اكتب الدالة المتعددة التعريف الممثلة بيانيًّا في الشكل المجاور.



اكتب الدالة التي تمثل كل جزء في التمثيل البياني.

الجزء الأيسر يمر بالنقطتين $(-2, -1), (0, 3)$ ، وميله $\frac{-1-3}{-2-0} = 2$ ،

وباستعمال صيغة الميل ونقطة مثلًا، فإن هذا الجزء تمثله الدالة $f(x) = 2x + 3$، $(f(x) - 3 = 2(x - 0))$ ، ولوجود دائرة غير مظللة عند النقطة $(1, 5)$، فإن هذا يعني أن الدالة معرّفة على الفترة $\{x | x < 1\}$.

وبالطريقة نفسها فإن الجزء الأوسط تمثله الدالة $f(x) = -x + 2$.

وتوجد دائرتان مظللتان عند النقطتين $(1, 1)$ و $(2, 0)$، وهذا يعني أن الدالة معرّفة على الفترة $\{x | 1 \le x \le 2\}$.

كذلك الجزء الأيمن تمثله الدالة $f(x) = 3$. وتوجد دائرة غير مظلّلة عند النقطة $(2 , 3)$.

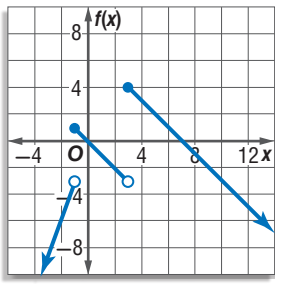
وهذا يعني أن الدالة معرّفة على الفترة $\{x | x > 2\}$، ونكتب الدالة المتعددة التعريف على النحو الآتي:

$$f(x) = \begin{cases} 2x + 3 , & x < 1 \\ -x + 2 , & 1 \le x \le 2 \\ 3 , & x > 2 \end{cases}$$

تحقق: يبين التمثيل البياني نصف مستقيم ميله موجب عندما تكون $x < 1$. ويبين أيضًا قطعة مستقيمة ميلها سالب عندما تكون $1 \le x \le 2$ ونصف مستقيم آخر ميله صفر عندما تكون $x > 2$. لذا يكون تعريف الدالة منطقيًّا للتمثيل البياني المعطى.

تحقق من فهمك

2) اكتب الدالة المتعددة التعريف الممثلة بيانيًّا في الشكل المجاور.



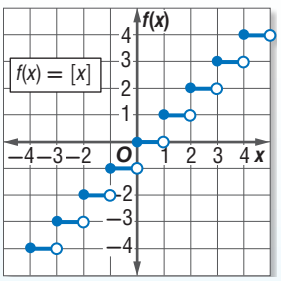
الدالة الدرجية: من الدوال المتعددة التعريف الخطية الشهيرة **الدالة الدرجية** التي تتكون من قطع مستقيمة أفقية، وقد سُميت بهذا الاسم لأن تمثيلها البياني يشبه الدرج، كما أن **دالة أكبر عدد صحيح** التي تكتب على الصورة $f(x) = [x]$، هي مثال على الدالة الدرجية؛ حيث يعني الرمز $[x]$ أكبر عدد صحيح أقل من أو يساوي x. فعلى سبيل المثال: $[3.25] = 3$ وكذلك $[-4.6] = -5$.

مفهوم أساسي دالة أكبر عدد صحيح

أضف إلى مطويتك

الدالة الرئيسة (الأم): $f(x) = [x]$، وتُعرّف على النحو التالي:

$$f(x) = \begin{cases} \vdots & \vdots \\ -1 & -1 \le x < 0 \\ 0 & 0 \le x < 1 \\ 1 & 1 \le x < 2 \\ 2 & 2 \le x < 3 \\ \vdots & \vdots \end{cases}$$



شكل التمثيل البياني: قطع مستقيمة أفقية.

المجال: مجموعة الأعداد الحقيقية

المدى: مجموعة الأعداد الصحيحة

المقطعان: $f(x) = 0$ حيث $x = 0 , 0 \le x < 1$

مثال 3 من واقع الحياة — استعمال الدالة الدرجية

عقار: يتقاضى مجمع للشقق المفروشة 300 ريال مقابل تأجير الشقة ليوم واحد أو جزء منه، و250 ريالًا مقابل تأجير الشقة ذاتها لأي يوم إضافي أو جزء منه. اكتب الدالة التي تمثل هذا الموقف ومثلها بيانيًّا.

افهم: **المعطيات:** أجرة الشقة لليوم الأول أو لجزء منه هي 300 ريال، وأجرة أي يوم إضافي أو جزء منه بعد اليوم الأول 250 ريالًا.

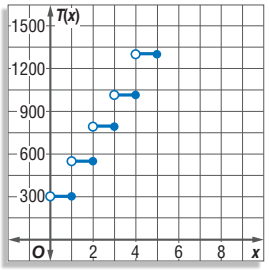
المطلوب: كتابة الدالة التي تمثل الموقف، وتمثيلها بيانيًّا.

خطط: كوِّن جدولًا يمثل الموقف؛ لتكتشف النمط، وتكتب الدالة وتمثلها بيانيًّا.

حل: إذا كان زمن التأجير أكبر من 0 يوم وأقل من أو يساوي يومًا، فإن الأجرة هي 300 ريال. وإذا كان الزمن أكبر من يوم وأقل من أو يساوي يومين فإن الأجرة هي 550 ريالًا وهكذا، لذا استعمل نمط الزمن مع الأجرة لعمل الجدول التالي، حيث x هي عدد أيام تأجير الشقة. و $T(x)$ هي أجرة الشقة، ثم مثّله بيانيًّا.

x	$0 < x \le 1$	$1 < x \le 2$	$2 < x \le 3$	$3 < x \le 4$	$4 < x \le 5$
$T(x)$	300 ريال	550 ريالا	800 ريال	1050 ريالا	1300 ريال

وعليه فإن الدالة المطلوبة وتمثيلها البياني يكونان كما يلي:



$$T(x) = \begin{cases} 300 & 0 < x \le 1 \\ 550 & 1 < x \le 2 \\ 800 & 2 < x \le 3 \\ 1050 & 3 < x \le 4 \\ 1300 & 4 < x \le 5 \\ \vdots \end{cases}$$

تحقق: بما أن المجمع يحوّل أي كسر للعدد الصحيح التالي، فإن كل قطعة مستقيمة ستحتوي على دائرة غير مظلّلة عن يسارها، وأخرى مظلّلة عن يمينها كما في الشكل.

تحقق من فهمك

3) إعادة تدوير الورق: تدفع شركة لإعادة تدوير الورق 25 ريالًا عن كل صندوق من الورق يتم إحضاره للشركة ولا تدفع أي شيء مقابل أي صندوق غير ممتلئ بالكامل. اكتب الدالة التي تمثل هذا الموقف ومثِّلها بيانيًّا.

الربط مع الحياة

تقدر المخلفات الورقية في السعودية بـ 1.5 مليون طن سنويًا، يستغل منها في عمليات التدوير 700 ألف طن فقط.

المصدر: جريدة الاقتصادية/ العدد 6081، عام 1431 هـ

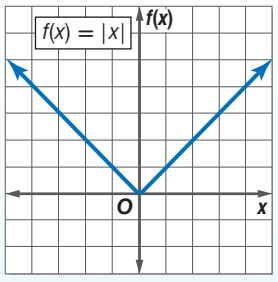
وهناك نوع آخر من الدوال المتعددة التعريف يسمى **دالة القيمة المطلقة** وهي الدالة التي تحتوي على عبارة جبرية يستعمل فيها رمز القيمة المطلقة.

مفهوم أساسي — دالة القيمة المطلقة

أضف إلى مطويتك

الدالة الرئيسة (الأم): $f(x) = |x|$، وتُعرّف على النحو الآتي:

$$f(x) = \begin{cases} x & , \quad x > 0 \\ 0 & , \quad x = 0 \\ -x & , \quad x < 0 \end{cases}$$



شكل التمثيل البياني: على شكل حرف V

المجال: مجموعة الأعداد الحقيقية

المدى: مجموعة الأعداد الحقيقية غير السالبة

المقطعان: $x = 0, f(x) = 0$

ولايمكن أن تكون: $f(x) < 0$

مثال 4 دالة القيمة المطلقة

مثّل الدالة $f(x) = |2x| - 4$ بيانيًّا، ثم حدِّد كلًّا من مجالها ومداها.

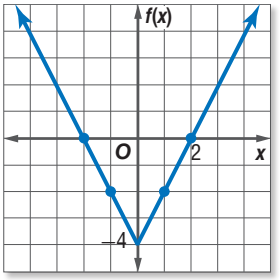
1) اجعل ما بداخل القيمة المطلقة يساوي الصفر،
أي $2x = 0$ أو $x = 0$

2) كوّن جدولًا للقيم، يحوي قيمًا لِـ x أكبر من 0 وقيمًا أصغر من 0

x	$\|2x\| - 4$
-2	0
-1	-2
0	-4
1	-2
2	0

3) مثّل الأزواج المرتبة في المستوى الإحداثي.

4) صل بين النقاط.



المجال هو مجموعة الأعداد الحقيقية، والمدى هو $\{f(x) \mid f(x) \geq -4\}$.

تحقق من فهمك

(4A) $f(x) = |x - 2|$

(4B) $f(x) = -|x| + 1$

تأكد

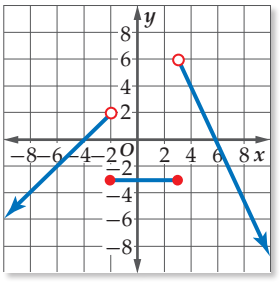
مثال 1 مثّل كل دالة مما يأتي بيانيًّا، ثم حدِّد كلًّا من مجالها ومداها:

(1)
$$f(x) = \begin{cases} -3, & x \leq -4 \\ x, & -4 < x < 2 \\ -x+6, & x \geq 2 \end{cases}$$

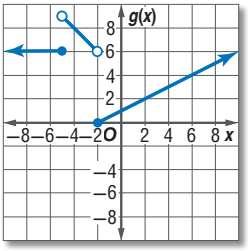
(2)
$$f(x) = \begin{cases} 8, & x \leq -1 \\ 2x, & -1 < x < 4 \\ -4-x, & x \geq 4 \end{cases}$$

مثال 2 اكتب الدالة المتعددة التعريف الممثلة بيانيًّا في كلٍّ ممَّا يأتي:

(3)



(4)



مثال 3

(5) محاضرات طبية: يريد أحد الأطباء إلقاء محاضرة حول العدوى في قاعة تتسع لِـ 250 شخصًا فقط، وكان عدد راغبي حضور المحاضرة أكثر من ذلك بكثير. مثّل بيانيًّا دالة متعددة التعريف تبين العلاقة بين عدد المحاضرات y التي يمكن أن يلقيها الطبيب، وعدد الحضور x.

المثالان 3, 4 مثّل كل دالة فيما يأتي بيانيًّا، ثم حدِّد كلًّا من مجالها ومداها:

(6) $g(x) = -2[x]$

(7) $h(x) = [x - 5]$

(8) $g(x) = |-3x|$

(9) $f(x) = 2|x|$

(10) $h(x) = |x + 4|$

(11) $s(x) = |-2x| + 6$

تدرب وحل المسائل

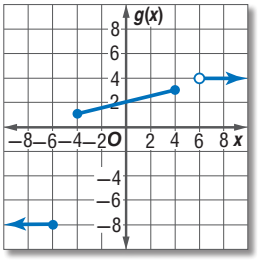
مثال 1 مثّل كل دالة فيما يأتي بيانيًّا، ثم حدّد كلًّا من مجالها ومداها:

(12
$$f(x) = \begin{cases} -3x, & x \le -4 \\ x, & 0 < x \le 3 \\ 8, & x > 3 \end{cases}$$

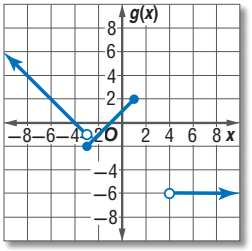
(13
$$f(x) = \begin{cases} 2x, & x \le -6 \\ 5, & -6 < x \le 2 \\ -2x + 1, & x > 4 \end{cases}$$

مثال 2 اكتب الدالة المتعددة التعريف الممثلة بيانيًّا في كلٍّ ممَّا يأتي:

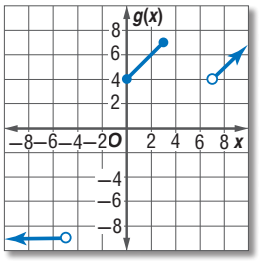
(14



(15



(16



مثال 3

(17 جمعية خيرية: تقوم جمعية خيرية بجمع الصدقات لإيصالها إلى مستحقيها، وتتبرع الجمعية أيضًا بمبلغ مساوٍ لأي صدقة دون 100 ريال أو تساويها، كما تضيف الجمعية 100 ريال إلى أي صدقة تزيد على 100 ريال.

a) حدّد نوع الدالة التي تمثّل هذا الموقف.

b) اكتب الدالة التي تصف هذا الموقف، ثم مثّلها بيانيًّا.

المثالان 3, 4 مثّل كل دالة فيما يأتي بيانيًّا، ثم حدّد كلًّا من مجالها ومداها:

(18 $f(x) = [x] - 6$

(19 $h(x) = 3[x] - 8$

(20 $f(x) = |x - 5|$

(21 $g(x) = |x + 2|$

(22 $h(x) = |2x| - 8$

(23 $k(x) = |-3x| + 3$

(24 $f(x) = 2|x - 4| + 6$

(25 $h(x) = -3|0.5x + 1| - 2$

(26 ترفيه: يوضّح الجدول المجاور: تكلفة استئجار دباب شاطئ.

a) حدِّد نوع الدالة التي تمثّل هذا الموقف.

b) اكتب الدالة التي تمثّل هذا الموقف، ثم مثّلها بيانيًّا.

استئجار الدبابات الشاطئية

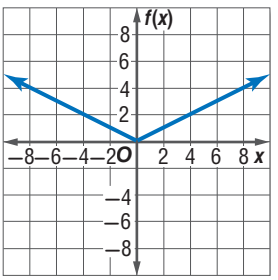
الزمن t (ساعة)	السعر (بالريال)
$0 < t \le \frac{1}{2}$	60
$\frac{1}{2} < t \le 1$	100
$1 < t \le 2$	160
$2 < t \le 3$	240

الربط مع الحياة

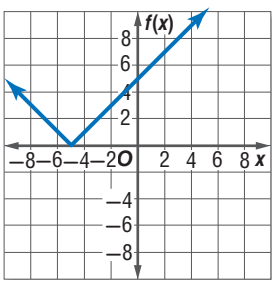
تهدف جمعيات البرّ بالمملكة إلى ترسيخ مبدأ التكافل الاجتماعي بين أفراد المجتمع وتحويله إلى واقع عملي من خلال رعاية المحتاجين وتخفيف معاناتهم بتوفير الغذاء والدواء واللباس والأثاث.

اكتب دالة القيمة المطلقة الممثلة بيانيًّا في كلٍّ ممَّا يأتي:

(27



(28



مثّل كُل دالة فيما يأتي بيانيًّا، ثم حدّد كلًّا من مجالها ومداها:

29 $g(x) = \begin{cases} [x], & x < -4 \\ x + 1, & -4 \le x \le 3 \\ -|x|, & x > 3 \end{cases}$

30 $h(x) = \begin{cases} -|x|, & x < -6 \\ |x|, & -6 \le x \le 2 \\ |-x|, & x > 2 \end{cases}$

31 **تمثيلات متعددة:** لتكن $f(x) = |x| - 4, g(x) = |3x|$

a) جدوليًّا: كوّن جدولًا لبعض قيم كلٍّ من $f(x)$ و $g(x)$ ما بين $x = 4, x = -4$.

b) بيانيًّا: مثّل كلًّا من الدالتين بيانيًّا على مستوى إحداثي مختلف.

c) عدديًّا: احسب الميل بين كل نقطتين متتاليتين في الجدول.

d) لفظيًّا: صف العلاقة بين ميل كل من جزأي دالة القيمة المطلقة.

مسائل مهارات التفكير العليا

32 **مسألة مفتوحة:** اكتب علاقة باستعمال القيمة المطلقة بحيث يكون المجال هو مجموعة الأعداد الحقيقية غير السالبة والمدى هو مجموعة الأعداد الحقيقية.

33 **تحد:** مثّل المعادلة $|y| = 2|x + 3| - 5$ بيانيًّا.

34 **تبرير:** أعط مثالًا مضادًّا للجملة الآتية، وفسِّر إجابتك.

"حتى تجد أكبر عدد صحيح لعدد غير صحيح x، فإنك تقرِّب x إلى أقرب عدد صحيح"

35 **مسألة مفتوحة:** اكتب دالة قيمة مطلقة $f(x)$، تحقق $f(5) = -3$.

36 **اكتب:** اشرح من خلال مثال كيف تستعمل الدوال المتعددة التعريف لتمثيل مسائل من واقع الحياة.

تدريب على اختبار

37 **إجابة قصيرة:** ما العبارة التي تعطي الحد النوني للنمط في الجدول التالي؟

2	4	6	8	n
7	13	19	25	?

38 أيّ دالة مما يأتي يكون فيها $f\left(-\frac{1}{2}\right) \neq -1$؟

A $f(x) = 2x$ **B** $f(x) = |-2x|$ **C** $f(x) = [x]$ **D** $f(x) = [2x]$

مراجعة تراكمية

إذا كان $f(x) = -4x + 6, g(x) = -x^2, h(x) = -2x^2 - 6x + 9$، فأوجد كل قيمة مما يأتي: (الدرس 2-1)

39 $f(2c)$ **40** $g(a + 1)$ **41** $h(6)$

حدّد مجموعات الأعداد التي ينتمي إليها كل عدد مما يأتي: (الدرس 1-1)

42 $\sqrt{36}$ **43** -3 **44** $\frac{2}{5}$ **45** $\sqrt{11}$

اختبار منتصف الفصل

الدروس 1-1 إلى 3-1

حدّد مجموعات الأعداد التي ينتمي إليها كل عدد مما يأتي:

1) $\frac{25}{11}$

2) $-\frac{128}{32}$

3) $\sqrt{50}$

4) -32.4

5) اذكر الخاصية الموضحة في المعادلة الآتية:
$7(4 + 15) = 4\,(7) + 15\,(7)$؟

6) بسّط العبارة $-3(7a - 4b) + 2(-3a + b)$

7) **ملابس:** يريد سعد شراء 3 قمصان و3 بناطيل. فإذا كان سعر القميص الواحد 35 ريالًا. وسعر البنطال الواحد 55 ريالًا. فأوجد المبلغ الذي يدفعه سعد بطريقتين مستعملًا خاصية التوزيع.

8) **اختيار من متعدد:** أي العبارات التالية تكافئ $\frac{2}{3}(4m - 5n) + \frac{1}{5}(2m + n)$ ؟

A $\frac{46}{15}m - \frac{47}{15}n$

B $46m - 47n$

C $-\frac{mn}{15}$

D $\frac{5}{4}m - \frac{9}{8}n$

9) أوجد كلًّا من النظير الجمعي والنظير الضربي للعدد $\frac{7}{6}$.

10) حدِّد كلًّا من مجال العلاقة الآتية ومداها، ثم بين هل تمثل دالة أم لا: $\{(3, 2), (4, 1), (0, 3), (5, -2), (3, 7)\}$

11) مثّل المعادلة $y = 2x - 3$ بيانيًّا، ثم بين إذا كانت تمثل دالة أم لا. وهل هي متباينة أم لا؟ وهل هي منفصلة أم متصلة؟

إذا كان $f(x) = 3x^3 - 2x + 7$، فأوجد قيمة كلٍّ مما يأتي :

12) $f(-2)$

13) $f(2y)$

14) $f(1.4)$

15) **اختيار من متعدد:** يقدر الدخل بالريال لسيارة أجرة بالدالة $f(x) = 0.35x + 49$، حيث x عدد الكيلومترات التي تقطعها السيارة. قدّر دخل السيارة إذا قطعت 250 km .

A 84 ريالا

B 112.50 ريالا

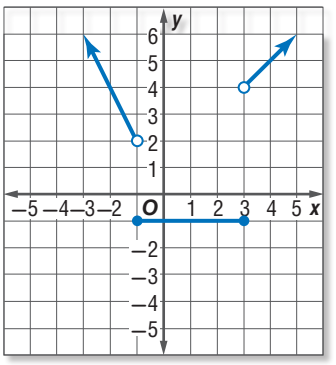
C 136.50 ريالا

D 215 ريالا

16) مثّل بيانيًّا الدالة:

$$f(x) = \begin{cases} -x\ , & x < -2 \\ x + 2\ , & -2 \le x \le 2 \\ 5\ , & x > 2 \end{cases}$$

17) اكتب الدالة المتعددة التعريف الممثلة بيانيًّا فيما يأتي:



18) حدّد كلًّا من المجال والمدى للدالة: $y = [x] + 2$.

19) مثّل الدالة $f(x) = |2x|$ ، ثم حدّد كلًّا من مجالها ومداها.

رابط الدرس الرقمي

www.ien.edu.sa

1-4

تمثيل المتباينات الخطية ومتباينات القيمة المطلقة بيانيًّا

Graphing Linear and Absolute Value Inequalities

فيما سبق

درست تمثيل الدوال الخطية. (مهارة سابقة)

والآن

- أمثّل المتباينات الخطية بيانيًا .
- أمثّل متباينات القيمة المطلقة بيانيًا .

المفردات

المتباينة الخطية
linear inequality

منطقة الحل
feasible region

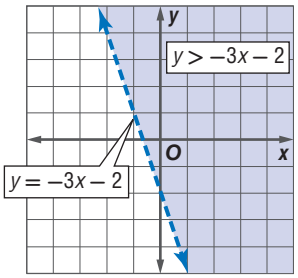
الحد
boundary

لماذا؟

دعا تركي زملاءه إلى وجبة من الفطائر والعصير الطبيعي، ورصد لتلك الدعوة مبلغ 150 ريالًا فقط.

ويمكنه أن يستعمل المتباينة الخطية: $6p + 5d \leq 150$ حيث p عدد الفطائر و d عدد أكواب العصير؛ للتأكد من أن سعر عدد معين من الفطائر وأكواب العصير سيكون ضمن ميزانيته.

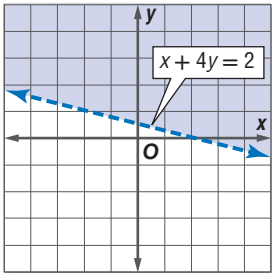
تمثيل المتباينات الخطية بيانيًا: تشبه **المتباينة الخطية** المعادلة الخطية، فالفرق بينهما فقط هو وضع رمز المتباينة بدلًا من رمز المساواة. فمثلًا، $y > -3x - 2$ هي متباينة خطية، و $y = -3x - 2$ هي المعادلة الخطية المرتبطة بها.



التمثيل البياني للمتباينة $y > -3x - 2$ مبين في الشكل المجاور على صورة منطقة مظلّلة تسمى **منطقة الحل**، فكل نقطة في المنطقة المظلّلة تحقق المتباينة، والتمثيل البياني للمستقيم $y = -3x - 2$ هو **حد** منطقة الحل وقد رُسِم المستقيم بشكل متقطع ليدل على أنه لا يحقق المتباينة. أما إذا احتوت المتباينة على الرمز $\leq$ أو $\geq$ فإن النقاط الواقعة على الحد ستحقق المتباينة وعندئذٍ يكون تمثيل المستقيم خطًّا متصلًا.

مثال 1 الحد المتقطع

مثّل المتباينة $x + 4y > 2$ بيانيًّا.



الخطوة 1: مثّل الحد وهو المستقيم $x + 4y = 2$. وبما أن رمز المتباينة هو $>$ فإن الحد سيكون متقطعًا.

الخطوة 2: اختبر النقطة (0, 0) والتي لا تقع على حد المتباينة .

$x + 4y > 2$	المتباينة الأصلية
$0 + 4(0) \stackrel{?}{>} 2$	$(x, y) = (0, 0)$
$0 > 2$ ✗	

ظلّل المنطقة التي لا تحوي (0, 0).

تحقق: يبين التمثيل البياني أن النقطة (0, 3) تقع في منطقة الحل.

$x + 4y > 2$	المتباينة الأصلية
$0 + 4(3) \stackrel{?}{>} 2$	$(x, y) = (0, 3)$
$12 > 2$ ✓	

إذن، الحل صحيح.

تحقق من فهمك

(1A) $3x + \frac{1}{2}y < 2$

(1B) $-x + 2y > 4$

الربط مع الحياة

تزوّد معامل اللغات المتخصصة بأحدث الأجهزة التقنية والتجهيزات الإلكترونية والصوتية المتطورة التي تنمي مهارَتَي المحادثة والاستماع لدى الدارسين، وتؤهلهم لاكتساب اللفظ الصحيح.

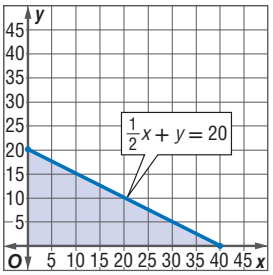
مثال 2 من واقع الحياة — الحد المتصل

رسم: يقدم مركز تدريب نوعين من دروس تعلم اللغة الإنجليزية، الأول: دروس مدتها 30 دقيقة للدرس الواحد، والثاني: دروس مدتها 60 دقيقة للدرس الواحد. وقرر مدير المركز ألا يزيد زمن دروس تعلم اللغة الإنجليزية على 20 ساعة أسبوعيًّا.

a) اكتب متباينة تمثّل عدد دروس تعلم اللغة الإنجليزية التي يمكن تقديمها أسبوعيًّا، ثم مثّلها بيانيًّا.

لتكن x عدد الدروس التي مدتها 30 دقيقة ($\frac{1}{2}$ ساعة)، و y عدد الدروس التي مدتها 60 دقيقة (ساعة واحدة). وبما أن مجموع زمن الدروس لا يزيد على 20 ساعة أسبوعيًّا، فهذا يعني إمكانية أن يساوي 20 ساعة. ولهذا فإن المتباينة تحتوي على الرمز $\leq$، ولذا يكون المستقيم الذي يمثّل الحد متصلًا. إذن المتباينة هي $\frac{1}{2}x + y \leq 20$.

الخطوة 1: مثّل الحد وهو المستقيم $\frac{1}{2}x + y = 20$ بيانيًّا.



الخطوة 2: اختبر النقطة $(0, 0)$ والتي لا تقع على الحد.

المتباينة الأصلية $\quad \frac{1}{2}x + y \leq 20$

$(x, y) = (0, 0)$ $\quad \frac{1}{2}(0) + (0) \stackrel{?}{\leq} 20$

✓ $0 \leq 20$

ظلّل المنطقة في الربع الأول فقط التي تحوي $(0, 0)$؛ وذلك لأن كلا المتغيرين لايمكن أن يكون سالبًا.

b) هل يمكن أن يقدم المركز 25 درسًا من الدروس التي مدتها 30 دقيقة، و 15 درسًا من الدروس التي مدتها 60 دقيقة خلال أسبوعٍ ما؟ فسّر إجابتك.

النقطة $(25, 15)$ تقع خارج المنطقة المظلّلة؛ لذا فهي لا تحقق المتباينة، وعليه، فلا يمكن أن يقدم المركز ذلك العدد من الدروس خلال أسبوعٍ ما.

تحقق من فهمك

2) ألعاب: مع صالح 60 ريالًا يستطيع إنفاقها في مدينة الألعاب. فإذا كان ثمن تذكرة الألعاب الإلكترونية 5 ريالات، وثمن تذكرة كل لعبةٍ عاديةٍ 6 ريالات. فاكتب متباينة تصف هذا الموقف، ثم مثّلها بيانيًّا .

تمثيل متباينة القيمة المطلقة بيانيًّا: تمثيل متباينة القيمة المطلقة مشابه لتمثيل المتباينات الخطية، مثّل بيانيًّا معادلة القيمة المطلقة المرتبطة، وبعد ذلك حدِّد إذا كان حد المتباينة متقطعًا أو متصلًا، ثم حدِّد المنطقة التي يجب تظليلها باختبار نقطة ما.

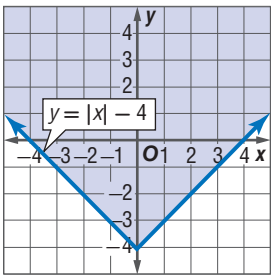
مثال 3 — تمثيل متباينة القيمة المطلقة بيانيًّا

مثّل المتباينة $y \geq |x| - 4$ بيانيًّا.

مثّل المعادلة المرتبطة $y = |x| - 4$،

وبما أن المتباينة تحتوي على إشارة $\geq$، فإن الحد يكون متصلًا.

والآن اختبر النقطة $(0, 0)$.



المتباينة الأصلية $\quad y \geq |x| - 4$

$(x, y) = (0, 0)$ $\quad 0 \stackrel{?}{\geq} |0| - 4$

✓ $0 \geq -4$

ظلّل المنطقة التي تحتوي على النقطة $(0, 0)$.

تحقق من فهمك

3A) $y \leq 2|x| + 3$ **3B)** $y \geq 3|x + 1|$

تأكـــد

مثال 1 مثّل كل متباينة فيما يأتي بيانيًّا:

1) $y \leq 4$

2) $x > -6$

3) $x + 4y \leq 2$

4) $3x + y > -8$

مثال 2 **5) وقود:** مع عامر 120 ريالًا ، ويريد تزويد سيارته بالوقود، وشراء علب زيت للمحرك بالمبلغ المتبقي. فإذا كان سعر لتر الوقود 1,37 ريال، وسعر عبوة زيت المحرك 17 ريالًا.

a) اكتب متباينة تمثّل هذا الموقف، ثم مثلها بيانيًّا.

b) هل يستطيع عامر تزويد سيارته بـ 20 لترًا من الوقود وشراء 4 عبوات زيت محرك؟ فسر إجابتك.

مثال 3 مثّل المتباينتين الآتيتين بيانيًّا.

6) $y \geq |x + 3|$

7) $y - 6 < |x|$

تدرب وحل المسائل

مثال 1 مثّل كل متباينة فيما يأتي بيانيًّا:

8) $x + 2y > 6$

9) $y \geq -3x - 2$

10) $2y + 3 \leq 11$

11) $4x - 3y > 12$

12) $6x + 4y \leq -24$

13) $y \geq \frac{3}{4}x + 6$

مثال 2 **14) مشتريات:** مع سعاد 200 ريالٍ. وتريد أن تشتري عددًا من الأطباق. وعددًا من الكؤوس؛ لتجهز لمناسبة اجتماعية، فإذا كان سعر الطبق 15 ريالًا وسعر الكأس 5 ريالات، فأجب عمَّا يأتي:

a) اكتب متباينة تمثّل العدد الممكن شراؤه من الأطباق والكؤوس، ثم مثّلها بيانيًّا.

b) هل تستطيع سعاد شراء 10 أطباق وَ 10 كؤوس؟

مثال 3 مثّل كل متباينة فيما يأتي بيانيًّا:

15) $y > |3x|$ **16)** $y + 4 \le |x - 2|$ **17)** $y - 6 < |-2x|$

18) $y + 8 < 2\left|\frac{2}{3}x + 6\right|$ **19)** $2y > |4x - 5|$ **20)** $-y \le |3x - 4|$

21) أعمال: يؤدي سعيد عملين ليحقق دخلًا أسبوعيًّا لا يقل عن 1500 ريالٍ، إذا كان الأجر الذي يتقاضاه عن كل ساعة موضّحا في الجدول المجاور، فأجب عمَّا يأتي:

العمل	الأجر في الساعة
بائع في محل تجاري/صباحًا	20 ريالاً
سائق خاص/ مساءً	25 ريالاً

a) اكتب متباينة تمثّل هذا الموقف.

b) مثّل المتباينة بيانيًّا.

c) هل سيحصل سعيد على المبلغ المطلوب إذا عمل 30 ساعة أسبوعيًّا في كل عمل؟

مثّل كل متباينة فيما يأتي بيانيًّا:

22) $y \ge |-2x - 6|$ **23)** $y \le |x - 3| + 4$ **24)** $y - 3 > -2|x + 4|$

25) زينة: تصنع ميساء عقودًا وأساور من الخرز، لتشارك بها في المعرض الفني للمدرسة، ولديها من الخرز ما يكفي لصنع 50 قطعة. لتكن x عدد الأساور، y عدد العقود.

a) اكتب متباينة تبين عدد العقود والأساور التي يمكن أن تصنعها ميساء.

b) مثّل المتباينة بيانيًّا.

c) أعط ثلاثة حلول لعدد العقود والأساور التي يمكن لميساء صنعها.

الربط مع الحياة

يصنع الخرز من طين ليّن، حيث يجفف في فرن حرارته عالية، ويمكن تشكيله إلى أشكال عديدة.

مثّل كل متباينة فيما يأتي بيانيًّا.

26) $y \ge [x]$ **27)** $y < [x + 2]$ **28)** $y \ge |[x]|$

مسائل مهارات التفكير العليا

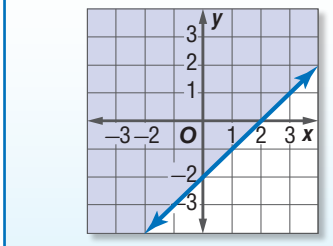
29) مسألة مفتوحة: استعمل القيمة المطلقة لتكوين متباينة على أن لا يقع حلها في الربعين الثاني أو الثالث.

30) تحد: مثّل المتباينة الآتية بيانيًّا:

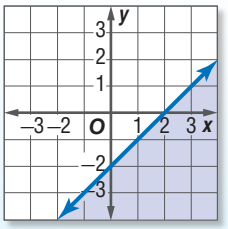
$$g(x) > \begin{cases} |x + 1|, & x \le -4 \\ -|x|, & -4 < x < 2 \\ |x - 4|, & x \ge 2 \end{cases}$$

31) **اكتشف الخطأ:** مثّل كل من زيد ومصعب المتباينة $x - y \geq 2$ بيانيًّا. فأيهما تمثيله صحيح؟ فسّر إجابتك.

زيد



مصعب



32) **تبرير:** متى يكون من الممكن تظليل منطقتين مختلفتين عند تمثيل متباينة القيمة المطلقة؟ فسر إجابتك.

33) **اكتب:** اذكر حالة لمتباينة قيمة مطلقة ليس لها حل. فسّر إجابتك.

تدريب على اختبار

34) أي النقاط الآتية تقع في منطقة حل المتباينة $y + 3x > -2$؟

A $(-3, 1)$

B $(1, -7)$

C $(0, 0)$

D $(-4, 0)$

35) أي الدوال الآتية مداها هو $\{f(x) \mid f(x) \leq 0\}$؟

A $f(x) = -x$

B $f(x) = [x]$

C $f(x) = |x|$

D $f(x) = -|x|$

مراجعة تراكمية

مثّل كل دالة فيما يأتي بيانيًّا: (الدرس 3-1)

36) $f(x) = \begin{cases} x, & x < 1 \\ 3, & 1 \leq x \leq 3 \\ -2x, & x > 3 \end{cases}$

37) $f(x) = \begin{cases} x + 3, & x < -2 \\ 2x, & -2 \leq x \leq 2 \\ -3x, & x > 2 \end{cases}$

38) $f(x) = \begin{cases} -2x, & x \leq -2 \\ x + 1, & 0 < x \leq 6 \\ x - 5, & x > 6 \end{cases}$

إذا كان:

$f(x) = 4x^2 - 10x$

$g(x) = -3x^2 + 2$

$h(x) = -7x + 8$

فأوجد كل قيمة مما يأتي: (الدرس 2-1)

39) $f(-9)$

40) $g(-4)$

41) $h(12)$

رابط الدرس الرقمي

www.ien.edu.sa

1-5

حل أنظمة المتباينات الخطية بيانيًّا

Solving Systems of Linear Inequalities by Graphing

فيما سبق:

درست حل نظام من معادلتين خطيتين بيانيًا. (مهارة سابقة)

والآن:

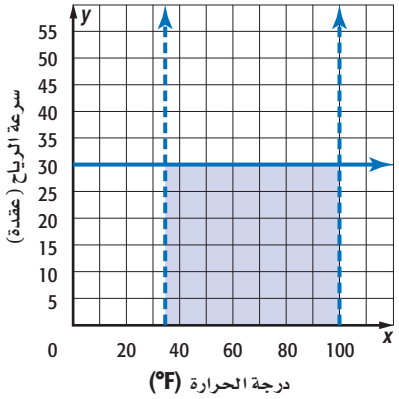
- أحل نظام متباينات خطية بيانيًا.
- أحدّد إحداثيات النقاط التي تمثل رؤوس منطقة الحل.

المفردات:

نظام المتباينات الخطية
system of linear inequalities

لماذا؟

تؤخذ الحالة الجوية بالاعتبار عند إطلاق المركبات الفضائية، فيجب أن تكون درجة الحرارة بين 35°F و 100°F، وأن لا تزيد سرعة الرياح على 30 عقدة. ويمكن تمثيل هذه الشروط بنظام من المتباينات الخطية كما في الشكل المجاور.



نظام المتباينات الخطية: حل نظام المتباينات الخطية يعني إيجاد أزواج مرتبة تحقق جميع المتباينات في النظام.

مفهوم أساسي

أضف إلى مطويتك

حل أنظمة المتباينات الخطية

الخطوة 1 مثّل كل متباينة في النظام بيانيًا.

الخطوة 2 حدِّد المنطقة المظللة المشتركة بين مناطق حل متباينات النظام والتي تمثل منطقة حل النظام.

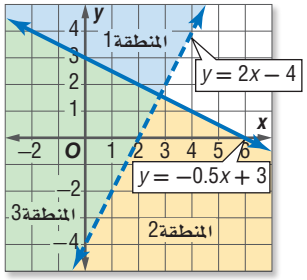
إرشادات للدراسة

حد المتباينة

إذا احتوت المتباينة على رمز < أو >، فإن الحد لا يدخل ضمن منطقة الحل، ويمثّل بخط متقطع.

مثال 1

مناطق الحل المتقاطعة



حل النظام الآتي بيانيًّا:

$$y > 2x - 4$$

$$y \le -0.5x + 3$$

بتمثيل المتباينتين بيانيًّا نجد أن: حلُّ المتباينة $y > 2x - 4$ ← المنطقتان: 1 , 3

حلُّ المتباينة $y \le -0.5x + 3$ ← المنطقتان: 2 , 3

المنطقة 3 هي منطقة مشتركة بين منطقتي حل المتباينتين ،

وعليه فتكون هي منطقة حل النظام.

تحقق:

لاحظ أن نقطة الأصل تنتمي إلى منطقة حل النظام، ويمكن استعمال نقطة الأصل نقطة اختبار. والتحقق من صحة الحل بتعويض (0, 0) بدلًا من x, y في كلتا المتباينتين.

$y > 2x - 4$

$0 \stackrel{?}{>} 2(0) - 4$

$0 \stackrel{?}{>} 0 - 4$

✓ $0 > -4$

$y \le -0.5x + 3$

$0 \stackrel{?}{\le} -0.5(0) + 3$

$0 \stackrel{?}{\le} 0 + 3$

✓ $0 \le 3$

تحقق من فهمك

(1A) $y \le -2x + 5$

$y > -\frac{1}{4}x - 6$

(1B) $y \ge |x|$

$y < \frac{4}{3}x + 5$

قراءة الرياضيات

المجموعة الخالية

هي المجموعة التي لا تحتوي على عناصر، ويرمز إليها بأحد الرمزين Ø أو { }.

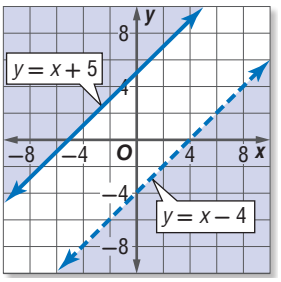
يمكن أن لا تتقاطع منطقتا حل متباينتين، وعليه فلا يوجد حل للنظام في هذه الحالة، وتكون مجموعة الحل هي المجموعة الخالية.

مثال 2 مناطق الحل غير المتقاطعة

حل النظام الآتي بيانيًّا:

$y \geq x + 5$

$y < x - 4$



بتمثيل المتباينتين بيانيًّا، نجد أن منطقتي الحل لا تتقاطعان، وبالتالي لا توجد نقاط مشتركة بينهما، ولذا فليس للنظام حل. ومجموعة الحل هي Φ.

تحقق من فهمك

2A) $y \geq -4x + 8$

$y < -4x + 4$

2B) $y \geq |x|$

$y < x - 6$

تستعمل أنظمة المتباينات الخطية في حل مسائل من واقع الحياة.

مثال 3 من واقع الحياة كتابة نظام من المتباينات

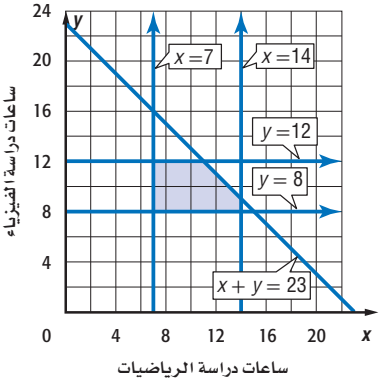
إدارة الوقت: **لدى فاطمة 25 ساعة على الأكثر للاستعداد لأداء 3 اختبارات في الرياضيات والفيزياء والتاريخ، فوضعت جدولًا زمنيًّا استعدادًا لذلك، فخصصت ساعتين لدراسة التاريخ، وخصصت من 7 إلى 14 ساعة لدراسة الرياضيات، أما الفيزياء فخصصت لدراستها من 8 إلى 12 ساعة. اكتب نظام متباينات خطية يمثل هذا الموقف ومثّله بيانيًّا.**

الرياضيات: بافتراض أن عدد ساعات دراسة الرياضيات x، فإن هذا العدد لا يقل عن 7 ساعات ولا يزيد على 14 ساعة أي أن:

$$7 \leq x \leq 14$$

الفيزياء: بافتراض أن عدد ساعات دراسة الفيزياء y، فإن هذا العدد لا يقل عن 8 ساعات ولا يزيد على 12 ساعة أي أن:

$$8 \leq y \leq 12$$



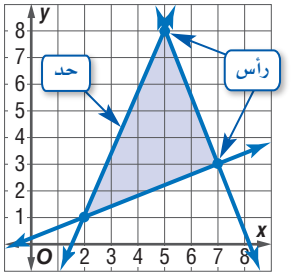
وبما أن إجمالي وقت الدراسة هو 25 ساعة ، ساعتان منها لدراسة مادة التاريخ، ويتبقى 23 ساعة على الأكثر لدراسة الرياضيات والفيزياء فإن:

$$x + y \leq 23$$

مثّل المتباينات بيانيًّا. أي زوج مرتب في منطقة حل النظام يمثّل حلًّا للنظام؟ أحد الحلول الممكنة هو 10 ساعات لدراسة الفيزياء، و 11 ساعة لدراسة الرياضيات.

تحقق من فهمك

3) سفر: خرج مشاري وبدر في رحلة لزيارة بعض محافظات المملكة برًّا فتناوبا قيادة السيارة. فإذا كانت فترات قيادة مشاري للسيارة على نحوٍ متواصل في اليوم لا تقل عن 4 ساعات، ولا تزيد على 8 ساعات، وكانت فترات قيادة بدر للسيارة على نحوٍ متواصل في اليوم لا تقل عن ساعتين ولا تزيد على 5 ساعات، وكان إجمالي زمن قيادة كليهما يوميًّا لا يزيد على 10 ساعات، فاكتب نظام متباينات خطية يمثل هذا الموقف، ثم مثّله بيانيًّا.

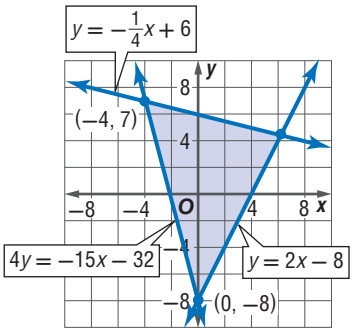


إيجاد رؤوس منطقة الحل: ينتج أحيانًا عن التمثيل البياني لنظام متباينات خطية منطقة مغلقة على شكل مضلع، ويمكن إيجاد إحداثيات رؤوس تلك المنطقة بإيجاد إحداثيات نقاط تقاطع المستقيمات المحدِّدة للمنطقة (الحدود).

مثال 4 إيجاد رؤوس منطقة الحل

أوجد إحداثيات رؤوس المثلث الناتج عن التمثيل البياني للنظام الآتي:

$y \geq 2x - 8, y \leq -\frac{1}{4}x + 6, 4y \geq -15x - 32$.



الخطوة 1: مثّل كل متباينة بيانيًّا.

الخطوة 2: من التمثيل البياني يمكنك إيجاد إحداثيات رأسين من رؤوس المثلث وهما الزوجان المرتبان $(-4, 7)$, $(0, -8)$.

الخطوة 3: أوجد إحداثيي الرأس الثالث بحل النظام المكون من المعادلتين الخطيتين:

$y = 2x - 8$, $y = -\frac{1}{4}x + 6$.

عوض عن y بقيمتها في المعادلة الثانية.

$2x - 8 = -\frac{1}{4}x + 6$ — عوّض عن y بـ $2x - 8$

$2x = -\frac{1}{4}x + 14$ — اجمع 8 لكلا الطرفين

$\frac{9}{4}x = 14$ — اجمع $\frac{1}{4}x$ لكلا الطرفين

$x = \frac{56}{9} = 6\frac{2}{9}$ — اضرب كلا الطرفين في العدد $\frac{4}{9}$

جد قيمة y.

$y = 2\left(6\frac{2}{9}\right) - 8$ — عوّض عن x بالعدد $6\frac{2}{9}$

$= 12\frac{4}{9} - 8$ — خاصية التوزيع

$= 4\frac{4}{9}$ — بسّط

إحداثيات رؤوس المثلث هي: $\left(6\frac{2}{9}, 4\frac{4}{9}\right), (0, -8), (-4, 7)$.

تحقق: قارن بين الإحداثيين اللذين وجدتهما، وبين إحداثيي الرأس الثالث في التمثيل البياني، ولاحظ أن الإحداثي x للرأس الثالث محصور بين العددين 7 , 6، لذا فإن القيمة $6\frac{2}{9}$ معقولة، وكذلك الإحداثي y محصور بين العددين 5 , 4 ، ولذا فإن القيمة $4\frac{4}{9}$ معقولة أيضًا.

تحقق من فهمك

(4A $y \geq -3x - 6$

$2y \geq x - 16$

$11y + 7x \leq 12$

(4B $5y \leq 2x + 9$

$y \leq -x + 6$

$9y \geq -2x + 5$

تأكد

المثالان 2 , 1 حل كل نظام مما يأتي بيانيًّا:

1) $y \le 6$
$y > -3 + x$

2) $y \le -3x + 4$
$y \ge 2x - 1$

3) $y > -2x + 10$
$y \le -3x - 3$

مثال 3

4) مشتريات: خصصت ليلى مبلغًا لايتجاوز 350 ريالًا لشراء نوعين من الأقلام، يباع الأول في رزم تضم الواحدة منها 10 أقلام وثمنها 35 ريالًا، ويباع الثاني في رزم تضم الواحدة منها 8 أقلام وثمنها 25 ريالًا. فإذا أرادت ليلى شراء 40 قلمًا على الأقل من كلا النوعين. فاكتب نظام متباينات خطية يمثل هذا الموقف، ومثّله بيانيًّا

مثال 4 أوجد إحداثيات رؤوس المثلث الناتج عن التمثيل البياني لكل نظام مما يأتي:

5) $y \ge 2x + 1$
$y \le 8$
$4x + 3y \ge 8$

6) $y \ge -2x - 4$
$6y \le x + 28$
$y \ge 13x - 34$

تدرب وحل المسائل

المثالان 2 , 1 حل كل نظام مما يأتي بيانيًّا:

7) $x < 3$
$y \ge -4$

8) $y > 3x - 5$
$y \le 4$

9) $y < -3x + 4$
$3y + x > -6$

10) $y \ge 0$
$y < x$

11) $6x - 2y \ge 12$
$3x + 4y > 12$

12) $-8x > -2y - 1$
$-4y \ge 2x - 5$

13) $5y < 2x + 10$
$y - 4x > 8$

14) $3y - 2x \le -24$
$y \ge \frac{2}{3}x - 1$

15) $y > -\frac{2}{5}x + 2$
$5y \le -2x - 15$

مثال 3

16) عمل جزئي: يعمل سعيد عملين جزئيين ويتقاضى على كل منهما أجرًا؛ فيتقاضى 20 ريالًا عن كل ساعة في العمل الأول، و 24 ريالًا عن كل ساعة في العمل الثاني، فإذا علمت أنه يعمل مدة لا تزيد على 25 ساعة في كلا العملين أسبوعيًّا. فاكتب نظامًا من متباينتين يبين عدد الساعات التي يعملها في كل من العملين؛ ليجمع مبلغًا لايقل عن 1850 ريالًا في 8 أسابيع، ثم مثّله بيانيًّا.

مثال 4 أوجد إحداثيات رؤوس المثلث الناتج عن التمثيل البياني لكل نظام مما يأتي:

17) $x \ge 0$
$y \ge 0$
$x + 2y < 4$

18) $y \ge 3x - 7$
$y \le 8$
$x + y > 1$

19) $x \le 4$
$y > -3x + 12$
$y \le 9$

20) $-3x + 4y \le 15$
$2y + 5x > -12$
$10y + 60 \ge 27x$

21) $8y - 19x < 74$
$38y + 26x \le 119$
$54y - 12x \ge -198$

22) $6y - 24x \ge -168$
$8y + 7x > 10$
$20y - 2x \le 64$

23) اتصالات: يجري فهد مكالمات هاتفية من هاتفه المحمول مدتها لا تزيد على 800 دقيقة، بشرط أن لا يقل عدد دقائق الاتصال نهارًا عن ضعف عددها ليلًا، ولا يقل عدد دقائق الاتصال ليلًا عن 200 دقيقة. اكتب نظام متباينات يمثل الموقف، ومثّله بيانيًّا.

24) أشجار: تصنف الأشجار في الغابات تبعًا للارتفاع ومحيط الساق إلى أربع مجموعات، ويبين الجدول الآتي ارتفاع ومحيط ساق أشجار كل مجموعة من هذه المجموعات في إحدى الغابات:

المجموعة	الأشجار المسيطرة	الأشجار شبه المسيطرة	الأشجار المتوسطة السيطرة	الأشجار غير المسيطرة
الارتفاع (*ft*)	أكثر من 72	56–72	40–55	أقل من 39
محيط الساق (*in*)	أكثر من 60	48–60	34–48	أقل من 33

a) اكتب نظام متباينات خطية يمثّل مدى كلٍّ من: الارتفاع h ومحيط الساق c للأشجار شبه المسيطرة ومثّله بيانيًّا.

b) ما المجموعة التي تنتمي إليها شجرة زيزفون ارتفاعها 48ft؟ وما المدى الذي يقع فيه محيط ساقها؟

الربط مع الحياة

تصنّف الأشجار في الغابات وفقًا لوصول الضوء إلى أوراقها إلى أربعة أصناف:

المسيطرة: أشجار يصل ضوء الشمس إلى أوراقها من أعلى فقط.

شبه المسيطرة: أشجار يصل ضوء الشمس إلى أوراقها من أعلى ومن الجوانب.

المتوسطة السيطرة: أشجار ارتفاعها بسيط ويصل ضوء الشمس إلى أوراقها من أعلى فقط.

غير المسيطرة: أشجار تنمو أسفل مستوى الأشجار الأخرى، وتكون تحت ظل الأشجار الأخرى.

حل كل نظام مما يأتي بيانيًّا:

25)
$y \geq |2x + 4| - 2$
$3y + x \leq 15$

26)
$y \geq |6 - x|$
$|y| \leq 4$

27)
$|y| \geq x$
$y < 2x$

28)
$y > -3x + 1$
$4y \leq x - 8$
$3x - 5y < 20$

29)
$6y + 2x \leq 9$
$2y + 18 \geq 5x$
$y > -4x - 9$

30)
$|x| > y$
$y \leq 6$
$y \geq -2$

31)
$2x + 3y \geq 6$
$y \leq |x - 6|$

32)
$8x + 4y < 10$
$y > |2x - 1|$

33)
$y \geq |x - 2| + 4$
$y \leq [x] - 3$

جد إحداثيات رؤوس الشكل الناتج عن التمثيل البياني لكل نظام مما يأتي:

34)
$y \geq 2x - 12$
$y \leq -4x + 20$
$4y - x \leq 8$
$y \geq -3x + 2$

35)
$y \geq -x - 8$
$2y \geq 3x - 20$
$4y + x \leq 24$
$y \leq 4x + 22$

36)
$2y - x \geq -20$
$y \geq -3x - 6$
$y \leq -2x + 2$
$y \leq 2x + 14$

37) رياضة: يريد معلم التربية البدنية أن يختار من 10 إلى 15 لاعبًا ليشكل فريق كرة سلة على أن يكون اللاعبون من طلاب الصفين الثاني والثالث، ويكون عدد اللاعبين من الصف الثالث أكثر من لاعبي الصف الثاني. اكتب نظام متباينات يمثّل ذلك الموقف، ومثّله بيانيًّا.

38) إدارة الوقت: يستثمر رامي وقت فراغه في ممارسة الرياضة وتلاوة القرآن. فإذا كان مجمل وقت فراغه لا يتجاوز 20 ساعة أسبوعيًّا، ويقضي من 4 إلى 10 ساعات منها في ممارسة الرياضة، ولا يقل زمن تلاوته للقرآن عن 10 ساعات ولا يزيد على 14 ساعة. فاكتب نظام متباينات خطية يمثّل ذلك الموقف، ومثّله بيانيًّا.

الربط مع الحياة

حثَّ الإسلام على استثمار الوقت والحرص عليه، قال صلى الله عليه وسلم: "لا تزول قدما عبد حتى يُسأل عن أربع: عن عمره فيما أفناه، وعن شبابه فيما أبلاه، وعن ماله من أين اكتسبه؟ وفيم أنفقه؟ وعن علمه ماذا عمل به؟".

[رواه الترمذي].

مسائل مهارات التفكير العليا

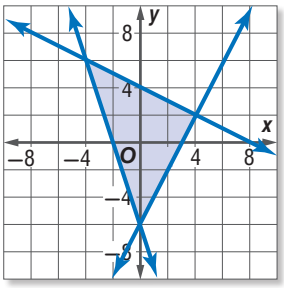
39) مسألة مفتوحة: اكتب نظامًا من متباينتين على أن يكون الحل:

a) في الربع الثالث فقط.

b) غير موجود.

c) واقعًا على مستقيم.

d) نقطة واحدة فقط.



40) تحدَّ: في الشكل المجاور، اكتب نظام المتباينات التي تمثل المنطقة المظللة حلًّا له.

41) تبرير: هل الجملة الآتية صحيحة أم غير صحيحة، وإذا كانت غير صحيحة فأعط مثالًا مضادًّا.

"النظام المكون من متباينتين خطيتين إما أن يكون ليس له حل أو أن يكون له عدد لا نهائي من الحلول".

42) اكتب: وضِّح بخطوات مكتوبة طريقة تحديد منطقة التظليل عند حل نظام متباينات خطية بيانيًّا.

تدريب على اختبار

43) يبين الجدول المجاور العلاقة بين x و y. فأيُّ المعادلات الآتية تمثل هذه العلاقة؟

A $y = 3x - 2$

B $y = 3x + 2$

C $y = 4x + 1$

D $y = 4x - 1$

x	y
1	5
2	8
3	11
4	14
5	17
6	20

44) إجابة قصيرة: إذا كانت $5y = 6z$, $3x = 2y$، فما قيمة x بدلالة z؟

مراجعة تراكمية

مثِّل كل متباينة مما يأتي بيانيًّا: (الدرس 4-1)

45) $x + y \le 6$

46) $4x - 3y < 10$

47) $5x + 7y \ge -20$

مثِّل كل دالة مما يأتي بيانيًّا، وحدِّد كلًّا من مجالها ومداها: (الدرس 3-1)

48) $f(x) = |x - 3|$

49) $h(x) = [x] - 5$

إذا كان $g(x) = 3x - 4$, $f(x) = 2x + 5$، فأوجد قيمة كلٍّ مما يأتي: (الدرس 2-1)

50) $g(-2)$

51) $f(-0.25)$

52) $g(-0.75)$

معمل الحاسبة البيانية
أنظمة المتباينات الخطية

رابط الدرس الرقمي
www.ien.edu.sa

الهدف
أستعمل الحاسبة البيانية لحل أنظمة متباينات خطية.

يمكنك استعمال الحاسبة البيانية TI-nspire لحل أنظمة متباينات خطية بيانيًّا.

مثال حل نظام من متباينتين خطيتين

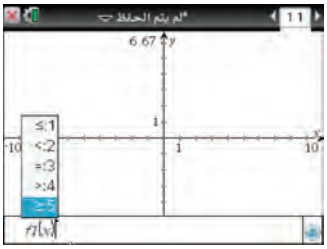
استعمل الحاسبة البيانية لحل النظام المكوَّن من المتباينتين الآتيتين:

$y \geq -3x + 4$

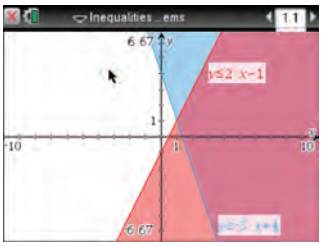
$y \leq 2x - 1$

الخطوات:

- افتح الآلة الحاسبة بالضغط على on .
- من الشاشة الظاهرة اختر 1 مستند جديد (مستعملًا الأسهم).
- من الشاشة الظاهرة اختر 2 إضافة تطبيق الرسوم البيانية (مستعملًا).



- اكتب المتباينة الأولى $y \geq -3x + 4$ ، وذلك بالضغط على مفتاح del ، ثم اختر الإشارة ≥ مستعملًا الأسهم فتظهر $y \geq$ ، ثم أكمل كتابة المتباينة ثم اضغط enter .
- اكتب المتباينة الثانية $y \leq 2x - 1$ بالضغط على المفتاح tab ثم المفتاح del ، ثم اختر الإشارة ≤ مستعملًا الأسهم فتظهر $y \leq$ ، أكمل كتابة المتباينة ثم اضغط enter ، فتكون منطقة الحل هي منطقة التظليل المشترك.



[−10, 10] scl: 1 by [−6.67, 6.67] scl: 1

لاحظ نمط التظليل فوق المستقيم $y = -3x + 4$ ، وتحت المستقيم $y = 2x - 1$.

إن منطقة الحل هي المنطقة الناتجة عن تقاطع نمطَي التظليل، وهي المنطقة التي تحوي جميع النقاط التي تحقق النظام $y \geq -3x + 4 , y \leq 2x - 1$.

تمارين:

استعمل الحاسبة البيانية لحل كل نظام من متباينتين مما يأتي:

1) $y \geq 3$
$y \leq -x + 1$

2) $y \geq -4x$
$y \leq -5$

3) $y \geq 2 - x$
$y \leq x + 3$

4) $y \geq 2x + 1$
$y \leq -x - 1$

5) $2y \geq 3x - 1$
$3y \leq -x + 7$

6) $y + 5x \geq 12$
$y - 3 \leq 10$

7) $5y + 3x \geq 11$
$3y - x \leq -8$

8) $10y - 7x \geq -19$
$7y - 5x \leq 11$

9) $\frac{1}{6}y - x \geq -3$
$\frac{1}{5}y + x \leq 7$

رابط الدرس الرقمي

www.ien.edu.sa

1-6 البرمجة الخطية والحل الأمثل
Optimization with Linear Programming

فيما سبق:
درست حل أنظمة متباينات خطية بيانيًا. (مهارة سابقة)

والآن:
- أجد القيمة العظمى والقيمة الصغرى لدالة ضمن منطقة الحل.
- أستعمل البرمجة الخطية لإيجاد الحل الأمثل لمسائل حياتية.

المفردات:
القيود constraints
البرمجة الخطية linear programming
محدودة bounded
غير محدودة unbounded
الحل الأمثل optimize

لماذا؟

يبين الجدول أدناه أكبر وأقل عدد للأثواب المنتجة في اليوم الواحد من المقاسين الكبير والصغير، وتكلفة إنتاج كل ثوب منها في أحد المصانع الوطنية.

عدد الأثواب المنتجة في اليوم الواحد			
المقاس	أقل عدد	أكبر عدد	تكلفة إنتاج الثوب
صغير	600	1500	55 ريالا
كبير	800	1700	70 ريالا

إذا كان عدد الأثواب المطلوب إنتاجها من المقاسين في اليوم الواحد لا يقل عن 2000 ثوب، فكم ثوبًا من كل مقاس يجب إنتاجه لتكون التكلفة أقل ما يمكن ؟

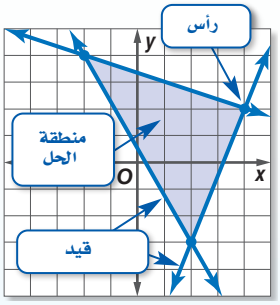
هناك **قيود** إضافية على إنتاج المصنع ناجمة عن الطلب والشحن وكفاءة المصنع. وللتعبير عن هذه القيود يمكن استعمال أنظمة المتباينات الخطية.

القيمة العظمى والقيمة الصغرى: تواجه المصانع في كثير من الأحيان أوضاعًا ضمن قيود مختلفة وتسعى للوصول إلى أقل تكلفة أو إلى أعلى ربح. مثل هذه الأوضاع يمكن التعامل معها عادة باستعمال البرمجة الخطية.

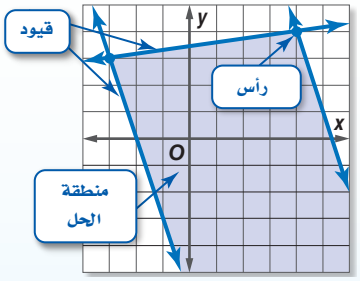
البرمجة الخطية: هي طريقة لإيجاد القيمة العظمى أو الصغرى لدالة ما تحت قيود معينة كل منها عبارة عن متباينة خطية، وذلك بعد تمثيل نظام المتباينات بيانيًا، وتقع القيمة العظمى أو الصغرى – إن وجدت – للدالة ذات الصلة دائمًا عند أحد رؤوس منطقة الحل.

مفهوم أساسي
منطقة الحل

أضف إلى مطويتك



إذا كانت منطقة الحل **محدودة** (مغلقة) أو محصورة بقيود كما في الشكل أعلاه، فإن القيمة العظمى و القيمة الصغرى للدالة تظهر دائمًا عند رؤوس منطقة الحل.



إذا كانت منطقة الحل مفتوحة وممتدة، فهي بذلك **غير محدودة**، ويمكن أن تحتوي على قيمة عظمى أو قيمة صغرى.

قراءة الرياضيات

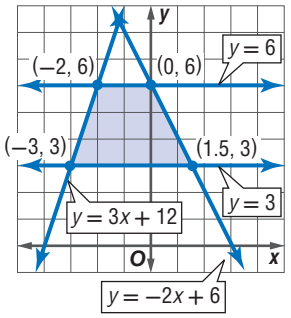
رمز الدالة

يستعمل الرمز $f(x, y)$ للتعبير عن الدالة في المتغيرين x , y . وتُقرأ f لـ x وَ y .

مثال 1 منطقة الحل المحدودة

مثّل نظام المتباينات الآتي بيانيًّا، ثم حدِّد إحداثيات رؤوس منطقة الحل، وأوجد القيمة العظمى والقيمة الصغرى للدالة المعطاة في هذه المنطقة:

$$3 \le y \le 6$$
$$y \le 3x + 12$$
$$y \le -2x + 6$$
$$f(x, y) = 4x - 2y$$



الخطوة 1: مثّل المتباينات بيانيًّا، وحدّد إحداثيات الرؤوس.

الخطوة 2: جد قيمة الدالة عند كل رأس.

(x, y)	$4x - 2y$	$f(x, y)$	
$(-3, 3)$	$4(-3) - 2(3)$	-18	
$(1.5, 3)$	$4(1.5) - 2(3)$	0	← قيمة عظمى
$(0, 6)$	$4(0) - 2(6)$	-12	
$(-2, 6)$	$4(-2) - 2(6)$	-20	← قيمة صغرى

القيمة العظمى للدالة تساوي 0 وتكون عند النقطة $(1.5, 3)$، والقيمة الصغرى للدالة تساوي -20 وتكون عند النقطة $(-2, 6)$.

تحقق من فهمك

(1A)

$$-2 \le x \le 6$$
$$1 \le y \le 5$$
$$y \le x + 3$$
$$f(x, y) = -5x + 2y$$

(1B)

$$-6 \le y \le -2$$
$$y \le -x + 2$$
$$y \le 2x + 2$$
$$f(x, y) = 6x + 4y$$

تنبيه

القيمة العظمى والصغرى

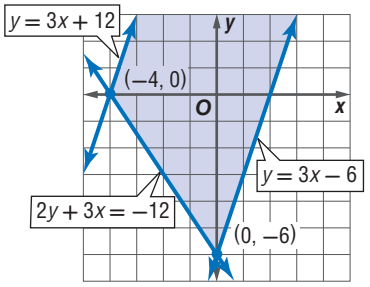
لا تفترض عدم وجود قيم عظمى أو صغرى إذا كانت منطقة الحل غير محدودة، بل اختبر قيمة الدالة عند كل رأس؛ لتحدِّد إذا كان هناك قيمة عظمى أو صغرى.

إذا نتج عن التمثيل البياني لنظام متباينات منطقةٌ مفتوحة وممتدة، فإنها تكون غير محدودة.

مثال 2 منطقة الحل غير المحدودة

مثّل نظام المتباينات الآتي بيانيًّا، ثم حدّد إحداثيات رؤوس منطقة الحل، وأوجد القيمة العظمى والقيمة الصغرى للدالة المعطاة في هذه المنطقة:

$$2y + 3x \ge -12 \text{ , } y \le 3x + 12 \text{ , } y \ge 3x - 6 \text{ , } f(x, y) = 9x - 6y$$



مثّل المتباينات بيانيًّا، وأوجد قيمة الدالة عند كل رأس؛ لأن القيمة العظمى أو الصغرى – إن وجدت – تكون عند الرؤوس.

(x, y)	$9x - 6y$	$f(x, y)$
$(-4, 0)$	$9(-4) - 6(0)$	-36
$(0, -6)$	$9(0) - 6(-6)$	36

القيمة العظمى للدالة تساوي 36 وتكون عند النقطة $(0, -6)$، ولا توجد قيمة صغرى للدالة؛ لأن هناك نقطة أخرى في منطقة الحل وهي $(0, 8)$ وتُعطي القيمة 48 – للدالة وهي أقل من -36.

تحقق من فهمك

(2A)

$$y \le 8$$
$$y \ge -x + 4$$
$$y \le -x + 10$$
$$f(x, y) = -6x + 8y$$

(2B)

$$y \ge x - 9$$
$$y \le -4x + 16$$
$$y \ge -4x - 4$$
$$f(x, y) = 10x + 7y$$

إيجاد الحل الأمثل: يُسمّى البحث عن السعر أو الكمية الأفضل أو الأنسب لتقليل التكلفة أو زيادة الربح **الحل الأمثل**، ويمكنك الحصول على ذلك الحل باستعمال البرمجة الخطية.

مفهوم أساسي

أضف إلى مطويتك

استعمال البرمجة الخطية لإيجاد الحل الأمثل

الخطوة 1 حدّد المتغيرات.

الخطوة 2 اكتب نظام متباينات خطية يمثّل المسألة.

الخطوة 3 مثل نظام المتباينات بيانيًّا.

الخطوة 4 جد إحداثيات رؤوس منطقة الحل.

الخطوة 5 اكتب الدالة الخطية التي تريد إيجاد قيمتها العظمى أو الصغرى.

الخطوة 6 عوض إحداثيات الرؤوس في الدالة.

الخطوة 7 اختر القيمة العظمى أو الصغرى وفقًا لما هو مطلوب في المسألة.

الربط مع الحياة

جاوز عدد مصانع الألبسة الجاهزة بالمملكة 300 مصنع، تغطي بإنتاجها المتميز نحو ثلث احتياجات السوق المحلية.

مثال 3 من واقع الحياة

استعمال البرمجة الخطية لإيجاد الحل الأمثل

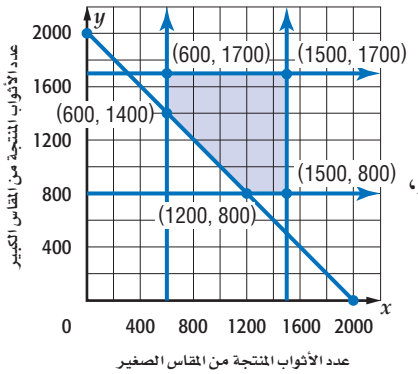
أعمال: عد إلى الموقف الوارد في بداية هذا الدرس، واستعمل البرمجة الخطية لإيجاد عدد القطع التي يتطلب إنتاجها من المقاسين، لتكون التكلفة أقل ما يمكن.

الخطوة 1: افرض أن x هي عدد الأثواب المنتجة من المقاس الصغير. y هو عدد الأثواب المنتجة من المقاس الكبير.

الخطوة 2:

$$600 \le x \le 1500$$
$$800 \le y \le 1700$$
$$x + y \ge 2000$$

الخطوتان 3 و 4: مثّل نظام المتباينات بيانيًّا كما في الشكل المجاور، ثم حدّد رؤوس منطقة الحل.



الخطوة 5: الدالة التي تريد إيجاد قيمتها الصغرى هي:

$$f(x, y) = 55x + 70y.$$

الخطوة 6:

(x, y)	$55x + 70y$	$f(x, y)$	
(600, 1700)	55(600) + 70(1700)	152000	
(600, 1400)	55(600) + 70(1400)	131000	
(1500, 1700)	55(1500) + 70(1700)	201500	← قيمة عظمى
(1500, 800)	55(1500) + 70(800)	138500	
(1200, 800)	55(1200) + 70(800)	122000	← قيمة صغرى

الخطوة 7: يجب إنتاج 1200 ثوبٍ من المقاس الصغير، و 800 ثوبٍ من المقاس الكبير لتكون التكلفة أقل ما يمكن.

إرشادات للدراسة

منطقية الحل

اختبر منطقية حلك بالتأمل في سياق المسألة.

تحقق من فهمك

3) مجوهرات: تصوغ أسماء من 10 إلى 25 عقدًا، ومن 15 إلى 40 سوارًا شهريًّا. فإذا كانت أجرة صياغة العقد 50 ريالًا. وأجرة صياغة السوار 30 ريالًا، وصاغت في أحد الأشهر 30 قطعة من العقود والأساور على الأقل، فكم قطعة من كلا النوعين عليها صياغتها لتحصل على أكبر أجر؟

تأكد

المثالان 2 , 1 مثّل كل نظام مما يأتي بيانيًّا، ثم حدّد إحداثيات رؤوس منطقة الحل، وأوجد القيمة العظمى والقيمة الصغرى للدالة المعطاة في هذه المنطقة:

1)
$y \le 5$
$x \le 4$
$y \ge -x$
$f(x, y) = 5x - 2y$

2)
$y \le -3x + 6$
$-y \le x$
$y \le 3$
$f(x, y) = 8x + 4y$

3)
$y \ge -3x + 2$
$9x + 3y \le 24$
$y \ge -4$
$f(x, y) = 2x + 14y$

4)
$-2 \le y \le 6$
$3y \le 4x + 26$
$y \le -2x + 2$
$f(x, y) = -3x - 6y$

5)
$-3 \le y \le 7$
$4y \ge 4x - 8$
$6y + 3x \le 24$
$f(x, y) = -12x + 9y$

6)
$y \le 2x + 6$
$y \ge 2x - 8$
$y \ge -2x - 18$
$f(x, y) = 5x - 4y$

مثال 3

7) ثقافة مالية : يبلغ مجموع ساعات العمل اليومي لعمال قسم الإنتاج في مصنع للغسالات 200 ساعة على الأكثر، ولعمال قسم ضبط الجودة 90 ساعة على الأكثر، ويبين الجدول الآتي عدد الساعات التي يتطلبها إنتاج وضبط جودة نوعين من الغسالات.

الزمن اللازم لتصنيع الغسالة

	قسم الإنتاج	قسم ضبط الجودة
النوع الأول	5 ساعات	ساعتان
النوع الثاني	4 ساعات	ساعتان

a) اكتب نظام متباينات يمثّل هذا الموقف.

b) مثّل نظام المتباينات بيانيًّا، وحدّد منطقة الحل.

c) حدِّد إحداثيات رؤوس منطقة الحل.

d) إذا كان ربح الغسالة من النوع الأول 80 ريالًا، ومن النوع الثاني 50 ريالًا، فاكتب دالة تمثل الربح الكلي لكلا النوعين.

e) ما عدد الغسالات التي يجب تصنيعها من كل نوع للحصول على أكبر ربح ممكن؟ وما هو هذا الربح؟

تدرب وحل المسائل

المثالان 2 , 1 مثّل كل نظام مما يأتي بيانيًّا، ثم حدِّد إحداثيات رؤوس منطقة الحل، وأوجد القيمة العظمى والقيمة الصغرى للدالة المعطاة في هذه المنطقة:

8)
$-8 \le y \le -2$
$y \le x$
$y \le -3x + 10$
$f(x, y) = 5x + 14y$

9)
$-3 \le x \le 2$
$y \ge -2x - 6$
$4y \le 2x + 32$
$f(x, y) = -4x - 9y$

10)
$x + 4y \ge 2$
$2x + 4y \le 24$
$2 \le x \le 6$
$f(x, y) = 6x + 7y$

11)
$x \ge -6$
$y + x \le -1$
$2x + 3y \ge -9$
$f(x, y) = -10x - 12y$

12)
$x \ge -8$
$3x + 6y \le 36$
$2y + 12 \ge 3x$
$f(x, y) = 10x - 6y$

13)
$y \ge |x - 2|$
$y \le 8$
$8y + 5x \le 49$
$f(x, y) = -5x - 15y$

14) $y \le x + 4$
$y \ge x - 4$
$y \le -x + 10$
$y \ge -x - 10$
$f(x, y) = -10x + 9y$

15) $-4 \le x \le 8$
$-8 \le y \le 6$
$y \ge x - 6$
$4y + 7x \le 31$
$f(x, y) = 12x + 8y$

16) $y \ge |x + 1| - 2$
$0 \le y \le 6$
$-6 \le x \le 2$
$x + 3y \le 14$
$f(x, y) = 5x + 4y$

مثال 3

17) صناعة: ينتج مصنع نوعين من وحدات الإنارة؛ يباع النوع الأول بسعر 25 ريالًا، أما النوع الثاني فيباع بسعر 35 ريالًا. فإذا كانت الطاقة الإنتاجية للمصنع لا تزيد على 450 وحدة إنارة يوميًّا، وكان على المصنع أن ينتج ما لا يقل عن 100 وحدة إنارة من النوع الأول وما لا يزيد على 200 وحدة إنارة من النوع الثاني، فما عدد وحدات الإنارة اللازم إنتاجها من كل نوع ليكون دخل المصنع اليومي أكبر ما يمكن؟

18) طلاء: إذا كان الوقت المتاح لمعاذ لطلاء 45 جدارًا وسقفًا متساوون في المساحة في أحد المباني هو 20 يومًا، ويستطيع معاذ طلاء 2.5 جدار، أو سقفين في اليوم الواحد.

a) اكتب نظام متباينات خطية يمثّل هذا الموقف.

b) مثّل نظام المتباينات بيانيًّا، وحدِّد منطقة الحل وإحداثيات رؤوسها.

c) إذا كان معاذ يتقاضى 26 ريالًا عن طلاء الجدار، و 30 ريالًا عن طلاء السقف، فاكتب دالة تمثل المبلغ الكلي الذي سيتقاضاه.

d) ما عدد الجدران والأسقف التي عليه طلاؤها ليتقاضى أكبر مبلغ؟ وما هو هذا المبلغ؟

19) شحن: يشحن مزارع منتجاته بالتعاون مع شركة شحن مختصة، وذلك في حاويات مبردة تبلغ حمولة الواحـــدة منها 4200 kg، وحجم الحيّز الذي توضع فيه البضائع بداخلها $480\ ft^3$، وتوضع المنتجات في أثناء الشحن في صناديق بمقاسين؛ صغيرة حجمها $3\ ft^3$ وتزن 25 kg، وكبيرة حجمها $5\ ft^3$، وتزن 50 kg، وأجرة شركة الشحن هي 5 ريالات عن كل صندوق من المقاس الصغير، و 8 ريالات عن كل صندوق من المقاس الكبير.

a) جد عدد الصناديق المشحونة من كلا النوعين لتكون الأجرة أكبر ما يمكن.

b) ما أكبر أجرة ممكنة لحاوية الشحن؟

الربط مع الحياة

تدوير المواد يحمي الإنسان، ويقلل الاستهلاك، ويرشد الطاقة، ويقي البيئة من المخلفات والانبعاثات الضارة.

20) إعادة التدوير: يقوم مصنع بإعادة تدوير ما لايزيد على 1200 طن من البلاستيك شهريًّا لصنع حاويات بمقاسين صغير وكبير، وعلى المصنع أن يستعمل ما لايقل عن 300 طن في صنع الحاويات الصغيرة وما لايقل عن 450 طنًّا في صنع الحاويات الكبيرة. إذا كان المصنع يحقق ربحًا قدره 175 ريالًا لكل طن بلاستيك تم استعماله لصنع الحاويات الصغيرة، و 200 ريال لكل طن تم استعماله لصنع الحاويات الكبيرة. فما أكبر ربح يمكن تحقيقه؟ وما عدد الأطنان المستعملة لكل نوع من الحاويات لتحقيق ذلك الربح؟

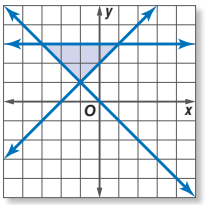
مسائل مهارات التفكير العليا

21) **مسألة مفتوحة:** اكتب نظام متباينات خطية على أن تكون منطقة الحل محدودة وتقع في الربع الرابع فقط ومساحتها 20 وحدة مربعة.

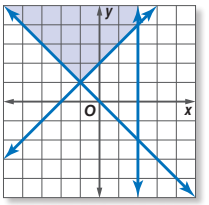
22) **تحد:** جد مساحة المنطقة المحدودة بالمتباينات : $y \geq |x| - 3, y \leq -|x| + 3, x \geq |y|$.

23) حدِّد نظام المتباينات المختلف عن الأنظمة الثلاثة الأخرى فيما يأتي، وضِّح إجابتك.

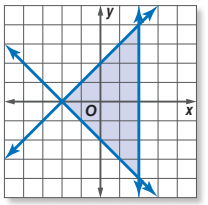
(a



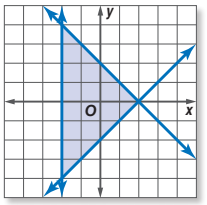
(b



(c



(d



24) **تبرير:** حدِّد إذا كانت الجملة الآتية صحيحة أحيانًا أو صحيحة دائمًا أو غير صحيحة أبدًا. وضِّح إجابتك.

"في المنطقة غير المحدودة لا يكون للدالة قيمة عظمى وقيمة صغرى في الوقت نفسه"

تدريب على اختبار

25) حصل عامل على مبلغ 1950 ريالًا أجرة تبليط مساحة من الأرضيات والجدران في أحد البيوت، فإذا كانت أجرة تبليط المتر المربع من الأرضيات 12 ريالًا، وأجرة تبليط المتر المربع من الجدران 15 ريالًا وكان عدد أمتار بلاط الأرضيات يقل عن 3 أمثال عدد أمتار بلاط الجدران بـ $16m^2$، فأي أنظمة المعادلات الآتية تمثّل هذا الموقف؟

A $x + y = 1950$
$3x = y$

B $12x + 15y = 1950$
$x + 16 = 3y$

C $2x + 3y = 15$
$x + y = 12$

D $x - y = 1950$
$12x + 15y = 3$

26) **هندسة:** أيٌّ مما يأتي يُعد وصفًا مناسبًا للتمثيل البياني للمعادلتين $4y = 12x + 16$, $y = 3x - 5$؟

A مستقيمان لهما المقطع y نفسه .

B مستقيمان متعامدان.

C مستقيمان لهما المقطع x نفسه .

D مستقيمان متوازيان.

مراجعة تراكمية

حل كل نظام مما يأتي بيانيًّا: (الدرس 5-1)

27) $3x + 2y \geq 6$
$4x - y \geq 2$

28) $4x - 3y < 7$
$2y - x < -6$

29) $3y \leq 2x - 8$
$y \geq \frac{2}{3}x - 1$

حدّد مجموعة الأعداد التي ينتمي إليها كل عدد فيما يأتي: (الدرس 1-1)

30) -7

31) $-\frac{1}{3}$

32) $\sqrt{3}$

دليل الدراسة والمراجعة

ملخص الفصل

مفاهيم أساسية

خصائص الأعداد الحقيقية (الدرس 1-1)

- تُقسم مجموعة الأعداد الحقيقية إلى مجموعتين، هما: مجموعة الأعداد النسبية (Q)، ومجموعة الأعداد غير النسبية (I). أما مجموعة الأعداد النسبية فتحوي: مجموعة الأعداد الصحيحة (Z)، ومجموعة الأعداد الكلية (W)، ومجموعة الأعداد الطبيعية (N).

العلاقات والدوال (الدرس 2-1)

- الدالة هي علاقة يرتبط فيها كل عنصر في المجال بعنصر واحد فقط في المدى.

دوال خاصة (الدرس 3-1)

- الدالة المتعددة التعريف: هي الدالة التي تكتب باستعمال أكثر من عبارة.

تمثيل المتباينات الخطية ومتباينات القيمة المطلقة بيانيًّا (الدرس 4-1)

- يمكنك تمثيل المتباينة باتباع الخطوات الآتية:

الخطوة 1: مثّل المعادلة الخطية المرتبطة بها، وحدد إذا كان حد المتباينة متقطعًا أو متصلًا.

الخطوة 2: اختر نقطة لا تقع على حد المتباينة واختبرها إن كانت تحقق المتباينة أم لا.

الخطوة 3: إذا كانت النقطة تحقق المتباينة، فظلّل المنطقة التي تحتوي على النقطة. وإلّا فظلّل المنطقة الأخرى.

حل أنظمة المتباينات الخطية بيانيًّا (الدرس 5-1)

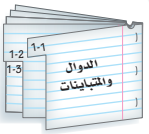
- يمكن إيجاد حل نظام متباينات خطية عن طريق تمثيل المتباينات بيانيًّا وإيجاد منطقة الحل، وهي المنطقة المشتركة بين حلول متباينات النظام، وإذا لم يكن هناك منطقة مشتركة فإن مجموعة الحل هي ∅.

البرمجة الخطية والحل الأمثل (الدرس 6-1)

- إيجاد القيمة الصغرى أو العظمى لدالة في منطقة على المستوى الإحداثي يحددها نظام متباينات يمثل قيودًا على الدالة.
- إيجاد الحل الأمثل يعني إيجاد السعر أو الكمية التي تجعل الربح أكبر ما يمكن، أو التكلفة أقل ما يمكن.

المطويات منظم أفكار

تأكد من أن المفاهيم الأساسية مدونة في مطويتك.



المفردات

الأعداد الحقيقية (12)
الأعداد النسبية (12)
الأعداد غير النسبية (12)
الأعداد الصحيحة (12)
الأعداد الكلية (12)
الأعداد الطبيعية (12)
الدالة المتباينة (18)
العلاقة المنفصلة (19)
العلاقة المتصلة (19)
اختبار الخط الرأسي (19)
المتغير المستقل (21)
المتغير التابع (21)
رمز الدالة (21)
الدالة المتعددة التعريف (25)
الدالة المتعددة التعريف
الخطية (26)
الدالة الدرجية (26)
دالة أكبر عدد صحيح (26)
دالة القيمة المطلقة (27)
المتباينة الخطية (32)
الحد (32)
منطقة الحل (32)
نظام المتباينات الخطية (37)
القيود (44)
البرمجة الخطية (44)
محدودة (44)
غير محدودة (44)
الحل الأمثل (46)

اختبار المفردات

حدد إذا كانت كل من العبارتين الآتيتين صحيحة أم خاطئة ؟

1) $\sqrt{12}$ ينتمي إلى مجموعة الأعداد النسبية.

2) تحتوي مجموعة الأعداد النسبية على الكسور العشرية المنتهية والدورية.

اختر المصطلح المناسب بين الأقواس لإكمال كل جملة فيما يأتي:

3) تكون الدالة (منفصلة، متباينة) إذا كان كل عنصر في المجال مرتبطًا بعنصر مختلف في المدى، على أن لا يكون لأكثر من عنصر في المجال الصورة نفسها.

4) (مجال، مدى) العلاقة هو مجموعة إحداثيات x للأزواج المرتبة التي تكوّن العلاقة.

5) تُسمى الدالة التي تكتب باستعمال تعبيرين أو أكثر دالة (خطية، متعددة التعريف).

أكمل كل جملة فيما يأتي بالمصطلح المناسب:

6) _____ هي طريقة لإيجاد القيمة الصغرى أو العظمى لدالة تحت شروط معينة يُعبّر عنها بنظام من المتباينات.

7) إيجاد _____ يعني إيجاد السعر الأفضل أو التكلفة الأنسب باستعمال البرمجة الخطية.

8) تُسمى منطقة الحل المفتوحة _____.

مراجعة الدروس

1-1 خصائص الأعداد الحقيقية (الصفحات: 12-17)

حدّد مجموعات الأعداد التي ينتمي إليها كل عدد ممّا يأتي :

9) $1.\overline{3}$ **10)** $\sqrt{4}$ **11)** $-\frac{3}{4}$

بسّط كل عبارة مما يأتي :

12) $4x - 3y + 7x + 5y$

13) $2(a + 3) - 4a + 8b$

14) $4(2m + 5n) - 3(m - 7n)$

15) مال: اشترى سعد 3 شطائر بسعر 3.5 ريالات للشطيرة الواحدة، و 3 علب عصير بسعر 2.5 ريال للعلبة الواحدة.

a) استعمل خاصية التوزيع لتكتب عبارتين تمثل كل منهما المبلغ الذي دفعه سعد.

b) أوجد المبلغ الذي دفعه سعد باستعمال خاصية التوزيع.

مثال 1

حدّد مجموعات الأعداد التي ينتمي إليها العدد $\sqrt{50}$

$\sqrt{50} = 5\sqrt{2}$ مجموعة الأعداد غير النسبية (I)، ومجموعة الأعداد الحقيقية (R)

مثال 2

بسّط العبارة : $-4(a + 3b) + 5b$

$-4(a + 3b) + 5b = -4(a) + -4(3b) + 5b$ خاصية التوزيع

$= -4a - 12b + 5b$ اضرب

$= -4a - 7b$ بسّط

1-2 العلاقات والدوال (الصفحات: 18-23)

حدد مجال كلّ علاقة مما يأتي ومداها، وبيّن ما إذا كانت دالة أم لا، وإذا كانت كذلك فهل هي متباينة أم لا؟

16) $\{(1, 2), (3, 4), (5, 6), (7, 8)\}$

17) $\{(-3, 0), (0, 2), (2, 4), (4, 5), (5, 2)\}$

18) $\{(-4, 1), (3, 3), (1, 1), (-2, 5), (3, -4)\}$

19) $\{(7, -4), (5, -2), (3, 0), (1, 2), (-1, 4)\}$

إذا كانت $f(x) = -3x + 2$، أوجد قيمة كل مما يأتي:

20) $f(4)$ **21)** $f(-3)$

22) $f(0)$ **23)** $f(y)$

24) $f(-a)$ **25)** $f(2w)$

26) مناسبات: تتقاضى مؤسسة لتجهيز المناسبات 100 ريالٍ عن توصيل اللوازم لمكان المناسبة، و 4 ريالات أجرة يومية عن كل كرسي. ويمكن تمثيل ما تتقاضاه هذه المؤسسة عند استئجار x كرسيًّا بالمعادلة: $y = 100 + 4x$. أوجد مجال هذه المعادلة ومداها، ثم حدد ما إذا كانت المعادلة دالة أم لا، وهل هي متصلة أم منفصلة؟

مثال 3

حدد مجال العلاقة

$\{(-4, 3), (-1, 0), (-2, 4), (3, -1), (2, 6)\}$ ومداها. ثم حدد إن كانت تمثّل دالة أم لا. وهل هي متباينة أم لا؟

المجال: $\{-4, -2, -1, 2, 3\}$

المدى: $\{-1, 0, 3, 4, 6\}$

كل عنصر في المجال مرتبط بعنصر واحد فقط في المدى، مما يعني أن العلاقة تمثل دالة. العناصر المختلفة في المجال لها صور مختلفة في المدى، إذًا الدالة متباينة.

مثال 4

إذا كانت $f(x) = 4x - 3$، فأوجد $f(-2)$.

$f(-2) = 4(-2) - 3$ عوض عن x بـ -2

$= -8 - 3$ اضرب

$= -11$ بسّط

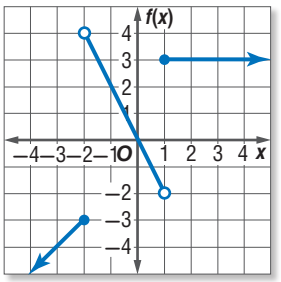
1-3 دوال خاصة (الصفحات: 30-25)

مثّل كل دالة فيما يأتي بيانيًّا، ثم حدد مجالها ومداها:

(27) $f(x) = \begin{cases} -2x\,, x \le -1 \\ x + 1\,, -1 < x < 3 \\ x\,, x \ge 3 \end{cases}$

(28) $f(x) = \begin{cases} -3\,, x < -1 \\ 4x - 3\,, -1 \le x \le 3 \\ x\,, x > 3 \end{cases}$

(29) اكتب الدالة المتعددة التعريف الممثلة بيانيًّا في الشكل أدناه:



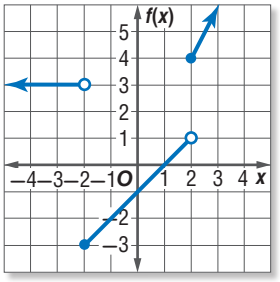
مثّل كل دالة فيما يأتي بيانيًّا، ثم حدد كلًّا من مجالها ومداها:

(30) $f(x) = [x] + 2$

(31) $f(x) = [x + 3]$

مثال 5

اكتب الدالة المتعددة التعريف الممثلة بيانيًّا في الشكل أدناه:



دالة الجزء الأيسر من التمثيل البياني هي $f(x) = 3$. الدائرة غير المظلّلة عند النقطة $(-2, 3)$، تعني أن الدالة الخطية معرّفة عندما $x < -2$.

دالة الجزء الأوسط من التمثيل البياني هي $f(x) = x - 1$. وتعني كل من الدائرة المظلّلة عند النقطة $(-2, -3)$ والدائرة غير المظلّلة عند النقطة $(2, 1)$، أن الدالة معرّفة عندما $-2 \le x < 2$.

دالة الجزء الأيمن من التمثيل البياني هي $f(x) = 2x$. والدائرة المظلّلة عند النقطة $(2, 4)$، تعني أن الدالة معرّفة عندما $x \ge 2$.

$$f(x) = \begin{cases} 3\,, x < -2 \\ x - 1\,, -2 \le x < 2 \\ 2x\,, x \ge 2 \end{cases}$$

1-4 تمثيل المتباينات الخطية ومتباينات القيمة المطلقة بيانيًّا (الصفحات: 32-36)

مثّل كل متباينة فيما يأتي بيانيًّا:

32 $x - 3y < 6$

33 $y \geq 2x + 1$

34 $2x + 4y \leq 12$

35 $y > -3x - 5$

36 $y > |2x|$

37 $y \geq |2x - 2|$

38 $y + 3 < |x + 1|$

39 $2y \leq |x - 3|$

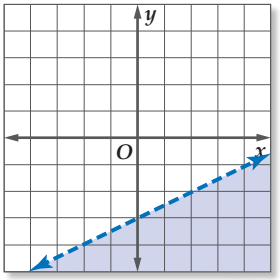
40 **شراء:** وفّر بندر 46 ريالًا لشراء مجموعة من الدفاتر، والأقراص المدمجة، فإذا كان سعر الدفتر الواحد 4 ريالات، وسعر القرص المدمج 3 ريالات، اكتب متباينة تمثّل عدد الدفاتر والأقراص المدمجة التي يمكن شراؤها، ثم مثّلها بيانيًّا.

مثال 6

مثّل المتباينة $x - 2y > 6$ بيانيًّا.

بما أن المتباينة تحتوي على إشارة $>$ ، فإن حد المتباينة يكون متقطعًا، مثّل بيانيًّا المعادلة المرتبطة $x - 2y = 6$.

اختبر النقطة $(0, 0)$ التي لا تقع على حد المتباينة



$x - 2y > 6$

$0 - 2(0) \stackrel{?}{>} 6$

$0 > 6$ ✗

ظلّل المنطقة التي لا تحوي $(0, 0)$

1-5 حل أنظمة المتباينات الخطية بيانيًّا (الصفحات: 37-42)

حل كل نظام مما يأتي بيانيًّا :

41 $y < 2x - 3$
$y \geq 4$

42 $|y| > 2$
$x > 3$

43 $y \geq x + 3$
$2y \leq x - 5$

44 $y > x + 1$
$x < -2$

45 **مجوهرات:** أمضى صائغ مجوهرات ما لا يزيد على 3 ساعات في صياغة الخواتم. فإذا كان الزمن الذي يتطلبه تجهيز المعدات 15 دقيقة، والزمن الذي تتطلبه صياغة الخاتم الواحد 25 دقيقة، فاكتب نظام متباينات يصف الموقف، ومثّله بيانيًّا.

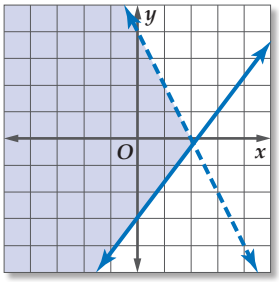
مثال 7

حل نظام المتباينات الآتي بيانيًّا:

$y \geq \frac{3}{2}x - 3$

$y < 4 - 2x$

منطقة الحل هي المنطقة التي كل نقطة من نقاطها تحقق كلتا المتباينتين، وهي المنطقة المظلّلة في الشكل أدناه.



1-6 البرمجة الخطية والحل الأمثل (الصفحات: 49–44)

46) تنسيق أزهار: يعمل جميل منسقًا للأزهار، ويقوم بتنسيق نوعين من باقات الأزهار. يحتاج النوع الأول منها إلى 18 دقيقة، والنوع الثاني إلى 10 دقائق. ولا يزيد عدد الباقات التي ينتجها أسبوعيًّا من النوع الثاني عن ضعف عدد باقات النوع الأول. فإذا كان جميل يعمل مدة لا تزيد على 40 ساعة أسبوعيًّا وكان ربحه في تنسيق الباقة من النوع الأول 10 ريالات، ومن النوع الثاني 25 ريالًا. فحدد عدد الباقات التي يجب عليه تنسيقها من كل نوع أسبوعيًّا ليحصل على أكبر ربح.

47) صناعة: ينتج مصنع نوعين من الأحذية على مرحلتين، ويحتاج الحذاء من النوع الأول إلى ساعتين في المرحلة الأولى وساعة واحدة في المرحلة الثانية، ويحقق ربحًا قدره 20 ريالًا. أما الحذاء من النوع الثاني فيحتاج إلى ساعة واحدة في المرحلة الأولى و 3 ساعات في المرحلة الثانية ويحقق ربحًا قدره 15ريالًا. فإذا كان مجموع ساعات العمل اليومي لموظفي المرحلة الأولى لا يزيد على 40 ساعة ولا يزيد على 60 ساعة لموظفي المرحلة الثانية، فما أكبر ربح يمكن أن تحققه الشركة يوميًّا؟ وما عدد الأحذية من كل نوع الذي يحقق هذا الربح؟

مثال 8

زراعة: يزرع فيصل ما لا يزيد على 300 شتلة من نوعين من الأشجار في مزرعته التي مساحتها $5184\ m^2$، حيث تحتاج الشجرة الواحدة من النوع (A) إلى مساحة $6\ m^2$، ومن النوع (B) إلى $24\ m^2$، وذلك لتوفير مسافة كافية بين الأشجار. إذا كان سعر الشتلة الواحدة من النوع (A) 8 ريالات، وسعر الشتلة الواحدة من النوع (B) 12 ريالًا. فما عدد الشتلات من كل نوع الذي يجعل التكلفة أكبر ما يمكن؟

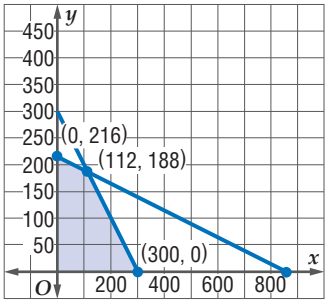
افرض أن x هي عدد الشتلات من النوع (A)، و y هي عدد الشتلات من النوع (B).

$$x \geq 0, y \geq 0$$
$$6x + 24y \leq 5184$$
$$x + y \leq 300$$

مثّل المتباينات بيانيًّا، ولاحظ أن النقاط (0, 0), (300, 0), (0, 216), (112, 188) تمثل رؤوس منطقة الحل .

دالة التكلفة هي : $f(x, y) = 8x + 12y$.

القيمة 3152 ريالًا هي القيمة العظمى للتكلفة وتحصل عند النقطة (112, 188). ولذلك إذا زرع فيصل 112 شتلة من النوع (A)، و 188 شتلة من النوع (B) فإن التكلفة تكون أكبر ما يمكن.



اختبار الفصل

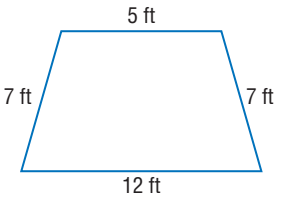
1) بسّط العبارة: $-4(3a + b) - 2(a - 5b)$.

2) **اختيار من متعدد:** إذا كان $3m + 5 = 23$، فما قيمة $2m - 3$؟

A 105 C 9

B $\frac{47}{3}$ D 6

3) **بستنة:** يريد عبد الله تصميم 3 أحواض للورود في حديقة منزله، فأحاط كلًّا منها بسياج. فإذا كانت الأحواض الثلاثة متطابقة ولها الشكل المجاور، فكم قدمًا من السياج يحتاج إليه لإحاطة الأحواض الثلاثة؟



4) إذا كان $y = -2$, $x = \frac{2}{3}$ فأوجد قيمة $\frac{3(x+y)}{4xy^2}$.

5) حدد مجال العلاقة المبينة في الجدول الآتي ومداها، ثم حدد إذا كانت تمثّل دالة أم لا، وهل هي متباينة أم لا؟

x	y
-2	3
4	-1
3	2
6	3

إذا كانت $f(x) = -2x + 3$، فأوجد قيمة كل مما يأتي:

6) $f(-4)$ **7)** $f(3y)$

8) **اختيار من متعدد:** إذا كانت تكلفة إنتاج x فطيرة جبن في أحد المخابز يُعبر عنها بالدالة $C(x) = 6 + 0.75x$، فأوجد تكلفة إنتاج 20 فطيرة.

A 13.5 ريالًا C 21 ريالا

B 28.61 ريالًا D 38.4 ريالا

9) مثّل الدالة $f(x)$ بيانيًّا.

$$f(x) = \begin{cases} -x, & x < -2 \\ x + 2, & -2 \le x \le 2 \\ 5, & x > 2 \end{cases}$$

مثّل كل متباينة فيما يأتي بيانيًّا:

10) $y \ge 4x - 1$ **11)** $2x + 6y < -12$

حلّ كل نظام مما يأتي بيانيًّا:

12) $x + y \le 4$, $y \ge x$

13) $2x + 3y > 12$, $3x - y < 21$

14) $x - y > 0$, $4 + y \le 2x$

15) $2y - 5x \le 6$, $4x + y < -4$

16) **اختيار من متعدد:** استأجر خالد سيارة ليوم واحد من إحدى الشركات، فدفع 100 ريال أجرة يومية وريالًا واحدًا عن كل كيلومتر تقطعه السيارة بعد قطعها مسافة 200 كيلومتر، أما سعيد فاستأجر سيارة من شركة أخرى، ليوم واحد أيضًا فدفع 50 ريالًا أجرة يومية وريالين عن كل كيلومتر تقطعه السيارة بعد قطعها مسافة 200 كيلومتر. فما عدد الكيلومترات التي تجعل قيمة الاستئجار من الشركتين متساوية؟

A 292 C 304

B 250 D 275

17) **نجارة:** تصنع ورشة نجارة طاولات ومقاعد ثم تقوم بطلائها. ويبين الجدول الآتي الزمن الذي تتطلبه صناعة وطلاء كل من الطاولة والمقعد:

المنتج	زمن الصناعة بالساعات	زمن الطلاء بالساعات
مقعد	3	0.5
طاولة	2	1

إذا كان مجموع ساعات عمل فنيي صناعة المنتجات 108 ساعات يوميًّا، ومجموع ساعات عمل فنيي دهان المنتجات 20 ساعة يوميًّا، وكان ربح الورشة من الطاولة الواحدة 35 ريالًا، ومن المقعد الواحد 25 ريالًا فكم طاولة ومقعدًا يجب صنعهما يوميًّا ليكون الربح أكبر ما يمكن؟

a) بفرض أن عدد الطاولات t، وعدد الكراسي c، اكتب نظام متباينات يمثل الموقف.

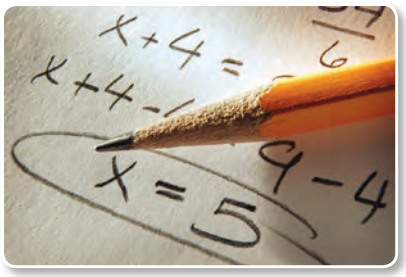
b) مثّل منطقة الحل بيانيًّا.

c) جد عدد الطاولات وعدد المقاعد التي يجب صنعها ليكون الربح أكبر ما يمكن. وما أكبر ربح؟

مثّل نظام المتباينات الآتي بيانيًّا، وحدد إحداثيات رؤوس منطقة الحل، ثم أوجد القيمة العظمى والصغرى للدالة المعطاة في منطقة الحل:

18) $-3 \le y \le 5$, $4x + y \le 5$, $-2x + y \le 5$
$f(x, y) = 4x - 3y$

الأسئلة ذات الإجابات القصيرة



تتطلب منك الأسئلة ذات الإجابات القصيرة أن تقدم لها حلًّا، متضمنًا الطريقة والتبريرات والتفسيرات التي استعملتها. وفي العادة يتم تصحيح هذه الأسئلة وتُحدَّد درجاتها باستعمال سلالم التقدير.

وهذا مثال على تصحيح هذا النوع من الأسئلة.

سلالم التقدير		
	المعايير	الدرجة
درجة كاملة	الإجابة صحيحة مدعمة بتفسيرات كاملة توضح كل خطوة.	2
درجة جزئية	• الإجابة صحيحة، لكن التفسيرات ليست كاملة. • الإجابة غير صحيحة، لكن التفسيرات صحيحة.	1 1
لا يستحق درجة	لم يُقدم أي إجابة، أو أن الإجابة ليس لها معنى.	0

استراتيجيات حل الأسئلة ذات الإجابة القصيرة

خطوة 1

اقرأ المسألة جيدًا؛ كي تفهم الشيء الذي تحاول حلَّه.

- حدد الحقائق ذات العلاقة.
- ابحث عن الكلمات المفتاحية والمصطلحات الرياضية.

خطوة 2

ضع خطّة وحل المسألة.

- فسّر تبريرك أو اعرض الطريقة التي ستتبعها لحل المسألة.
- اكتب الحل كاملًا مبيّنًا الخطوات جميعها.
- تحقق من إجابتك إذا سمح الوقت بذلك.

مثال

اقرأ المسألة الآتية جيدًا، وحدد المطلوب. ثم استعمل المعلومات الواردة في حل السؤال، واكتب خطوات الحل.

قدّمت شركتا اتصالات عروضًا للجمهور على النحو التالي: قيمة الاشتراك الشهري للشركة A هي 14.5 ريالًا مضافًا إليه 0.05 ريال عن كل دقيقة اتصال، وقيمة الاشتراك الشهري للشركة B هو 20.00 ريالًا مضافًا إليه 0.04 ريال عن كل دقيقة اتصال. أوجد عدد الدقائق التي يمكن أن يستخدمها المشترك، بحيث يدفع المبلغ نفسه شهريًّا لكلا الشركتين.

اقرأ السؤال بعناية؛ لديك معلومات عن شركتين مختلفتين للاتصالات، والعروض للاشتراكات الشهرية المقدمة من كلٍّ منها. حيث إن قيمة الفاتورة تعتمد على قيمةٍ ثابتةٍ للاشتراك الشهري، بالإضافة إلى مبلغ متغير يعتمد على عدد دقائق الاتصال، والمطلوب منك تحديد عدد الدقائق التي يمكن استخدامها من قبل المشترك لكلٍّ من الشركتين بحيث يدفع المبلغ نفسه، ويمكنك تكوين نظام معادلتين آنيتين وحله.

إجابة تستحق الدرجة الكاملة (2).

كوّن نظامًا من معادلتين، وحُلّه.

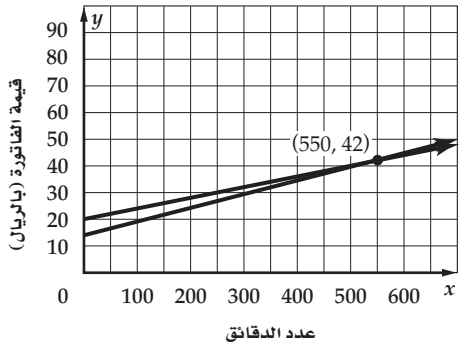
قيمة الفاتورة الشهرية = قيمة الاشتراك الشهري + تكلفة الدقيقة × عدد الدقائق.

افترض أن y = قيمة الفاتورة الشهرية، و x = عدد الدقائق المستعملة شهريًّا.

(الشركة A) $y = 14.5 + 0.05x$

(الشركة B) $y = 20 + 0.04x$

حل النظام بيانيًّا.



حَل النظام هو (550, 42) ، أي أن المشترك سيدفع 42 ريالًا إذا اتصل 550 دقيقة شهريًّا، سواءٌ أكان مشتركًا في الشركة A أو B .

خطوات الحل والحسابات والتبريرات واضحة، وتوصل الطالب إلى الإجابة الصحيحة، إذن تستحق هذه الإجابة درجتين.

تمارين ومسائل

اقرأ كل سؤال فيما يأتي، وحدد المطلوب، ثم استعمل المعلومات الواردة في السؤال، واكتب خطوات الحل:

1) اقترض عليٌّ ومحمود مبلغ 11000 ريال لشراء آلة زراعية لبدء مشروعهم التجاري لقص الحشائش في الحدائق، فإذا كانوا يتقاضون مبلغ 245 ريالًا أجرة من كل زبون لقص حشائش الحديقة الواحدة، ويدفعون 20.5 ريالًا بدل صيانة وثمنًا للمحروقات، فبعد كم حديقة سيبدؤون في تحقيق الربح.

2) يرغب خالد في شراء بعض الأدوات المدرسية بحيث لا يدفع أكثر من 50 ريالًا، فإذا كان ثمن المسطرة الواحدة 4.75 ريالات، وثمن القلم الواحد 6.5 ريالات، وأراد شراء قطعتين من كل نوع على الأقل، اكتب نظام المتباينات، ومثل منطقة الحل على المستوى الإحداثي. ثم أعط ثلاثة حلول مختلفة.

اختبار تراكمي
للفصل 1

أسئلة الاختيار من متعدد

اختر رمز الإجابة الصحيحة فيما يأتي:

1) إذا كانت $f(x) = \frac{1}{3}x^2 + \frac{4}{3}x$ ، فما قيمة $f(-3)$؟

A -7 **C** -6

B -1 **D** 4

2) يمكن حساب حجم المخروط الدائري القائم الذي ارتفاعه h وطول نصف قطر قاعدته r بضرب ثلث π في الارتفاع في مربع نصف قطر القاعدة. فأي المعادلات الآتية تمثل حجم المخروط المجاور؟

A $V = \frac{1}{3}\pi r^2 h$ **C** $V = \frac{1}{3}\pi r h$

B $V = 3\pi r^2 h$ **D** $V = \frac{1}{3}\pi r h^2$

3) أي مجموعات الأعداد الآتية لا ينتمي إليها العدد -25؟

A الأعداد الصحيحة

B الأعداد النسبية

C الأعداد الحقيقية

D الأعداد الكلية

4) مجال العلاقة الموضحة في الجدول الآتي هو:

x	y
-3	4
1	-1
2	0
6	-3

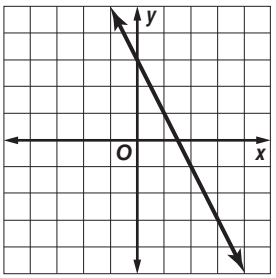
A $\{0, 1, 2, 4, 6\}$

B $\{-3, -1, 0, 4\}$

C $\{-3, 1, 2, 6\}$

D $\{-3, -1\}$

5) ميل المستقيم الممثل بيانيًّا على المستوى الإحداثي الآتي هو:



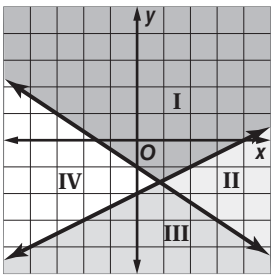
A -2 **C** $-\frac{1}{2}$

B $\frac{1}{2}$ **D** 2

6) على الشكل أدناه منطقة حل النظام:

$y \le \frac{1}{2}x - 2$

$y \le -\frac{2}{3}x - 1$



A المنطقة I

B المنطقة II

C المنطقة III

D المنطقة IV

7) النقطة التي لا تمثل رأسًا لمنطقة حل النظام:

$x \ge 0, y \ge 0, y \le -2x + 6$ هي:

A $(0, 0)$ **C** $(0, 6)$

B $(0, 3)$ **D** $(3, 0)$

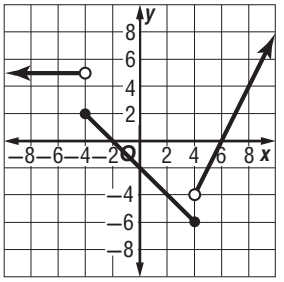
أسئلة ذات إجابات قصيرة

أجب عن كلٍّ مما يأتي:

8) بسّط العبارة أدناه:

$$-4(3a - b) + 3(-2a + 5b)$$

9) اكتب معادلة الدالة المتعددة التعريف الممثلة بيانيًّا في الشكل أدناه:



10) جد قيمة الدالة المتعددة التعريف في التمرين (9) عند $x = -3$.

أسئلة ذات إجابات مطولة

أجب عن كلٍّ مما يأتي موضحًا خطوات الحلّ:

11) مثّل المتباينة $y \geq |x| - 2$ بيانيًّا

12) قدّر مدير مخبز الربح في كل قطعة كعك يبيعها بـ 0.45 ريال، ولكل فطيرة 0.5 ريال.

a) يأمل مدير المخبز أن يحصل على ربح لايقل عن 150 ريالًا من بيع الكعك والفطائر يوميًّا. افترض أن x عدد قطع الكعك المبيعة، و y عدد الفطائر المبيعة، اكتب متباينة تمثل هذا الموقف.

b) مثّل المتباينة بيانيًّا.

c) إذا باع المخبز 180 قطعة كعك و 160 فطيرة في يوم ما، فهل سيحصل على الربح المطلوب؟ فسر إجابتك.

13) تُعد فاطمة نوعين من أطباق الحلوى؛ ويحتاج النوع الأول إلى 5 أكواب من الدقيق، وكوبين من السكر، أما النوع الثاني فيحتاج إلى 5 أكواب من الدقيق، وكوب واحد من السكر. فإذا كان لديها 40 كوبًا من الدقيق، و 15 كوبًا من السكر، وتكلفة إعداد طبق من النوع الأول 12 ريالًا، وطبق من النوع الثاني 8 ريالات.

a) اكتب نظام متباينات خطية يمثل عدد الأطباق التي يمكن لفاطمة إعدادها باستعمال الكميات المتوافرة.

b) مثّل نظام المتباينات الخطية الذي حصلت عليه في (a) بيانيًّا، واكتب إحداثيات نقاط رؤوس منطقة الحل.

c) اكتب دالة تمثل التكلفة .

d) ما عدد الأطباق من كل نوع الذي يجعل التكلفة أكبر ما يمكن؟ وما التكلفة في هذه الحالة؟

هل تحتاج إلى مساعدة إضافية؟													
إذا لم تستطع حل سؤال ...	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
فعد إلى ...	1-2	1-2	1-1	1-2	مهارة سابقة	1-5	1-6	1-1	1-3	1-3	1-4	1-6	1-6

الفصل 2

المصفوفات
Matrices

رابط الدرس الرقمي
www.ien.edu.sa

فيما سبق:
درستُ حل نظام من المعادلات .

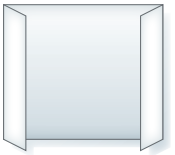
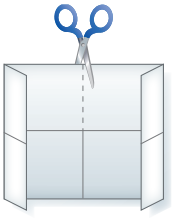
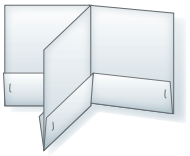
والآن:
- أنظم البيانات في مصفوفة.
- أجري العمليات على المصفوفات.
- أحسب المحددات.
- أجد النظير الضربي لمصفوفة من الرتبة 2 × 2.
- أستعمل المصفوفات لحل نظام من المعادلات.

لماذا؟
تنظيم البيانات: غالبًا ما تستعمل المصفوفات لتنظيم البيانات، فمثلًا إذا نُظّم الطلاب المشاركون في الألعاب الرياضية المختلفة من مدرستين ثانويتين في مصفوفات مختلفة، فإن أعداد جميع الطلاب المشاركين في هذه الألعاب يمكن الحصول عليها بجمع المصفوفات.

المطويات
منظم أفكار

المصفوفات: اعمل هذه المطوية لتساعدك على تنظيم ملاحظاتك حول المصفوفات، مبتدئًا بورقة A4.

1. **اثنِ** حافة الورقة بعرض 2cm بموازاة الضلعين القصيرين.
2. **اطوِ** الورقة الناتجة إلى أرباع، ثم قصّ كما في الشكل.
3. **أعد** الطي، ثم ثبّت الجيوب مستعملًا الدبّاسة.
4. **اكتب** على كلِّ جيب عنوانًا لدرس من دروس الفصل، واكتب عنوان الفصل.

التهيئة للفصل 2

تشخيص الاستعداد:

أجب عن الاختبار الآتي، وارجع إلى "المراجعة السريعة" ؛ لمساعدتك على ذلك.

اختبار سريع

أوجد كلًّا من النظير الجمعي والضربي لكل عدد مما يأتي: (يُستعمل مع الدروس 2-2 إلى 2-5)

1) 4
2) -15
3) 0.2
4) -1.35
5) $-\frac{3}{4}$
6) $2\frac{1}{3}$

بسّط كل عبارة مما يأتي: (يُستعمل مع الدروس 1-2 إلى 2-5)

7) $6(x+2y)$
8) $4(x+5)-3$
9) $-4(3x)-(7x-6)$
10) $5(2x-5)-\frac{1}{3}(4x+1)$
11) $6(2x-1)-3(y-x)+0.5(4x-6)$

حل نظام المعادلتين في كلٍّ مما يأتي جبريًّا: (يُستعمل مع الدرس 2-5)

12) $2x-y=-1$ ، $y=x+3$
13) $2x-5y=-18$ ، $3x+4y=19$
14) $4y+6x=-6$ ، $5y-x=35$
15) $4x+2y=4$ ، $x=y-8$
16) **جوائز:** توزع مدرسة جوائز (حقائب وأقلام) كل عام على المتفوقين، بلغ إجمالي ثمنها هذا العام 534 ريالًا، وكان سعر الحقيبة 30 ريالًا، وسعر القلم 9 ريالات، أمّا في العام السابق فبلغ إجمالي ثمن الجوائز 448 ريالًا، وكان سعر الحقيبة 25 ريالًا، وسعر القلم 8 ريالات. اكتب نظامًا من معادلتين، ثم حله لتجد عدد الحقائب والأقلام المشتراة في كل عام، علمًا بأن الحقائب والأقلام لها العدد نفسه في العامين.

مراجعة سريعة

مثال 1

أوجد كلًّا من النظير الجمعي والضربي للعدد -5

النظير الجمعي للعدد -5 هو العدد x ، بحيث إن $-5+x=0$؛ لذا فإن $x=5$.

النظير الضربي للعدد -5 هو العدد y، حيث إن $-5y=1$؛ لذا فإن $y=-\frac{1}{5}$.

مثال 2

بسّط العبارة: $\frac{3}{4}(8x-4)+3x$

$\frac{3}{4}(8x-4)+3x$

$=\frac{3}{4}(8x)-\frac{3}{4}(4)+3x$ خاصية التوزيع

$=6x-3+3x$ بسّط

$=9x-3$ اجمع الحدود المتشابهة

مثال 3

حل نظام المعادلتين الآتي جبريًّا:

$3y=x-9$

$4x+5y=2$

بما أن معامل x في المعادلة الأولى هو 1، فاستعمل طريقة التعويض. أولًا: حل المعادلة بالنسبة للمتغير x.

$3y=x-9 \rightarrow x=3y+9$

$4(3y+9)+5y=2$ عوّض $3y+9$ بدلًا من x

$12y+36+5y=2$ خاصية التوزيع

$17y=-34$ اجمع الحدود المتشابهة

$y=-2$ بقسمة الطرفين على 17

ولإيجاد قيمة x ، استعمل المساواة $y=-2$ في المعادلة الأولى.

$3(-2)=x-9$ عوّض عن y بـ -2

$-6=x-9$ بالضرب

$3=x$ اجمع 9 للطرفين

فيكون الحل $(3, -2)$.

رابط الدرس الرقمي

www.ien.edu.sa

2-1 مقدمة في المصفوفات
Introduction to Matrices

فيما سبق: درستُ حل مسائل باستعمال تنظيم البيانات في جداول. (مهارة سابقة)

والآن:
- أنظم بيانات في مصفوفة.
- أستعمل العمليات على عناصر صفوف أو أعمدة مصفوفة لتحليل البيانات.

المفردات:
- **المصفوفة** matrix
- **العنصر** element
- **الرتبة** order
- **مصفوفة الصف** row matrix
- **مصفوفة العمود** column matrix
- **المصفوفة المربعة** square matrix
- **المصفوفة الصفرية** zero matrix
- **المصفوفات المتساوية** equal matrices

لماذا؟

هاتف محمول: حصل صالح على عدة عروض لشراء هاتف محمول حسب النوع، وسعة الذاكرة، والسعر. وحتى يكون قادرًا على المقارنة بين العروض بسهولة، نظم البيانات في مصفوفة كما يلي:

	النوع	سعة الذاكرة	السعر
العرض الأول	a	256	2600
العرض الثاني	b	256	2500
العرض الثالث	c	128	2420
العرض الرابع	d	64	2390

تنظيم البيانات: **المصفوفة** هي ترتيب على هيئة مستطيل لمتغيرات أو أعداد في صفوف أفقية وأعمدة رأسية، محصورة بين قوسين. وتُنظم الأعداد أو البيانات في المصفوفة بحيث يكون الموقع في المصفوفة ذا معنى. وتُسمى كل قيمة في المصفوفة **عنصرًا**. ويرمز إلى المصفوفة عادة باستعمال حرف كبير تحته خط مثل $\underline{A}$ و $\underline{B}$.

$$\underline{A} = \begin{bmatrix} 8 & -2 & 5 & 6 \\ -1 & 3 & -3 & 6 \\ 7 & -8 & 1 & 4 \end{bmatrix}$$

ثلاثة صفوف

4 أعمدة

العنصر 1− موجود في الصف 2، والعمود 1، ويرمز إليه بالرمز a_{21}.

العنصر 8− موجود في الصف 3، والعمود 2، ويرمز إليه بالرمز a_{32}.

يمكنك تحديد نوع المصفوفة **برتبتها**؛ فالمصفوفة المكونة من m صفًّا و n عمودًا يقال عنها مصفوفة من الرتبة $m \times n$ أو من النوع $m \times n$ (تقرأ "m في n"). فالمصفوفة $\underline{A}$ في الأعلى هي مصفوفة من النوع 4 × 3 أو من الرتبة 4 × 3؛ لأنها تحتوي على 3 صفوف، و 4 أعمدة. ويدل الرمز a_{12} على عنصر في المصفوفة $\underline{A}$، على حين يدل الرمز b_{12} على عنصر في المصفوفة $\underline{B}$.

مثال 1 رتبة المصفوفة وعناصرها

استعمل المصفوفة $\underline{A} = \begin{bmatrix} -18 & 6 & 38 \\ 9 & -9 & 22 \end{bmatrix}$ للإجابة عن كلٍّ ممّا يأتي:

a) حدد رتبة المصفوفة $\underline{A}$.

$$\underline{A} = \begin{bmatrix} -18 & 6 & 38 \\ 9 & -9 & 22 \end{bmatrix}$$

صفّان

3 أعمدة

بما أن $\underline{A}$ فيها صفان و3 أعمدة، فإن رتبتها 3 × 2.

b) ما قيمة العنصر a_{21}؟

$$\begin{bmatrix} -18 & 6 & 38 \\ 9 & -9 & 22 \end{bmatrix}$$

صف 2

عمود 1

بما أن العنصر a_{21} موجود في الصف 2، والعمود 1، فإن قيمته هي 9.

تحقق من فهمك

$$\underline{B} = \begin{bmatrix} 10 & -8 \\ -2 & 19 \\ 6 & -1 \end{bmatrix}$$

1A) ما رتبة $\underline{B}$؟

1B) ما قيمة b_{32}؟

قراءة الرياضيات

يدل الرمز a_{ij} على العنصر الواقع في الصف i والعمود j من المصفوفة $\underline{A}$.

بعض المصفوفات لها تسميات خاصة.

مصفوفة صف
تحوي صفًا واحدًا.

$$[8 \quad -5 \quad 2 \quad 4]$$

مصفوفة عمود
تحوي عمودًا واحدًا.

$$\begin{bmatrix} 8 \\ -1 \end{bmatrix}$$

المصفوفة المربعة
عدد الصفوف فيها يساوي عدد الأعمدة.

$$\begin{bmatrix} -4 & 2 \\ -3 & 9 \end{bmatrix}$$

المصفوفة الصفرية
جميع عناصرها أصفار.

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

تكون **المصفوفتان متساويتين** إذا كانتا من الرتبة نفسها ، وتساوت عناصرهما المتناظرة.

$$\begin{bmatrix} -3 & 4 \\ 6 & 3 \\ 5 & 2 \end{bmatrix} \neq \begin{bmatrix} 4 & 3 & 2 \\ -3 & 6 & 5 \end{bmatrix}$$

المصفوفتان لهما رتبتان مختلفتان.

$$\begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 6 & -5 \end{bmatrix} \neq \begin{bmatrix} 1 & 6 \\ 4 & -5 \end{bmatrix}$$

ليست جميع العناصر المتناظرة متساوية.

$$\begin{bmatrix} 5 & 6 & 0 \\ 0 & 7 & 2 \\ 3 & 1 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 6 & 0 \\ 0 & 7 & 2 \\ 3 & 1 & 4 \end{bmatrix}$$

المصفوفتان متساويتان.

إرشادات للدراسة

العناصر المتناظرة

يدل التناظر على العناصر التي تقع بالضبط في الموقع نفسه من كل مصفوفة.

تستعمل المصفوفات لتنظيم البيانات وتحليلها.

مثال 2 من واقع الحياة — تنظيم البيانات في مصفوفة

كرة قدم: رصد مدرب أحد فرق كرة القدم إنجازات ثلاثة لاعبين في مباريات الموسم الحالي فكانت على النحو الآتي:

معاذ: 12 مباراة، 24 تسديدة، 113 تمريرة، 15 قطع تمريرات، 4 أهداف.

ماجد: 18 مباراة، 43 تسديدة، 170 تمريرة، 40 قطع تمريرات، 11 هدفاً.

ياسر: 20 مباراة، 31 تسديدة، 20 تمريرة، 30 قطع تمريرات، 4 أهداف.

a) نظّم البيانات في مصفوفة A ، على أن تُرتب أسماء اللاعبين تنازليًّا حسب عدد التسديدات.

b) حدد رتبة المصفوفة. وما قيمة a_{23}؟

a)

	الأهداف	قطع التمريرات	التمريرات	التسديدات	المباريات
ماجد	11	40	170	43	18
ياسر	4	30	20	31	20
معاذ	4	15	113	24	12

b) هناك 3 صفوف، و 5 أعمدة؛ لذا فإن رتبة المصفوفة 3×5 وقيمة العنصر a_{23} الموجودة في الصف 2 ، والعمود 3 ، هي 20.

تحقق من فهمك

2) بيتزا: يبين الجدول المجاور الأسعار بالريال لأربعة أنواع من البيتزا بثلاثة أحجام في أحد المطاعم.

أسعار البيتزا (بالريال)

	كبيرة	وسط	صغيرة
ثمار البحر	35	24	13
الخضار	34	23	12
الدجاج	36	25	14
اللحم	37	27	15

A) نظّم هذه البيانات في مصفوفة A ، على أن تكون الأسعار مرتبة تصاعديًّا.

B) حدد رتبة المصفوفة.

C) ما قيمة العنصر a_{21}؟

تحليل البيانات: عند تنظيم البيانات في مصفوفة، يسهل تحليلها وتفسيرها. وتعطي مجاميع عناصر الصفوف أو الأعمدة أحيانًا معلومات ذات معنى. وفي أحيان أخرى لا تعطي أي معلومات ذات معنىً.

إرشادات للدراسة

عرض البيانات

يكون من الممكن أحيانًا تبديل عناصر الصفوف وعناصر الأعمدة في المصفوفات التي تمثل معلومات من واقع الحياة.

مثال 3 تحليل البيانات باستعمال المصفوفات

كرة قدم: إذا أراد مدرب فريق كرة القدم، (في مثال 2) استعمال المصفوفة للحصول على تحليلات إضافية لإحصائيات لاعبيه الثلاثة:

الأهداف	قطع التمريرات	التمريرات	التسديدات	المباريات
11	40	170	43	18
4	30	20	31	20
4	15	113	24	12

a) اجمع عناصر كل من العمودين 2 و 3 ، وفسر النتائج.

مجموع عناصر عمود 2 يساوي 98، وهو يمثل العدد الكلي لتسديدات اللاعبين خلال جميع المباريات.
مجموع عناصر عمود 3 يساوي 303، وهو يمثل العدد الكلي لتمريرات اللاعبين خلال جميع المباريات.

b) أراد المدرب تحديد معدل تسديد اللاعب في المباراة الواحدة، فقرر أن يجمع عناصر العمود 2 ويقسم المجموع على 3 ، فما الناتج؟

الناتج هو 33 تقريبًا.

c) هل كانت طريقة المدرب في حساب معدل تسديد اللّاعب في المباراة الواحدة صحيحة؟ فسِّر إجابتك.

لا؛ لأن مجموع التسديدات في العمود 2 ليس لثلاث مباريات، ويتعين على المدرب بدلًا من ذلك قسمة مجموع عناصر العمود 2 على مجموع عناصر العمود 1 حيث سيكون المعدل الدقيق 1.96 (98 ÷ 50 = 1.96).

d) هل جمع عناصر الصفوف يزود المدرب ببيانات ذات معنى ؟ فسِّر إجابتك.

لا؛ لأن عناصر الصف عبارة عن خمسة أنواع مختلفة من البيانات.

تحقق من فهمك

3) محافظات: يبين الجدول المجاور عدد المحافظات من الفئتين أ، ب في 4 مناطق إدارية مختلفة في المملكة.

عدد المحافظات من الفئتين أ، ب في 4 مناطق مختلفة في المملكة

المنطقة	محافظة فئة أ	محافظة فئة ب
الرياض	12	8
مكة المكرمة	9	7
المدينة المنورة	4	4
القصيم	5	7

المصدر: المملكة العربية السعودية، حقائق وأرقام، هيئة المساحة الجيولوجية السعودية، 1433 هـ

A) نظّم البيانات في مصفوفة .

B) اجمع عناصر كل عمود، وفسر النتائج.

C) اجمع عناصر كل صف، وفسر النتائج.

D) هل إيجاد معدل عناصر كل صف يعطي بيانات ذات معنى؟

تأكد

مثال 1 حدّد رتبة كل مصفوفة فيما يأتي:

1) $\begin{bmatrix} 1 & 4 & -4 & 0 \\ -2 & 3 & 6 & -8 \end{bmatrix}$

2) $\begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 5 \\ -7 \end{bmatrix}$

3) $\begin{bmatrix} -1 & 4 \\ 2 & 9 \\ 17 & 21 \end{bmatrix}$

إذا كانت $\underline{A} = \begin{bmatrix} 1 & -6 & x & -4 \\ -2 & 3 & -1 & 9 \\ 5 & -8 & 2 & 12 \end{bmatrix}$، فما قيمة كل عنصر فيما يأتي:

4) a_{32} **5)** a_{11} **6)** a_{33} **7)** a_{24}

المثالان 3 , 2 **8) زراعة:** يبين الجدول المجاور عدد صناديق الخضراوات المنتجة في مزرعتين مختلفتين في أحد المواسم:

المزرعة	خيار	كوسة	باذنجان	طماطم
1	540	570	488	500
2	850	1015	800	820

a) نظّم البيانات في مصفوفة.

b) ما النوع الأقل إنتاجًا؟

c) اجمع عناصر كل صف، وهل لهذه المجاميع معنى؟ فسِّر إجابتك.

d) اجمع عناصر كل عمود، وفسِّر إجابتك.

تدرب وحل المسائل

مثال 1 حدد رتبة كل مصفوفة فيما يأتي:

9) $\begin{bmatrix} -9 & 6 \end{bmatrix}$ **10)** $\begin{bmatrix} 15 & y \\ 8 & -9 \end{bmatrix}$ **11)** $\begin{bmatrix} 6 & 11 & -4 & -2 \\ -8 & 5 & -1 & 0 \end{bmatrix}$

12) $\begin{bmatrix} 4 & -3 & -1 \\ x & 3y & 0 \\ 8 & 12 & 11 \end{bmatrix}$ **13)** $\begin{bmatrix} 2 \\ x \\ -3 \end{bmatrix}$ **14)** $\begin{bmatrix} 115 \end{bmatrix}$

إذا كانت $\underline{A} = \begin{bmatrix} 6 & y \\ -9 & 31 \\ 11 & 5 \end{bmatrix}, \underline{B} = \begin{bmatrix} 10 & -8 & 2x \\ -2 & 19 & 4 \end{bmatrix}$، فما قيمة كل عنصر فيما يأتي:

15) a_{21} **16)** b_{22} **17)** b_{13} **18)** a_{12}

مثال 2 **19)** يبين الجدول أدناه النقاط التي حصل عليها ثلاثة طلاب في مسابقة علمية تقدم على 3 جولات، نظّم هذه البيانات في مصفوفة:

الاسم	الجولة 1	الجولة 2	الجولة 3	المجموع
سعود	221	201	185	607
علي	168	233	159	560
مروان	187	189	211	587

مثال 3 **20) تخزين:** ثلاثة مخازن لتوريد التمور؛ الأول فيه 2000kg خلاص و 1200kg برحي و 500kg سكري، والثاني فيه 3000kg خلاص و 1175kg برحي و 2250kg سكري، والثالث فيه 2750kg خلاص و 1500kg برحي و 1700kg سكري.

a) نظّم البيانات في مصفوفة، على أن تكون محتويات المخازن أعمدة المصفوفة.

b) أوجد مجموع عناصر كل عمود، وماذا يمثل هذا المجموع؟

c) أوجد مجموع عناصر كل صف، وماذا يمثل هذا المجموع؟

إذا كانت $\underline{B} = \begin{bmatrix} 9 & -3 & 7 \\ 4x & 18 & -6 \end{bmatrix}$ ، $\underline{A} = \begin{bmatrix} 23 & 11 \\ x & -5 \\ -12 & 15 \end{bmatrix}$ ، فحدد كل عنصر مما يأتي:

21) a_{32} **22)** b_{21} **23)** b_{12} **24)** a_{21}

25) حديد التسليح: يبين الجدول المجاور أسعار حديد التسليح حسب تقرير وزارة التجارة والاستثمار في منطقتي الرياض وجدة لأحد الأيام.

أسعار حديد التسليح (بالريال)		
المقاس	الرياض	جدة
8mm	2410	2455
14mm	2210	2255
16mm	2200	2245

a) اكتب مصفوفة تمثل البيانات المعطاة.

b) ما رتبة المصفوفة الناتجة في الفرع a؟

إذا كانت $\underline{B} = \begin{bmatrix} 0 & x & -2y \\ 5x & 3y & -4x \\ -y & 0 & 0 \end{bmatrix}$ ، $\underline{A} = \begin{bmatrix} x^2+4 & y+6 \\ x-y & 2-y \end{bmatrix}$ ، فحدد كل عنصر مما يأتي:

26) a_{11} **27)** a_{22} **28)** b_{31} **29)** b_{23}

30) فلك: استعمل الجدول المجاور الذي يبين بُعد بعض الكواكب عن الأرض والشمس.

الكوكب	البُعد عن الشمس (مليون ميل)	البُعد عن الأرض (مليون ميل)
عطارد	36.00	57
الزهرة	67.24	26
المريخ	141.71	35
المشتري	483.88	370
زحل	887.14	744
أورانس	1783.98	1607
نبتون	2796.46	2680

المصدر: fact Monster

a) نظّم المسافات في مصفوفة $\underline{A}$.

b) ما رتبة المصفوفة الناتجة؟

c) ما قيمة العنصر a_{42}.

الربط مع الحياة

بعد إعادة تعريف كلمة "كوكب" عام 2006 من قبل الاتحاد الفلكي الدولي، تبين أن بلوتو لم يعد يصنف كوكبًا؛ وذلك بسبب حجمه الصغير.

31) تمثيلات متعددة: ستكتشف في هذا السؤال تأثير قلب الصفوف والأعمدة في المصفوفة. يبين الجدول المجاور عدد كلٍّ من التمريرات الحاسمة وعدد الأهداف لأربعة لاعبين في مباراة لكرة اليد.

الاسم	عدد التمريرات الحاسمة	عدد الأهداف
محمود	8	3
معاذ	6	5
صالح	1	8
عبدالله	4	2

a) جدوليًّا: نظّم البيانات في مصفوفة على أن يمثل عدد الأهداف وعدد التمريرات عمودها.

b) جبريًّا: أوجد مجاميع عناصر كل عمود.

c) جدوليًّا: بدّل البيانات في المصفوفة على أن تصبح عناصر الأعمدة هي عناصر الصفوف.

d) جبريًّا: أوجد مجاميع عناصر كل صف.

e) تحليليًّا: هل هناك أي تأثير في البيانات عند تبديل عناصر الصفوف والأعمدة؟

مسائل مهارات التفكير العليا

تبرير: حدد إذا كانت الجملة الآتية صحيحة أم خاطئة. وفسِّر إجابتك:

32) المصفوفة $\underline{C}$ مربعة ولها أربعة أعمدة، وتحوي العنصر c_{53}.

33) **اكتشف الخطأ:** حددت كل من ياسمين وسارة العنصر b_{32} في المصفوفة $\underline{B} = \begin{bmatrix} -6 & 7 \\ 0 & 5 \\ 8 & 2 \end{bmatrix}$، فهل توصلت إحداهما للحل الصحيح؟ فسِّر إجابتك.

ياسمين

قيمة العنصر b_{32} هي 5.

سارة

العنصر b_{32} غير موجود في المصفوفة B، لأن B مصفوفة من النوع 3×2.

34) **تحدَّ:** جد قيمة كلٍّ من المتغيرات x , y , z التي تحقق المعادلة:

$$\begin{bmatrix} 2x - y & 3x + 4z \\ 7x - 8z & 5y + 12z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9z - 5x + 1 & 5y - 2x \\ 3y - 4z & 12x + 2y \end{bmatrix}$$

35) **مسألة مفتوحة:** أنشئ مصفوفة باستعمال بيانات من واقع الحياة تكون مجاميع عناصر أعمدتها ذات معنى، ومجاميع عناصر صفوفها ليست ذات معنى.

36) **اكتب:** اشرح كيف يمكن أن تساعدك المصفوفات عندما تقرر اختيار الجامعة التي ترغب في الالتحاق بها.

تدريب على اختبار

37) **مسح:** نُظمت نتائج استطلاع للرأي في المصفوفة المجاورة:

	ضد	مؤيد
المرشح الأول	771	1553
المرشح الثاني	1633	689
المرشح الثالث	229	2088

بالاعتماد على هذه النتائج، أي استنتاج مما يأتي **ليس** صحيحًا؟

A هناك 771 صوتًا ضد المرشح الأول.

B عدد الأصوات المعارضة للمرشح الأول أكبر من تلك المؤيدة للمرشح الثاني.

C فرصة المرشح الثاني للفوز ضئيلة.

D عدد الأصوات المؤيدة للمرشح الأول أكبر من عدد الأصوات المؤيدة للمرشح الثالث.

مراجعة تراكمية

38) **مجلس الإدارة:** ترشح مسفر لمنصب رئيس مجلس الإدارة في إحدى الشركات الكبرى، وكان المُقترع يكتب ثلاثة أسماء بالترتيب على ورقة الاقتراع ، فيحصل المتنافس على 3 نقاط لكل مركز أول، ونقطتين لكل مركز ثان، ونقطة واحدة لكل مركز ثالث. وقد ورد اسم مسفر في 490 ورقة اقتراع للمراكز الثلاثة، وكان مجموع نقاطه 878 نقطة. فإذا علمت أن عدد الأصوات التي حصل عليها من المركز الثاني أكثر بأربع أصوات من ضعف عدد الأصوات التي حصل عليها من المركز الثالث، فكم عدد الأصوات التي حصل عليها من كل مركز؟ (مهارة سابقة)

39) **ثقافة مالية:** يبين الجدول المجاور تكلفة إنتاج كلٍّ من الشوكولاتة وكعكة الفواكه وسعر بيعها لدى مخبز. إذا علمت أن المخبز يبيع كعكة الشوكولاتة وكعكة الفواكه معًا في صناديق تحوي من 6 إلى 12 كعكة من كلا النوعين، بحيث يحوي كل صندوق ثلاث كعكات على الأقل من كل نوع. فما عدد كعكات كل صندوق من كلا النوعين ليكون الربح أكبر ما يمكن؟ (الدرس 5-1)

النوع	كعكة الشوكولاتة	كعكة الفواكه
التكلفة	19 ريالا	13 ريالا
سعر البيع	44 ريالا	39 ريالا

احسب قيمة كل عبارة مما يأتي إذا كان $w = 3$, $x = -2$, $y = 4$, $z = 0.5$: (مهارة سابقة)

40) $4x - 6y + 2z$ **41)** $5w + 2(x - z) + 2y$ **42)** $4[3(2z + y) - 2(w + x)]$

رابط الدرس الرقمي
www.ien.edu.sa

الهدف
أستعمل الجداول الإلكترونية لتنظيم البيانات وعرضها.

تُستعمل **الجداول الإلكترونية**، لتنظيم البيانات وعرضها، حيث يتم إدخالها في برنامج الجداول الإلكترونية في صفوف وأعمدة كما هو الحال في المصفوفات. وبعد ذلك يمكن استعمالها لعمل الرسوم أو إجراء الحسابات.

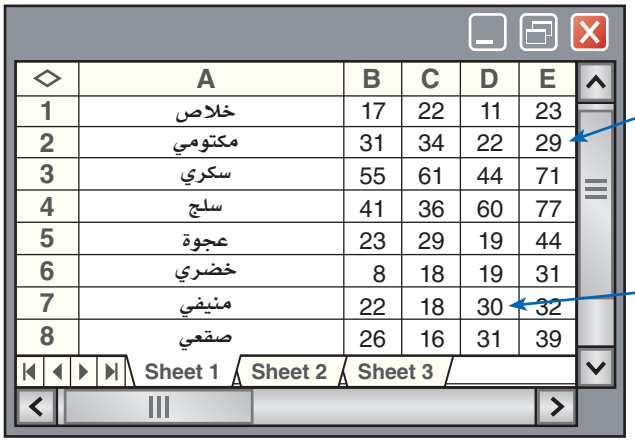
مثال

جمع محل لبيع التمور بيانات عن مبيعاته في أربعة أسابيع متتالية، ونظمها في الجدول المجاور. أدخل البيانات في برنامج الجداول الإلكترونية .

مبيعات محل تمور خلال 4 أسابيع متتالية بالكيلوجرامات

نوع التمر	1	2	3	4
خلاص	17	22	11	23
مكتومي	31	34	22	29
سكري	55	61	44	71
سلج	41	36	60	77
عجوة	23	29	19	44
خضري	8	18	19	31
منيفي	22	18	30	32
صقعي	26	16	31	39

استعمل العمود A للنوع، والعمود **B** لمبيعات الأسبوع الأول ، والعمود C لمبيعات الأسبوع الثاني، والعمود D لمبيعات الأسبوع الثالث، والعمود E لمبيعات الأسبوع الرابع.



تمارين:

1) أدخل البيانات الواردة في فقرة "لماذا؟" بداية الدرس في برنامج الجداول الإلكترونية.

2) قارن بين تنظيم البيانات في الجداول الإلكترونية وتنظيمها في المصفوفة.

3) يمكنك إيجاد مجاميع مدخلات الصفوف والأعمدة في الجداول الإلكترونية باستعمال الأمر (SUM) .

a) يمكنك إيجاد مجموع مدخلات العمود B باستعمال الصيغة =SUM(B1:B8) . أدخل صيغًا مشابهة في الخلايا B9, C9, D9, E9 لتجد مجاميع مدخلات الأعمدة الأخرى. ماذا تمثل مجاميع مدخلات هذه الأعمدة؟

b) أدخل صيغًا مشابهة في الخلايا F1 حتى F8 لإيجاد مجاميع مدخلات الصفوف 1 إلى 8. ماذا تمثل هذه المجاميع في هذه الحالة؟

c) أوجد مجموع مدخلات الصف 9، ومجموع مدخلات العمود F. ماذا تلاحظ؟ فسِّر إجابتك.

رابط الدرس الرقمي

www.ien.edu.sa

2-2

العمليات على المصفوفات
Operations with Matrices

فيما سبق:
درستُ تنظيم البيانات في مصفوفات. (الدرس 1-2)

والآن:
- أجمع المصفوفات وأطرحها.
- أضرب مصفوفة في عدد ثابت.

المفردات:
جمع مصفوفتين
adding matrices
طرح مصفوفتين
subtracting matrices
ضرب المصفوفة في عدد ثابت
scalar multiplication

لماذا؟
لدى مؤسسة تجارية للمعدات الثقيلة فروع في كل من: الرياض، والشرقية، وجدة، يتبع كلًّا منها ثلاثة معارض. وتبين المصفوفات الآتية معدل النفقات والمبيعات الأسبوعية في معارض المناطق الثلاث:

	جدة		الشرقية		الرياض	
	المبيعات	النفقات	المبيعات	النفقات	المبيعات	النفقات
المعرض (1)	109500	1050	122000	1700	145000	1900
المعرض (2)	135000	1800	145500	1800	225000	2400
المعرض (3)	150500	1800	160000	1800	290000	2700

جمع المصفوفات وطرحها: يمكن جمع مصفوفتين أو طرحهما إذا وفقط إذا كان لهما الرتبة نفسها، حيث تجمع العناصر المتناظرة في حالة الجمع، وتطرح في حالة الطرح.

مفهوم أساسي
أضف إلى مطويتك

جمع المصفوفات وطرحها

التعبير اللفظي: إذا كانت $\underline{A}, \underline{B}$ مصفوفتين من الرتبة $m \times n$ فإن $\underline{A} + \underline{B}$ هي مصفوفة أيضًا من الرتبة $m \times n$ ويكون كل عنصر فيها هو مجموع العنصرين المتناظرين في $\underline{A}$ و $\underline{B}$، وكذلك $\underline{A} - \underline{B}$ هي مصفوفة من الرتبة $m \times n$ أيضًا، وتحصل عليها بطرح العناصر المتناظرة.

الرموز: لتكن: $\underline{A} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}, \underline{B} = \begin{bmatrix} e & f \\ g & h \end{bmatrix}$

فإن: $\underline{A} + \underline{B} = \begin{bmatrix} a+e & b+f \\ c+g & d+h \end{bmatrix}, \underline{A} - \underline{B} = \begin{bmatrix} a-e & b-f \\ c-g & d-h \end{bmatrix}$

مثال: $\begin{bmatrix} 3 & -5 \\ 1 & 7 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ -9 & 10 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3+2 & -5+0 \\ 1+(-9) & 7+10 \end{bmatrix}$

إرشادات للدراسة
إذا كان $\underline{A} + \underline{B} = \underline{C}$
فإن $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$.

مثال 1
جمع المصفوفات وطرحها

إذا كانت $\underline{C} = \begin{bmatrix} 8 \\ 6 \end{bmatrix}, \underline{B} = \begin{bmatrix} -4 & -1 \\ -3 & -7 \end{bmatrix}, \underline{A} = \begin{bmatrix} 16 & 2 \\ -9 & 8 \end{bmatrix}$، فأوجد كلًّا مما يأتي إن أمكن:

(a $\underline{A} + \underline{B}$

$\underline{A} + \underline{B} = \begin{bmatrix} 16 & 2 \\ -9 & 8 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -4 & -1 \\ -3 & -7 \end{bmatrix}$ عوّض

$= \begin{bmatrix} 16+(-4) & 2+(-1) \\ -9+(-3) & 8+(-7) \end{bmatrix}$ اجمع العناصر المتناظرة

$= \begin{bmatrix} 12 & 1 \\ -12 & 1 \end{bmatrix}$ بسّط

(b $\underline{B} - \underline{C}$

$\underline{B} - \underline{C} = \begin{bmatrix} -4 & -1 \\ -3 & -7 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 8 \\ 6 \end{bmatrix}$ عوّض

بما أن المصفوفتين $\underline{C}, \underline{B}$ لهما رتبتين مختلفتين، فلا يمكن إجراء عملية الطرح $\underline{B} - \underline{C}$.

تحقق من فهمك

(1A $\begin{bmatrix} -3 & 4 \\ -9 & -5 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -4 & 12 \\ 8 & -7 \end{bmatrix}$

(1B $\begin{bmatrix} -9 & 8 & 3 \\ -2 & 4 & -7 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -4 & -3 & 6 \\ -9 & -5 & 18 \end{bmatrix}$

الضرب في عدد ثابت: يمكنك ضرب أي مصفوفة في عدد ثابت، وهذا يعني ضرب كل عنصر من عناصر المصفوفة في ذلك العدد الثابت. وتُسمى هذه العملية **ضرب المصفوفة في عدد ثابت**.

مفهوم أساسي

الضرب في عدد ثابت

أضف إلى مطويتك

التعبير اللفظي: حاصل ضرب مصفوفة $\underline{A}$ من الرتبة $m \times n$ في عدد ثابت k هي مصفوفة $k\underline{A}$ من الرتبة $m \times n$ وكل عنصر فيها يساوي العنصر المناظر له في المصفوفة $\underline{A}$ مضروبًا في العدد الثابت k

الرموز: إذا كانت $\underline{A} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ وَ k عدد ثابت فإن:

$$k \cdot \underline{A} = k \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ka & kb \\ kc & kd \end{bmatrix}$$

مثال:

$$-3 \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 7 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3(4) & -3(1) \\ -3(7) & -3(-2) \end{bmatrix}$$

مثال 2

ضرب مصفوفة في عدد ثابت

إذا كانت $\underline{R} = \begin{bmatrix} -12 & 8 & 6 \\ -16 & 4 & 19 \end{bmatrix}$، فجد $5\underline{R}$.

$$5\underline{R} = 5 \begin{bmatrix} -12 & 8 & 6 \\ -16 & 4 & 19 \end{bmatrix}$$ عوّض

$$= \begin{bmatrix} 5(-12) & 5(8) & 5(6) \\ 5(-16) & 5(4) & 5(19) \end{bmatrix}$$ اضرب كل عنصر في المصفوفة في العدد 5

$$= \begin{bmatrix} -60 & 40 & 30 \\ -80 & 20 & 95 \end{bmatrix}$$ بسّط

تحقق من فهمك

2) إذا كانت $\underline{T} = \begin{bmatrix} 8 & 0 & 3 & -2 \\ -1 & -4 & -2 & 9 \end{bmatrix}$، فأوجد $-4\underline{T}$

إرشادات للدراسة

ضرب المصفوفة في عدد ثابت

إذا كان $k\underline{A} = \underline{B}$

فإن: $ka_{ij} = b_{ij}$

تنطبق كثير من خصائص العمليات التي تُجرى على الأعداد الحقيقية على المصفوفات. وفيما يأتي ملخص لهذه الخصائص:

مفهوم أساسي

خصائص جمع المصفوفات

أضف إلى مطويتك

الخصائص الآتية صحيحة لأي ثلاث مصفوفات $\underline{A}, \underline{B}, \underline{C}$ لها الرتبة نفسها ولأي عدد ثابت k:

الخاصية الإبدالية لجمع المصفوفات $\underline{A} + \underline{B} = \underline{B} + \underline{A}$

الخاصية التجميعية لجمع المصفوفات $(\underline{A} + \underline{B}) + \underline{C} = \underline{A} + (\underline{B} + \underline{C})$

خاصية التوزيع للضرب في عدد $k(\underline{A} + \underline{B}) = k\underline{A} + k\underline{B}$

يمكنك إجراء عمليات متعددة الخطوات على المصفوفات. وترتيب تلك العمليات شبيه بترتيب العمليات على الأعداد الحقيقية.

مثال 3 العمليات على المصفوفات

إذا كانت $\underline{A} = \begin{bmatrix} -9 & 12 \\ 2 & -6 \end{bmatrix}, \underline{B} = \begin{bmatrix} -4 & -8 \\ 2 & -3 \end{bmatrix}$ ، فأوجد $-4\underline{B} - 3\underline{A}$.

عوّض $-4\underline{B} - 3\underline{A} = -4\begin{bmatrix} -4 & -8 \\ 2 & -3 \end{bmatrix} - 3\begin{bmatrix} -9 & 12 \\ 2 & -6 \end{bmatrix}$

أوجد ناتج ضرب المصفوفات في الثوابت $= \begin{bmatrix} -4(-4) & -4(-8) \\ -4(2) & -4(-3) \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 3(-9) & 3(12) \\ 3(2) & 3(-6) \end{bmatrix}$

بسّط $= \begin{bmatrix} 16 & 32 \\ -8 & 12 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -27 & 36 \\ 6 & -18 \end{bmatrix}$

اطرح العناصر المتناظرة $= \begin{bmatrix} 16 - (-27) & 32 - 36 \\ -8 - 6 & 12 - (-18) \end{bmatrix}$

بسّط $= \begin{bmatrix} 43 & -4 \\ -14 & 30 \end{bmatrix}$

تحقق من فهمك

3) إذا كانت $\underline{A} = \begin{bmatrix} -5 & 3 \\ 6 & -8 \\ 2 & 9 \end{bmatrix}, \underline{B} = \begin{bmatrix} 12 & 5 \\ 5 & -4 \\ 4 & -7 \end{bmatrix}$ ، فأوجد $-6\underline{B} + 7\underline{A}$

الربط مع الحياة

يمكنك استعمال المصفوفات في الكثير من الأعمال التجارية.

مثال 4 استعمال العمليات على المصفوفات

أعمال: ارجع إلى فقرة "لماذا؟" في بداية الدرس، وعبر عن معدل المبيعات والنفقات لجميع المعارض في خمسة أسابيع.

حتى يتم حساب المبيعات في خمسة أسابيع، يجب ضرب كل مصفوفة في العدد 5 وجمع المصفوفات الناتجة معًا.

ضرب كل مصفوفة في 5 ثم الجمع $5\begin{bmatrix} 1900 & 145000 \\ 2400 & 225000 \\ 2700 & 290000 \end{bmatrix} + 5\begin{bmatrix} 1700 & 122000 \\ 1800 & 145500 \\ 1800 & 160000 \end{bmatrix} + 5\begin{bmatrix} 1050 & 109500 \\ 1800 & 135000 \\ 1800 & 150500 \end{bmatrix}$

تطبيق قاعدة الضرب في ثابت $= \begin{bmatrix} 9500 & 725000 \\ 12000 & 1\,125000 \\ 13500 & 1\,450000 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 8500 & 610000 \\ 9000 & 727500 \\ 9000 & 800000 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 5250 & 547500 \\ 9000 & 675000 \\ 9000 & 752500 \end{bmatrix}$

اجمع المصفوفات $= \begin{matrix} \\ \text{النفقات} \\ \\ \\ \end{matrix}\begin{matrix} \text{المبيعات} \\ \begin{bmatrix} 23250 & 1882500 \\ 30000 & 2527500 \\ 31500 & 3002500 \end{bmatrix} \end{matrix}$

تدل المصفوفة النهائية على معدل المبيعات والنفقات في خمسة أسابيع.

تحقق من فهمك

4) أعمال: استعمل البيانات أعلاه لحساب معدل المبيعات والنفقات الشهري لجميع المعارض على فرض أن الشهر 30 يومًا.

المخطط المالي

يستعمل المخطّط المالي المصفوفات لتنظيم البيانات التي يستعملها، ووصفها.

إرشادات للدراسة

العناصر المتناظرة

عند تمثيل البيانات بمصفوفات متعددة، تأكد أن العناصر المتناظرة تمثل البيانات المتناظرة.

تأكد

مثال 1 أوجد الناتج في كلٍّ مما يأتي إذا كان ذلك ممكنًا:

1) $\begin{bmatrix} -8 & 2 & 6 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 11 & -7 & 1 \end{bmatrix}$

2) $\begin{bmatrix} 9 & -8 & 4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 12 & 2 \end{bmatrix}$

3) $\begin{bmatrix} 7 & -12 \\ 15 & 4 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 9 & 6 \\ 4 & -9 \end{bmatrix}$

4) $\begin{bmatrix} 5 & 13 & -6 \\ 3 & -17 & 2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -2 & -18 & 8 \\ 2 & -11 & 0 \end{bmatrix}$

مثال 2 أوجد الناتج في كلٍّ مما يأتي:

5) $3\begin{bmatrix} 6 & 4 & 0 \\ -2 & 14 & -8 \\ -4 & -6 & 7 \end{bmatrix}$

6) $-6\begin{bmatrix} 15 & -9 & 2 & 3 \\ 6 & -11 & 14 & -2 \\ 4 & -8 & -10 & 27 \end{bmatrix}$

مثال 3 إذا كانت $\underline{A} = \begin{bmatrix} 6 & -4 \\ 3 & -5 \end{bmatrix}$ $\underline{B} = \begin{bmatrix} 8 & -1 \\ -2 & 7 \end{bmatrix}$ $\underline{C} = \begin{bmatrix} -4 & -6 \\ 12 & -7 \end{bmatrix}$

فأوجد ناتج كلٍّ مما يلي:

7) $4\underline{B} - 2\underline{A}$

8) $-8\underline{C} + 3\underline{A}$

مثال 4 **9) درجات حرارة:** تبين المصفوفة $\underline{L}$ المعدل الشهري لدرجات الحرارة الصغرى (بالفهرنهايت) في مدينةٍ ما. وتبين المصفوفة $\underline{H}$ المعدل الشهري لدرجات الحرارة العظمى في تلك المدينة .

$$\underline{L} = \begin{bmatrix} 24.1 & 27.7 & 35.9 \\ 44.1 & 53.6 & 62.2 \\ 66.4 & 64.9 & 57.9 \\ 46.4 & 37.3 & 28.4 \end{bmatrix} \qquad \underline{H} = \begin{bmatrix} 39.9 & 45.2 & 55.3 \\ 65.1 & 74.0 & 82.3 \\ 85.9 & 84.6 & 78.1 \\ 66.9 & 54.5 & 44.3 \end{bmatrix}$$

أوجد المصفوفة التي تمثل الفرق بين المعدل الشهري لدرجات الحرارة العظمى والمعدل الشهري لدرجات الحرارة الصغرى في تلك المدينة؟

تدرب وحل المسائل

مثال 1 أوجد الناتج في كلٍّ مما يأتي إذا كان ذلك ممكنًا.

10) $\begin{bmatrix} 12 & -5 \\ -8 & -3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -6 & 11 \\ -7 & 2 \end{bmatrix}$

11) $\begin{bmatrix} 9 & 5 \\ -2 & 16 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -6 & -3 & 7 \\ 12 & 2 & -4 \end{bmatrix}$

الأمثلة 2, 3, 4

12) مشروبات: يبين الجدول المجاور قائمة أسعار المشروبات في مطعم، إذا رفع المطعم أسعار جميع المشروبات بنسبة 50%.

المشروب	صغير	وسط	كبير
غازي	3	4	5
شاي	2	3	4
قهوة	2	3	4
عصير	4	5	6

a) اكتب المصفوفة $\underline{C}$ التي تمثّل الأسعار الحالية .

b) ما العدد الذي يمكن أن نضرب المصفوفة $\underline{C}$ فيه لإيجاد المصفوفة $\underline{N}$ التي تمثّل الأسعار الجديدة؟

c) جد المصفوفة $\underline{N}$.

d) جد المصفوفة $\underline{C} - \underline{N}$. ماذا تمثل هذه المصفوفة في هذه الحالة؟

أوجد الناتج في كلٍّ مما يأتي إن أمكن، وإذا تعذر ذلك فاكتب "لا يمكن" مع ذكر السبب:

13) $\begin{bmatrix} 19 \\ -2 \\ 4 \\ 7 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -5 \\ 8 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$

14) $\begin{bmatrix} 4 & -3 & 3 \\ -8 & 12 & 1 \\ 0 & -1 & 5 \\ 7 & -9 & 4 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -3 & -8 & 12 \\ -11 & -5 & 3 \\ -1 & 22 & -9 \\ -6 & 31 & 9 \end{bmatrix}$

15) $\begin{bmatrix} 62 \\ -37 \\ -4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 34 & 76 & -13 \end{bmatrix}$

16) $\begin{bmatrix} 2 & 4 & 11 \\ -6 & 12 & -3 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 8 & -9 & -3 \\ 5 & 14 & 0 \end{bmatrix}$

17) $\begin{bmatrix} 5 \\ -9 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -3 \\ -7 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 9 \\ 16 \end{bmatrix}$

18) $\begin{bmatrix} 5 \\ 3 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -4 \\ 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -2 & 3 \\ 8 & -3 \end{bmatrix}$

19) كتب: تحتوي المكتبة A على 10000 كتاب علمي، و5000 كتاب تاريخي و5000 كتاب أدبي. وتحتوي المكتبة B على 15000 كتاب علمي، و10000 كتاب تاريخي و2500 كتاب أدبي. وتحتوي المكتبة C على 4000 كتاب علمي، و700 كتاب تاريخي، و800 كتاب أدبي.

a) رتب أعداد الكتب في كل مكتبة في مصفوفات، وارمز إليها بالرموز $\underline{A}, \underline{B}, \underline{C}$.

b) أوجد العدد الكلي للكتب من كل نوع في المكتبات الثلاث، وعبِّر عن ذلك بمصفوفة.

c) كم يزيد عدد الكتب من كل نوع في المكتبة A على التي في المكتبة C؟

d) أوجد المصفوفة $\underline{A} + \underline{B}$. هل لهذه المصفوفة معنى في هذه الحالة ؟ فسِّر إجابتك.

الربط مع الحياة

وصل عدد مقتنيات مكتبات جامعة الملك سعود 874971 عنوانًا تقع في 2065863 مجلدًا ومادة من مختلف أوعية المعلومات، وبلغت المساحة الإجمالية للمكتبات $62634m^2$، مجهزة بكل تقنيات المكتبات الحديثة وتدير خدماتها آليًا.

أوجد الناتج في كلٍّ مما يأتي إن أمكن، وإذا تعذر ذلك فاكتب "لا يمكن" مع ذكر السبب:

20) $-3\begin{bmatrix} 18 & -6 & -8 \\ -5 & -3 & 12 \\ 0 & 3x & -y \end{bmatrix}$

21) $-4\begin{bmatrix} -7 \\ 4 \\ -3 \end{bmatrix} + 3\begin{bmatrix} -8 \\ 3x \\ -9 \end{bmatrix} - 5\begin{bmatrix} 4 \\ x-6 \\ 12 \end{bmatrix}$

22) $-5\left(\begin{bmatrix} 4 & -8 \\ 8 & -9 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 4 & -2 \\ -3 & -6 \end{bmatrix}\right)$

23) $-6\left(\begin{bmatrix} 6 & 3y \\ 4x+1 & -2 \\ -9 & xy \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -5 & -6 \\ 8 & -7 \\ x+2 & 2x \end{bmatrix}\right)$

أجر العمليات على المصفوفات الآتية إن أمكن، وإذا تعذر ذلك فاكتب "لا يمكن" مع ذكر السبب:

24) $-2\begin{bmatrix} -9.2 & -8.4 \\ 5.6 & -4.3 \end{bmatrix} - 4\begin{bmatrix} 4.1 & -2.9 \\ 7.2 & -8.2 \end{bmatrix}$

25) $-\frac{3}{4}\begin{bmatrix} 12 & -16 \\ 15 & 8 \end{bmatrix} + \frac{2}{3}\begin{bmatrix} 21 & 18 \\ -4 & -6 \end{bmatrix}$

مسائل مهارات التفكير العليا

26) برهان: برهن على أن عملية جمع المصفوفات من النوع 2×2 تبديلية .

27) برهان: برهن على أن عملية جمع المصفوفات من النوع 2×2 تجميعية .

28) تحد: إذا كانت:

$$\underline{A} = \begin{bmatrix} -3 & -4 \\ 8 & 6 \end{bmatrix}, \underline{B} = \begin{bmatrix} 5 & -1 \\ 2 & -4 \end{bmatrix}, 3\underline{A} - 4\underline{B} + 6\underline{C} = \begin{bmatrix} 13 & 22 \\ 10 & 4 \end{bmatrix}$$

فأوجد عناصر المصفوفة $\underline{C}$.

29) تبرير: حدِّد إذا كانت كل جملة مما يأتي صحيحة أحيانًا، أو صحيحة دائمًا، أو غير صحيحة أبدًا للمصفوفتين $\underline{A}$, $\underline{B}$ ، ثم فسِّر إجابتك.

a) إذا كانت $\underline{A} + \underline{B}$ معرّفة ، فإن $\underline{A} - \underline{B}$ معرّفة.

b) إذا كان k عددًا حقيقيًّا ، فإن $k\underline{A}$ و $k\underline{B}$ معرّفتان.

c) إذا كانت $\underline{B} - \underline{A}$ غير معرّفة ، فإن $\underline{A} - \underline{B}$ غير معرّفة.

d) إذا كانت $\underline{A}$ وَ $\underline{B}$ لهما عدد العناصر نفسه ، فإن $\underline{A} + \underline{B}$ معرّفة.

e) إذا كانت $k\underline{A}$ و $k\underline{B}$ معرفتين، فإن $k\underline{A} + k\underline{B}$ معرّفة.

30) مسألة مفتوحة: أعط مثالًا على مصفوفتين $\underline{A}$ و $\underline{B}$ ، على أن تكون $4\underline{B} - 3\underline{A} = \begin{bmatrix} -6 & 5 \\ -2 & -1 \end{bmatrix}$.

31) اكتب: اشرح كيف تجد $4\underline{D} - 3\underline{C}$ لأي مصفوفتين $\underline{C}$, $\underline{D}$ لهما الرتبة نفسها.

تدريب على اختبار

32) حل النظام الآتي:

$$0.06p + 4q = 0.88$$
$$p - q = -2.25$$

A $(-0.912, -1.338)$ **C** $(-2, 0.25)$

B $(0.912, -3.162)$ **D** $(-2, -4.25)$

33) رتبة المصفوفة: إذا كانت $\underline{B}$, $\underline{A}$ مصفوفتين من الرتبة 3×5 ، فإن رتبة المصفوفة $\underline{A} - \underline{B}$ هي:

A 3×5 **C** 3×2

B 5×3 **D** 3×3

مراجعة تراكمية

إذا كانت $\underline{C} = \begin{bmatrix} 9 & -5 & 3 & 2 \\ 0 & -6 & 8 & 1 \end{bmatrix}$, $\underline{B} = \begin{bmatrix} 16 & 4 & x \\ -2 & 9 & y \end{bmatrix}$, $\underline{A} = \begin{bmatrix} -3 & 6 \\ -5 & x \\ 8 & 4y \end{bmatrix}$ ، فحدِّد كل عنصر مما يأتي: (الدرس 2-1)

34) a_{32} **35)** c_{13} **36)** b_{23}

حل بيانيًّا النظام أدناه: (الدرس 5-1)

37) $4x + 2y > 8$
$4y - 3x \leq 12$

38) سكان: في إحصائية عام 1435هـ لأكبر 20 مدينة سعودية من حيث عدد السكان، بلغ عدد سكان مدينة الدمام 903597 نسمة، بما يزيد 333800 على عدد سكان مدينة تبوك. اكتب معادلة لإيجاد عدد سكان مدينة تبوك، ثم حلّها. (مهارة سابقة)

بسّط كل عبارة مما يأتي: (الدرس 1-1)

39) $4(2x - 3y) + 2(5x - 6y)$

40) $-3(2a - 5b) - 4(4b + a)$

41) $-7(x - y) + 5(y - x)$

رابط الدرس الرقمي

www.ien.edu.sa

2-3

ضرب المصفوفات
Multiplying Matrices

فيما سبق:
درستُ ضرب المصفوفات في عدد ثابت. (الدرس 2-2)

والآن:
- أضرب المصفوفات.
- أستعمل خصائص ضرب المصفوفات.

لماذا؟

يبين الجدول المجاور أنواع الأقلام وعددها التي باعتها مكتبة في 4 أشهر متتالية.

نوع القلم	الشهر وعدد الأقلام			
	المحرم	صفر	ربيع 1	ربيع 2
رصاص	153	217	197	249
حبر سائل	12	6	7	8
حبر جاف	82	146	102	158

إذا علمت أن سعر بيع قلم الرصاص ريال واحد، وقلم الحبر السائل 3 ريالات، وقلم الحبر الجاف ريالان، فإنه يمكنك تلخيص الجدول بمصفوفة عدد الأقلام B، كما يمكنك التعبير عن مصفوفة سعر بيع كل نوع من الأقلام بالمصفوفة P.

مصفوفة عدد الأقلام B

$$\begin{bmatrix} 153 & 217 & 197 & 249 \\ 12 & 6 & 7 & 8 \\ 82 & 146 & 102 & 158 \end{bmatrix}$$

مصفوفة الأسعار P

قلم الرصاص	الحبر السائل	الحبر الجاف
1	3	2

وباستعمال ضرب المصفوفات، تجد سعر بيع الأقلام في كل شهر.

ضرب المصفوفات: يمكنك ضرب مصفوفتين إذا وفقط إذا كان عدد أعمدة المصفوفة الأولى يساوي عدد صفوف المصفوفة الثانية. وعند ضرب المصفوفة A ذات الرتبة $m \times r$ في المصفوفة B ذات الرتبة $r \times t$، فإن الناتج هو المصفوفة AB ذات الرتبة $m \times t$.

$$\underline{A} \cdot \underline{B} = \underline{AB}$$

$m \times r$ ، $r \times t$ متساويان

$m \times t$ رتبة AB

مثال 1 رتبة مصفوفة ناتج الضرب

هل يمكن إيجاد $\underline{A} \cdot \underline{B}$ في كلٍّ مما يأتي، وإن كانت كذلك، فأوجد رتبة المصفوفة الناتجة:

a) $\underline{A}_{3\times 4} \cdot \underline{B}_{4\times 2}$

$$\underline{A} \cdot \underline{B} = \underline{AB}$$

3×4 ، 4×2 ، 3×2

بما أن عدد أعمدة المصفوفة $\underline{A}$ يساوي عدد صفوف المصفوفة $\underline{B}$، فإن مصفوفة حاصل الضرب $\underline{A} \cdot \underline{B}$ معرّفة، ورتبتها 3×2.

b) $\underline{A}_{5\times 3} \cdot \underline{B}_{5\times 4}$

$$\underline{A} \cdot \underline{B}$$

5×3 ، 5×4

بما أن عدد أعمدة المصفوفة $\underline{A}$ لا يساوي عدد صفوف المصفوفة $\underline{B}$، فإن مصفوفة حاصل الضرب $\underline{A} \cdot \underline{B}$ غير معرّفة.

تحقق من فهمك

1A) $\underline{A}_{4\times 6} \cdot \underline{B}_{6\times 2}$

1B) $\underline{A}_{3\times 2} \cdot \underline{B}_{3\times 2}$

إرشادات للدراسة

رمز المصفوفة

أحيانًا تكتب $\underline{A}_{m\times n}$ لتعبر عن مصفوفة $\underline{A}$ رتبتها $m \times n$.

يمكنك إيجاد ناتج ضرب مصفوفتين بضرب عناصر صفوف الأولى في عناصر أعمدة الثانية بالترتيب ثم جمع النواتج.

مفهوم أساسي

أضف إلى مطويتك

ضرب المصفوفات

التعبير اللفظي: العنصر في الصف m والعمود r من المصفوفة $\underline{AB}$ هو مجموع نواتج ضرب العناصر في الصف m من المصفوفة $\underline{A}$، بعناصر العمود r من المصفوفة $\underline{B}$ بالترتيب.

الرموز:

$$\underline{A} \cdot \underline{B} = \underline{AB}$$

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} e & f \\ g & h \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ae+bg & af+bh \\ ce+dg & cf+dh \end{bmatrix}$$

مثال:

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2\times5+3\times7 & 2\times6+3\times8 \\ 1\times5+4\times7 & 1\times6+4\times8 \end{bmatrix}$$

مثال 2

ضرب المصفوفات المربعة

أوجد $\underline{XY}$ إذا كانت $\underline{Y} = \begin{bmatrix} -5 & -4 \\ 3 & 3 \end{bmatrix}$, $\underline{X} = \begin{bmatrix} 6 & -3 \\ -10 & -2 \end{bmatrix}$

$$\underline{XY} = \begin{bmatrix} 6 & -3 \\ -10 & -2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -5 & -4 \\ 3 & 3 \end{bmatrix}$$

الخطوة 1: اضرب عناصر الصف الأول في المصفوفة $\underline{X}$ في عناصر العمود الأول في المصفوفة $\underline{Y}$ بالترتيب، ثم اجمع نواتج الضرب، وضع النتيجة في الصف الأول، العمود الأول من المصفوفة $\underline{XY}$.

$$\begin{bmatrix} \mathbf{6} & \mathbf{-3} \\ -10 & -2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \mathbf{-5} & -4 \\ \mathbf{3} & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{6(-5)+(-3)(3)} & \end{bmatrix}$$

الخطوة 2: اتبع الخطوات نفسها مع عناصر الصف الأول والعمود الثاني، واكتب النتيجة في الصف الأول والعمود الثاني.

$$\begin{bmatrix} \mathbf{6} & \mathbf{-3} \\ -10 & -2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -5 & \mathbf{-4} \\ 3 & \mathbf{3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6(-5)+(-3)(3) & \mathbf{6(-4)+(-3)(3)} \end{bmatrix}$$

الخطوة 3: اتبع الخطوات نفسها مع عناصر الصف الثاني والعمود الأول، واكتب النتيجة في الصف الثاني، العمود الأول.

$$\begin{bmatrix} 6 & -3 \\ \mathbf{-10} & \mathbf{-2} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \mathbf{-5} & -4 \\ \mathbf{3} & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6(-5)+(-3)(3) & 6(-4)+(-3)(3) \\ \mathbf{-10(-5)+(-2)(3)} & \end{bmatrix}$$

الخطوة 4: اتبع الخطوات السابقة نفسها مع عناصر الصف الثاني والعمود الثاني.

$$\begin{bmatrix} 6 & -3 \\ \mathbf{-10} & \mathbf{-2} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -5 & \mathbf{-4} \\ 3 & \mathbf{3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6(-5)+(-3)(3) & 6(-4)+(-3)(3) \\ -10(-5)+(-2)(3) & \mathbf{-10(-4)+(-2)(3)} \end{bmatrix}$$

الخطوة 5: بسّط المصفوفة الناتجة.

$$\begin{bmatrix} 6(-5)+(-3)(3) & 6(-4)+(-3)(3) \\ -10(-5)+(-2)(3) & -10(-4)+(-2)(3) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -39 & -33 \\ 44 & 34 \end{bmatrix}$$

تحقق من فهمك

2) إذا كانت $\underline{V} = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 6 & -5 \end{bmatrix}$, $\underline{U} = \begin{bmatrix} 5 & 9 \\ -3 & -2 \end{bmatrix}$، فأوجد $\underline{UV}$.

تنبيه!

المحافظة على التركيز

من السهل أن تفقد التركيز عند ضرب المصفوفات، وربما تساعدك تغطية الصفوف أو الأعمدة التي لا تقوم بضربها عند إيجاد عناصر مصفوفة الضرب.

يمكنك استعمال ضرب المصفوفات في عدة مواقف حياتية.

مثال 3 من واقع الحياة — ضرب المصفوفات

الفريق	المركز الأول	المركز الثاني	المركز الثالث
A	4	7	3
B	8	9	1
C	10	5	3
D	3	3	6

سباحة: في مسابقة للسباحة بين أربع فرق سجلت 7 نقاط لمن يحل في المركز الأول، و 4 نقاط لمن يحل في المركز الثاني، ونقطتان لمن يحل في المركز الثالث. استعمل الجدول المجاور الذي يبين نتائج مسابقة السباحة لكل فريق لتحديد الفريق الفائز في المسابقة.

افهم: **المعطيات:**

- جدول يبين عدد مرات حصول 4 فرق على المراكز الثلاثة الأولى في مسابقة للسباحة.
- عدد النقاط التي تحتسب للفريق في كل مركز.

المطلوب:

- تحديد الفريق الفائز.

خطط: يمكن إيجاد النقاط النهائية التي أحرزها كل فريق بضرب مصفوفة النتائج للفريق في مصفوفة عدد النقاط التي تحتسب لكلٍّ من المراكز (الأول والثاني والثالث).

حل: اكتب كلًّا من النتائج والنقاط التي تم الحصول عليها في مصفوفتين، ورتب المصفوفتين على أن يكون عدد الصفوف في مصفوفة النقاط يساوي عدد الأعمدة في مصفوفة النتائج.

النتائج — النقاط

$$\underline{R} = \begin{bmatrix} 4 & 7 & 3 \\ 8 & 9 & 1 \\ 10 & 5 & 3 \\ 3 & 3 & 6 \end{bmatrix} \qquad \underline{P} = \begin{bmatrix} 7 \\ 4 \\ 2 \end{bmatrix}$$

اضرب المصفوفتين. $\underline{R}\underline{P}$

$$\underline{R}\underline{P} = \begin{bmatrix} 4 & 7 & 3 \\ 8 & 9 & 1 \\ 10 & 5 & 3 \\ 3 & 3 & 6 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 7 \\ 4 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4(7) + 7(4) + 3(2) \\ 8(7) + 9(4) + 1(2) \\ 10(7) + 5(4) + 3(2) \\ 3(7) + 3(4) + 6(2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 62 \\ 94 \\ 96 \\ 45 \end{bmatrix}$$

تبين مصفوفة حاصل الضرب عدد النقاط التي أحرزها كلٌّ من الفرق A, B, C, D على الترتيب؛ لذا فالفريق C هو الفائز في المسابقة؛ لأنه حصل على أكبر مجموع من النقاط وهو 96 نقطة.

تحقق: المصفوفة $\underline{R}$ من الرتبة 3×4 ، والمصفوفة $\underline{P}$ من الرتبة 1×3 ؛ لذا فإن حاصل الضرب سيكون مصفوفة من الرتبة 1×4.

تحقق من فهمك

3) مبيعات: ارجع إلى فقرة "لماذا؟" بداية الدرس، واستعمل ضرب المصفوفات لتحديد سعر بيع الأقلام في كل شهر.

خصائص ضرب المصفوفات: تذكّر أن خصائص جمع الأعداد الحقيقية تبقى صحيحة أيضًا عند جمع المصفوفات، إلا أن بعض خصائص ضرب الأعداد الحقيقية لا تكون صحيحة دائمًا عند ضرب المصفوفات.

مثال 4 — اختبار الخاصية الإبدالية

إذا كانت $\underline{H} = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -2 & -8 \\ 1 & 7 \end{bmatrix}$ ، $\underline{G} = \begin{bmatrix} 1 & 3 & -5 \\ 4 & -2 & 0 \end{bmatrix}$ ، فأوجد ناتج كل مما يأتي:

a $\underline{G}\underline{H}$

$$\underline{G}\underline{H} = \begin{bmatrix} 1 & 3 & -5 \\ 4 & -2 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -2 & -8 \\ 1 & 7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 - 6 - 5 & 3 - 24 - 35 \\ 8 + 4 + 0 & 12 + 16 + 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -9 & -56 \\ 12 & 28 \end{bmatrix}$$

الربط مع الحياة

تدل البحوث الصحية والرياضية أن ممارسة السباحة نصف ساعة يوميًا تخفض ضغط الدم وتقوي القلب وتقلل معدل الكولسترول في الدم وتزيد كفاءة الدورة الدموية، وتحرق 500 : 250 سعرة حرارية؛ لذا تعدّ من أفضل الرياضات لتخفيض الوزن.

b $\underline{HG}$

$$\underline{HG} = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -2 & -8 \\ 1 & 7 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 3 & -5 \\ 4 & -2 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2+12 & 6-6 & -10+0 \\ -2-32 & -6+16 & 10+0 \\ 1+28 & 3-14 & -5+0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 14 & 0 & -10 \\ -34 & 10 & 10 \\ 29 & -11 & -5 \end{bmatrix}$$

لاحظ أن $\underline{GH} \neq \underline{HG}$.

تحقق من فهمك

4) إذا كانت $\underline{A} = \begin{bmatrix} 4 & -1 \\ 5 & -2 \end{bmatrix}, \underline{B} = \begin{bmatrix} -3 & 6 \\ -4 & 5 \end{bmatrix}$ ، فهل $\underline{AB} = \underline{BA}$ ؟

اتضح في المثال 4 أن الخاصية الإبدالية لا تتحقق في ضرب المصفوفات. لذا فإن الترتيب يُعدّ في غاية الأهمية عند ضرب المصفوفات.

إرشادات للدراسة

البرهان والأمثلة المضادة

لإثبات صحة خاصية في جميع الحالات، يجب إثبات صحتها في الحالة العامة. ولبيان أن خاصية ما ليست صحيحة يكفي إعطاء مثال مضاد لها.

مثال 5 اختبار خاصية التوزيع

إذا كانت $\underline{L} = \begin{bmatrix} -4 & -1 \\ 3 & 0 \end{bmatrix}, \underline{K} = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}, \underline{J} = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ -5 & -2 \end{bmatrix}$ ، فجد ناتج كل مما يأتي:

a $\underline{J}(\underline{K} + \underline{L})$

عوّض $\underline{J}(\underline{K} + \underline{L}) = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ -5 & -2 \end{bmatrix} \cdot \left(\begin{bmatrix} 3 & 2 \\ -1 & 3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -4 & -1 \\ 3 & 0 \end{bmatrix} \right)$

اجمع المصفوفتين $= \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ -5 & -2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$

اضرب المصفوفتين $= \begin{bmatrix} -2+8 & 2+12 \\ 5-4 & -5-6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & 14 \\ 1 & -11 \end{bmatrix}$

b $\underline{JK} + \underline{JL}$

$$\underline{JK} + \underline{JL} = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ -5 & -2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ -1 & 3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ -5 & -2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -4 & -1 \\ 3 & 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 2(3)+4(-1) & 2(2)+4(3) \\ -5(3)+(-2)(-1) & -5(2)+(-2)(3) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2(-4)+4(3) & 2(-1)+4(0) \\ -5(-4)+(-2)(3) & -5(-1)+(-2)(0) \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 2 & 16 \\ -13 & -16 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 4 & -2 \\ 14 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & 14 \\ 1 & -11 \end{bmatrix}$$

لاحظ أن $\underline{J}(\underline{K} + \underline{L}) = \underline{JK} + \underline{JL}$.

تحقق من فهمك

5) إذا كانت $\underline{T} = \begin{bmatrix} -3 & 7 \\ -4 & 8 \end{bmatrix}, \underline{S} = \begin{bmatrix} 4 & 6 \\ -2 & 5 \end{bmatrix}, \underline{R} = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$ ، فحدِّد ما إذا كانت المعادلة $(\underline{S} + \underline{T})\underline{R} = \underline{SR} + \underline{TR}$ صحيحة للمصفوفات المعطاة أم لا.

في المثال السابق كانت خاصية توزيع الضرب على الجمع صحيحة، ويمكنك إثبات أن هذه الخاصية صحيحة دائمًا إذا كانت عمليتا الضرب والجمع معرفتين.

مفهوم أساسي

أضف إلى مطويتك

خصائص ضرب المصفوفات

تُعد الخصائص الآتية صحيحة لأي ثلاث مصفوفات A, B, C، ولأي عدد k، على أن تكون عمليتا ضرب أو جمع أيٍّ منها معرفتين:

الخاصية التجميعية لضرب المصفوفات	$(AB)C = A(BC)$
الخاصية التجميعية لضرب المصفوفات في عدد	$k(AB) = (kA)B = A(kB)$
خاصية التوزيع من اليسار للمصفوفات	$C(A + B) = CA + CB$
خاصية التوزيع من اليمين للمصفوفات	$(A + B)C = AC + BC$

تأكد

مثال 1 حدد إذا كانت عملية الضرب معرّفة في كلٍّ مما يأتي أم لا، وإن كانت معرّفة فأوجد رتبة المصفوفة الناتجة:

1) $A_{2\times 4} \cdot B_{4\times 3}$ **2)** $C_{5\times 4} \cdot D_{5\times 4}$ **3)** $E_{8\times 6} \cdot F_{6\times 10}$

مثال 2 أوجد الناتج في كلٍّ مما يأتي إذا كان ذلك ممكنًا:

4) $\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 7 & -5 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -6 & 3 \\ -2 & -4 \end{bmatrix}$

5) $\begin{bmatrix} 10 & -2 \\ -7 & 3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 5 & -2 \end{bmatrix}$

6) $\begin{bmatrix} 9 & -2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -2 & 4 \\ 6 & -7 \end{bmatrix}$

7) $\begin{bmatrix} -9 \\ 6 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -1 & -10 & 1 \end{bmatrix}$

8) $\begin{bmatrix} -8 & 7 & 4 \\ -5 & -3 & 8 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 10 & 6 \\ 8 & 4 \end{bmatrix}$

9) $\begin{bmatrix} 2 & 8 \\ 3 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 6 \\ -7 \end{bmatrix}$

10) $\begin{bmatrix} -4 & 3 & 2 \\ -1 & -5 & 4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 & 1 & 6 \\ 8 & 4 & -1 \\ 5 & 3 & -2 \end{bmatrix}$

11) $\begin{bmatrix} 2 & 5 & 3 & -1 \\ -3 & 1 & 8 & -3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 6 & -3 \\ -7 & 1 \\ 2 & 0 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$

مثال 3

12) لياقة بدنية: يبين الجدول المجاور عدد المشتركين في دورات اللياقة البدنية في المستويين الأول والثاني لدى أحد مراكز اللياقة البدنية في مدينة الرياض.

إذا كانت رسوم الاشتراك الأسبوعي 110 ريالات، ورسوم الاشتراك الشهري 165 ريالا، ورسوم الاشتراك السنوي 439 ريالًا.

عدد المشتركين في دورات اللياقة البدنية

الاشتراك	المستوى الأول	المستوى الثاني
الأسبوعي	35	28
الشهري	32	17
السنوي	18	12

a) اكتب مصفوفة تمثل عدد الأشخاص المسجلين في المستويات كلها، ومصفوفة تمثل رسوم الاشتراك فيها.

b) ما المبلغ الكلي الذي يحصل عليه المركز من اشتراكات المستويين الأول والثاني.

المثالان 4 , 5 إذا كانت $Z = \begin{bmatrix} -5 & -1 \\ -8 & -4 \end{bmatrix}, Y = \begin{bmatrix} -5 & 6 \\ -1 & 9 \end{bmatrix}, X = \begin{bmatrix} -10 & -3 \\ 2 & -8 \end{bmatrix}$، فحدِّد ما إذا كانت المعادلات الآتية صحيحة للمصفوفات المعطاة أم لا:

13) $XY = YX$ **14)** $X(YZ) = (XY)Z$

تدرب وحل المسائل

مثال 1 حدد إذا كانت عملية الضرب معرّفة في كلٍّ مما يأتي أم لا، وإن كانت معرّفة فأوجد رتبة المصفوفة الناتجة:

15) $P_{2\times 3}\cdot Q_{3\times 4}$ **16)** $A_{5\times 5}\cdot B_{5\times 5}$ **17)** $M_{3\times 1}\cdot N_{2\times 3}$

18) $X_{2\times 6}\cdot Y_{6\times 3}$ **19)** $J_{2\times 1}\cdot K_{2\times 1}$ **20)** $S_{5\times 2}\cdot T_{2\times 4}$

مثال 2 أوجد الناتج في كلٍّ مما يأتي إذا كان ذلك ممكنًا:

21) $\begin{bmatrix}1 & 6\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}-10\\6\end{bmatrix}$ **22)** $\begin{bmatrix}6\\-3\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}2 & -7\end{bmatrix}$

23) $\begin{bmatrix}-3 & -7\\-2 & -1\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}4 & 4\\9 & -3\end{bmatrix}$ **24)** $\begin{bmatrix}-1 & 0\\5 & 2\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}6 & -3\\7 & -2\end{bmatrix}$

25) $\begin{bmatrix}-1 & 0 & 6\\-4 & -10 & 4\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}5 & -7\\-2 & -9\end{bmatrix}$ **26)** $\begin{bmatrix}-6 & 4 & -9\\2 & 8 & 7\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}7\\2\\4\end{bmatrix}$

27) $\begin{bmatrix}2 & 9 & -3\\4 & -1 & 0\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}4 & 2\\-6 & 7\\-2 & 1\end{bmatrix}$ **28)** $\begin{bmatrix}-4\\8\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}-3 & -1\end{bmatrix}$

مثال 3

29) أجنحة فندقية: لدى مؤسسة للأجنحة الفندقية 3 مبانٍ للإيجار، ويبين الجدول المجاور عدد الغرف في كل مبنى. فإذا كانت الأجرة اليومية للغرفة التي تحوي سريرًا واحدًا 220 ريالًا، وللغرفة التي تحوي سريرين 250 ريالًا، وللغرفة التي تحوي ثلاثة أسرَّة 360 ريالًا.

عدد الغرف			
المبنى	غرفة بسرير واحد	غرفة بسريرين	غرفة بثلاث أسرة
1	3	2	2
2	2	3	1
3	4	3	0

a) اكتب مصفوفة تمثّل عدد الغرف، ثم اكتب مصفوفة أسعار الغرف.

b) اكتب مصفوفة تمثّل الدخل اليومي للمؤسسة، على فرض أن جميع الغرف تم تأجيرها.

c) ما مقدار الدخل اليومي الكلي، على فرض أن جميع الغرف تم تأجيرها.

المثالان 4 , 5 إذا كانت $k=2$, $R=\begin{bmatrix}4 & 6\\-6 & 4\end{bmatrix}$, $Q=\begin{bmatrix}6 & 4\\-2 & -5\end{bmatrix}$, $P=\begin{bmatrix}4 & -1\\1 & 2\end{bmatrix}$ ، فحدِّد ما إذا كانت المعادلات الآتية صحيحة للمصفوفات المعطاة أم لا:

30) $k(PQ)=P(kQ)$ **31)** $PQR=RQP$

32) $PR+QR=(P+Q)R$ **33)** $R(P+Q)=PR+QR$

الربط مع الحياة

الزنبق يضم حوالي 110 أنواع أهمها الزنبق الأبيض. وتنمو الأزهار من بصيلات محرشفة، وتأخذ شكل الأبواق ولها ست بتلات.

34) تنسيق زهور: اشترى محل تنسيق زهور 200 زهرة جوري، و 150 زهرة نرجس، و 100 زهرة زنبق، وسعر شراء الزهرة من كل نوع مبين في الجدول المجاور، وكذلك سعر بيع الزهرة بعد تغليفها وتنسيقها في طاقة.

الزهور	سعر الشراء	سعر البيع
جوري	0.50 ريال	3.00 ريالات
نرجس	1.5 ريال	6 ريالات
زنبق	2 ريال	7 ريالات

a) استعمل ضرب المصفوفات؛ لإيجاد المبلغ الكلي لشراء الزهور.

b) استعمل ضرب المصفوفات لإيجاد المبلغ الكلي الذي حصل عليه صاحب المحل من بيع الزهور.

c) أوجد مقدار ربح المحل من بيع الزهور.

استعمل المصفوفات $\underline{Z}=\begin{bmatrix}-3\\x+y\end{bmatrix}$ ، $\underline{Y}=\begin{bmatrix}-5 & -1.5\\x+2 & y\\13 & 1.2\end{bmatrix}$ ، $\underline{X}=\begin{bmatrix}2 & -6\\3y & -4.5\end{bmatrix}$ ، لإيجاد ناتج الضرب في كلٍّ مما يأتي إذا كان ذلك ممكنًا:

35) $\underline{X}\underline{Y}$ **36)** $\underline{Y}\underline{X}$ **37)** $\underline{Z}\underline{Y}$ **38)** $\underline{Y}\underline{Z}$

39) $(\underline{Y}\underline{X})\underline{Z}$ **40)** $(\underline{X}\underline{Z})\underline{X}$ **41)** $\underline{X}(\underline{Z}\underline{Z})$ **42)** $(\underline{X}\underline{X})\underline{Z}$

مسائل مهارات التفكير العليا

43) تبرير: إذا كانت رتبة المصفوفة $\underline{A}\underline{B}$ هي 8×5 ، ورتبة المصفوفة $\underline{A}$ هي 6×5 ، فما رتبة المصفوفة $\underline{B}$؟

44) برهان: بين أن الخصائص الآتية صحيحة للمصفوفات من النوع 2×2 .

a) خاصية التوزيع للضرب في عدد. **c)** الخاصية التجميعية للضرب.

b) خاصية التوزيع للضرب على الجمع. **d)** الخاصية التجميعية للضرب في عدد.

45) مسألة مفتوحة: اكتب مصفوفتين $\underline{A}$ و $\underline{B}$ على أن تكون $\underline{A}\underline{B}=\underline{B}\underline{A}$.

46) تحدٍّ: جد قيم a, b, c, d التي تجعل العبارة $\begin{bmatrix}a & b\\c & d\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}4 & 3\\2 & 5\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}10 & 11\\20 & 29\end{bmatrix}$ صحيحة.

47) اكتب: ارجع إلى فقرة "لماذا؟" بداية الدرس، واستعمل البيانات المعطاة لشرح كيفية استعمال المصفوفات في إحصاءات المبيعات للمكتبة.

تدريب على اختبار

48) في مشغل ثلاث آلات حياكة، فإذا كان إنتاج كل آلة في 3 أشهر كما في الجدول أدناه ، وسعر بيع القطعة الواحدة من إنتاج كل آلة معطى أيضًا، فما المبلغ الذي سيحصل عليه المشغل من مبيعات الأشهر الثلاثة؟

	الشهر 1	الشهر 2	الشهر 3	سعر بيع القطعة
الآلة 1	26	19	36	28
الآلة 2	48	27	16	19
الآلة 3	36	11	18	31

A 6012 ريالا **B** 5400 ريال

C 1221 ريالا **D** 2320 ريالا

49) رتبة المصفوفة: ما رتبة المصفوفة الناتجة عن عملية الضرب الآتية؟

$$\begin{bmatrix}a & b & c\\d & e & f\\g & h & i\\j & k & l\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}7\\4\\6\end{bmatrix}$$

A 1×4

B 3×3

C 4×1

D 4×3

مراجعة تراكمية

أوجد الناتج في كلٍّ مما يأتي إذا كان ذلك ممكنًا: (الدرس 2-2)

50) $4\begin{bmatrix}8 & -1\\-3 & -4\end{bmatrix}-5\begin{bmatrix}-2 & 4\\6 & 3\end{bmatrix}$ **51)** $5\left(2\begin{bmatrix}-2 & -5\\-1 & 3\end{bmatrix}-3\begin{bmatrix}-1 & -2\\6 & 4\end{bmatrix}\right)$ **52)** $-4\left(\begin{bmatrix}8 & 9\\-5 & 5\end{bmatrix}-2\begin{bmatrix}-6 & -1\\6 & 3\end{bmatrix}\right)$

اختبار منتصف الفصل

الدروس 2-1 إلى 2-3

حدد رتبة كل مصفوفة فيما يأتي:

1) $\begin{bmatrix} 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \end{bmatrix}$

2) $\begin{bmatrix} 10 & -6 & 18 & 0 \\ -7 & 5 & 2 & 4 \\ 3 & 11 & 9 & 7 \end{bmatrix}$

إذا كانت $\underline{A} = \begin{bmatrix} 4 & 3 \\ -5 & 1 \\ -3 & 7 \end{bmatrix}$ ، $\underline{B} = \begin{bmatrix} 1 & -9 & 2 \\ 0 & 10 & 4 \end{bmatrix}$، فحدد:

3) a_{21}

4) b_{22}

5) مبيعات: يبين الجدول الآتي مبيعات محلَّي ألبسة أطفال في أسبوعين مختلفين:

المحل	الأسبوع	الملابس المبيعة			
		قميص	بلوزة	قبعة	بنطال
A	1	25	14	18	5
	2	32	26	15	4
B	1	44	10	13	8
	2	18	38	17	2

a) اكتب مصفوفة تمثل مبيعات كل أسبوع.

b) جد مجموع مبيعات الأسبوعين باستعمال جمع المصفوفات.

أوجد الناتج في كل مما يأتي إذا كان ذلك ممكنًا:

6) $\begin{bmatrix} 0 & 15 \\ -6 & -10 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 8 & 0 \\ -3 & 5 \end{bmatrix}$

7) $-3\begin{bmatrix} 3 & 5 & 12 \\ 0 & -1 & 3 \\ 9 & 6 & -5 \end{bmatrix}$

8) $2\begin{bmatrix} -1 \\ 5 \\ -6 \end{bmatrix} + 4\begin{bmatrix} -3x \\ 2 \\ x \end{bmatrix} - 3\begin{bmatrix} x-2 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix}$

9) اختيار من متعدد: أوجد ناتج:

$2\begin{bmatrix} 3 & 5 \\ -6 & 0 \end{bmatrix} + 4\begin{bmatrix} 9 & -1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$.

A $\begin{bmatrix} 42 & 6 \\ -4 & 12 \end{bmatrix}$

B $\begin{bmatrix} 21 & 3 \\ -2 & 6 \end{bmatrix}$

C $\begin{bmatrix} 12 & 4 \\ -4 & 3 \end{bmatrix}$

D $\begin{bmatrix} 27 & -5 \\ -12 & 0 \end{bmatrix}$

أوجد الناتج في كل مما يأتي إذا كان ذلك ممكنًا:

10) $\begin{bmatrix} -2 & 3 \\ 1 & 6 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 3 & -1 & 4 \\ 0 & 5 & -6 \end{bmatrix}$

11) $\begin{bmatrix} -4 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 8 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}$

12) $\begin{bmatrix} 4 & -2 & -7 \\ 6 & 3 & 5 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -2 \\ 5 \\ 3 \end{bmatrix}$

13) اختيار من متعدد: إذا كانت المصفوفة $\underline{XY}$ من النوع 2×3، والمصفوفة $\underline{X}$ من النوع 3×4، فما رتبة المصفوفة $\underline{Y}$؟

A 2×3

B 3×2

C 3×4

D 4×2

14) مبيعات: يبين الجدول الآتي موجودات محل ألبسة رياضية من القمصان والبناطيل بالدستة، وقد قرر صاحب المحل مضاعفة عدد القمصان والبناطيل قبيل فصل الصيف.

النوع	صغير	وسط	كبير
قميص	10	10	15
بنطال	25	35	45

a) اكتب مصفوفة $\underline{A}$ تمثّل عدد القمصان والبناطيل في المحل قبل مضاعفة العدد.

b) ما العدد الذي يمكن أن نضرب فيه المصفوفة $\underline{A}$ لإيجاد المصفوفة $\underline{M}$ التي تمثل عدد القمصان والبناطيل بعد مضاعفته؟ جد $\underline{M}$.

c) ماذا تمثل المصفوفة $\underline{M} - \underline{A}$ في هذه الحالة؟

15) اختيار من متعدد: ناتج الضرب:

$\begin{bmatrix} 4 & 0 & -2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}$ يساوي:

A $\begin{bmatrix} 8 & -12 \end{bmatrix}$

B $\begin{bmatrix} 8 \\ -12 \end{bmatrix}$

C $\begin{bmatrix} 8 & -4 \\ 0 & 0 \\ 0 & -8 \end{bmatrix}$

D عملية الضرب غير معرّفة

رابط الدرس الرقمي

www.ien.edu.sa

2-4

المحدِّدات وقاعدة كرامر
Determinants and Cramer's Rule

فيما سبق:
درستُ حل أنظمة من المعادلات جبريًا. (مهارة سابقة)

والآن:
- أحسب المحدِّدات.
- أحل أنظمة معادلات خطية باستعمال قاعدة كرامر.

المفردات:
المحدِّدة determinant
محدِّدة الدرجة الثانية second-order determinant
محدِّدة الدرجة الثالثة third-order determinant
قاعدة الأقطار diagonal rule
مصفوفة المعاملات coefficient matrix
قاعدة كرامر Cramer's Rule

لماذا؟

لتحديد الإقليم الذي يعيش فيه أحد النمور، يقوم عالم حيوانات بتتبُّعه بواسطة جهاز GPS، وبعد عدة أيام، حدِّد العالم أن الإقليم مثلث الشكل. ويمكنه بعد تحديد إحداثيات رؤوس المنطقة استعمال المصفوفات والمحدِّدات لمعرفة مساحتها.

المحدِّدات: كل مصفوفة مربعة لها **محدِّدة**، وتسمى محدِّدة المصفوفة من النوع 2×2 **محدِّدة الدرجة الثانية**.

مفهوم أساسي — محدِّدة الدرجة الثانية

أضف إلى مطويتك

التعبير اللفظي: يرمز لمحدِّدة المصفوفة $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ بالرمز $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$ وقيمتها تساوي حاصل ضرب عنصري القطر الرئيس مطروحًا منه حاصل ضرب عنصري القطر الآخر.

بالرموز: $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - cb$

مثال: $\begin{vmatrix} 4 & 5 \\ -3 & 6 \end{vmatrix} = 4(6) - (-3)(5) = 39$

مثال 1 — محدِّدة الدرجة الثانية

أوجد قيمة كل محدِّدة فيما يأتي:

a) $\begin{vmatrix} 5 & -4 \\ 8 & 9 \end{vmatrix}$

$\begin{vmatrix} 5 & -4 \\ 8 & 9 \end{vmatrix} = 5(9) - 8(-4)$ تعريف محدِّدة الدرجة الثانية

$= 45 + 32$ بسِّط

$= 77$

b) $\begin{vmatrix} 0 & 6 \\ 4 & -11 \end{vmatrix}$

$\begin{vmatrix} 0 & 6 \\ 4 & -11 \end{vmatrix} = 0(-11) - 4(6)$ تعريف محدِّدة الدرجة الثانية

$= 0 - 24$ بسِّط

$= -24$

تحقق من فهمك

1A) $\begin{vmatrix} -6 & -7 \\ 10 & 8 \end{vmatrix}$

1B) $\begin{vmatrix} 7 & 5 \\ 9 & -4 \end{vmatrix}$

قراءة الرياضيات

المحدِّدات:
يرمز لمحدِّدة المصفوفة A بالرمز |A|

إرشادات للدراسة

قاعدة الأقطار

يمكن استعمال قاعدة الأقطار فقط للمصفوفات من الرتبة 3 × 3.

تُسمى محدِّدات المصفوفات من الرتبة 3 × 3 **محدِّدات الدرجة الثالثة**. ويمكنك حساب هـذه المحدِّدات باستعمال **قاعدة الأقطار** أو باستعمال محدِّدة المصفوفة 2 × 2 .

مفهوم أساسي

أضف إلى مطويتك

حساب محدِّدة المصفوفة 3 × 3

الطريقة الأولى: باستعمال قاعدة الأقطار

خطوة 1: أعد كتابة العمود الأول والثاني عن يمين المحدِّدة.

خطوة 2: أوجد حاصل ضرب عناصر القطر الرئيس وثلاثيات العناصر على الموازيات المبينة ثم اجمع.

خطوة 3: أوجد حاصل ضرب عناصر القطر الآخر وثلاثيات العناصر على الموازيات المبينة ثم اجمع.

خطوة 4: لإيجاد قيمة المحدِّدة نطرح ناتج الخطوة **3** من ناتج الخطوة **2** .

الطريقة الثانية: باستعمال محدِّدة المصفوفة 2 × 2 .

$$a \cdot \begin{vmatrix} e & f \\ h & i \end{vmatrix} - b \begin{vmatrix} d & f \\ g & i \end{vmatrix} + c \begin{vmatrix} d & e \\ g & h \end{vmatrix}$$

مثال 2

حساب محدِّدة المصفوفة 3 × 3

أوجد قيمة $\begin{vmatrix} 4 & -8 & 3 \\ -3 & 2 & 6 \\ -4 & 5 & 9 \end{vmatrix}$ باستعمال قاعدة الأقطار، ثم باستعمال محدِّدة المصفوفة 2 × 2 .

أولًا: باستعمال قاعدة الأقطار:

الخطوة 1: أعد كتابة العمود الأول والثاني عن يمين المحدِّدة.

$$\begin{vmatrix} 4 & -8 & 3 \\ -3 & 2 & 6 \\ -4 & 5 & 9 \end{vmatrix} \begin{matrix} 4 & -8 \\ -3 & 2 \\ -4 & 5 \end{matrix}$$

الخطوة 2: جد حاصل ضرب عناصر الأقطار وموازياتها.

$$\begin{vmatrix} 4 & -8 & 3 \\ -3 & 2 & 6 \\ -4 & 5 & 9 \end{vmatrix} \begin{matrix} 4 & -8 \\ -3 & 2 \\ -4 & 5 \end{matrix} \qquad \begin{vmatrix} 4 & -8 & 3 \\ -3 & 2 & 6 \\ -4 & 5 & 9 \end{vmatrix} \begin{matrix} 4 & -8 \\ -3 & 2 \\ -4 & 5 \end{matrix}$$

$$-4(2)(3) = -24 \qquad 4(2)(9) = 72$$

$$5(6)(4) = 120 \qquad -8(6)(-4) = 192$$

$$9(-3)(-8) = 216 \qquad 3(-3)(5) = -45$$

الخطوة 3: اجمع نواتج الضرب في كل مجموعة.

$$-24 + 120 + 216 = 312 \qquad 72 + 192 + (-45) = 219$$

الخطوة 4: اطرح المجموع الثاني من المجموع الأول.

$$219 - 312 = -93$$

فتكون قيمة المحدِّدة هي -93

ثانيًا: باستعمال محدِّدة المصفوفة 2 × 2 :

$$\begin{vmatrix} 4 & -8 & 3 \\ -3 & 2 & 6 \\ -4 & 5 & 9 \end{vmatrix} = 4 \begin{vmatrix} 2 & 6 \\ 5 & 9 \end{vmatrix} - (-8) \begin{vmatrix} -3 & 6 \\ -4 & 9 \end{vmatrix} + 3 \begin{vmatrix} -3 & 2 \\ -4 & 5 \end{vmatrix}$$

$$= 4 \times (-12) + 8 \times (-3) + 3 \times (-7) = -93$$

تحقق من فهمك

(2A $\begin{vmatrix} -5 & 9 & 4 \\ -2 & -1 & 5 \\ -4 & 6 & 2 \end{vmatrix}$

(2B $\begin{vmatrix} -8 & -4 & 4 \\ 0 & -5 & -8 \\ 3 & 4 & 1 \end{vmatrix}$

تستعمل المحدِّدات أيضًا لإيجاد مساحة المثلث. فإذا كانت إحداثيات رؤوس المثلث معلومة، فيمكنك استعمال الصيغة أدناه لإيجاد مساحة المثلث.

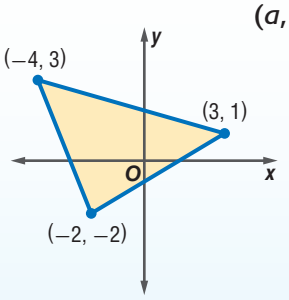
مفهوم أساسي

أضف إلى

مساحة المثلث

التعبير اللفظي: مساحة المثلث الذي إحداثيات رؤوسه $(a, b), (c, d), (e, f)$ هي القيمة المطلقة للمقدار A ، حيث:

$$A = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} a & b & 1 \\ c & d & 1 \\ e & f & 1 \end{vmatrix}$$



مثال: مساحة المثلث في الشكل المجاور هي:

$$A = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} -4 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 1 \\ -2 & -2 & 1 \end{vmatrix}$$

إرشادات للدراسة

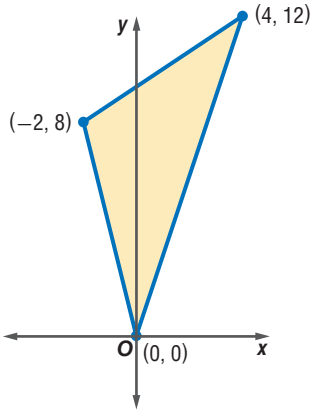
صيغة المساحة

لاحظ أنه يجب أن تستعمل القيمة المطلقة للمقدار A حتى تضمن أن المساحة غير سالبة.

مثال 3 من واقع الحياة

حساب مساحة المثلث باستعمال المحدِّدات

عالم الحيوان: عُد إلى فقرة "لماذا؟" بداية الدرس. إذا كانت إحداثيات رؤوس الإقليم الذي يعيش فيه النمر موضحة في الشكل المجاور بالكيلومترات، فاستعمل المحدِّدات لإيجاد مساحة الإقليم.



$$A = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} a & b & 1 \\ c & d & 1 \\ e & f & 1 \end{vmatrix}$$

$(a, b) = (0, 0)$

$(c, d) = (4, 12)$

$(e, f) = (-2, 8)$

$$= \frac{1}{2} \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 4 & 12 & 1 \\ -2 & 8 & 1 \end{vmatrix}$$

قاعدة الأقطار

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 4 & 12 & 1 \\ -2 & 8 & 1 \end{vmatrix} \begin{matrix} 0 & 0 \\ 4 & 12 \\ -2 & 8 \end{matrix} \qquad \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 4 & 12 & 1 \\ -2 & 8 & 1 \end{vmatrix} \begin{matrix} 0 & 0 \\ 4 & 12 \\ -2 & 8 \end{matrix}$$

اجمع نواتج ضرب عناصر الأقطار

$0 + 0 + 32 = 32$ $\qquad -24 + 0 + 0 = -24$

قيمة A

$$A = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 4 & 12 & 1 \\ -2 & 8 & 1 \end{vmatrix}$$

الربط مع الحياة

يعيش النمر في أقاليم قد تصل مساحتها إلى $100\,km^2$ ، ويحرس النمر إقليمه الذي يعيش فيه ويعرفه بتتبع أثره وأماكن روثه.

$= \left(\frac{1}{2}\right)[32 - (-24)] = 28$ بسّط

فتكون مساحة الإقليم الذي يعيش فيه النمر هي $28\ km^2$.

إرشادات للدراسة

مساحة المثلث

لا تختلف قيمة مساحة المثلث باختلاف ترتيب الرؤوس في المحدِّدة، أو بتبديل الصفوف فيها.

تحقق من فهمك

3) خرائط: يقف خالد وسعد ورضوان عند ثلاث نقاط مختلفة على خريطة المدينة التي يسكنونها، فإذا كانت إحداثيات هذه النقاط هي: (11, 9), (6, 4), (3, 15)، بحيث تمثّل كل وحدة على الخريطة 0.5km. فما مساحة المنطقة المثلثة التي يقفون عند رؤوسها؟

تسمى المصفوفة التي عناصرها معاملات المتغيرات في نظام معادلات بعدة متغيرات بعد ترتيب النظام **مصفوفة المعاملات**.

إرشادات للدراسة

المحدِّدات

تستعمل المحدِّدات لتحديد ما إذا كان لنظام من المعادلات الخطية حل وحيد أم لا .

قاعدة كرامر: يمكنك استعمال المحدِّدات لحل أنظمة معادلات، فإذا كانت قيمة المحدِّدة لمصفوفة المعاملات لا تساوي صفرًا، فإن للنظام حلًّا وحيدًا. وإذا كانت قيمة المحدِّدة صفرًا، فإما أن يكون للنظام عدد لانهائي من الحلول أو لا حل له، وهنالك طريقة لحل أنظمة المعادلات الخطية تُسمى **قاعدة كرامر** .

مفهوم أساسي

أضف إلى مطويتك

قاعدة كرامر

إذا كانت $\underline{C}$ مصفوفة المعاملات للنظام $\begin{matrix} ax + by = m \\ fx + gy = n \end{matrix}$ ، حيث $\underline{C} = \begin{bmatrix} a & b \\ f & g \end{bmatrix}$

فإن حل هذا النظام هو $x = \frac{\begin{vmatrix} m & b \\ n & g \end{vmatrix}}{|\underline{C}|}$ و $y = \frac{\begin{vmatrix} a & m \\ f & n \end{vmatrix}}{|\underline{C}|}$ ، وذلك إذا كانت $|\underline{C}| \neq 0$.

إرشادات للدراسة

قاعدة كرامر

عندما تكون قيمة محدِّدة مصفوفة المعاملات $\underline{C}$ صفرًا، فإنه لا يكون للنظام حل وحيد.

مثال 4

حل نظام من معادلتين

حل النظام الآتي باستعمال قاعدة كرامر: $\begin{matrix} 5x - 6y = 15 \\ 3x + 4y = -29 \end{matrix}$

$|\underline{C}| = \begin{vmatrix} 5 & -6 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = 5(4) - (3)(-6) = 38$ احسب محدِّدة مصفوفة المعاملات

$y = \frac{\begin{vmatrix} a & m \\ f & n \end{vmatrix}}{|\underline{C}|}$ قاعدة كرامر

$= \frac{\begin{vmatrix} 5 & 15 \\ 3 & -29 \end{vmatrix}}{38}$ عوّض

$= \frac{5(-29) - 3(15)}{38}$ احسب المحدِّدات

$= \frac{-145 - 45}{38}$ اضرب

$= -\frac{190}{38}$ اجمع واطرح

$= -5$ بسّط

$x = \frac{\begin{vmatrix} m & b \\ n & g \end{vmatrix}}{|\underline{C}|}$ قاعدة كرامر

$= \frac{\begin{vmatrix} 15 & -6 \\ -29 & 4 \end{vmatrix}}{38}$ عوّض

$= \frac{15(4) - (-29)(-6)}{38}$ احسب المحدِّدات

$= \frac{60 - 174}{38}$ اضرب

$= -\frac{114}{38}$ اجمع واطرح

$= -3$ بسّط

حل النظام هو: $(-3, -5)$

تحقق:

$5(-3) - 6(-5) \stackrel{?}{=} 15$ $\quad x = -3, y = -5$

$-15 + 30 \stackrel{?}{=} 15$ بسّط

$15 = 15$ ✓

$3(-3) + 4(-5) \stackrel{?}{=} -29$ $\quad x = -3, y = -5$

$-9 - 20 \stackrel{?}{=} -29$ بسّط

$-29 = -29$ ✓

تحقق من فهمك

4A $7x + 3y = 37$
$-5x - 7y = -41$

4B $8x - 5y = 70$
$9x + 7y = 3$

يمكنك استعمال قاعدة كرامر لحل نظام من ثلاث معادلات أيضًا.

مفهوم أساسي

أضف إلى مطويتك

استعمال قاعدة كرامر لحل نظام من ثلاث معادلات

إذا كانت $\underline{C}$ مصفوفة المعاملات للنظام $\begin{matrix} ax + by + cz = m \\ fx + gy + hz = n \\ jx + ky + \ell z = p \end{matrix}$ ، حيث $\underline{C} = \begin{bmatrix} a & b & c \\ f & g & h \\ j & k & \ell \end{bmatrix}$

فإن حل هذا النظام هو $x = \dfrac{\begin{vmatrix} m & b & c \\ n & g & h \\ p & k & \ell \end{vmatrix}}{|\underline{C}|}$ ، $y = \dfrac{\begin{vmatrix} a & m & c \\ f & n & h \\ j & p & \ell \end{vmatrix}}{|\underline{C}|}$ ، $z = \dfrac{\begin{vmatrix} a & b & m \\ f & g & n \\ j & k & p \end{vmatrix}}{|\underline{C}|}$

وذلك إذا كانت $|\underline{C}| \neq 0$.

مثال 5

حل نظام من ثلاث معادلات

حل النظام الآتي باستعمال قاعدة كرامر: $\begin{matrix} 4x + 5y - 6z = -14 \\ 3x - 2y + 7z = 47 \\ 7x - 6y - 8z = 15 \end{matrix}$

احسب محدّدة مصفوفة المعاملات $\quad |\underline{C}| = \begin{vmatrix} 4 & 5 & -6 \\ 3 & -2 & 7 \\ 7 & -6 & -8 \end{vmatrix} = 621$

$x = \dfrac{\begin{vmatrix} m & b & c \\ n & g & h \\ p & k & \ell \end{vmatrix}}{|\underline{C}|}$ ، $y = \dfrac{\begin{vmatrix} a & m & c \\ f & n & h \\ j & p & \ell \end{vmatrix}}{|\underline{C}|}$ ، $z = \dfrac{\begin{vmatrix} a & b & m \\ f & g & n \\ j & k & p \end{vmatrix}}{|\underline{C}|}$

$= \dfrac{\begin{vmatrix} -14 & 5 & -6 \\ 47 & -2 & 7 \\ 15 & -6 & -8 \end{vmatrix}}{621}$ ، $= \dfrac{\begin{vmatrix} 4 & -14 & -6 \\ 3 & 47 & 7 \\ 7 & 15 & -8 \end{vmatrix}}{621}$ ، $= \dfrac{\begin{vmatrix} 4 & 5 & -14 \\ 3 & -2 & 47 \\ 7 & -6 & 15 \end{vmatrix}}{621}$

$= \dfrac{3105}{621} = 5$ ، $= -\dfrac{1242}{621} = -2$ ، $= \dfrac{2484}{621} = 4$

وعليه يكون حل النظام هو $(5, -2, 4)$

تحقق :

$4(5) + 5(-2) - 6(4) \stackrel{?}{=} -14$

$20 - 10 - 24 \stackrel{?}{=} -14$

$-14 = -14$ ✓

$7(5) - 6(-2) - 8(4) \stackrel{?}{=} 15$

$35 + 12 - 32 \stackrel{?}{=} 15$

$15 = 15$ ✓

$3(5) - 2(-2) + 7(4) \stackrel{?}{=} 47$

$15 + 4 + 28 \stackrel{?}{=} 47$

$47 = 47$ ✓

إرشادات للدراسة

التحقق من الحل

للتحقق من الحل، عوض القيم في المعادلات الأصلية.

تحقق من فهمك

(5A) $3x + 5y + 2z = -7$
$-4x + 3y - 5z = -19$
$5x + 4y - 7z = -15$

(5B) $6x + 5y + 2z = -1$
$-x + 3y + 7z = 12$
$5x - 7y - 3z = -52$

تأكد

المثالان 1, 2

أوجد قيمة كل محدِّدة مما يأتي:

(1) $\begin{vmatrix} 8 & 6 \\ 5 & 7 \end{vmatrix}$

(2) $\begin{vmatrix} -6 & -6 \\ 8 & 10 \end{vmatrix}$

(3) $\begin{vmatrix} -4 & 12 \\ 9 & 5 \end{vmatrix}$

(4) $\begin{vmatrix} 16 & -10 \\ -8 & 5 \end{vmatrix}$

(5) $\begin{vmatrix} 3 & -2 & 2 \\ -4 & 2 & -5 \\ -3 & 1 & 4 \end{vmatrix}$

(6) $\begin{vmatrix} 2 & -3 & 5 \\ -4 & 6 & -2 \\ 4 & -1 & -6 \end{vmatrix}$

(7) $\begin{vmatrix} 8 & 4 & 0 \\ -2 & -6 & -1 \\ 5 & -3 & 6 \end{vmatrix}$

(8) $\begin{vmatrix} -5 & -3 & 4 \\ -2 & -4 & -3 \\ 8 & -2 & 4 \end{vmatrix}$

(9) $\begin{vmatrix} 8 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & 2 \\ 1 & 6 & 5 \end{vmatrix}$

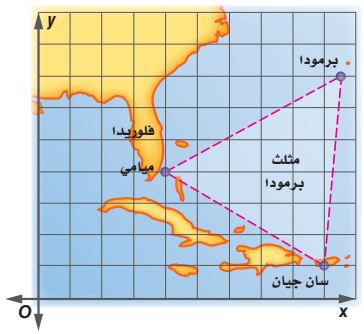
(10) $\begin{vmatrix} -4 & 3 & 0 \\ 1 & 5 & -2 \\ -1 & -8 & -3 \end{vmatrix}$

الربط مع الحياة

مثلث برمودا منطقة جغرافية في المحيط الأطلسي على شكل مثلث متساوي الأضلاع (كل ضلع نحو 1500 km)، ومساحته حوالي $1000000\ km^2$. وهي منطقة شهيرة بسبب مزاعم عن مخاطر وحوادث وقعت فيها ولم يُحَلّ اللغز حتى الآن.

مثال 3

(11) جغرافيا : استعمل الخريطة الإحداثية المجاورة، التي تظهر منطقة مثلث برمودا، للإجابة عما يأتي:



a) احسب مساحة منطقة مثلث برمودا على الخريطة.

b) إذا كان طول كل وحدة على الخريطة تمثل 175 ميلًا في الواقع، فأوجد مساحة منطقة مثلث برمودا الحقيقية.

مثال 4

استعمل قاعدة كرامر لحل كل نظام معادلات مما يأتي:

(12) $4x - 5y = 39$
$3x + 8y = -6$

(13) $10c - 7d = -59$
$6c + 5d = -63$

مثال 5 استعمل قاعدة كرامر لحل كل نظام معادلات مما يأتي:

14) $4x - 2y + 7z = 26$
$5x + 3y - 5z = -50$
$-7x - 8y - 3z = 49$

15) $6x - 5y + 2z = -49$
$-5x - 3y - 8z = -22$
$-3x + 8y - 5z = 55$

تدرب وحل المسائل

المثالان 1, 2 أوجد قيمة كل محدِّدة مما يأتي:

16) $\begin{vmatrix} -7 & 12 \\ 5 & 6 \end{vmatrix}$

17) $\begin{vmatrix} -8 & -9 \\ 11 & 12 \end{vmatrix}$

18) $\begin{vmatrix} -5 & 8 \\ -6 & -7 \end{vmatrix}$

19) $\begin{vmatrix} 3 & 5 & -2 \\ -1 & -4 & 6 \\ -6 & -2 & 5 \end{vmatrix}$

20) $\begin{vmatrix} 2 & 0 & -6 \\ -3 & -4 & -5 \\ -2 & 5 & 8 \end{vmatrix}$

21) $\begin{vmatrix} -5 & -1 & -2 \\ 1 & 8 & 4 \\ 0 & -6 & 9 \end{vmatrix}$

مثال 3

22) علم الآثار: وجد عالم آثار عظام حوت عند الإحداثيات (5, 9), (4, 7), (0, 3) على الخريطة. فإذا كانت الإحداثيات بالأمتار . فجد مساحة المثلث الذي رؤوسه تلك النقاط .

المثالان 4, 5 استعمل قاعدة كرامر لحل كل نظام معادلات مما يأتي:

23) $6x - 5y = 73$
$-7x + 3y = -71$

24) $10a - 3b = -34$
$3a + 8b = -28$

25) $5x - 4y + 6z = 58$
$-4x + 6y + 3z = -13$
$6x + 3y + 7z = 53$

26) $8x - 4y + 7z = 34$
$5x + 6y + 3z = -21$
$3x + 7y - 8z = -85$

27) رحلة مدرسية: نظمت مدرسة ثانوية رحلة إلى المدينة المنورة التي تبعد 615 km عن المدرسة. فإذا كان معدل سرعة الحافلة على الطريق السريع 105 km /h ، ومعدل سرعتها داخل المدن 45 km /h، وكان زمن سير الحافلة 7 ساعات. فاستعمل قاعدة كرامر لإيجاد عدد ساعات سيرها على الطريق السريع، وعدد ساعات سيرها داخل المدن.

الربط مع الحياة

عثر الباحثون أثناء التنقيب في أحد الكهوف على بقايا بشرية، وقدّروا أنها ترجع إلى ما قبل 200000 سنة.

استعمل قاعدة كرامر لحل كل نظام معادلات مما يأتي:

28) $3a - 5b - 9c = 17$
$4a - 3c = 31$
$-5a - 4b - 2c = -42$

29) $7x + 8y + 9z = -149$
$-6x + 7y - 5z = 54$
$4x + 5y - 2z = -44$

30) صناعة: ينتج مصنع 3 أحجام من علب الطلاء الفارغة، حجم صغير بتكلفة 1.15 ريال للعلبة، وحجم متوسط بتكلفة 1.75 ريال للعلبة، وحجم كبير بتكلفة 2.25 ريال للعلبة، وفي أحد الأيام أنتج من علب الحجم الصغير ضعف ما أنتجه من علب الحجم المتوسط، وكان مجموع ما أنتجه في ذلك اليوم 1385 علبة من جميع الأحجام، بتكلفة إجمالية قدرها 2238.75 ريالًا.

a) استعمل قاعدة كرامر لإيجاد عدد العلب التي أنتجها المصنع من كل حجم في ذلك اليوم.

b) إذا زادت تكلفة إنتاج علب الحجم الصغير فقط في اليوم التالي لتصبح 1.25 ريال بعد زيادة قليلة في الحجم، فأوجد تكلفة الإنتاج في اليوم التالي إذا كان إنتاج المصنع مقارنة باليوم السابق أقل بـ 140 علبة من الحجم الصغير، وأكثر بـ 125 علبة من الحجم المتوسط، وأكثر بـ 35 علبة من الحجم الكبير.

31) بستنة: أراد حمد إنشاء حديقة مثلثية الشكل في فناء منزله، فرسم لها مخططًا على المستوى الإحداثي، فكانت إحداثيات رؤوس الحديقة على المستوى $(-1, 7), (2, 6), (4, -3)$. جد المساحة الحقيقية للحديقة إذا كانت كل وحدة على المستوى الإحداثي تمثل مترًا على الأرض.

مسائل مهارات التفكير العليا

32) تحدٍّ: أوجد قيمة محدِّدة مصفوفة من النوع 3×3، على أن تكون عناصرها على النحو الآتي:

$$a_{mn} = \begin{cases} 0 & \text{إذا كان } m+n \text{ زوجيًّا} \\ m+n & \text{إذا كان } m+n \text{ فرديًّا} \end{cases}$$

33) مسألة مفتوحة: أعط مثالًا لمصفوفة من الرتبة 2×2 تحقق الشرط المذكور في كلٍّ مما يأتي:

a) المحدِّدة تساوي صفرًا.

b) المحدِّدة تساوي 25

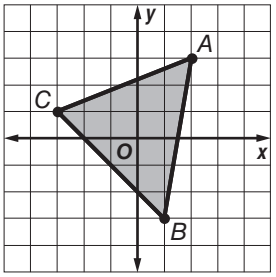
c) جميع العناصر أعداد سالبة والمحدِّدة تساوي -32

34) اكتب: صف التمثيلات البيانية الممكنة لنظام من معادلتين خطيتين بمتغيرين إذا كانت محدِّدة مصفوفة المعاملات تساوي صفرًا.

تدريب على اختبار

35) إجابة قصيرة: أعط مثالًا لمصفوفة من الرتبة 2×2، بحيث تكون جميع عناصرها أعدادًا سالبةً ومحدِّدتها تساوي 20.

36) أوجد مساحة المثلث المبين في الشكل المجاور.



A 10 وحدات مربعة

B 14 وحدة مربعة

C 12 وحدة مربعة

D 16 وحدة مربعة

مراجعة تراكمية

حدِّد إذا كانت مصفوفة الضرب معرّفة في كل مما يأتي أم لا، وإذا كانت كذلك، فأوجد رتبة المصفوفة الناتجة: (الدرس 3-2)

37) $A_{4\times2} \cdot B_{2\times6}$

38) $C_{5\times4} \cdot D_{5\times3}$

39) $E_{2\times7} \cdot F_{7\times1}$

حل كل نظام مما يأتي: (مهارة سابقة)

40)
$$2x - 5y = -26$$
$$5x + 3y = -34$$

41)
$$4y + 6x = 10$$
$$2x - 7y = 22$$

رابط الدرس الرقمي

www.ien.edu.sa

2-5

النظير الضربي للمصفوفة وأنظمة المعادلات الخطية
Inverse Matrices and Systems of Linear Equations

فيما سبق:
درستُ حل نظام معادلات خطية جبريًا. (مهارة سابقة)

والآن:
- أجد النظير الضربي لمصفوفة من النوع 2 × 2.
- أكتب معادلات مصفوفية لنظام من معادلتين وأحلها.

المفردات:
- **مصفوفة الوحدة** identity matrix
- **النظير الضربي للمصفوفة** inverse matrix
- **المعادلة المصفوفية** matrix equation
- **مصفوفة الثوابت** constant matrix
- **مصفوفة المتغيرات** variable matrix
- **مصفوفة المعاملات** coefficient matrix

لماذا؟

يبين الشكل المجاور أسعار وجبة الغداء في مطعم. ولتحديد سعر كل من الشطيرة، وعلبة المقبلات، وعلبة العصير، يمكنك إيجاد قيم المتغيرات w, s, d التي تحقق المساواة:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 2 & 2 \\ 4 & 3 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w \\ s \\ d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 \\ 19 \\ 38 \end{bmatrix}$$

حيث w تمثل سعر الشطيرة، وs تمثل سعر علبة المقبلات، وd تمثل سعر علبة العصير.

مصفوفة الوحدة ونظير المصفوفة الضربي: تذكّر أن عددين من الأعداد الحقيقية يكون كلٌّ منهما نظيرًا ضربيًّا للآخر إذا كان حاصل ضربهما هو العنصر المحايد لعملية الضرب. وكذلك الحال في المصفوفات، فإن **مصفوفة الوحدة** هي مصفوفة مربعة جميع عناصر قطرها الرئيس تساوي واحدًا، والباقي أصفار.

مصفوفة وحدة من النوع 2 × 2

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

مصفوفة وحدة من النوع 3 × 3

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

مفهوم أساسي
المصفوفة المحايدة لعملية الضرب

أضف إلى مطويتك

التعبير اللفظي: المصفوفة المحايدة لعملية الضرب ورمزها $\underline{I}$ هي مصفوفة الوحدة، والتي إذا ضربت في أي مصفوفة أخرى من الرتبة نفسها كان الناتج هو المصفوفة الأخرى.

لأي مصفوفة مربعة $\underline{A}$ لها رتبة مصفوفة الوحدة $\underline{I}$ نفسها،
فإن $\underline{A} \cdot \underline{I} = \underline{I} \cdot \underline{A} = \underline{A}$.

الرمـــوز: إذا كانت $\underline{A} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$، وَ $\underline{I} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ فإن

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$

مثال:

$$\begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 3 & -4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 3 & -4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 3 & -4 \end{bmatrix}$$

إذا كانت المصفوفتان $\underline{A}, \underline{B}$ مربعتين ولهما الرتبة نفسها، وكان $\underline{A}\,\underline{B} = \underline{B}\,\underline{A} = \underline{I}$ فإن المصفوفة $\underline{B}$ تُسمى **نظيرًا ضربيًّا للمصفوفة** $\underline{A}$، وكذلك تُسمى المصفوفة $\underline{A}$ نظيرًا ضربيًّا للمصفوفة $\underline{B}$. وإذا كان للمصفوفة $\underline{A}$ نظير ضربي فإنه يرمز إليه بالرمز $\underline{A}^{-1}$، حيث $\underline{A} \cdot \underline{A}^{-1} = \underline{A}^{-1} \cdot \underline{A} = \underline{I}$

مثال 1 التحقق من النظير الضربي

حدِّد ما إذا كانت كلّ من المصفوفتين تمثل نظيرًا ضربيًّا للأخرى أم لا فيما يأتي:

(a $\underline{A}=\begin{bmatrix}-4 & 2\\ -2 & 1\end{bmatrix}, \underline{B}=\begin{bmatrix}\frac{1}{4} & -\frac{1}{2}\\ \frac{1}{2} & -1\end{bmatrix}$

كل من المصفوفتين $\underline{A}, \underline{B}$ تمثل نظيرًا ضربيًّا للأخرى إذا وفقط إذا كان $\underline{A}\cdot\underline{B}=\underline{B}\cdot\underline{A}=\underline{I}$.

اكتب المعادلة $\underline{A}\cdot\underline{B}=\begin{bmatrix}-4 & 2\\ -2 & 1\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}\frac{1}{4} & -\frac{1}{2}\\ \frac{1}{2} & -1\end{bmatrix}$

اضرب المصفوفتين $=\begin{bmatrix}-1+1 & 2-2\\ -\frac{1}{2}+\frac{1}{2} & 1-1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix}$

بما أن $\underline{A}\cdot\underline{B}\neq\underline{I}$، فإن أيًّا منهما لا تمثل نظيرًا ضربيًّا للأخرى.

(b $\underline{F}=\begin{bmatrix}3 & -5\\ -2 & 6\end{bmatrix}, \underline{G}=\begin{bmatrix}\frac{3}{4} & \frac{5}{8}\\ \frac{1}{4} & \frac{3}{8}\end{bmatrix}$

كلٌّ من المصفوفتين $\underline{F}, \underline{G}$ تمثل نظيرًا ضربيًّا للأخرى إذا وفقط إذا كان $\underline{F}\cdot\underline{G}=\underline{G}\cdot\underline{F}=\underline{I}$

اكتب المعادلة $\underline{F}\cdot\underline{G}=\begin{bmatrix}3 & -5\\ -2 & 6\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}\frac{3}{4} & \frac{5}{8}\\ \frac{1}{4} & \frac{3}{8}\end{bmatrix}$

$=\begin{bmatrix}\frac{9}{4}-\frac{5}{4} & \frac{15}{8}-\frac{15}{8}\\ -\frac{6}{4}+\frac{6}{4} & -\frac{10}{8}+\frac{18}{8}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}$ اضرب المصفوفتين

اكتب المعادلة $\underline{G}\cdot\underline{F}=\begin{bmatrix}\frac{3}{4} & \frac{5}{8}\\ \frac{1}{4} & \frac{3}{8}\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}3 & -5\\ -2 & 6\end{bmatrix}$

$=\begin{bmatrix}\frac{9}{4}-\frac{10}{8} & -\frac{15}{4}+\frac{30}{8}\\ \frac{3}{4}-\frac{6}{8} & -\frac{5}{4}+\frac{18}{8}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}$ اضرب المصفوفتين

بما أن $\underline{F}\cdot\underline{G}=\underline{G}\cdot\underline{F}=\underline{I}$، فإن كلًّا من المصفوفتين $\underline{F}, \underline{G}$ نظير ضربي للأخرى.

تحقق من فهمك

(1 $\underline{X}=\begin{bmatrix}4 & -1\\ 2 & -2\end{bmatrix}, \underline{Y}=\begin{bmatrix}\frac{1}{3} & -\frac{1}{6}\\ \frac{1}{3} & -\frac{2}{3}\end{bmatrix}$

إرشادات للدراسة

التحقق من النظير الضربي

بما أن عملية ضرب المصفوفات ليست عملية إبدالية، فمن الضروري التأكد من الضرب في الاتجاهين.

يمكنك استعمال المحدِّدات؛ لإيجاد النظير الضربي لمصفوفة ما.

مفهوم أساسي النظير الضربي للمصفوفة من النوع 2 × 2

أضف إلى مطويتك

النظير الضربي للمصفوفة $\underline{A}=\begin{bmatrix}a & b\\ c & d\end{bmatrix}$ هو $\underline{A}^{-1}=\frac{1}{|\underline{A}|}\begin{bmatrix}d & -b\\ -c & a\end{bmatrix}$، وذلك إذا كانت $|\underline{A}|\neq 0$.

لاحظ أنه إذا كانت قيمة محدِّدة مصفوفةٍ ما تساوي صفرًا، فليس للمصفوفة نظير ضربي.

إرشادات للدراسة

لاحظ تبديل موضعي عنصري القطر الرئيس، وتغيير إشارتي عنصري القطر الآخر عند حساب $\underline{A}^{-1}$.

مثال 2 إيجاد النظير الضربي للمصفوفة

أوجد النظير الضربي لكل مصفوفة فيما يأتي، إن وجد:

(a $\underline{P} = \begin{bmatrix} 7 & -5 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$

$|\underline{P}| = \begin{vmatrix} 7 & -5 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = -7 - (-10) = 3$ احسب المحدِّدة

بما أن قيمة المحدِّدة لا تساوي صفرًا، فإن $\underline{P}^{-1}$ موجودة .

$\underline{P}^{-1} = \frac{1}{|\underline{P}|} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$ تعريف النظير الضربي للمصفوفة من الرتبة 2 × 2

$= \frac{1}{3} \begin{bmatrix} -1 & 5 \\ -2 & 7 \end{bmatrix}$ $|\underline{P}| = 3$

$= \begin{bmatrix} -\frac{1}{3} & \frac{5}{3} \\ -\frac{2}{3} & \frac{7}{3} \end{bmatrix}$ بسط

تأكد: أوجد ناتجي ضرب المصفوفتين. وإذا كان كلٌّ من ناتجي الضرب يساوي 1، فإن كلتا المصفوفتين نظير ضربي للأخرى.

$\begin{bmatrix} 7 & -5 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -\frac{1}{3} & \frac{5}{3} \\ -\frac{2}{3} & \frac{7}{3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{7}{3}+\frac{10}{3} & \frac{35}{3}-\frac{35}{3} \\ -\frac{2}{3}+\frac{2}{3} & \frac{10}{3}-\frac{7}{3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{3} & \frac{5}{3} \\ -\frac{2}{3} & \frac{7}{3} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 7 & -5 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$ ✓

(b $\underline{Q} = \begin{bmatrix} -8 & -6 \\ 12 & 9 \end{bmatrix}$

$|\underline{Q}| = \begin{vmatrix} -8 & -6 \\ 12 & 9 \end{vmatrix} = -72 - (-72) = 0$ احسب المحدِّدة

بما أن قيمة المحدِّدة تساوي صفرًا ، فإن $\underline{Q}^{-1}$ ليس موجودًا.

تحقق من فهمك

(2A $\underline{D} = \begin{bmatrix} 3 & 7 \\ 1 & -4 \end{bmatrix}$

(2B $\underline{T} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -4 & 3 \end{bmatrix}$

إرشادات للدراسة

خطوات إيجاد النظير الضربي للمصفوفة $\underline{A}$ من الرتبة 2 × 2.

1) أوجد قيمة $|\underline{A}|$، فإذا كان $|\underline{A}| = 0$ ، فإنه ليس للمصفوفة $\underline{A}$ نظير ضربي، وإذا كان $|\underline{A}| \neq 0$ ، فإن للمصفوفة $\underline{A}$ نظيرًا ضربيًا نجده كما في الخطوات 4 – 2.

2) بادل بين موضعي عنصري القطر الرئيس.

3) غيِّر إشارتي عنصري القطر الآخر.

4) اضرب المصفوفة الناتجة بعد إجراء الخطوتين 3 ,2 في العدد $\frac{1}{|\underline{A}|}$، فتحصل على $\underline{A}^{-1}$.

المعادلات المصفوفية: يمكنك استعمال المصفوفات لتمثيل نظام من المعادلات وحله. فمثلًا، يمكنك كتابة **معادلة مصفوفية** لحل نظام معادلتين خطيتين:

$\begin{matrix} ax + by = m \\ fx + gy = n \end{matrix} \rightarrow \begin{bmatrix} ax + by \\ fx + gy \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} m \\ n \end{bmatrix}$

وَيمكنك التعبير عما سبق بالمعادلة المصفوفية الآتية:

$\underline{A} \cdot \underline{X} = \underline{B}$

$\begin{bmatrix} a & b \\ f & g \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} m \\ n \end{bmatrix}$

مصفوفة المعاملات — مصفوفة المتغيرات المتغيرات في النظام فقط — مصفوفة الثوابت الثوابت في النظام فقط

إرشادات للدراسة

المعادلات المصفوفية

يمكنك استعمال هذه الطريقة لحل نظام معادلات فقط إذا كان لمصفوفة المعاملات $\underline{A}$ نظير ضربي، أما إذا لم يكن لها نظير ضربي، فيمكن أن يكون للنظام عدد لانهائي من الحلول، أو لا يوجد له حل.

ثم حُلَّ المعادلة المصفوفية بالطريقة نفسها التي تُحَلُّ بها أي معادلة أخرى من الشكل $ax = b$.

	المعادلة	
$ax = b$		$\underline{A}\,\underline{X} = \underline{B}$
$\left(\frac{1}{a}\right)ax = \left(\frac{1}{a}\right)b$	اضرب كل طرف في النظير الضربي لمصفوفة المعاملات إن وجد	$\underline{A}^{-1}\underline{A}\,\underline{X} = \underline{A}^{-1}\underline{B}$
$1x = \frac{b}{a}$	$\underline{A}^{-1}\underline{A} = \underline{I}$, $\left(\frac{1}{a}\right)a = 1$	$\underline{I}\,\underline{X} = \underline{A}^{-1}\underline{B}$
$x = \frac{b}{a}$	$\underline{I}\,\underline{X} = \underline{X}$, $1x = x$	$\underline{X} = \underline{A}^{-1}\underline{B}$

لاحظ أن حَلَّ المعادلة المصفوفية من الشكل $\underline{A}\,\underline{X} = \underline{B}$ هو حاصل ضرب النظير الضربي لمصفوفة المعاملات في مصفوفة الثوابت.

مثال 3 من واقع الحياة — حل نظام من معادلتين باستعمال المعادلة المصفوفية

سفر: **زوّد سلمان سيارته بالوقود مرتين في أثناء سفره إلى الرياض قادمًا من جدة، إذا كان سعر البنزين في المحطة الأولى 1.50 ريال لكل لتر، وفي المحطة الثانية كان السعر 1.45 ريال لكل لتر، وكان مجموع ما زوَّد به سيارته من البنزين 100 لتر، بسعر إجمالي 149 ريال، فكم لتر بنزين زوّد به سيارته من كل محطة؟**

يُكتب نظام المعادلتين الذي يمثل هذه الحالة على النحو الآتي:

$$x + y = 100$$
$$1.50x + 1.45y = 149$$

الخطوة 1: اكتب المعادلة المصفوفية بافتراض أن x عدد لترات البنزين من المحطة الأولى، وy عدد لترات البنزين من المحطة الثانية:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1.50 & 1.45 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 100 \\ 149 \end{bmatrix}$$

الخطوة 2: أوجد النظير الضربي لمصفوفة المعاملات.

$$\underline{A}^{-1} = \frac{1}{1.50 - 1.45}\begin{bmatrix} 1.45 & -1 \\ -1.50 & 1 \end{bmatrix} = -\frac{1}{0.05}\begin{bmatrix} 1.45 & -1 \\ -1.50 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -29 & 20 \\ 30 & -20 \end{bmatrix}$$

الخطوة 3: حُلَّ المعادلة المصفوفية باستعمال $\underline{X} = \underline{A}^{-1}\underline{B}$

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -29 & 20 \\ 30 & -20 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 100 \\ 149 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 80 \\ 20 \end{bmatrix}$$

إذن الحل هو (80, 20)، وهذا يعني أن سلمان زوّد سيارته بـ 80 لترًا من المحطة الأولى و 20 لترًا من الثانية.

الربط مع الحياة

هناك 90% من محطات الوقود العاملة في المملكة يُديرها أفراد يمتلكون هذه المحطات، بينما 10% فقط من هذه المحطات تُديرها شركات متخصصة في مجال تشغيل وإدارة محطات الوقود.

تأكد

مثال 1 حدِّد ما إذا كانت كلٌّ من المصفوفتين تمثل نظيرًا ضربيًّا للأخرى أم لا فيما يأتي:

1) $\underline{A}=\begin{bmatrix}2 & 1\\ -1 & 0\end{bmatrix}, \underline{B}=\begin{bmatrix}1 & 2\\ 2 & 1\end{bmatrix}$

2) $\underline{F}=\begin{bmatrix}-1 & 1\\ 0 & -1\end{bmatrix}, \underline{G}=\begin{bmatrix}-1 & -1\\ 0 & -1\end{bmatrix}$

مثال 2 أوجد النظير الضربي لكل مصفوفة فيما يأتي إن وجد:

3) $\begin{bmatrix}6 & -3\\ -1 & 0\end{bmatrix}$

4) $\begin{bmatrix}-3 & 0\\ 5 & 2\end{bmatrix}$

مثال 3 **5) نقود:** مع أحمد 25 قطعة نقدية من فئة أرباع وأنصاف الريالات، بحيث تبلغ قيمة ما معه 8.5 ريالات. فما عدد الأرباع والأنصاف التي معه؟

استعمل معادلة مصفوفية لحل كل نظام فيما يأتي:

6) $-2x+y=9$, $x+y=3$

7) $4x-2y=22$, $6x+9y=-3$

8) $-2x+y=-4$, $3x+y=1$

تدرب وحل المسائل

مثال 1 حدِّد ما إذا كانت كلٌّ من المصفوفتين تمثل نظيرًا ضربيًّا للأخرى أم لا فيما يأتي:

9) $\underline{K}=\begin{bmatrix}1 & 2\\ 3 & 0\end{bmatrix}, \underline{L}=\begin{bmatrix}0 & 1\\ 2 & -1\end{bmatrix}$

10) $\underline{M}=\begin{bmatrix}0 & 2\\ 4 & 5\end{bmatrix}, \underline{N}=\begin{bmatrix}1 & 1\\ 0 & 0\end{bmatrix}$

11) $\underline{R}=\begin{bmatrix}\frac{1}{2} & -\frac{1}{4}\\ \frac{1}{4} & -\frac{1}{2}\end{bmatrix}, \underline{S}=\begin{bmatrix}2 & 4\\ 4 & 2\end{bmatrix}$

مثال 2 أوجد النظير الضربي لكل مصفوفة فيما يأتي إن وجد:

12) $\begin{bmatrix}3 & 0\\ 0 & 2\end{bmatrix}$

13) $\begin{bmatrix}2 & 3\\ 3 & 2\end{bmatrix}$

14) $\begin{bmatrix}1 & -1\\ -6 & -1\end{bmatrix}$

15) $\begin{bmatrix}-5 & -4\\ 4 & 2\end{bmatrix}$

مثال 3 **16) مشتريات:** دفع سعد 225 ريالًا لشراء 5 أقلام حبر جافة وَ 6 أقلام حبر سائلة، بينما دفع ماجد 120 ريالًا لشراء 3 أقلام جافة من النوع نفسه وَ3 أقلام سائلة من النوع نفسه. فإذا كان سعر القلم الجاف x. وسعر القلم السائل y، فاستعمل معادلة مصفوفية؛ لإيجاد سعر القلم الجاف.

17) سكان: يبين الشكل الآتي نسبة الهجرة السنوية بين إحدى المدن وضواحيها.

اكتب مصفوفة تبين نسبة المهاجرين والباقين في كلٍّ من المدينة والضواحي.

استعمل معادلة مصفوفية لحل كل نظام إن أمكن فيما يأتي:

18) $-x+y=4$, $-x+y=-4$

19) $-x+y=3$, $-2x+y=6$

20) $x+y=4$, $-4x+y=9$

21) $3x+y=3$, $5x+3y=6$

22) $y-x=5$, $2y-2x=8$

23) $4x+2y=6$, $6x-3y=9$

24) $1.6y-0.2x=1$, $0.4y-0.1x=0.5$

25) $4y-x=-2$, $3y-x=6$

26) $2y-4x=3$, $4x-3y=-6$

الربط مع الحياة

تسعى حكومتنا الرشيدة إلى إقامة العديد من المشاريع في الضواحي بهدف وضع بنية تحتية فاعلة، مما يشجع على الهجرة العكسية أو هجرة السكان من المدن إلى الضواحي.

مسائل مهارات التفكير العليا

27) اكتشف الخطأ: أنشأت كل من هاجر وفاطمة معادلة مصفوفية لنظام المعادلتين $5x + 7y = 19, 3y + 4x = 10$. فهل حل أحدهما أو كليهما صحيح؟ فسِّر إجابتك.

هاجر

$$\begin{bmatrix} 5 & 7 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 19 \\ 10 \end{bmatrix}$$

فاطمة

$$\begin{bmatrix} 5 & 7 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 19 \\ 10 \end{bmatrix}$$

28) تحدٍّ: صِفِ المعادلة المصفوفية لنظام معادلتين خطيتين بمتغيرين ذات العدد اللانهائي من الحلول.

29) تبرير: حدِّد إذا كانت الجملة الآتية صحيحة دائمًا، أو صحيحة أحيانًا، أو غير صحيحة أبدًا، وفسِّر إجابتك.
"المصفوفة المربعة لها نظير ضربي".

30) مسألة مفتوحة: اكتب معادلة مصفوفية ليس لها حل.

31) اكتب: اشرح كيف يمكن استعمال معادلات مصفوفية لحل أنظمة معادلات، ومتى يكون استعماله أكثر فاعلية.

تدريب على اختبار

32) إجابة قصيرة: تبيع مكتبة 3 أحجام من الدفاتر: حجم صغير بسعر 2 ريال، وحجم متوسط بسعر 3 ريالاتٍ، وحجم كبير بسعر 4 ريالاتٍ، فإذا باعت المكتبة 52 دفترًا في أحد الأشهر، وكان عدد الدفاتر المبيعة من الحجم المتوسط يزيد على عدد الدفاتر المبيعة من الحجم الصغير بـ 7 دفاتر، وكان إجمالي المبيعات 150 ريالًا. فما عدد الدفاتر المبيعة من الحجم المتوسط؟

A 11 **B** 17 **C** 24 **D** 36

مراجعة تراكمية

جد قيمة كل محدِّدة فيما يأتي: (الدرس 4-2)

33) $\begin{vmatrix} 8 & -3 \\ 6 & -9 \end{vmatrix}$

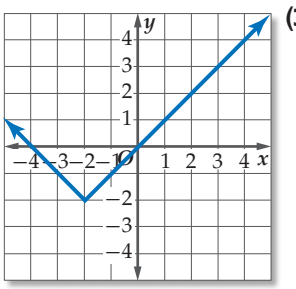
34) $\begin{vmatrix} 9 & -7 \\ -5 & -3 \end{vmatrix}$

35) $\begin{vmatrix} 8 & 6 & -1 \\ -4 & 5 & 1 \\ -3 & -2 & 9 \end{vmatrix}$

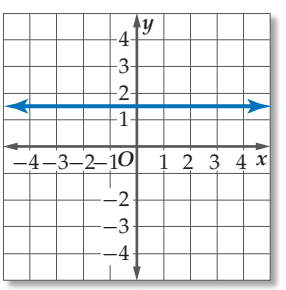
36) حليب: تنتج مزرعة أبقار 200 جالون على الأكثر من الحليب الطازج والحليب المبستر يوميًّا. فإذا كان كل زبون من زبائن المزرعة يحتاج إلى 15 جالونًا على الأقل من الحليب المبستر، و21 جالونًا على الأقل من الحليب الطازج يوميًّا، وكان ربح المزرعة في الجالون الواحد من الحليب المبستر 8.2 ريالات، ومن الحليب الطازج 7.5 ريالات. فكم عدد الجالونات التي يجب إنتاجها من كلا النوعين ليكون الربح أكبر ما يمكن؟ (الدرس 6-1)

حدِّد نوع الدالة الممثلة بيانيًّا في كلّ مما يأتي: (الدرس 3-1)

37)



38)



رابط الدرس الرقمي
www.ien.edu.sa

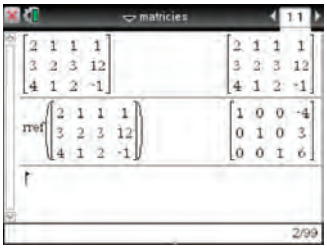
الهدف
أستعمل الحاسبة البيانية TI-nspire والمصفوفة الموسَّعة لحل نظام معادلات خطية.

يُمكنك حَلُّ نظام معادلات خطية باستعمال الحاسبة البيانية TI – nspire، إذ تحتوي **المصفوفة الموسعة** على مصفوفة المعاملات مع عمود إضافي إلى اليمين يحوي الثوابت، وباختزال المصفوفة الموسعة يصبح من السهل تحديد حل نظامٍ من المعادلات.

مثال

اكتب مصفوفةً موسعةً لنظام المعادلات الآتي، ثم حُلَّ هذا النظام باستعمال الحاسبة البيانية:

$$2x + y + z = 1$$
$$3x + 2y + 3z = 12$$
$$4x + y + 2z = -1$$



الخطوات:

- افتح الآلة الحاسبة بالضغط على (on).
- من الشاشة الظاهرة اختر A العمليات الحسابية ومنها اختر 1 مستند جديد.
- اختر 1: إضافة تطبيق الحاسبة.
- اضغط على مفتاح (menu) ثم اختر 7: المصفوفات و المتجهات ومنها اختر 1: إنشاء ومنها 1: المصفوفة فتظهر شاشة نحدِّد من خلالها عدد الصفوف وعدد الأعمدة.
- أدخل عدد الصفوف ثم اضغط (tab) وأدخل عدد الأعمدة ثم اضغط (enter).
- أدخل معاملات المتغيِّرات والثوابت مستعملًا (tab) للتنقل، ثم اضغط (enter).
- اضغط (doc) واختر منها 1: ملف ثم 5: حفظ باسم... ثم سمّ الملف واضغط حفظ.
- اضغط (menu)، ثم اختر 7: المصفوفات و المتجهات ومنها اختر 5: Reduced Row-Echelon Form.
- استعمل السهم لأعلى لتظلِّل المصفوفة الموسَّعة التي كتبتها ثم اضغط (enter) ثم (enter) مرة أخرى فيظهر الحل.

ادرس الشكل المختزل للمصفوفة، ولاحظ أن الأعمدة الثلاثة الأولى تشكّل مصفوفة محايدة من الرتبة 3×3، وتستنتج من الصف الأول أن $x = -4$، ومن الصف الثاني أن $y = 3$، ومن الصف الثالث أن $z = 6$، وعليه يكون الحل $(-4, 3, 6)$.

تمارين:

اكتب مصفوفةً موسّعةً لكل نظام معادلات فيما يأتي، ثم حُلَّه باستعمال الحاسبة البيانية:

1) $3x + 2y = -4$
$4x + 7y = 13$

2) $4x + 6y = 0$
$8x - 2y = 7$

3) $6x - 4y + 2z = -4$
$2x - 2y + 6z = 10$
$2x + 2y + 2z = -2$

دليل الدراسة والمراجعة

ملخص الفصل

المفاهيم الأساسية

المصفوفات (الدرس 2-1)

- المصفوفة: هي ترتيب على هيئة مستطيل لمتغيرات أو أعداد في صفوف أفقية وأعمدة رأسية بين قوسين.
- المصفوفات المتساوية لها الرتبة نفسها، وعناصرها المتناظرة متساوية.

العمليات على المصفوفات (الدرسان 2-2 و 2-3)

- يمكن جمع المصفوفات أو طرحها إذا كان لهما الرتبة نفسها. وذلك بجمع العناصر المتناظرة أو طرحها.
- لضرب مصفوفة في عدد ثابت k ، اضرب كل عنصر من عناصر المصفوفة في هذا العدد.
- يمكن ضرب مصفوفتين إذا كان عدد أعمدة الأولى يساوي عدد صفوف الثانية.

المحددات وقاعدة كرامر (الدرس 2-4)

- قيمة محددة المصفوفة المربعة من الرتبة 2×2 تساوي حاصل ضرب عنصري القُطر الرئيس مطروحًا منه حاصل ضرب عنصري القُطر الآخر.
- تستعمل المحددات في حل أنظمة المعادلات الخطية، وفي إيجاد مساحة مثلث عُلمت إحداثيات رؤوسه.

النظير الضربي للمصفوفة وأنظمة المعادلات الخطية (الدرس 2-5)

- مصفوفة الوحدة هي مصفوفة مربعة عناصر القطر الرئيس فيها العدد 1 وباقي العناصر أصفار.
- تكون كل من المصفوفتين نظيرًا ضربيًا للأخرى إذا كان حاصل ضربهما يعطي مصفوفة الوحدة.
- لحل معادلة مصفوفية من الشكل $AX = B$، أوجد النظير الضربي لمصفوفة المعاملات، ثم اضرب طرفي المعادلة فيه.

المطويات منظم أفكار

تأكد من أن المفاهيم الأساسية مدونة في مطويتك.

المفردات

المصفوفة (62)
العنصر (62)
الرتبة (62)
مصفوفة الصف (63)
مصفوفة العمود (63)
المصفوفة المربعة (63)
المصفوفة الصفرية (63)
المصفوفات المتساوية (63)
جمع مصفوفتين (69)
طرح مصفوفتين (69)
ضرب المصفوفة في عدد ثابت (70)
المحددة (83)
محددة الدرجة الثانية (83)
محددة الدرجة الثالثة (84)
قاعدة الأقطار (84)
مصفوفة المعاملات (86)
قاعدة كرامر (86)
مصفوفة الوحدة (91)
النظير الضربي للمصفوفة (91)
المعادلة المصفوفية (93)
مصفوفة الثوابت (93)
مصفوفة المتغيرات (93)
مصفوفة المعاملات (93)

اختبر مفرداتك

اختر الكلمة المناسبة من المفردات أعلاه لتكمل كل جملة فيما يأتي:

1) الترتيب على هيئة مستطيل لمتغيرات أو أعداد في صفوف أفقية وأعمدة رأسية تكتب بين قوسين يسمى _____ .

2) عملية ضرب جميع عناصر المصفوفة في عدد تسمى _____ .

3) تُسمى المصفوفة التي تحوي الثوابت في نظام المعادلات _____ .

4) كل قيمة في المصفوفة تُسمى _____ .

5) يُسمى عدد الصفوف × عدد الأعمدة في المصفوفة _____ المصفوفة.

6) المصفوفة المربعة التي عناصر القطر الرئيس فيها العدد 1 وباقي العناصر أصفار هي _____ .

7) المصفوفة التي جميع عناصرها أصفار هي _____ .

8) قيمة _____ المصفوفة $\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 2 \end{bmatrix}$ تساوي -1.

9) إذا كان حاصل ضرب مصفوفتين هو مصفوفة الوحدة، فإن كلتا المصفوفتين تكون _____ للأخرى.

2-1 مقدمة في المصفوفات (الصفحات: 67-62)

10) نادٍ رياضي: يبين الجدول الآتي عدد المشتركين شهريًّا وسنويًّا في نادٍ رياضي في 3 رياضات مختلفة:

	اللياقة البدنية	السباحة	تخفيض الوزن
اشتراك شهري	31	108	64
اشتراك سنوي	68	9	42

a) نظّم بيانات الجدول في المصفوفة $\underline{A}$.

b) ما رتبة المصفوفة $\underline{A}$؟

c) ما قيمة العنصر a_{23}؟

d) ما قيمة العنصر a_{11}؟

e) اجمع عناصر كل من الصفين الأول والثاني، وفسِّر النتائج.

مثال 1

متحف: يبين الجدول الآتي عدد زوار متحف في الفترة الصباحية والفترة المسائية خلال 3 أيام:

	اليوم الأول	اليوم الثاني	اليوم الثالث
الفترة الصباحية	37	19	26
الفترة المسائية	69	58	75

a) اكتب مصفوفة تمثل عدد الزوار. $\begin{bmatrix} 37 & 19 & 26 \\ 69 & 58 & 75 \end{bmatrix}$

b) ما رتبة المصفوفة؟ 3×2

c) اجمع عناصر كلٍّ من الصفين 1 و 2، وفسِّر النتائج.
مجموع عناصر الصف 1 هو 82، ويمثل عدد الزوار في الفترة الصباحية للأيام الثلاثة. ومجموع عناصر الصف 2 هو 202، ويمثل عدد الزوار في الفترة المسائية للأيام الثلاثة.

2-2 العمليات على المصفوفات (الصفحات: 74-69)

أوجد الناتج في كلٍّ مما يأتي، إذا كان ذلك ممكنًا:

11) $\begin{bmatrix} 2 \\ -6 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -3 \\ 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 6 \\ 0 \end{bmatrix}$

12) $3\left(\begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 6 & 8 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 9 \\ -3 & -4 \end{bmatrix}\right)$

مثال 2

أوجد ناتج $2\underline{B} + 3\underline{A}$ إذا كانت $\underline{A} = \begin{bmatrix} 9 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}, \underline{B} = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 3 & 7 \end{bmatrix}$.

$$3\underline{A} = 3\begin{bmatrix} 9 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 27 & 3 \\ 3 & 6 \end{bmatrix}, 2\underline{B} = 2\begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 3 & 7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 8 \\ 6 & 14 \end{bmatrix}$$

$$2\underline{B} + 3\underline{A} = \begin{bmatrix} 2 & 8 \\ 6 & 14 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 27 & 3 \\ 3 & 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 29 & 11 \\ 9 & 20 \end{bmatrix}$$

2-3 ضرب المصفوفات (الصفحات: 81-75)

أوجد الناتج في كلٍّ مما يأتي، إذا كان ذلك ممكنًا:

13) $\begin{bmatrix} 3 & -7 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 9 \\ -5 \end{bmatrix}$

14) $\begin{bmatrix} 2 & 11 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 8 & -5 \end{bmatrix}$

15) مشتريات اشترى راشد 4 علب حليب ، و 2kg تفاحًا، و 3kg بطاطس، وكيسًا واحدًا من الأرز، وتبين المصفوفة أدناه سعر علبة الحليب، والكيلوجرام الواحد من التفاح، والكيلوجرام الواحد من البطاطس، وكذلك سعر كيس الأرز.

أرز	بطاطس	تفاح	حليب
[25	3	10	15]

استعمل ضرب المصفوفات لإيجاد إجمالي المبلغ الذي دفعه راشد.

مثال 3

أوجد $\underline{X}\underline{Y}$ إذا كانت $\underline{X} = \begin{bmatrix} 0 & -6 \\ 3 & 5 \end{bmatrix}, \underline{Y} = \begin{bmatrix} 8 \\ -1 \end{bmatrix}$.

$$\underline{X}\underline{Y} = \begin{bmatrix} 0 & -6 \\ 3 & 5 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 8 \\ -1 \end{bmatrix}$$

اضرب الصفوف في الأعمدة
$$= \begin{bmatrix} 0(8) + (-6)(-1) \\ 3(8) + 5(-1) \end{bmatrix}$$

بسّط
$$= \begin{bmatrix} 6 \\ 19 \end{bmatrix}$$

2-4 المحددات وقاعدة كرامر (الصفحات: 90-83)

أوجد قيمة كل محددة فيما يأتي:

16) $\begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 7 & -3 \end{vmatrix}$

17) $\begin{vmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 0 & 2 & 4 \\ -2 & 5 & 6 \end{vmatrix}$

استعمل قاعدة كرامر لحل كل نظام معادلات فيما يأتي:

18) $3x - y = 0$
$5x + 2y = 22$

19) $5x + 2y = 4$
$3x + 4y + 2z = 6$
$7x + 3y + 4z = 29$

20) حرف يدوية: صنعت شيماء 3 أساور، وعقدين بتكلفة مقدارها 85 ريالا، وصنعت ليلى سوارين و 4 عقود بتكلفة مقدارها 110 ريالات. فإذا كان للعقود التي صنعتها كلٌّ منهما التكلفة نفسها، وكذلك الأساور. فجد تكلفة كلٍّ من العقد، والسوار.

مثال 4

أوجد قيمة: $\begin{vmatrix} 4 & -6 \\ 2 & 5 \end{vmatrix}$.

$\begin{vmatrix} 4 & -6 \\ 2 & 5 \end{vmatrix} = 4(5) - 2(-6)$ تعريف محددة الدرجة الثانية

$= 20 + 12 = 32$ بسّط

مثال 5

استعمل قاعدة كرامر لحل النظام:

$2a + 6b = -1$, $a + 8b = 2$

$a = \dfrac{\begin{vmatrix} -1 & 6 \\ 2 & 8 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & 6 \\ 1 & 8 \end{vmatrix}}$ قاعدة كرامر

$= \dfrac{-8 - 12}{16 - 6}$ احسب المحددات

$= \dfrac{-20}{10} = -2$ بسّط

$b = \dfrac{\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & 6 \\ 1 & 8 \end{vmatrix}}$ قاعدة كرامر

$= \dfrac{4 + 1}{16 - 6}$ احسب المحددات

$= \dfrac{5}{10} = \dfrac{1}{2}$ بسّط

الحل هو $\left(-2, \frac{1}{2}\right)$.

2-5 النظير الضربي للمصفوفة وأنظمة المعادلات الخطية (الصفحات: 96-91)

أوجد النظير الضربي لكل مصفوفة فيما يأتي، إن وجد:

21) $\begin{bmatrix} 7 & 4 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$

22) $\begin{bmatrix} 2 & 5 \\ -5 & -13 \end{bmatrix}$

23) $\begin{bmatrix} 6 & -3 \\ -8 & 4 \end{bmatrix}$

حل المعادلة المصفوفية فيما يأتي:

24) $\begin{bmatrix} 5 & 3 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 0 \end{bmatrix}$

25) $\begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 4 \end{bmatrix}$

26) مشتريات: اشترى سعود 2 kg مكسرات و 2 kg قهوة بمبلغ 140 ريالًا. واشترى ناصر 3 kg مكسرات وكيلوجرامًا قهوة بمبلغ 170 ريالًا. فما سعر الكيلوجرام الواحد من كلا النوعين؟

مثال 6

حل المعادلة المصفوفية: $\begin{bmatrix} 2 & -5 \\ 3 & -6 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 15 \\ 36 \end{bmatrix}$.

الخطوة 1: جد النظير الضربي لمصفوفة المعاملات.

$\underline{A}^{-1} = \dfrac{1}{-12 - (-15)} \begin{bmatrix} -6 & 5 \\ -3 & 2 \end{bmatrix} = \dfrac{1}{3} \begin{bmatrix} -6 & 5 \\ -3 & 2 \end{bmatrix}$

الخطوة 2: حل المعادلة المصفوفية باستعمال $\underline{X} = \underline{A}^{-1} \underline{B}$

$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \dfrac{1}{3} \begin{bmatrix} -6 & 5 \\ -3 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 15 \\ 36 \end{bmatrix}$

$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \dfrac{1}{3} \begin{bmatrix} 90 \\ 27 \end{bmatrix}$

$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 30 \\ 9 \end{bmatrix}$

إذن الحل هو (30, 9).

اختبار الفصل

إذا كانت $\underline{A} = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 7 \\ 9 & 1 & 1 \\ 8 & 0 & 8 \end{bmatrix}$ ، فحدد قيمة كلِّ عنصر مما يأتي:

1) a_{22} **2)** a_{31}

أوجد الناتج في كلٍّ مما يأتي، إذا كان ذلك ممكنًا:

3) $-3\begin{bmatrix} 4a \\ 0 \\ -3 \end{bmatrix} + 4\begin{bmatrix} -2 \\ 3 \\ -1 \end{bmatrix}$

4) $\begin{bmatrix} -3 & 0 \\ 1 & 5 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ -6 & 0 \end{bmatrix}$

5) $\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ -3 & 5 \\ 1 & 4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 3 \\ -2 \end{bmatrix}$

6) $\begin{bmatrix} -5 & 7 \\ 6 & 8 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 4 & 0 & -2 \\ 9 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

7) مبيعات: تبيع مكتبة 3 مجموعات من كتب الأطفال. ويبين الجدول الآتي تكلفة كل مجموعة وسعر بيعها. فإذا باعت المكتبة 20 مجموعة من الكتب التربوية، و 32 مجموعة من الكتب العلمية، و14 مجموعة من القصص.

المجموعة	التكلفة	سعر البيع (ريال)
تربوية	100	120
علمية	90	110
قصص	130	150

a) نظّم البيانات في مصفوفات، ثم استعمل ضرب المصفوفات لإيجاد تكلفة الكتب الكلية.

b) استعمل ضرب المصفوفات لإيجاد المبلغ الكلي الذي تحصلت عليه المكتبة من بيع ذلك العدد من مجموعات الكتب.

c) استعمل العمليات على المصفوفات لمعرفة ربح المكتبة.

8) إذا كان $\underline{A}=\begin{bmatrix} 3 & 8 \\ -3 & -4 \end{bmatrix}, \underline{B}=\begin{bmatrix} -7 & 5 \\ 5 & -4 \end{bmatrix}, \underline{C}=\begin{bmatrix} -4 & 7 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}$ فأوجد ناتج $\underline{A}\underline{B} - \underline{A}\underline{C}$

9) استعمل المحددات لإيجاد مساحة $\triangle xyz$ الذي رؤوسه $x(1, 2), y(3, 6), z(-1, 4)$.

10) اختيار من متعدد: أوجد قيمة محددة المصفوفة:

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 0 & 2 & 4 \\ -2 & 5 & 6 \end{bmatrix}$$

A -44 **C** $\frac{1}{44}$

B 44 **D** $-\frac{1}{44}$

أوجد النظير الضربي لكل مصفوفة فيما يأتي، إن وجد:

11) $\begin{bmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ **12)** $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$

13) $\begin{bmatrix} 6 & 3 \\ 8 & 4 \end{bmatrix}$ **14)** $\begin{bmatrix} -3 & -2 \\ 6 & 4 \end{bmatrix}$

استعمل معادلة مصفوفية لحل نظام المعادلتين الآتي:

15) $2x - y = -9$

$x + 2y = 8$

استعمل قاعدة كرامر لحل كل نظام معادلات فيما يأتي:

16) $x - y + 2z = 0$

$3x + z = 11$

$-x + 2y = 0$

17) $6x + 2y + 4z = 2$

$3x + 4y - 8z = -3$

$-3x - 6y + 12z = 5$

أسئلة الإجابات الشبكية

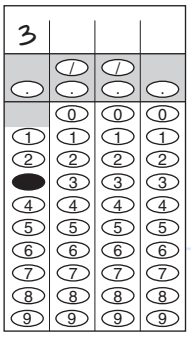
من المحتمل أن تواجه في الاختبارات المعيارية بالإضافة إلى أسئلة الاختيار من متعدد، وأسئلة الإجابات القصيرة، وأسئلة الإجابات المطولة، أسئلة الإجابات الشبكية. ويتطلب هذا النوع من الأسئلة كتابة الإجابة في نموذج خاص، وذلك بتظليل الدوائر التي تمثل الإجابات الصحيحة.

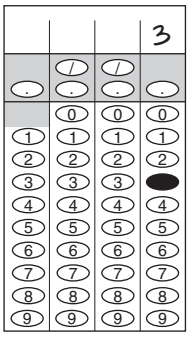
استراتيجيات حل أسئلة الإجابات الشبكية

الخطوة 1

اقرأ المسألة بإمعان، ثم حلّها.

- تأكد من أن إجابتك لها معنًى.
- إذا كان الوقت كافيًا، فتحقق من إجابتك.

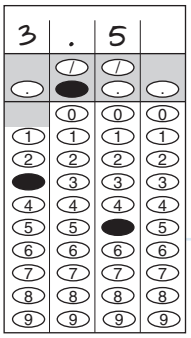


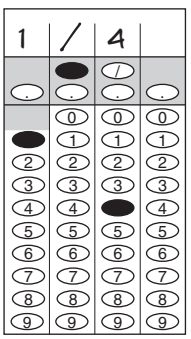


الخطوة 2

اكتب إجابتك في مربع الإجابة.

- اكتب عددًا واحدًا فقط أو رمزًا في كل مربع إجابة على نموذج الإجابة الشبكية.
- لا تكتب أي أرقام أو رموز خارج مربعات الإجابة.
- يمكن أن تكون إجابات هذه الأسئلة أعدادًا كلية، أو كسورًا عشرية، أو كسورًا اعتيادية.





الخطوة 3

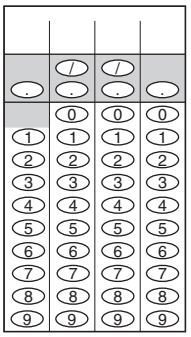
دوّن الإجابة في نموذج الإجابة الشبكية.

- ظلّل دائرة واحدة فقط لكل مربع إجابة، وتأكد من أنك ظللت قيمة مناظرة للتي في المربع.
- ظلّل بصورة واضحة وكاملة.

مثال

اقرأ المسألة الآتية جيدًا، وحدّد ما تحتاج إلى معرفته، ثم استعمل المعطيات لحلها.

زوّد محمد سيارته بالوقود مرتين في أثناء سفره إلى الرياض قادمًا من مكة المكرمة. فإذا كان سعر البنزين في المحطة الأولى 1.50 ريال لكل لتر، وفي المحطة الثانية كان السعر 1.45 ريال لكل لتر، وكان مجموع ما زوّد به سيارته من البنزين 100 لتر بسعر إجمالي 147.25 ريالًا. فكم لتر بنزين زود به سيارته من كل محطة؟



اقرأ المسألة جيدًا، إذ يمكن حلُّها باستعمال نظامٍ من معادلتين.

لتكن x تمثل عدد اللترات من المحطة الأولى، وَ y تمثل عدد اللترات من المحطة الثانية،

لذا يكتب نظام المعادلتبن الذي يمثل هذه الحالة على النحو الآتي:

$$x + y = 100$$

$$1.50x + 1.45y = 147.25$$

من الممكن حل هذا النظام جبريًّا، ولكن يمكن حلُّه بشكل أسرع وبطريقة

أسهل باستعمال المصفوفات والحاسبة البيانية.

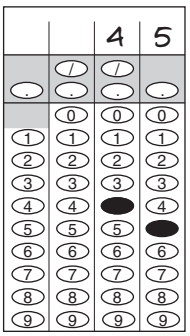
حل المسألة

أدخل كلًّا من مصفوفة المعاملات ومصفوفة الثوابت إلى الحاسبة البيانية، ثم أوجد الحل

باستعمال النظير الضربي.

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1.50 & 1.45 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 100 \\ 147.25 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 45 \\ 55 \end{bmatrix}$$

إذن زوّد محمد سيارته بـ 45 لترًا من المحطة الأولى، و 55 لترًا من المحطة الثانية.



تمارين ومسائل

اقرأ كل مسألة، وحدّد ما تحتاج إلى معرفته، ثم استعمل المعطيات لحلِّها. انسخ نموذج الإجابة، واستعمله في الإجابة.

1) أوجد محددة المصفوفة $\begin{bmatrix} -1 & 4 \\ -3 & 20 \end{bmatrix}$.

2) أوجد محددة المصفوفة:

$$\underline{H} = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 3 \\ -5 & -7 & -1 \\ 4 & -8 & 1 \end{bmatrix}$$

أسئلة الاختيار من متعدد

اختر الإجابة الصحيحة فيما يأتي:

1) إذا كانت $\underline{A} = \begin{bmatrix} -2 & 1 & 3 \\ 0 & 3 & 2 \end{bmatrix}$،

$\underline{B} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{bmatrix}$

فما قيمة $2\underline{A} + 3\underline{B}$ ؟

A $\begin{bmatrix} -6 & 3 & 9 \\ 0 & 9 & 5 \end{bmatrix}$ **C** $\begin{bmatrix} -5 & 15 & 30 \\ 15 & 25 & 15 \end{bmatrix}$

B $\begin{bmatrix} -4 & 2 & 6 \\ 0 & 6 & 4 \end{bmatrix}$ **D** $\begin{bmatrix} -1 & 8 & 15 \\ 9 & 12 & 7 \end{bmatrix}$

2) أوجد ناتج: $\begin{bmatrix} 2 \\ 5 \end{bmatrix} \cdot [\ 1 \quad 3\ ]$ ، إذا كان ذلك ممكنًا.

A $[\ -3\ ]$ **C** $\begin{bmatrix} 8 & -4 \\ 12 & 6 \end{bmatrix}$

B $[\ 11\ ]$ **D** الضرب غير معرف

3) في أيٍّ من الدوال الآتية يكون $f\left(\frac{-1}{3}\right) \neq 0$ ؟

A $f(x) = -|3x| + 1$

B $f(x) = [3x + 1]$

C $f(x) = |3x| + 1$

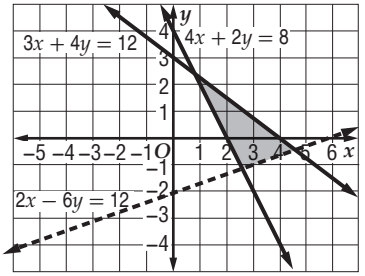
D $f(x) = [3x] + 1$

4) النقاط $D(-6, 2), E(3, 5), F(8, -7)$ هي رؤوس $\triangle DEF$، احسب مساحة هذا المثلث:

A 54.5 وحدة مربعة. **C** 60 وحدة مربعة.

B 58 وحدة مربعة. **D** 61.5 وحدة مربعة.

5) ما النظام الذي تمثل حله المنطقة المظللة في الشكل أدناه؟



A $4x + 2y \geq 8, 3x + 4y \leq 12, 2x - 6y < 12$

B $4x + 2y \geq 8, 3x + 4y \geq 12, 2x - 6y < 12$

C $4x + 2y \leq 8, 3x + 4y \leq 12, 2x - 6y < 12$

D $4x + 2y \leq 8, 3x + 4y \geq 12, 2x - 6y < 12$

6) ما رتبة المصفوفة: $\underline{D} = \begin{bmatrix} 4 & -6 \\ 9 & 2 \\ 1 & 0 \\ -3 & -5 \end{bmatrix}$ ؟

A 4×2 **C** 4×8

B 2×4 **D** 8×4

7) أيٌّ من الدوال الآتية يكون مداها: $\{f(x) | f(x) \geq 0\}$ ؟

A $f(x) = [x]$

B $f(x) = |-x + 1|$

C $f(x) = -|x|$

D $f(x) = -[x] + 1$

أسئلة ذات إجابات قصيرة

أجب عن كلٍّ مما يأتي:

8) هل يوجد للمصفوفة $\underline{B}$ نظير ضربي؟ فسّر إجابتك.

$$\underline{B} = \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ -9 & 6 \end{bmatrix}$$

9) احسب قيمة محددة المصفوفة:

$$\underline{W} = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 2 & 5 & -4 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

أسئلة ذات إجابات مطولة

أجب عن كلٍّ مما يأتي موضحًا خطوات الحل:

10) يستعمل حمد شبكة إحداثيات ليصمم أرضية جديدة في فناء منزله. فإذا كانت الأرضية تمثل حل نظام المتباينات $y \le -x + 32,\ x \ge 0,\ y \ge 0,\ x \le 16,\ y \le 20$، وكانت كل وحدة على شبكة الإحداثيات تمثل قدمًا واحدة على الأرض، فما مساحة الأرضية بالقدم المربعة؟

11) مع عمر 14 قطعة نقدية من فئة الريال، ونصف الريال. فإذا كانت القيمة الكلية لهذه القطع النقدية هي 10.5 ريالات، فاستعمل هذه المعلومات للإجابة عن كل سؤال مما يأتي:

a) افرض أن d تمثل عدد الريالات التي يملكها عمر، وq عدد أنصاف الريالات التي يملكها. اكتب نظام معادلات يمثّل هذه الحالة.

b) اكتب معادلة مصفوفية يمكن أن تستعمل لإيجاد قيم كلٍّ من d و q.

c) حل المعادلة المصفوفية في الفرع b باستعمال النظير الضربي. ما عدد الريالات وأنصاف الريالات التي يملكها عمر؟

12) مثل بيانيًّا نظام المتباينات الآتي، ثم حدد رؤوس منطقة الحل وجد القيمة العظمى للدالة المعطاة في منطقة الحل:

$$x \ge 0,\ y \ge 0$$
$$x + 2y \le 14$$
$$3x + 4y \le 36$$
$$f(x, y) = 8x + 12y$$

13) صف بالكلمات متى يمكن ضرب مصفوفتين، ومتى لا يمكن ضربهما، وأعط مثالًا على ذلك.

هل تحتاج إلى مساعدة إضافية؟													
إذا لم تستطع حل سؤال...	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
فعد إلى...	2-2	2-3	1-3	2-4	1-5	2-1	1-4	2-5	2-4	1-5	2-5	1-6	2-3

الفصل 3

كثيرات الحدود ودوالها

Polynomials and Polynomial Functions

فيما سبق:
درستُ تمثيل الدوال التربيعية بيانيًا، وحل المعادلات التربيعية.

والآن:
- أتعرف الأعداد المركبة، وأجري العمليات عليها.
- أحل معادلات تربيعية.
- أجمع كثيرات الحدود وأطرحها وأضربها وأقسمها.
- أحلّل دوال كثيرات الحدود.
- أصف التمثيل البياني لدوال كثيرات الحدود.
- أجد قيم دوال كثيرات الحدود، وأحل معادلات كثيرات الحدود.
- أجد عوامل دوال كثيرات الحدود وأصفارها.
- أحدد عدد جذور معادلة كثيرة حدود وأنواعها.

لماذا؟

مواصلات: يمكن استعمال دوال كثيرات الحدود لتحديد جداول انطلاق الحافلات، والطاقة الاستيعابية للطرق السريعة، والأنماط المرورية، ومتوسط تكاليف الوقود. وأسعار كلٍّ من السيارات الجديدة والمستعملة.

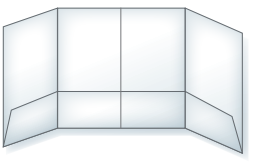
المطويات

منظم أفكار

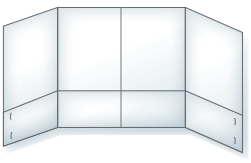
كثيرات الحدود ودوالها: اعمل المطوية لتساعدك على تنظيم ملاحظاتك حول كثيرات الحدود ودوالها، ابدأ بورقة A4.

1. **اثنِ** الورقة بعرض 5cm بصورة موازية للضلع الأطول.

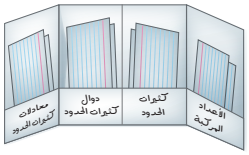
2. **اثنِ** الورقة بصورة موازية للضلع الأقصر إلى أربعة أقسام متساوية العرض.



3. **ثبّت** الحافتين الطرفيتين للثنيه كما يظهر في الشكل أدناه.



4. **عنون** الأقسام الأربعة بالعناوين: الأعداد المركبة، كثيرات الحدود، دوال كثيرات الحدود، معادلات كثيرات الحدود.



رابط الدرس الرقمي

www.ien.edu.sa

التهيئة للفصل 3

تشخيص الاستعداد:

أجب عن الاختبار الآتي، وارجع إلى "المراجعة السريعة" ؛ لمساعدتك على ذلك.

اختبار سريع

أعد كتابة كلٍّ من العبارات الآتية في صورة جمع: (يستعمل مع الدرس 4-3)

1) $-5 - 13$
2) $5 - 3y$
3) $5mr - 7mp$
4) $3x^2y - 14xy^2$
5) **محاضرات:** حضر 20 شخصًا محاضرة، ثم غادروا القاعة في مجموعات ثنائية، فغادرت منهم x مجموعة. اكتب عدد الأشخاص الباقين على صورة جمع.

استعمل خاصية التوزيع لإعادة كتابة كل عبارة فيما يأتي دون أقواس: (يستعمل مع الدرس 4-3)

6) $-4(a + 5)$
7) $-1(3b^2 + 2b - 1)$
8) $-\frac{1}{2}(2m - 5)$
9) $-\frac{3}{4}(3z + 5)$
10) **هدايا:** وزع معلم قلمًا وحقيبة على كل طالب في صفٍّ يضم 15 طالبًا. إذا كان ثمن القلم 8 ريالاتٍ، والحقيبة 18 ريالًا، فاكتب عبارة تمثل ثمن الأقلام والحقائب. استعمل خاصية التوزيع لحساب الثمن.

حل كل معادلة فيما يأتي: (يستعمل مع الدرس 7-3)

11) $x^2 + 2x - 8 = 0$
12) $x^2 - 5x + 6 = 0$
13) $x^2 - x - 20 = 0$
14) $x^2 - x = 0$
15) **فيزياء:** إذا سقط جسم من ارتفاع 50ft عن سطح الأرض فإن ارتفاعه عن سطحها بعد t ثانية يعبر عنه بالصيغة $h = -16t^2 + 50$. استعمل المعادلة $0 = -16t^2 + 50$ لحساب الزمن الذي يستغرقه الجسم حتى يصل إلى الأرض.

مراجعة سريعة

مثال 1

أعد كتابة العبارة $2xy - 3 - z$ على صورة جمع.

$2xy - 3 - z$	العبارة الأصلية
$= 2xy + (-3) + (-z)$	أعد الكتابة باستعمال الجمع

مثال 2

استعمل خاصية التوزيع لإعادة كتابة العبارة الآتية دون أقواس: $-3(a + b - c)$

$-3(a + b - c)$	العبارة الأصلية
$= -3(a) + (-3)(b) + (-3)(-c)$	خاصية التوزيع
$= -3a - 3b + 3c$	بسّط

مثال 3

حل المعادلة: $x^2 - 6x + 12 = 19$.

يمكن استعمال طريقة إكمال المربع.

$x^2 - 6x + 12 = 19$	المعادلة الأصلية
$x^2 - 6x = 7$	اطرح 12 من كلا الطرفين
$x^2 - 6x + 9 = 7 + 9$	أضف 9 لكلا الطرفين
$(x - 3)^2 = 16$	حلّل $x^2 - 6x + 9$
$x - 3 = \pm 4$	أوجد الجذر التربيعي لكلا الطرفين
$x = 3 \pm 4$	أضف 3 لكلا الطرفين

الحلان هما: $7, -1$

رابط الدرس الرقمي

www.ien.edu.sa

3-1

الأعداد المركبة
Complex Numbers

فيما سبق :
درستُ تبسيط الجذور التربيعية.
(مهارة سابقة)

والآن :
- أُجري العمليات على الأعداد التخيُّلية البحتة.
- أُجري العمليات على الأعداد المركبة.

المفردات

الوحدة التخيُّلية
imaginary unit

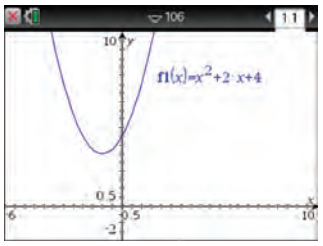
العدد التخيُّلي البحت
pure imaginary number

العدد المركب
complex number

المرافقان المركبان
complex conjugates

لماذا ؟

بالنظر إلى الشكل المجاور، تلاحظ أن التمثيل البياني للمعادلة $y = x^2 + 2x + 4$ لايقطع المحور x، لذا ليس للمعادلة جذور حقيقية، فهل يعني ذلك أنه ليس للمعادلة حلول؟



[−6, 10] scl: 0.5 by [−2, 10] scl: 0.5

للتأكد من ذلك استعمل الآلة الحاسبة بالضغط على مفتاح (on)، ومنها اختر 1: مستند جديد ثم اختر 1: إضافة تطبيق الحاسبة ثم اضغط (menu) واختر منها 3: العمليات الجبرية ← 1: ادوات كثيرات الحدود ← 2: الجذور الحقيقية لكثيرات الحدود

ثم أدخل $x^2 + 2x + 4$ واضغط (enter) (enter) فيظهر على الشاشة كلمة **خطأ**، وهذا يعني أنه لا توجد حلول حقيقية للمعادلة، ولكن هناك حلول تخيُّلية.

الأعداد التخيلية البحتة : قادت المعادلات "كالمعادلة السابقة" الرياضيين إلى تعريف الأعداد التخيلية، ووحدتها التخيلية i ، حيث تعرف **الوحدة التخيُّلية** i على أنها الجذر التربيعي الموجب للعدد -1 ، وبعبارة أخرى فإن $i = \sqrt{-1}$ ، وهذا يعني أن $i^2 = -1$

والأعداد في الصورة $i\sqrt{3}$, $-2i$, $6i$، تسمى **أعدادًا تخيُّلية بحتة**، وهي جذور تربيعية لأعداد حقيقية سالبة.

لأي عدد حقيقي موجب مثل b، فإن: $bi = \sqrt{-b^2} = \sqrt{b^2} \cdot \sqrt{-1}$.

مثال 1 الجذور التربيعية للأعداد السالبة

بسِّط كلًّا ممّا يأتي :

a) $\sqrt{-27}$

$$\begin{aligned}\sqrt{-27} &= \sqrt{-1 \cdot 3^2 \cdot 3} \\ &= \sqrt{-1} \cdot \sqrt{3^2} \cdot \sqrt{3} \\ &= i \cdot 3 \cdot \sqrt{3} \\ &= 3i\sqrt{3}\end{aligned}$$

b) $\sqrt{-216}$

$$\begin{aligned}\sqrt{-216} &= \sqrt{-1 \cdot 6^2 \cdot 6} \\ &= \sqrt{-1} \cdot \sqrt{6^2}\ \sqrt{6} \\ &= i \cdot 6 \cdot \sqrt{6} \\ &= 6i\sqrt{6}\end{aligned}$$

تحقق من فهمك

1A) $\sqrt{-18}$

1B) $\sqrt{-125}$

تُحقق الأعداد التخيلية البحتة كلًّا من الخاصيتين (التجميعية والتبديلية) على الضرب، ويبين الجدول الآتي بعض قوى الوحدة التخيلية i:

$i^1 = i$	$i^2 = -1$	$i^3 = i^2 \cdot i = -i$	$i^4 = (i^2)^2 = 1$
$i^5 = (i^2)^2 \cdot i = i$	$i^6 = (i^2)^3 = -1$	$i^7 = (i^2)^3 \cdot i = -i$	$i^8 = (i^2)^4 = 1$

مثال 2 ضرب الأعداد التخيلية البحتة

أوجدْ ناتج كلٍّ مما يأتي :

a) $-5i \cdot 3i$

$-5i \cdot 3i = -15i^2$	اضرب
$= -15(-1)$	$i^2 = -1$
$= 15$	بسّط

b) $\sqrt{-6} \cdot \sqrt{-15}$

$\sqrt{-6} \cdot \sqrt{-15} = i\sqrt{6} \cdot i\sqrt{15}$	$i = \sqrt{-1}$
$= i^2\sqrt{90}$	اضرب
$= -1 \cdot \sqrt{9} \cdot \sqrt{10}$	بسّط
$= -3\sqrt{10}$	اضرب

تحقق من فهمك

2A) $3i \cdot 4i$ **2B)** $\sqrt{-20} \cdot \sqrt{-12}$ **2C)** i^{31} $-i$

إرشادات للدراسة

خصائص الجذر التربيعي

راجع خصائص الجذر التربيعي التي درستها في الصف الثالث المتوسط.

يمكنك حل بعض المعادلات التربيعية باستعمال خصائص الجذر التربيعي .

مثال 3 معادلة حلولها أعداد تخيلية بحتة

حل المعادلة : $4x^2 + 256 = 0$.

$4x^2 + 256 = 0$	المعادلة الأصلية
$4x^2 = -256$	اطرح 256 من كلا الطرفين
$x^2 = -64$	اقسم كلا الطرفين على 4
$x = \pm\sqrt{-64}$	خاصية الجذر التربيعي
$x = \pm 8i$	$\sqrt{-64} = \sqrt{64} \cdot \sqrt{-1} = 8i$

تحقق من فهمك

3A) $4x^2 + 100 = 0$ **3B)** $x^2 + 4 = 0$

العمليات على الأعداد المركبة : تتكون العبارة $2+3i$ من حدين غير متشابهين ولا يمكن جمعهما، وهما العدد الحقيقي 2 والعدد التخيُّلي $3i$، ويسمى هذا النوع من العبارات **العدد المركب**.

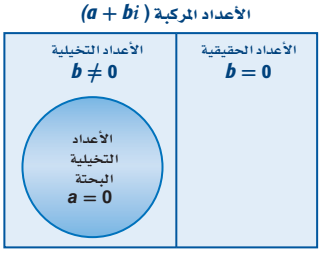
مفهوم أساسي الأعداد المركبة (C)

أضف إلى مطويتك

التعبير اللفظي: العدد المركب هو أي عدد يمكن كتابته على الصورة $a + bi$ ؛ حيث a وَ b عددان حقيقيان، و i الوحدة التخيلية، ويسمى a الجزء الحقيقي، و b الجزء التخيلي.

مثالان: $5 + 2i$ $1 - 3i = 1 + (-3)i$

يوضِّح شكل فن المجاور مجموعة الأعداد المركبة .



- إذا كانت $b = 0$ فإن العدد المركب يكون عددًا حقيقيًّا.
- إذا كانت $b \neq 0$ فإن العدد المركب يكون عددًا تخيليًّا.
- إذا كانت $a = 0, b \neq 0$ فإن العدد المركب يكون عددًا تخيليًّا بحتًا.

يتساوى عددان مركبان إذا وفقط إذا تساوى الجزأين الحقيقيين، والجزأين التخيليين؛ أيْ أن:
$a + bi = c + di$ إذا وفقط إذا كان $a = c, b = d$.

مثال 4 تساوي الأعداد المركبة

أوجد قيمتَي x, y الحقيقيتين اللتين تجعلان المعادلة: $3x - 5 + (y - 3)i = 7 + 6i$ صحيحة.

ساو الجزأين الحقيقيين أحدهما بالآخر، وكذلك الجزآن التخيليان.

$3x - 5 = 7$	الجزآن الحقيقيان	$y - 3 = 6$	الجزآن التخيليان
$3x = 12$	اجمع **5** لكلا الطرفين	$y = 9$	اجمع **3** لكلا الطرفين.
$x = 4$	اقسم كلا الطرفين على **3**		

تحقق من فهمك

4) أوجد قيمتي x, y الحقيقيتين اللتين تجعلان المعادلة : $5x + 1 + (3 + 2y)i = 2x - 2 + (y - 6)i$ صحيحة.

ويمكنك استعمال كلٍّ من الخاصية التبديلية والخاصية التجميعية وخاصية التوزيع عند جمع الأعداد المركبة وضربها، ولكي تجمع أو تطرح أعدادًا مركبة، جمّع الأجزاء المتشابهة؛ أيْ جمِّع الأجزاء الحقيقية معًا وجمِّع الأجزاء التخيلية معًا.

مثال 5 جمع الأعداد المركّبة وطرحها

أوجدْ ناتج كلٍّ مما يأتي :

a) $(5 - 7i) + (2 + 4i)$

$(5 - 7i) + (2 + 4i) = (5 + 2) + (-7 + 4)i$	خواص التبديل والتجميع والتوزيع
$= 7 - 3i$	بسّط

b) $(4 - 8i) - (3 - 6i)$

$(4 - 8i) - (3 - 6i) = (4 - 3) + [-8 - (-6)]i$	خواص التبديل والتجميع والتوزيع
$= 1 - 2i$	بسّط

تحقق من فهمك

5A) $(-2 + 5i) + (1 - 7i)$ **5B)** $(4 + 6i) - (-1 + 2i)$

إرشادات للدراسة

المعاوقة :
في الأعداد المركبة تستعمل كلمة المعاوقة بدلًا من المقاومة.

تستعمل الأعداد المركبة في مسائل الكهرباء، ففي الدوائر الكهربائية ذات التيار المتناوب يمكنك تمثيل فرق الجهد، وشدة التيار، والمعاوقة بأعداد مركبة، ولضرب هذه الأعداد تستعمل طريقة التوزيع بالترتيب.

مثال 6 من واقع الحياة — ضرب الأعداد المركبة

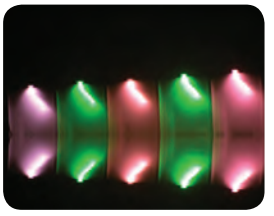
كهرباء: يرتبط فرق الجهد V، وشدة التيار C، والمعاوقة I في الدوائر الكهربائية ذات التيار المتناوب بالصيغة $V = C \cdot I$. أوجد فرق الجهد في دائرة كهربائية ذات تيار متردد إذا كانت شدة تيارها $2 + 4i$ أمبير، ومعاوقتها $9 - 3i$ أوم .

$V = C \cdot I$	الصيغة الرياضية
$= (2 + 4i) \cdot (9 - 3i)$	$C = 2 + 4i\ ,\ I = 9 - 3i$
$= 2(9) + 2(-3i) + 4i(9) + 4i(-3i)$	باستخدام طريقة التوزيع بالترتيب
$= 18 - 6i + 36i - 12i^2$	اضرب
$= 18 + 30i - 12(-1)$	$i^2 = -1$
$= 30 + 30i$	اجمع

وعليه فإن فرق الجهد هو $30 + 30i$ فولت.

تحقق من فهمك

6) كهرباء: أوجد فرق الجهد لتيار متناوب شدته $4i - 2$ أمبير، ومعاوقته $2i - 3$ أوم.



الربط مع الحياة

مصابيح الزينة من الأمثلة على الدوائر الكهربائية الموصولة على التوالي، ويؤثر عدد المصابيح فيها في شدة التيار، فينعكس هذا على شدة الإضاءة.

المصدر: كتاب الفيزياء المقرر للصف الثالث الثانوي، 1437هـ

يسمى العددان المركبان $a - bi\ ,\ a + bi$ **مركبين مترافقين**، وناتج ضربهما هو عدد حقيقي دائمًا على الصورة $a^2 + b^2$. ويمكنك استعمال هذه الحقيقة لإيجاد ناتج قسمة عددين مركّبين.

مثال 7 — قسمة الأعداد المركبة

أوجدْ ناتج كلٍّ مما يأتي:

a) $\frac{2i}{3 + 6i}$

$\frac{2i}{3 + 6i} = \frac{2i}{3 + 6i} \cdot \frac{3 - 6i}{3 - 6i}$	$3 - 6i\ ,\ 3 + 6i$ مترافقان مركّبان
$= \frac{6i - 12i^2}{9 - 36i^2}$	اضرب
$= \frac{6i - 12(-1)}{9 - 36(-1)}$	$i^2 = -1$
$= \frac{6i + 12}{45}$	بسّط
$= \frac{4}{15} + \frac{2}{15}i$	اكتب الناتج على الصورة $a + bi$

b) $\frac{4 + i}{5i}$

$\frac{4 + i}{5i} = \frac{4 + i}{5i} \cdot \frac{i}{i}$	اضرب في $\frac{i}{i}$
$= \frac{4i + i^2}{5i^2}$	اضرب
$= \frac{4i - 1}{-5}$	$i^2 = -1$
$= \frac{1}{5} - \frac{4}{5}i$	اكتب الناتج على الصورة $a + bi$

تحقق من فهمك

7A) $\frac{-2i}{3 + 5i}$ **7B)** $\frac{2 + i}{1 - i}$

إرشادات للدراسة

قراءة الرياضيات

يمكنك حل الفرع b من المثال 7 بضرب كل من البسط والمقام في العدد $-5i$ ، ولكن للاختصار تم الضرب في العدد i فقط.

تأكد

أوجدْ ناتج كلٍّ مما يأتي:

المثالان 2 , 1

1) $\sqrt{-81}$

2) $\sqrt{-32}$

3) $(4i)(-3i)$

4) $3\sqrt{-24} \cdot 2\sqrt{-18}$

5) i^{40}

6) i^{63}

حُلَّ كلَّ معادلة مما يأتي :

مثال 3

7) $4x^2 + 32 = 0$

8) $2x^2 + 24 = 0$

في كلِّ معادلة مما يأتي أوجد قيمتَي a , b الحقيقيتين اللتين تجعلانها صحيحة :

مثال 4

9) $3a + (4b + 2)i = 9 - 6i$

10) $4b - 5 + (-a - 3)i = 7 - 8i$

بسِّط كلًّا ممّا يأتي :

الأمثلة 7 , 6 , 5

11) $(-1 + 5i) + (-2 - 3i)$

12) $(7 + 4i) - (1 + 2i)$

13) $(6 - 8i)(9 + 2i)$

14) $(3 + 2i)(-2 + 4i)$

15) $\frac{3 - i}{4 + 2i}$

16) $\frac{2 + i}{5 + 6i}$

17) **كهرباء:** تبلغ شدة التيار في أحد أجزاء دائرة كهربائية موصولة على التوالي $3i - 5$ أمبير، وفي الجزء الآخر من الدائرة $9i + 7$ أمبير. اجمع هذين العددين المركبين لإيجاد شدة التيار الكلية في الدائرة.

تدرب وحل المسائل

أوجدْ ناتج كلٍّ مما يأتي:

المثالان 2 , 1

18) $\sqrt{-121}$

19) $\sqrt{-169}$

20) $\sqrt{-100}$

21) $\sqrt{-81}$

22) $(-3i)(-7i)(2i)$

23) $4i(-6i)^2$

24) i^{11}

25) i^{25}

26) $\sqrt{-10} \cdot \sqrt{-24}$

27) $4i\left(\frac{1}{2}i\right)^2(-2i)^2$

حُلَّ كلَّ معادلة مما يأتي :

مثال 3

28) $4x^2 + 4 = 0$

29) $3x^2 + 48 = 0$

30) $2x^2 + 10 = 0$

31) $6x^2 + 108 = 0$

في كلِّ معادلة مما يأتي أوجد قيمتَي x،y الحقيقيتين اللتين تجعلانها صحيحة :

مثال 4

32) $x + 1 + 2yi = 3 - 6i$

33) $2x + 7 + (3 - y)i = -4 + 6i$

34) $5 + y + (3x - 7)i = 9 - 3i$

35) $(2x - 4y)i + x + 5y = 15 + 58i$

أوجدْ ناتج كلٍّ مما يأتي:

الأمثلة 5 , 6 , 7

36 $(-3+i)+(-4-i)$

37 $(11-8i)-(2-8i)$

38 $(1+2i)(1-2i)$

39 $(3+5i)(5-3i)$

40 $(4-i)(6-6i)$

41 $\dfrac{2i}{1+i}$

42 $\dfrac{5}{2+4i}$

43 $\dfrac{5+i}{3i}$

44 $(4-6i)+(4+6i)$

45 $(8-5i)-(7+i)$

46 $(-6-i)(3-3i)$

47 $(1+i)(2+3i)(4-3i)$

48 $\dfrac{4-i\sqrt{2}}{4+i\sqrt{2}}$

49 $\dfrac{2-i\sqrt{3}}{2+i\sqrt{3}}$

50 **كهرباء:** تبلغ المعاوقة في أحد أجزاء دائرة كهربائية $7+8i$ أوم، وفي الجزء الآخر منها $13-4i$ أوم. اجمع هذين العددين المركّبين لإيجاد المعاوقة الكلية في الدائرة الكهربائية.

كهرباء: استعمل الصيغة $V = C \cdot I$، حيث V فرق الجهد، وC شدة التيار، و I المعاوقة في حل السؤالين 52 , 51 :

51 إذا كانت شدة التيار في دائرة كهربائية $3+6i$ أمبير، والمعاوقة $5-i$ أوم ، فكم يكون فرق الجهد ؟

52 إذا كان فرق الجهد في دائرة كهربائية $20-12i$ فولت، والمعاوقة $6-4i$ أوم ، فكم تكون شدة التيار؟

53 أوجد ناتج جمع $7+ix^2-(4+5i)x$ إلى $3x^2+(2+6i)x-8i$.

54 بسّط العبارة: $[(2+i)x^2-ix+5+i]-[(-3+4i)x^2+(5-5i)x-6]$

55 **تمثيلات متعددة:** ستكتشف في هذه المسألة جمع الأعداد المركبة في المستوى المركب. فالمستوى المركب يشبه إلى حدٍّ بعيد المستوى الحقيقي، وفيه تكون الأعداد الحقيقية على المحور الأفقي والأعداد التخيلية البحتة على المحور الرأسي.

a) بيانيًّا: مثّل العدد $3+4i$ بيانيًّا في المستوى المركب، وذلك برسم قطعة مستقيمة من نقطة الأصل إلى النقطة $(3, 4)$، وسمِّ تلك النقطة A.

b) بيانيًّا: مثّل العدد $-2-5i$ بيانيًّا في المستوى المركب وذلك برسم قطعة مستقيمة من نقطة الأصل إلى النقطة $(-2, -5)$، وسمِّها B.

c) بيانيًّا: إذا كانت النقطتان A,B ونقطة الأصل ثلاثة رؤوس لمتوازي أضلاع فأكمل رسمه بإضافة النقطة الرابعة C .

d) تحليليًّا: ما العدد المركب الذي تمثله النقطة C ؟ وما العلاقة بين النقاط A,B,C؟

الربط مع الحياة

الكهرباء هي عدد من التأثيرات الفيزيائية تشمل مجموعة متنوعة من الظواهر الناتجة عن وجود شحنة كهربائية وتدفّقها. وتضم هذه الظواهر: البرق، والكهرباء الساكنة، والمجال والحثّ الكهرومغناطيسيين.

مسائل مهارات التفكير العليا

56) **اكتشف الخطأ:** قامت كلٌّ من صفاء ومنال بتبسيط $(2i)(3i)(4i)$، فأيٌّ منهما على صواب؟وضِّح إجابتك.

صفاء	منال
$24i^3 = -24i$	$24i^3 = -24$

57) **تحدٍّ:** بسّط العدد المركب $(1 + 2i)^3$.

58) **تبرير:** حدد إذا كانت الجملة الآتية صحيحة دائمًا، أو صحيحة أحيانًا، أو غير صحيحة أبدًا. وضِّح إجابتك:

"يتكون كل عدد مركب من جزء حقيقي وجزء تخيلي"

59) **مسألة مفتوحة:** اكتب عددين مركّبين يكون ناتج ضربهما يساوي 20.

60) **اكتب:** وضِّح كيف ترتبط الأعداد المركبة بالمعادلات التربيعية، وكيف تحدد إذا كان للمعادلة التربيعية حلول مركبة فقط أم لا ؟

تدريب على اختبار

61) ما قيمتا x , y الحقيقيتان اللتان تجعلان $(5 + 4i) - (x+yi) = (-1-3i)$ صحيحة؟

A $x = 6, y = 7$

B $x = 4, y = i$

C $x = 4, y = i$

D $x = 4, y = 7$

62) قيمة $(3 + 6i)^2$ تساوي:

A $36 - 27i$

B $9 + 36$

C $9 - 36$

D $-27 + 36i$

مراجعة تراكمية

حُلَّ كلَّ معادلة مما يأتي مستعملًا التحليل إلى العوامل: (مهارة سابقة)

63) $2x^2 + 7x = 15$ **64)** $4x^2 - 12 = 22x$ **65)** $6x^2 = 5x + 4$

نظرية الأعداد: استعمل معادلة تربيعية لإيجاد عددين حقيقيين يحققان كلًّا ممَّا يأتي، (إذا كان ذلك ممكنًا): (مهارة سابقة)

66) مجموعهما -3، وناتج ضربهما -40 . **67)** مجموعهما -21، وناتج ضربهما 108 .

هل تمثّل كلٌّ من ثلاثيات الحدود الآتية مربعًا كاملًا أم لا؟ (مهارة سابقة)

68) $x^2 + 16x + 64$ **69)** $x^2 - 12x + 36$

70) $x^2 + 8x - 16$ **71)** $x^2 + 5x + 6.25$

رابط الدرس الرقمي

www.ien.edu.sa

3-2

القانون العام والمميز
The Quadratic Formula and the Discriminant

فيما سبق :
درستُ حل معادلات تربيعية بإكمال المربع.
(مهارة سابقة)

والآن :
- أحل معادلات تربيعية باستعمال القانون العام.
- أستعمل المميز لأحدد عدد جذور معادلة تربيعية وأنواعها.

المفردات
القانون العام
Quadratic Formula
المميز
discriminant

لماذا ؟

أُطلق سهم نحو هدف على الأرض، ويمكن التعبير عن ارتفاعه عن الأرض بالدالة التربيعية:

$h = -4.9t^2 + 117t + 42$

حيث h ارتفاع السهم بعد t ثانية من إطلاقه، وللتنبؤ بالزمن اللازم لوصول السهم إلى الهدف، نحل المعادلة:

$-4.9t^2 + 117t + 42 = 0$.

ومن الصعب حل هذه المعادلة باستعمال التحليل إلى العوامل، أو التمثيل البياني، أو إكمال المربع.

القانون العام: تمكنت سابقًا من حل بعض المعادلات التربيعية بالتمثيل البياني، أو بالتحليل إلى العوامل، أو باستعمال خاصية الجذر التربيعي، أو بإكمال المربع، أو باستعمال القانون العام؛ وهو قانون يمكن استعماله لحل أية معادلة تربيعية، ويمكن اشتقاق هذا القانون من خلال حل معادلة تربيعية على الصورة القياسية.

الحالة العامة		مثال
$ax^2 + bx + c = 0$	معادلة تربيعية على الصورة القياسية	$2x^2 + 8x + 1 = 0$
$x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = 0$	اقسم كلا الطرفين على a	$x^2 + 4x + \frac{1}{2} = 0$
$x^2 + \frac{b}{a}x = -\frac{c}{a}$	اطرح $\frac{c}{a}$ من كلا الطرفين	$x^2 + 4x = -\frac{1}{2}$
$x^2 + \frac{b}{a}x + \left(\frac{b}{2a}\right)^2 = -\frac{c}{a} + \left(\frac{b}{2a}\right)^2$	أكمل المربع	$x^2 + 4x + \left(\frac{4}{2}\right)^2 = -\frac{1}{2} + \left(\frac{4}{2}\right)^2$
$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = -\frac{c}{a} + \frac{b^2}{4a^2}$	حلّل الطرف الأيسر	$(x + 2)^2 = -\frac{1}{2} + \left(\frac{4}{2}\right)^2$
$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}$	بسّط الطرف الأيمن	$(x + 2)^2 = \frac{7}{2}$
$x + \frac{b}{2a} = \pm\frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$	خاصية الجذر التربيعي	$x + 2 = \pm\sqrt{\frac{7}{2}}$
$x = -\frac{b}{2a} \pm \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$	اطرح $\frac{b}{2a}$ من كلا الطرفين	$x = -2 \pm \sqrt{\frac{7}{2}}$
$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$	بسّط	$x = \frac{-4 \pm \sqrt{14}}{2}$

تعرف المعادلة: $x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$ **بالقانون العام** لحل المعادلات التربيعية.

إرشادات للدراسة

القانون العام

على الرغم من أن طريقة التحليل إلى العوامل قد تكون الأسهل لحل بعض المعادلات التربيعية، إلا أن القانون العام يحل أي معادلة تربيعية.

أضف إلى مطويتك

مفهوم أساسي

القانون العام لحل المعادلة التربيعية

التعبير اللفظي: يمكن حل المعادلة التربيعية المكتوبة على الصورة: $ax^2 + bx + c = 0,\ a \neq 0$ باستعمال القانون:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

مثال:

$$x^2 + 5x + 6 = 0 \rightarrow x = \frac{-5 \pm \sqrt{5^2 - 4(1)(6)}}{2(1)}$$

مثال 1

معادلة لها جذران نسبيان

حل المعادلة: $x^2 - 10x = 11$ باستعمال القانون العام.

أولًا اكتب المعادلة على الصورة $ax^2 + bx + c = 0$ ، وحدّد قيم كلٍّ من a, b, c .

$$\begin{array}{ccc} ax^2 & + bx & + c = 0 \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ x^2 - 10x = 11 & \rightarrow & 1x^2 - 10x - 11 = 0 \end{array}$$

ثم عوض بعد ذلك بتلك القيم في القانون العام.

القانون العام	$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$
عوّض عن: a بالعدد 1، b بالعدد -10، c بالعدد -11	$= \frac{-(-10) \pm \sqrt{(-10)^2 - 4(1)(-11)}}{2(1)}$
اضرب	$= \frac{10 \pm \sqrt{100 + 44}}{2}$
بسّط	$= \frac{10 \pm \sqrt{144}}{2}$
$\sqrt{144} = 12$	$= \frac{10 \pm 12}{2}$
اكتب x على صورة معادلتين	$x = \frac{10 + 12}{2}$ أو $x = \frac{10 - 12}{2}$
بسّط	$= 11$ $= -1$

وعليه يكون الحلان هما: $11, -1$.

تحقق: عوض كلتا القيمتين في المعادلة الأصلية.

$x^2 - 10x = 11$ | $x^2 - 10x = 11$

$(-1)^2 - 10(-1) \stackrel{?}{=} 11$ | $(11)^2 - 10(11) \stackrel{?}{=} 11$

$1 + 10 \stackrel{?}{=} 11$ | $121 - 110 \stackrel{?}{=} 11$

$11 = 11$ ✓ | $11 = 11$ ✓

تحقق من فهمك

(1A $x^2 + 6x = 16$

(1B $2x^2 + 25x + 33 = 0$

عندما يكون ما تحت الجذر في القانون العام صفرًا، فإننا نحصل على جذرٍ نسبيٍّ واحدٍ، ويكون حل المعادلة في هذه الحالة هو هذا الجذر النسبي، ولكنه مكرر مرتين .

تاريخ الرياضيات

براهام جوبتا

(598-668 م) عالم رياضيات هندي، وهو أول من أوجد حلًا عامًا للمعادلة التربيعية في الصورة $ax^2 + bx = c$، وهو ما يُسمَّى الآن القانون العام لحل المعادلة التربيعية.

مثال 2 معادلة لها جذر نسبي واحد (مكرر مرتين)

حُلَّ المعادلة: $x^2 + 8x + 16 = 0$ باستعمال القانون العام .

حدِّد قيم كلٍّ من a, b, c، وعوّض هذه القيم في القانون العام .

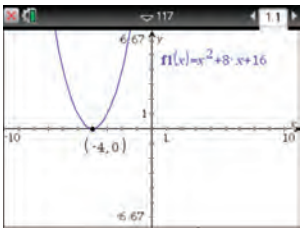
القانون العام $x = \dfrac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$

عوّض عن a بالعدد 1، وعن b بالعدد 8 ، وعن c بالعدد 16 $= \dfrac{-(8) \pm \sqrt{(8)^2 - 4(1)(16)}}{2(1)}$

بسّط $= \dfrac{-8 \pm \sqrt{0}}{2}$

$\sqrt{0} = 0$ $= \dfrac{-8}{2} = -4$

الحل هو -4 (مكرر مرتين) .



[−10, 10] scl: 1 by [−6.67, 6.67] scl: 1

تحقق: تحقق من صحة الحل بتمثيل الدالة المرتبطة بالمعادلة $y = x^2 + 8x + 16$ بيانيًّا. مستعملًا خاصية الصفر في الحاسبة البيانية للحصول على قيمة صفر الدالة المرتبطة وهو: $x = -4$

تحقق من فهمك

(2A) $x^2 - 16x + 64 = 0$

(2B) $x^2 + 34x + 289 = 0$

يمكنك التعبير عن الجذور غير النسبية بكتابتها في الصورة الجذرية .

مثال 3 الجذور غير النسبية

حُلَّ المعادلة: $2x^2 + 6x - 7 = 0$ باستعمال القانون العام.

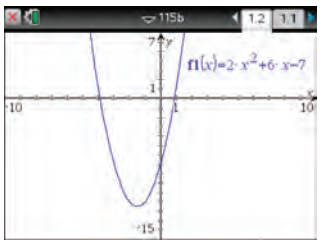
القانون العام $x = \dfrac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$

عوّض عن a بالعدد 2، وعن b بالعدد 6 ، وعن c بالعدد -7 $= \dfrac{-(6) \pm \sqrt{(6)^2 - 4(2)(-7)}}{2(2)}$

بسّط $= \dfrac{-6 \pm \sqrt{92}}{4}$

$\sqrt{92} = \sqrt{4\,(23)} = 2\sqrt{23}$ $= \dfrac{-6 \pm 2\sqrt{23}}{4} = \dfrac{-3 \pm \sqrt{23}}{2}$

الحلّان التقريبيّان هما: 0.9 ، -3.9



[−10, 10] scl: 1 by [−15, 7] scl: 1

تحقق: تحقق من صحة الحل بتمثيل الدالة المرتبطة بالمعادلة $y = 2x^2 + 6x - 7$ بيانيًّا. مستعملًا خاصية الصفر في الحاسبة البيانية للحصول على القيمتين التقريبيتين لصفرَي الدالة المرتبطة وهما: -3.9 , 0.9

تحقق من فهمك

(3A) $3x^2 + 5x + 1 = 0$

(3B) $x^2 - 8x + 9 = 0$

إرشادات للدراسة

إظهار كامل التمثيل البياني:

لإظهار التمثيل البياني للدالة كاملًا على الشاشة. اضغط مفتاح menu ومنها اختر 4: تكبير/تصغير النافذة ثم اختر 1: إعدادات النافذة لتحدد التدريج المناسب للمتغير y فاختر مثلًا

القيمة الصغرى لـ Y: -15

و القيمة العظمى لـ Y: 7

إذا كان ما تحت الجذر في القانون العام عددًا سالبًا، فإن الحلين يكونان عددين مركبين مترافقين.

إرشادات للدراسة

الأعداد المركبة

تذكّر أن تكتب حلك في الصورة $a + bi$، وهذه الصورة تُسمّى الصورة القياسية للعدد المركب.

مثال 4 الجذور المركبة

حُلَّ المعادلة: $x^2 - 6x = -10$ باستعمال القانون العام.

القانون العام $\quad x = \dfrac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$

عوّض عن a بالعدد 1 ، وعن b بالعدد -6 ، وعن c بالعدد 10 $\quad = \dfrac{-(-6) \pm \sqrt{(-6)^2 - 4(1)(10)}}{2(1)}$

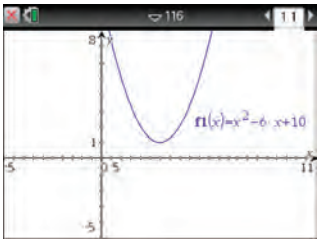
بسّط $\quad = \dfrac{6 \pm \sqrt{-4}}{2}$

$\sqrt{-4} = \sqrt{4 \cdot (-1)} = 2i$ $\quad = \dfrac{6 \pm 2i}{2}$

بسّط $\quad = 3 \pm i$

الحلّان هما: $3 + i$ ، $3 - i$ وهما عددان مركبان مترافقان.

تحقق: يظهر التمثيل البياني للدالة المرتبطة بالمعادلة أن الحلّين عددان مركبان، ولكن لا يساعدك التمثيل البياني على إيجادهما . وللتحقق من صحة الحلّين المركبين، عوّضهما في المعادلة الأصلية.



[−5, 11] scl: 0.5 by [−5, 8] scl: 1

$x^2 - 6x = -10$	المعادلة الأصلية
$(3 + i)^2 - 6(3 + i) \stackrel{?}{=} -10$	$x = 3 + i$
$9 + 6i + i^2 - 18 - 6i \stackrel{?}{=} -10$	أوجد مفكوك $(3 + i)^2$ وخاصية التوزيع
$-9 + i^2 \stackrel{?}{=} -10$	بسّط
$-9 - 1 = -10$ ✓	$i^2 = -1$
$x^2 - 6x = -10$	المعادلة الأصلية
$(3 - i)^2 - 6(3 - i) \stackrel{?}{=} -10$	$x = 3 - i$
$9 - 6i + i^2 - 18 + 6i \stackrel{?}{=} -10$	أوجد مفكوك $(3 - i)^2$ وخاصية التوزيع
$-9 + i^2 \stackrel{?}{=} -10$	بسّط.
$-9 - 1 = -10$ ✓	$i^2 = -1$

تحقق من فهمك

(4A) $3x^2 + 5x + 4 = 0$

(4B) $x^2 - 4x = -13$

الجذور والمميز: في المعادلة التربيعية، لاحظ العلاقة بين قيمة ما تحت الجذر وجذور المعادلة التربيعية في الأمثلة السابقة. العبارة $b^2 - 4ac$ تسمى **المميز**.

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \leftarrow \text{المميز}$$

ويمكنك استعمال المميز لتحديد عدد جذور المعادلة التربيعية وأنواعها، والجدول في الصفحة الآتية يلخص الأنواع الممكنة للجذور ، وذلك للتأكد من صحة حلك.

إرشادات للدراسة

الجذور

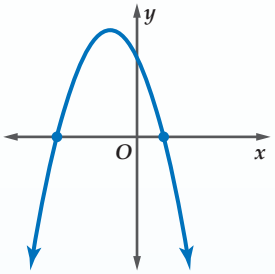
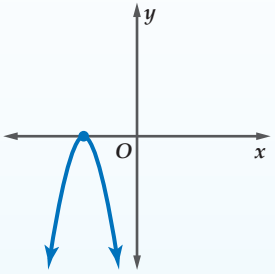
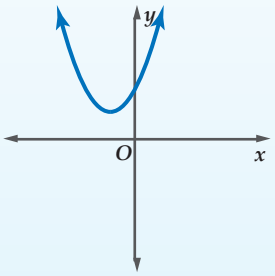
تذكّر أن حلول المعادلة تسمى جذورًا وهي قيم X التي يقطع عندها التمثيل البياني للدالة المرتبطة بالمعادلة المحور X.

مفهوم أساسي

اضف إلى مطويتك

المميز

في المعادلة $ax^2 + bx + c = 0$ ، حيث a, b, c أعداد نسبية، $a \neq 0$.

قيمة المميز	عدد الجذور وأنواعها	مثال على التمثيل البياني للدالة المرتبطة بالمعادلة
$b^2 - 4ac > 0$، والعبارة $b^2 - 4ac$ مربع كامل .	جذران حقيقيان نسبيان	
$b^2 - 4ac > 0$، والعبارة $b^2 - 4ac$ ليست مربعًا كاملًا.	جذران حقيقيان غير نسبيين	
$b^2 - 4ac = 0$	جذر حقيقي مكرر مرتين	
$b^2 - 4ac < 0$	جذران مركبان مترافقان	

مثال 5

وصف الجذور

أوجد قيمة المميز لكلٍّ من المعادلتين التربيعيتين الآتيتين ، وحدد عدد جذور كلٍّ منهما وأنواعها:

(a $7x^2 - 11x + 5 = 0$

$a = 7، b = -11، c = 5$

$b^2 - 4ac = (-11)^2 - 4(7)(5)$

$= 121 - 140$

$= -19$

المميز سالب؛ لذا يوجد جذران مركبان مترافقان.

(b $x^2 + 22x + 121 = 0$

$a = 1، b = 22، c = 121$

$b^2 - 4ac = (22)^2 - 4(1)(121)$

$= 484 - 484$

$= 0$

المميز يساوي صفرًا؛ لذا يوجد جذر حقيقي واحد مكرر مرتين.

تحقق من فهمك

(5A $-5x^2 + 8x - 1 = 0$

(5B $-7x + 15x^2 - 4 = 0$

درست فيما سبق طرائق مختلفة لحل المعادلات التربيعية، والجدول أدناه يلخص تلك الطرائق.

ملخص المفهوم

أضف إلى مطويتك

حل المعادلات التربيعية

الطريقة	إمكانية استعمالها	حالات استعمالها
التمثيل البياني	أحيانًا	عندما لا يطلب إيجاد الحل الدقيق، وأفضل استعمال لها عند التحقق من معقولية الحلول التي يتم إيجادها بالطرائق الجبرية.
التحليل إلى العوامل	أحيانًا	عندما يساوي الحد الثابت صفرًا مثال: $x^2 - 7x = 0$؛ أو عندما يكون من السهل إيجاد العوامل . مثال: $x^2 - 5x + 6 = 0$
خاصية الجذر التربيعي	أحيانًا	مع المعادلات المكتوبة على صورة مربع كامل يساوي ثابتًا. مثال: $(x - 5)^2 = 18$
إكمال المربع	دائمًا	مع المعادلات المكتوبة على الصورة: $x^2 + bx + c = 0$. مثال: $x^2 + 6x - 14 = 0$
القانون العام	دائمًا	عندما لايمكن استعمال بقية الطرائق أو عندما يكون من الصعب استعمالها. مثال: $2.3x^2 - 1.8x + 9.7 = 0$

تأكد

الأمثلة 4–1 حُلَّ كلَّ معادلة مما يأتي باستعمال القانون العام:

1) $x^2 + 12x - 9 = 0$

2) $x^2 + 8x + 5 = 0$

3) $4x^2 - 5x - 2 = 0$

4) $9x^2 + 6x - 4 = 0$

5) $10x^2 - 3 = 13x$

6) $22x = 12x^2 + 6$

7) $-3x^2 + 4x = -8$

8) $x^2 + 3 = -6x + 8$

مثال 5 أجب عن الفرعين a،b لكلِّ معادلة تربيعية مما يأتي:

a) أوجد قيمة المميز.

b) أوجد عدد الجذور، وحدد أنواعها.

9) $3x^2 + 8x + 2 = 0$

10) $2x^2 - 6x + 9 = 0$

11) $-16x^2 + 8x - 1 = 0$

12) $5x^2 + 2x + 4 = 0$

تدرب وحل المسائل

الأمثلة 1–4

حُلَّ كلَّ معادلة مما يأتي باستعمال القانون العام:

13) $x^2 + 45x = -200$

14) $4x^2 - 6 = -12x$

15) $5x^2 - 9 = 11x$

16) $12x^2 + 9x - 2 = -17$

مثال 5

أجب عن الفرعين **a** ، **b** لكلِّ معادلة تربيعية مما يأتي:

a) أوجد قيمة المميز.

b) أوجد عدد الجذور، وحدد أنواعها.

17) $2x^2 + 3x - 3 = 0$

18) $3x^2 - 3x + 8 = 0$

19) $2x^2 + 4x + 7 = 0$

20) $-5x^2 + 4x + 1 = 0$

21) $x^2 - 6x = -9$

22) $x^2 + 2x - 4 = -9$

23) $-6x^2 + 5 = -4x + 8$

24) $5x^2 + 8x = 0$

25) $8x^2 = -2x + 1$

26) $4x - 3 = -12x^2$

27) $0.8x^2 + 2.6x = -3.2$

28) $0.6x^2 + 1.4x = 4.8$

الربط مع الحياة

تأسس برنامج مكافحة التدخين التابع لوزارة الصحة في المملكة العربية السعودية في 1423/2/23هـ؛ لمكافحة التدخين بكافة أنواعه ووسائله. ويقدم خدماته في كافة المجالات التوعوية والعلمية والاستشارية المتعلقة بالتدخين وأضراره وطرق مكافحته في مدن ومحافظات المملكة.

المصدر: البوابة الإلكترونية لوزارة الصحة www.moh.gov.sa/depts/TCP/Pages/About.aspx

29) التدخين: تبذل دول العالم جهودًا مكثفة للتوعية بأخطار التدخين، وقد أثمرت عن تناقص أعداد المدخنين. وفي إحدى البلدان أجريت دراسة حول الإصابات بمرض سرطان الرئة بين كل 100000 شخص في بعض الأعوام، وكانت نتائجها التقريبية كما في الجدول المجاور. ويمكن تمثيل العدد التقريبي للمصابين بالدالة $y = -0.26x^2 - 0.55x + 91.81$، حيث x عدد السنوات بعد عام 2000.

العام	عدد الإصابات لكل 100000
2000	92
2002	90
2004	85
2010	?
2017	?

a) احسب عدد المصابين بسرطان الرئة لكل 100000 شخص في عامَي 2017, 2010 .

b) استعمل القانون العام لإيجاد قيمة x عندما $y = 50$.

c) اعتمادًا على الدالة التربيعية، متى يصبح معدل الإصابة يساوي صفرًا؟ وهل هذا التوقع معقول؟ فسِّر إجابتك.

30) نظرية الأعداد: يعطَى مجموع الأعداد الصحيحة المتتالية n ، ... ، 3، 2، 1 بالقانون $S = \frac{1}{2} n (n + 1)$. فكم عددًا صحيحًا متتاليًا بدءًا بالعدد 1 مجموعها يساوي 666؟

31) ترفيه: يُعطى ارتفاع لعبة ترفيهية عن سطح الأرض وهي تتحرك بسرعة تصل إلى 80 $ft \backslash s$ بالدالة: $h = -16t^2 - 64t + 60$ ؛ حيث h الارتفاع بالأقدام، و t الزمن بالثواني. فإذا علمت أنها ترتفع مسافة 60 ft ، فما الزمن الذي يستغرقه هبوطها من ارتفاع 60 ft إلى 0 ft ؟

مسائل مهارات التفكير العليا

32) اكتشف الخطأ: حددت كلٌّ من هدى وندى عدد حلول للمعادلة $3x^2 - 5x = 7$. فمن منهما إجابتها صحيحة؟ وضِّح إجابتك.

هدى

$3x^2 - 5x = 7$

$3x^2 - 5x - 7 = 0$

$b^2 - 4ac = (-5)^2 - 4(3)(-7)$

$= 109$

وبما أن المميز موجب فللمعادلة حلان حقيقيان.

ندى

$3x^2 - 5x = 7$

$b^2 - 4ac = (-5)^2 - 4(3)(7)$

$= -59$

وبما أن المميز سالب فلا توجد للمعادلة حلول حقيقية.

33) تحدٍّ: حل المعادلة $4ix^2 - 4ix + 5i = 0$ باستعمال القانون العام.

34) تبرير: حدد ما إذا كانت كل جملة مما يأتي صحيحة دائمًا أو صحيحة أحيانًا أو غير صحيحة أبدًا. ووضِّح إجابتك:

a) إذا كانت إشارتا كلٍّ من المعاملَين a،c في المعادلة التربيعية المكتوبة على الصورة القياسية مختلفتين، فإن جذرَي المعادلة حقيقيان.

b) إذا كان مميز المعادلة التربيعية أكبر من 1، فإن لها جذرين حقيقيين غير نسبيين.

35) اكتب: صف ثلاث طرائق مختلفة لحل المعادلة: $x^2 - 2x - 15 = 0$. وأيها تفضل؟ ولماذا؟

تدريب على اختبار

36) أي المعادلات الآتية لها جذر حقيقي مكرر مرتين؟

A $x^2 - 2x + 5 = 0$

B $x^2 - 2x - 5 = 0$

C $x^2 = 19$

D $x^2 - 8x = -16$

37) قيمة المميز للمعادلة $x^2 - 8x = 0$ هي:

A -64

B -8

C 8

D 64

مراجعة تراكمية

أوجد قيمة c التي تجعل كل ثلاثية حدود مما يأتي مربعًا كاملًا. ثم اكتبها على صورة مربع كامل: (مهارة سابقة)

38) $x^2 + 13x + c$

39) $x^2 + 2.4x + c$

40) $x^2 + \frac{4}{5}x + c$

بسّط كلًّا مما يأتي: (الدرس 1-3)

41) i^{26}

42) $\sqrt{-16}$

43) $(4\sqrt{-9}) \cdot (2\sqrt{-25})$

رابط الدرس الرقمي
www.ien.edu.sa

الهدف
أكتب المعادلة التربيعية بمعرفة مجموع جذريها وحاصل ضربهما.

إذا علمت جذري معادلة تربيعية فإنه يمكنك كتابتها باستعمال مجموع جذريها وحاصل ضربهما.

للمعادلةالتربيعية: $x^2 + 5x - 24 = 0$ جذران هما 3 , -8
ومجموعهما -5 ، وحاصل ضربهما -24.

مجموع الجذرين: $3 + (-8) = -5$ — -5 هو النظير الجمعي لمعامل x

$x^2 + 5x - 24 = 0$

حاصل ضرب الجذرين: $3(-8) = -24$ — -24 هو الحد الثابت

ويمكن تعميم ذلك لأية معادلة تربيعية باستعمال القانون العام لحل المعادلة التربيعية، فإذا كان جذرا المعادلة التربيعية r_1 , r_2 فإن:

$$r_1 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \qquad r_2 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

مجموع الجذرين

$$r_1 + r_2 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} + \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \quad \text{مجموع الجذرين}$$

$$= \frac{-2b + 0}{2a} = -\frac{b}{a} \quad \text{بسّط}$$

مجموع الجذرين يساوي $-\frac{b}{a}$

حاصل ضرب الجذرين

$$r_1 \cdot r_2 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \cdot \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \quad \text{اضرب الجذرين}$$

$$= \frac{b^2 - (b^2 - 4ac)}{4a^2} \quad \text{اضرب}$$

$$= \frac{b^2 - b^2 + 4ac}{4a^2} \quad \text{الخاصية التوزيعية}$$

$$= \frac{4ac}{4a^2} = \frac{c}{a} \quad \text{بسّط}$$

حاصل ضرب الجذرين يساوي $\frac{c}{a}$

مما سبق يمكن التوصل للقانون الآتي الذي يستعمل لكتابة أية معادلة تربيعية عُلِم جذراها.

مفهوم أساسي — أضف إلى مطويتك

مجموع جذري معادلة وحاصل ضربهما

إذا كان r_1 , r_2 جذري المعادلة $ax^2 + bx + c = 0, a \neq 0$
فإن $r_1 \cdot r_2 = \frac{c}{a}$, $r_1 + r_2 = -\frac{b}{a}$.

النشاط 1 استعمال مجموع جذرين وحاصل ضربهما

اكتب المعادلة التربيعية التي جذراها -7 , 2.

الخطوة 1 : أوجد مجموع الجذرين:

$$r_1 + r_2 = 2 + (-7)$$
$$= -5$$

الخطوة 2 : أوجد حاصل ضرب الجذرين:

$$r_1 \cdot r_2 = 2(-7)$$
$$= -14$$

الخطوة 3 : اكتب المعادلة:

بما أن $-14 = \frac{c}{a}$, $-5 = -\frac{b}{a}$ ، فإذا كانت $a = 1$ فإن: $b = 5$, $c = -14$.

وبالتالي المعادلة : $x^2 + 5x - 14 = 0$ تحقق المطلوب.

النشاط 2 استعمال مجموع جذرين وحاصل ضربهما

اكتب المعادلة التربيعية التي جذراها $-\frac{12}{5}$, $\frac{3}{4}$.

الخطوة 1 : أوجد مجموع الجذرين:

$$r_1 + r_2 = \frac{3}{4} + \left(-\frac{12}{5}\right)$$
$$= \frac{15}{20} - \frac{48}{20} = -\frac{33}{20}$$

الخطوة 2 : أوجد حاصل ضرب الجذرين:

$$r_1 \cdot r_2 = \frac{3}{4}\left(-\frac{12}{5}\right)$$
$$= -\frac{36}{20}$$

الخطوة 3 : اكتب المعادلة:

بما أن $-\frac{36}{20} = \frac{c}{a}$, $-\frac{33}{20} = -\frac{b}{a}$ ؛ فإذا كانت $a = 20$ فإن: $b = 33$, $c = -36$.

وبالتالي المعادلة : $20x^2 + 33x - 36 = 0$ تحقق المطلوب.

تمارين:

اكتب المعادلة التربيعية التي جذراها العددان المعطيان في كل مما يأتي:

1) $-\frac{3}{4}, \frac{5}{8}$ **2)** $-7, \frac{2}{3}$ **3)** $\pm\frac{2}{5}$ **4)** $4 \pm \sqrt{3}$

5) $1 \pm \sqrt{6}$ **6)** $\frac{-2 \pm 3\sqrt{5}}{7}$ **7)** $7 \pm 3i$ **8)** $\sqrt{5} \pm 8i$

اكتب المعادلة التربيعية التي تحقق كلًّا مما يأتي:

9) مجموع جذريها 4 ، وحاصل ضربهما $\frac{13}{12}$.

10) مجموع جذريها $\frac{1}{6}$ ، وحاصل ضربهما $\frac{5}{21}$.

رابط الدرس الرقمي

www.ien.edu.sa

3-3

العمليات على كثيرات الحدود
Operations with Polynomials

فيما سبق:
درستُ إيجاد قيم القوى. (مهارة سابقة)

والآن:
- أضرب وحيدات حد وعبارات تتضمن قوى، وأقسمها وأبسّطها.
- أجمع كثيرات حدود، وأطرحها وأضربها.

المفردات:
التبسيط
simplifying
درجة كثيرة الحدود
Degree of a polynomial

لماذا؟

يستغرق وصول ضوء الشمس إلى الأرض 8 دقائق تقريبًا؛ إذ يسير الضوء بسرعة كبيرة تصل إلى $3 \times 10^8 \text{ m/s}$ تقريبًا.

ما الوقت الذي سيستغرقه وصول الضوء إلينا من مجرة تبعد مسافة $2.367 \times 10^{21} \text{m}$ تقريبًا؟

ضرب وحيدات الحد وقسمتها تذكّر أن وحيدة الحد هي: عدد، أو متغير، أو حاصل ضرب عدد في متغير واحد أو أكثر بأسس صحيحة غير سالبة، وتتكون من حد واحد فقط. والجدول الآتي يلخص خصائص الأسس التي تساعد على ضرب وقسمة وحيدات الحد وتبسيطها، حيث إن عملية **تبسيط** عبارات تتضمن قوى تعني إعادة كتابتها دون أقواس أو أسس سالبة.

ملخص المفهوم

أضف إلى مطويتك

خصائص الأسس

لأي عددين حقيقيين x, y وعددين صحيحين a, b:

الخاصية	التعريف	مثال
ضرب القوى	$x^a \cdot x^b = x^{a+b}$	$3^2 \cdot 3^4 = 3^{2+4} = 3^6$ $p^2 \cdot p^9 = p^{2+9} = p^{11}$
قسمة القوى	$\frac{x^a}{x^b} = x^{a-b}$، حيث $x \neq 0$	$\frac{9^5}{9^2} = 9^{5-2} = 9^3$ $\frac{b^6}{b^4} = b^{6-4} = b^2$
الأسّ السالب	$x^{-a} = \frac{1}{x^a}$، حيث $x \neq 0$، $\frac{1}{x^{-a}} = x^a$	$3^{-5} = \frac{1}{3^5}$ $\frac{1}{b^{-7}} = b^7$
قوة القوة	$(x^a)^b = x^{ab}$	$(3^3)^2 = 3^{3 \cdot 2} = 3^6$ $(d^2)^4 = d^{2 \cdot 4} = d^8$
قوة ناتج الضرب	$(xy)^a = x^a y^a$	$(2k)^4 = 2^4 k^4 = 16k^4$ $(ab)^3 = a^3 b^3$
قوة ناتج القسمة	$\left(\frac{x}{y}\right)^a = \frac{x^a}{y^a}, y \neq 0$، $\left(\frac{x}{y}\right)^{-a} = \left(\frac{y}{x}\right)^a = \frac{y^a}{x^a}, x \neq 0, y \neq 0$	$\left(\frac{x}{y}\right)^2 = \frac{x^2}{y^2}$ $\left(\frac{a}{b}\right)^{-5} = \frac{b^5}{a^5}$
القوة الصفرية	$x^0 = 1, x \neq 0$	$7^0 = 1$

عند تبسيط وحيدة الحد، تأكد من أنك قد كتبتها في أبسط صورة.

مفهوم أساسي

تبسيط وحيدات الحد

أضف إلى مطويتك

تكون وحيدة الحد في أبسط صورة عندما:

- لا تتضمن قوى قوة.
- يظهر كل أساس مرة واحدة.
- تكون جميع الكسور المتضمنة في أبسط صورة.
- لا تتضمن أقواسًا أو أسسًا سالبة.

مثال 1

تبسيط العبارات

بسّط كل عبارة فيما يأتي مفترضًا أن أيًّا من المتغيرات لا يساوي صفرًا:

a $(2a^{-2})(3a^3b^2)(c^{-2})$

$(2a^{-2})(3a^3b^2)(c^{-2}) = 6ab^2\,c^{-2}$ — اضرب 2 في 3، واضرب a^{-2} في a^3

$= 6ab^2\left(\frac{1}{c^2}\right)$ — تعريف الأسس السالبة

$= \frac{6ab^2}{c^2}$ — بسّط

b $\frac{q^2r^4}{q^7r^3}$

$\frac{q^2r^4}{q^7r^3} = q^{2-7} \cdot r^{4-3}$ — قسمة القوى

$= q^{-5}r$ — اطرح الأسس

$= \frac{r}{q^5}$ — تعريف الأسس السالبة

c $\left(\frac{-2a^4}{b^2}\right)^3$

$\left(\frac{-2a^4}{b^2}\right)^3 = \frac{(-2a^4)^3}{(b^2)^3}$ — قوة ناتج القسمة

$= \frac{(-2)^3(a^4)^3}{(b^2)^3}$ — قوة ناتج الضرب

$= \frac{-8a^{12}}{b^6}$ — قوة القوة

تحقق من فهمك

1A $(2x^{-3}y^3)(-7x^5y^{-6})$

1B $\frac{15c^5d^3}{-3c^2d^7}$

1C $\left(\frac{a}{4}\right)^{-3}$

1D $(-2x^3y^2)^5$

إرشادات للدراسة

تحقق

يمكنك التحقق من إجابتك دائمًا باستعمال تعريف الأسس، فمثلًا:

$\frac{q^2}{q^7} = \frac{q \cdot q}{q \cdot q \cdot q \cdot q \cdot q \cdot q \cdot q}$

$= \frac{1}{q^5}$

العمليات على كثيرات الحدود: **درجة كثيرة الحدود** المبسّطة هي أكبر درجة لوحيدات الحد المكوِّنة لها. فمثلًا درجة كثيرة الحدود $x^2 + 4x + 58$ هي 2.

إرشادات للدراسة

كثيرات الحدود

تذكّر أن كثيرة الحدود هي وحيدة حد أو مجموع وحيدات حد، وتُسمى كل وحيدة حد منها حدًّا في كثيرة الحدود. ودرجة وحيدة الحد هي مجموع أسس كل متغيراتها.

مثال 2 درجة كثيرة الحدود

حدد ما إذا كانت كل عبارة فيما يأتي كثيرة حدود أم لا، وإن كانت كذلك فاذكر درجتها:

a) $\frac{1}{4}x^4y^3 - 8x^5$

تعدّ هذه العبارة كثيرة حدود؛ لأن كل حد فيها هو وحيدة حد؛ ودرجة الحد الأول فيها تساوي $4 + 3 = 7$، ودرجة الحد الثاني 5؛ لذا فإن درجة كثيرة الحدود 7.

b) $\sqrt{x} + x + 4$

هذه العبارة ليست كثيرة حدود؛ لأن $\sqrt{x}$ ليست وحيدة حد.

c) $x^{-3} + 2x^{-2} + 6$

هذه العبارة ليست كثيرة حدود؛ لأن كلًّا من: x^{-3}, x^{-2} ليست وحيدة حد؛

حيث $x^{-3} = \frac{1}{x^3}, x^{-2} = \frac{1}{x^2}$، ووحيدات الحد لا تتضمن متغيرات في المقام.

تحقق من فهمك

2A) $\frac{x}{y} + 3x^2$ **(2B** $x^5y + 9x^4y^3 - 2xy$

يمكنك إجراء العمليات المطلوبة على كثيرات الحدود وتبسيطها تمامًا كما تبسّط وحيدة الحد، ثم تجمع الحدود المتشابهة.

إرشادات للدراسة

طرائق بديلة

لاحظ أن المثال 3a يستعمل طريقة الجمع الأفقي. على حين يستعمل المثال 3b طريقة الجمع الرأسي، وكلتاهما تؤدي إلى الإجابة الصحيحة.

مثال 3 جمع كثيرات الحدود وطرحها

أوجد ناتج كلٍّ مما يأتي، واكتبه في أبسط صورةٍ:

a) $(4x^2 - 5x + 6) - (2x^2 + 3x - 1)$

تخلّص من الأقواس وجمّع الحدود المتشابهة.

$(4x^2 - 5x + 6) - (2x^2 + 3x - 1)$	العبارة الأصلية
$= 4x^2 - 5x + 6 - 2x^2 - 3x + 1$	وزّع العدد 1−
$= (4x^2 - 2x^2) + (-5x - 3x) + (6 + 1)$	جمّع الحدود المتشابهة
$= 2x^2 - 8x + 7$	اجمع الحدود المتشابهة

b) $(6x^2 - 7x + 8) + (-4x^2 + 9x - 5)$

رتّب الحدود المتشابهة رأسيًّا، وأوجد ناتج الجمع.

$$\begin{array}{r} 6x^2 - 7x + 8 \\ (+)\ -4x^2 + 9x - 5 \\ \hline 2x^2 + 2x + 3 \end{array}$$

تحقق من فهمك

3A) $(-x^2 - 3x + 4) - (x^2 + 2x + 5)$ **(3B** $(3x^2 - 6) + (-x + 1)$

يمكنك استعمال خاصية التوزيع لضرب كثيرات الحدود.

مثال 4 ضرب وحيدة حدٍّ في كثيرة حدود

أوجد ناتج: $3x(2x^2 - 4x + 6)$، واكتبه في أبسط صورة.

$3x(2x^2 - 4x + 6) = 3x(2x^2) + 3x(-4x) + 3x(6)$ خاصية التوزيع

$= 6x^3 - 12x^2 + 18x$ اضرب في وحيدة الحد

تحقق من فهمك

(4A) $\frac{4}{3}x^2(6x^2 + 9x - 12)$

(4B) $-2a(-3a^2 - 11a + 20)$

مثال 5 ضرب كثيرات الحدود

أوجد ناتج: $(n^2 + 4n - 6)(n + 2)$، واكتبه في أبسط صورة.

$(n^2 + 4n - 6)(n + 2) = n^2(n + 2) + 4n(n + 2) + (-6)(n + 2)$ خاصية التوزيع

$= n^2 \cdot n + n^2 \cdot 2 + 4n \cdot n + 4n \cdot 2 + (-6) \cdot n + (-6) \cdot 2$ خاصية التوزيع

$= n^3 + 2n^2 + 4n^2 + 8n - 6n - 12$ اضرب وحيدات الحد

$= n^3 + 6n^2 + 2n - 12$ اجمع الحدود المتشابهة

تحقق من فهمك

(5A) $(x^2 + 4x + 16)(x - 4)$

(5B) $(2x^2 - 4x + 5)(3x - 1)$

يمكنك استعمال كثيرات الحدود لتمثيل مواقف من واقع الحياة.

مثال 6 من واقع الحياة كتابة عبارة كثيرة حدود

قيادة: تتطلب أنظمة إحدى شركات النقل البري أن تكون مدة قيادة سائقي الشاحنات 10 ساعات يوميًّا، تتخللها فترة استراحة، فإذا قاد أحد سائقي الشركة شاحنته في فترة ما قبل الاستراحة بسرعة 90km/h ، وبعد الاستراحة بسرعة 100km/h ، فاكتب كثيرة حدود تمثل المسافة التي قطعها .

التعبير اللفظي: قاد السائق سيارته بسرعة 90 km/h في فترة ما قبل الاستراحة، و 100 km/h في فترة ما بعد الاستراحة.

المتغير: ليكن x عدد ساعات القيادة قبل الاستراحة.

العبارة: $90x + 100(10 - x)$

$90x + 100(10 - x) = 90x + 1000 - 100x$ خاصية التوزيع

$= 1000 - 10x$ اجمع الحدود المتشابهة

فتكون كثيرة الحدود هي $1000 - 10x$

تحقق من فهمك

(6) استثمار: استثمر فيصل مبلغ 90000 ريال في مشروعين أحدهما صناعي نسبة ربحه السنوي 18%، والآخر مشروع عقاري نسبة ربحه السنوي 42%، فإذا كانت x تمثل المبلغ الذي استثمره فيصل في المشروع العقاري، فاكتب كثيرة حدود تمثل ربحه في المشروعين بعد عام واحد.

إرشادات للدراسة

قانون المسافة

تذكّر أن:

المسافة = السرعة × الزمن

الربط مع الحياة

تعقد معظم الدول دورات تدريبية متخصصة واختبارات مشددة لقائدي الشاحنات للتأكد من مستوى تأهيلهم لقيادتها، وتوعيتهم بكيفية التعامل مع الطرق السريعة، بما يقلل المخاطر ويؤمن حركة السير.

تأكد

مثال 1 بسّط كلًّا مما يأتي مفترضًا أن أيًّا من المتغيرات لا يساوي صفرًا:

1) $(2a^3b^{-2})(-4a^2b^4)$ **2)** $\frac{12x^4y^2}{2xy^5}$ **3)** $\left(\frac{2a^2}{3b}\right)^3$ **4)** $(6g^5h^{-4})^3$

مثال 2 حدد ما إذا كانت كل عبارة فيما يأتي كثيرة حدود أم لا، وإن كانت كذلك فاذكر درجتها:

5) $3x + 4y$ **6)** $\frac{1}{2}x^2 - 7y$ **7)** $x^2 + \sqrt{x}$ **8)** $\frac{ab^3 - 1}{az^4 + 3}$

الأمثلة 3 , 4 , 5 أوجد ناتج كلٍّ مما يأتي واكتبه في أبسط صورة:

9) $(x^2 - 5x + 2) - (3x^2 + x - 1)$ **10)** $(3a + 4b) + (6a - 6b)$

11) $3x^2(2xy - 3xy^2 + 4x^2y^3)$ **12)** $(n - 9)(n + 7)$

مثال 6 **13) رياضة:** يمارس عثمان رياضتي الركض السريع ورفع الأثقال مدة 75 دقيقة يوميًّا. وعند ركضه يحرق 10 سعرات حرارية في الدقيقة، أما عندما يرفع الأثقال فيحرق 7.5 سعرات حرارية في الدقيقة. فإذا مارس رفع الأثقال x دقيقة في أحد الأيام، فاكتب كثيرة حدود تمثل عدد السعرات الحرارية التي حرقها في ممارسته للرياضتين ذلك اليوم.

تمارين ومسائل

مثال 1 بسّط كلًّا مما يأتي مفترضًا أن أيًّا من المتغيرات لا يساوي صفرًا:

14) $(5x^3y^{-5})(4xy^3)$ **15)** $\frac{-y^3z^5}{y^2z^3}$ **16)** $\frac{-7x^5y^5z^4}{21x^7y^5z^2}$ **17)** $(n^5)^4$

مثال 2 حدد ما إذا كانت كل عبارة فيما يأتي كثيرة حدود أم لا، وإن كانت كذلك فاذكر درجتها:

18) $2x^2 - 3x + 5$ **19)** $a^3 - 11$ **20)** $\frac{5np}{n^2} - \frac{2g}{h}$ **21)** $\sqrt{m - 7}$

الأمثلة 3 , 4 , 5 أوجد ناتج كلٍّ مما يأتي، واكتبه في أبسط صورة:

22) $(6a^2 + 5a + 10) - (4a^2 + 6a + 12)$ **23)** $4x(2x^2 + y)$

24) $(x - y)(x^2 + 2xy + y^2)$ **25)** $(a + b)(a^3 - 3ab - b^2)$

مثال 6 **26) مزرعة:** استأجر سلمان عاملين بالتناوب لتنسيق مزرعته، فإذا تقاضى الأول 200 ريالٍ عن كل يوم عمل ، وتقاضى الثاني 150 ريالًا عن كل يوم عمل، واحتاجت المزرعة إلى 15 يوم عملٍ لتنسيقها، فاكتب كثيرة حدودٍ تمثل تكلفة تنسيق المزرعة إذا عمل الأول مدة x يومًا.

بسّط كلًّا مما يأتي مفترضًا أن أيًّا من المتغيرات لا يساوي صفرًا:

27) $\left(\frac{8x^2y^3}{24x^3y^2}\right)^4$ **28)** $\left(\frac{4x^{-2}y^3}{xy^{-4}}\right)^{-2}$ **29)** $(a^2b^3)(ab)^{-2}$

30) $(-3x^3y)^2(4xy^2)$ **31)** $\frac{3c^2d(2c^3d^5)}{15c^4d^2}$ **32)** $\frac{1}{4}g^2(8g + 12h - 16gh^2)$

33) $x^{-2}(x^4 - 3x^3 + x^{-1})$ **34)** $a^{-3}b^2(ba^3 + b^{-1}a^2 + b^{-2}a)$

35) $(n^2 - 7)(2n^3 + 4)$ **36)** $(2x - 2y)^3$

37) فلك: ارجع إلى فقرة "لماذا" في بداية هذا الدرس.

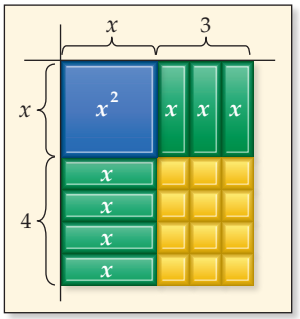
a) ما الوقت الذي يستغرقه الضوء حتى يصل من المجرة المذكورة إلى الأرض؟

b) ما الوقت الذي يستغرقه الضوء حتى يصل من الشمس إلى المريخ إذا كانت المسافة بينهما $2.28 \times 10^{11}\text{m}$ ؟

38) إذا كان $5^{k+7} = 5^{2k-3}$، فما قيمة k؟

39) ما قيمة k التي تجعل $q^{41} = q^{4k} \cdot q^5$ صحيحة؟

40) تمثيلات متعددة: استعمل النموذج المجاور الذي يمثل حاصل ضرب $x + 3$ في $x + 4$.



a) هندسيًّا: مساحة المستطيل تساوي حاصل ضرب طوله في عرضه، أوجد حاصل ضرب $x + 3$ في $x + 4$ باستعمال النموذج.

b) جبريًّا: استعمل طريقة التوزيع بالترتيب لإيجاد حاصل ضرب $x + 3$ في $x + 4$.

c) لفظيًّا: وضِّح كيف يمثّل النموذج كل حدّ في حاصل الضرب.

الربط مع الحياة

يصعب التنبؤ بالطقس على كوكب المريخ، نظرًا إلى بيئته المتقلبة. ويبدو أن فيه أعمق وادٍ، وأكبر بركان في المجموعة الشمسية.

مسائل مهارات التفكير العليا

41) برهان: وضِّح كيف يمكن برهنة خاصية الأسس السالبة باستعمال خاصيتي قسمة القوى والقوة الصفرية؟

42) تحدٍّ: ما الذي يحدث للمقدار x^{-y} عندما تزداد قيمة y لكل $x > 1, y > 0$؟

43) تبرير: فسّر لماذا تكون العبارة 0^{-2} غير معرَّفة؟

44) مسألة مفتوحة: اكتب ثلاث عبارات مختلفة مكافئة لـ x^{12}.

45) اكتب: وضِّح لماذا تُعد خصائص الأسس مهمة في الفلك؟ وضمّن توضيحك طريقة إيجاد الزمن اللازم لوصول الضوء من مصدرٍ ما إلى أحد الكواكب.

تدريب على اختبار

46) إجابة قصيرة: بسّط المقدار $\frac{(2x^2)^3}{12x^4}$.

47) أيّ مما يأتي ليس عاملاً لكثيرة الحدود $x^3 - x^2 - 2x$؟

A x **B** $x + 1$ **C** $x - 1$ **D** $x - 2$

مراجعة تراكمية

حلّل كل كثيرة حدود فيما يأتي: (مهارة سابقة)

48) $12ax^3 + 20bx^2 + 32cx$

49) $x^2 + 2x + 6 + 3x$

50) $12y^2 + 9y + 8y + 6$

51) $2my + 7x + 7m + 2xy$

52) $8ax - 6x - 12a + 9$

53) $10x^2 - 14xy - 15x + 21y$

رابط الدرس الرقمي

www.ien.edu.sa

3-4

قسمة كثيرات الحدود
Dividing Polynomials

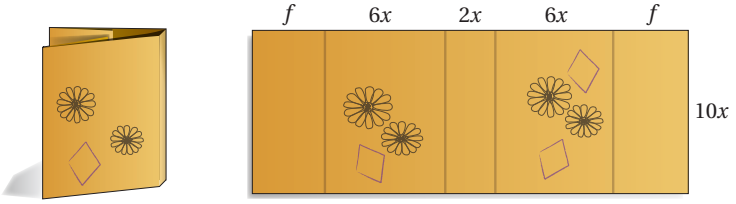
فيما سبق:
درست قسمة وحيدات الحد. (الدرس 3 - 3)

والآن:
- أقسم كثيرات الحدود مستعملاً القسمة الطويلة.
- أقسم كثيرات الحدود مستعملاً القسمة التركيبية.

المفردات:
القسمة التركيبية
Synthetic division

لماذا؟

تحتاج سلمى إلى $(140x^2 + 60x)$ بوصة مربعة من الورق لعمل غلاف لكتاب طوله $10x$ بوصات. ويظهر الشكل أدناه الجزء الذي تركته للثني على جانبي الغلاف. فإذا كان عرض كعب الغلاف $2x$ بوصة، وعرض كل من الغلاف الأمامي والخلفي $6x$ بوصة، فما عرض كل من جزأي الثني؟ يمكنك استعمال قسمة كثيرات الحدود لمساعدتك على إيجاد الجواب.



f = عرض الثنية

القسمة الطويلة: تعلمت في الدرس (3 – 3) قسمة وحيدات الحد، لذا يمكنك قسمة كثيرة حدود على وحيدة حد مستعملًا المهارات نفسها .

مثال 1 قسمة كثيرة حدود على وحيدة حد

بسّط العبارة : $\dfrac{6x^4y^3 + 12x^3y^2 - 18x^2y}{3xy}$.

$$\frac{6x^4y^3 + 12x^3y^2 - 18x^2y}{3xy} = \frac{6x^4y^3}{3xy} + \frac{12x^3y^2}{3xy} - \frac{18x^2y}{3xy}$$ اقسم كل حد في البسط على المقام

$$= \frac{6}{3} \cdot x^{4-1}y^{3-1} + \frac{12}{3} \cdot x^{3-1}y^{2-1} - \frac{18}{3} \cdot x^{2-1}y^{1-1}$$ اقسم

$$= 2x^3y^2 + 4x^2y - 6x$$ $y^{1-1} = y^0 = 1$

تحقق من فهمك

(1A) $(20c^4d^2f - 16cdf^2 + 4cdf) \div (4cdf)$

(1B) $(18x^2y + 27x^3y^2z)(3xy)^{-1}$

يمكنك استعمال عملية مشابهة للقسمة الطويلة لقسمة كثيرة حدود على كثيرة حدود أخرى. وتسمى خطواتها خوارزمية القسمة.

مثال 2 قسمة كثيرة حدود على كثيرة حدود أخرى

استعمل القسمة الطويلة لإيجاد ناتج: $(x^2 + 3x - 40) \div (x - 5)$.

$$\begin{array}{r} x + 8 \\ x - 5 \overline{)\, x^2 + 3x - 40} \\ (-)\ x^2 - 5x \\ \hline 8x - 40 \\ (-)\ 8x - 40 \\ \hline 0 \end{array}$$

اضرب المقسوم عليه في x

اطرح

اضرب المقسوم عليه في 8

اطرح

ناتج القسمة هو $x + 8$، والباقي 0.

تحقق من فهمك

(2A) $(x^2 + 7x - 30) \div (x - 3)$

(2B) $(x^2 - 13x + 12) \div (x - 1)$

إرشادات للدراسة

خطوات خوارزمية قسمة كثيرة حدود على أخرى:
- اكتب كثيرة الحدود في كلٍّ من المقسوم والمقسوم عليه، بحيث تكون حدودها مرتبة ترتيبًا تنازليًّا حسب درجتها.
- ابدأ بقسمة الحد الأول في المقسوم على الحد الأول في المقسوم عليه، وضع الإجابة في المكان المخصص لذلك.
- اضرب ناتج القسمة في الخطوة السابقة في المقسوم عليه، واكتب الإجابة تحت المقسوم، واطرحه من المقسوم.
- استمر بقسمة الحد الثاني ... إلخ، حتى تصل إلى أن يكون باقي القسمة 0، أو كثيرة حدود درجتها أقل من درجة المقسوم عليه.

قد ينتج باقٍ عن قسمة كثيرتي حدود كما في قسمة الأعداد الكلية، فمثلًا عند إيجاد 3 ÷ 11 يكون الناتج 3 والباقي 2، وتكتب عادةً على الصورة $3+\frac{2}{3}$. ويمكنك كتابة نتيجة قسمة كثيرتي حدود مع باقٍ بالطريقة نفسها.

مثال 3 على اختبار

أي مما يأتي يكافئ العبارة: $(a^2 + 7a - 11)(3 - a)^{-1}$ ؟

A $a + 10 - \frac{19}{3-a}$

B $-a + 10$

C $-a - 10 + \frac{19}{3-a}$

D $-a - 10 - \frac{19}{3-a}$

اقرأ فقرة الاختبار

بما أن العامل الثاني مرفوع للأس 1−، فهذه إذن مسألة قسمة.

$$(a^2 + 7a - 11)(3 - a)^{-1} = \frac{a^2 + 7a - 11}{3 - a}$$

حل فقرة الاختبار

$$\begin{array}{r} -a - 10 \\ -a + 3 \overline{)\, a^2 + 7a - 11} \\ (-)\quad a^2 - 3a \\ \hline 10a - 11 \\ (-)\quad 10a - 30 \\ \hline 19 \end{array}$$

لتسهيل عملية القسمة، أعد كتابة $3 - a$ على الصورة $-a + 3$

$-a(-a + 3) = a^2 - 3a$

$7a - (-3a) = 10a$

$-10(-a + 3) = 10a - 30$

$-11 - (-30) = 19$

ناتج القسمة هو $-a - 10$، والباقي 19 .

لذا فإن $(a^2 + 7a - 11)(3 - a)^{-1} = -a - 10 + \frac{19}{3-a}$، ومن ثم تكون الإجابة هي البديل **C**.

تحقق من فهمك

3) أيٌّ مما يأتي يكافئ العبارة: $(r^2 + 5r + 7)(1 - r)^{-1}$؟

A $-r - 6 + \frac{13}{1-r}$

B $r + 6$

C $r - 6 + \frac{13}{1-r}$

D $r + 6 - \frac{13}{1-r}$

إرشادات للدراسة

الاختيار من متعدد

يمكنك حذف بعض البدائل عن طريق اختيار قيمة للمتغير a ثم تعويض هذه القيمة في العبارة الأصلية وفي البدائل وإيجاد قيمة كل منها.

القسمة التركيبية: القسمة التركيبية هي طريقة مبسّطة لقسمة كثيرة حدود على ثنائية حد.

مفهوم أساسي

القسمة التركيبية

أضف إلى مطويتك

الخطوة 1: اكتب معاملات المقسوم بعد ترتيب حدوده تنازليًا بحسب درجتها. تأكد من أن المقسوم عليه على الصورة $x - r$ ، ثم اكتب الثابت r في الصندوق، واكتب المعامل الأول أسفل الخط الأفقي.

الخطوة 2: اضرب المعامل الأول في r، واكتب الناتج أسفل المعامل الذي يليه.

الخطوة 3: اجمع ناتج الضرب مع المعامل الذي فوقه.

الخطوة 4: كرر الخطوتين 3 , 2 على ناتج الجمع في الخطوة السابقة حتى تصل إلى ناتج جمع العددين في العمود الأخير. الأعداد في الصف الأخير تمثل معاملات ناتج القسمة، ودرجة الحد الأول أقل بواحد من درجة المقسوم، والعدد الأخير هو الباقي.

مثال 4 القسمة التركيبية

استعمل القسمة التركيبية؛ لإيجاد ناتج: $(2x^3 - 13x^2 + 26x - 24) \div (x - 4)$.

الخطوة 1: اكتب معاملات المقسوم. واكتب الثابت r في الصندوق، وهو في هذا المثال 4. ثم اكتب المعامل الأول وهو 2 أسفل الخط الأفقي.

4	2	−13	26	−24
	↓			
	2			

الخطوة 2: اضرب المعامل الأول في الثابت r:
$2\ (4) = 8$ ، واكتب الناتج أسفل المعامل الثاني.

4	2	−13	26	−24
		8		
	2↗			

الخطوة 3: اجمع ناتج الضرب مع المعامل الثاني:
$-13 + 8 = -5$

4	2	−13	26	−24
		8		
	2	−5		

الخطوة 4: اضرب المجموع وهو -5 في الثابت r: $-5 \times 4 = -20$ ، واكتب الناتج أسفل المعامل التالي، ثم اجمع:
$26+(-20)=6$. اضرب المجموع وهو 6 في الثابت r:
$6\ (4) = 24$، واكتب ناتج الضرب تحت المعامل التالي، ثم اجمع: $-24 + 24 = 0$.

4	2	−13	26	−24
		8	−20	24
	2	−5↗	6↗	0

إذن ناتج القسمة هو $2x^2 - 5x + 6$، والباقي 0.

تحقق: اضرب ناتج القسمة في المقسوم عليه، فيكون الناتج هو المقسوم.

$$\begin{array}{rr} & 2x^2 - 5x + 6 \\ (\times) & x - 4 \\ \hline & -8x^2 + 20x - 24 \\ (+) & 2x^3 - 5x^2 + 6x \\ \hline & 2x^3 - 13x^2 + 26x - 24 \end{array}$$

تحقق من فهمك

4A $(2x^3 + 3x^2 - 4x + 15) \div (x + 3)$

4B $(3x^3 - 8x^2 + 11x - 14) \div (x - 2)$

4C $(4a^4 + 2a^2 - 4a + 12) \div (a + 2)$

4D $(6b^4 - 8b^3 + 12b - 14) \div (b - 2)$

تنبيه!

القسمة التركيبية

تذكّر أن الحدود تجمع ولا تطرح عند إجراء القسمة التركيبية.

إرشادات للدراسة

القسمة التركيبية

إذا لم يوجد أحد الحدود في كثيرة حدود المقسوم فأضفه وليكن معامله صفرًا. فمثلًا إذا كان المقسوم $2x^3 - 4x^2 + 6$ فاكتبه في صورة $2x^3 - 4x^2 + 0x + 6$

ولإجراء القسمة التركيبية يجب أن يكون المقسوم عليه على الصورة $x - r$، وإذا كان معامل x في المقسوم عليه لا يساوي الواحد، فيجب إعادة كتابة عبارة القسمة بحيث يمكنك استعمال القسمة التركيبية.

تنبيه!

قسمة جميع الحدود

تذكّر أن تقسم جميع الحدود في البسط والمقام على معامل x في المقام.

مثال 5 معامل x في المقسوم عليه لا يساوي 1

استعمل القسمة التركيبية؛ لإيجاد ناتج: $(3x^4 - 5x^3 + x^2 + 7x) \div (3x + 1)$.

$$\frac{3x^4 - 5x^3 + x^2 + 7x}{3x + 1} = \frac{(3x^4 - 5x^3 + x^2 + 7x) \div 3}{(3x + 1) \div 3}$$

أعد كتابة العبارة ليكون معامل x في المقسوم عليه 1 وذلك بقسمة كل من البسط والمقام على 3.

$$= \frac{x^4 - \frac{5}{3}x^3 + \frac{1}{3}x^2 + \frac{7}{3}x}{x + \frac{1}{3}}$$

بسّط كلًّا من البسط والمقام

وبما أن المقسوم لا يحتوي حدًّا ثابتًا، فضع صفرًا مكانه.

$x - r = x + \frac{1}{3}$, $r = -\frac{1}{3}$ $\rightarrow$

$-\frac{1}{3}$	1	$-\frac{5}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{7}{3}$	0
		$-\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$	$-\frac{1}{3}$	$-\frac{2}{3}$
	1	-2	1	2	$-\frac{2}{3}$

وعليه فإن الناتج هو $x^3 - 2x^2 + x + 2 - \frac{\frac{2}{3}}{x + \frac{1}{3}}$. وأخيرًا بسّط الكسر

$$\frac{\frac{2}{3}}{x + \frac{1}{3}} = \frac{3 \times \frac{2}{3}}{3 \times (x + \frac{1}{3})}$$

اضرب كلًّا من البسط والمقام في العدد 3

$$= \frac{2}{3x + 1}$$

بسّط

وعليه يكون الناتج هو: $x^3 - 2x^2 + x + 2 - \frac{2}{3x + 1}$.

تحقق: أوجد ناتج القسمة مستعملاً القسمة الطويلة.

$$\begin{array}{r} x^3 - 2x^2 + x + 2 \\ 3x + 1 \overline{)\, 3x^4 - 5x^3 + x^2 + 7x} \\ (-)\, 3x^4 + x^3 \\ \hline -6x^3 + x^2 + 7x \\ (-)\, -6x^3 - 2x^2 \\ \hline 3x^2 + 7x \\ (-)\, 3x^2 + x \\ \hline 6x \\ (-)\, 6x + 2 \\ \hline -2 \end{array}$$

وعليه يكون الناتج هو $x^3 - 2x^2 + x + 2 - \frac{2}{3x + 1}$. ✓

تحقق من فهمك

(5A) $(8x^4 - 4x^2 + x + 4) \div (2x + 1)$

(5B) $(8y^5 - 2y^4 - 16y^2 + 4) \div (4y - 1)$

(5C) $(15b^3 + 8b^2 - 21b + 6) \div (5b - 4)$

(5D) $(6c^3 - 17c^2 + 6c + 8) \div (3c - 4)$

تأكد

مثال 1 بسّط كلَّ عبارة فيما يأتي :

1) $\frac{4xy^2 - 2xy + 2x^2y}{xy}$

2) $(3a^2b - 6ab + 5ab^2)(ab)^{-1}$

المثالان 2, 4 استعمل القسمة الطويلة (خوارزمية القسمة) أو القسمة التركيبية؛ لإيجاد الناتج في كلٍّ ممَّا يأتي:

3) $(x^2 - 6x - 20) \div (x + 2)$

4) $(2a^2 - 4a - 8) \div (a + 1)$

5) $(3z^4 - 6z^3 - 9z^2 + 3z - 6) \div (z + 3)$

6) $(y^5 - 3y^2 - 20) \div (y - 2)$

مثال 3

7) **اختيار من متعدد:** أيٌّ مما يأتي يكافئ العبارة : $(x^2 + 3x - 9)(4 - x)^{-1}$ ؟

A $-x - 7 + \frac{19}{4 - x}$ **B** $-x - 7$ **C** $x + 7 - \frac{19}{4 - x}$ **D** $-x - 7 - \frac{19}{4 - x}$

مثال 5 استعمل القسمة التركيبية؛ لإيجاد الناتج في كلٍّ مما يأتي :

8) $(10x^2 + 15x + 20) \div (5x + 5)$

9) $(18a^2 + 6a + 9) \div (3a - 2)$

10) $\frac{12b^2 + 23b + 15}{3b + 8}$

11) $\frac{27y^2 + 27y - 30}{9y - 6}$

تدرب وحل المسائل

مثال 1 بسّط كلَّ عبارة فيما يأتي :

12) $\frac{24a^3b^2 - 16a^2b^3}{8ab}$

13) $\frac{5x^2y - 10xy + 15xy^2}{5xy}$

14) $\frac{7g^3h^2 + 3g^2h - 2gh^3}{gh}$

15) $\frac{4a^3b - 6ab + 2ab^2}{2ab}$

16) $\frac{16c^4d^4 - 24c^2d^2}{4c^2d^2}$

17) $\frac{9n^3p^3 - 18n^2p^2 + 21n^2p^3}{3n^2p^2}$

المثالان 2, 4 استعمل القسمة الطويلة (خوارزمية القسمة) أو القسمة التركيبية؛ لإيجاد الناتج في كلٍّ ممَّا يأتي:

18) $(a^2 - 8a - 26) \div (a + 2)$

19) $(b^3 - 4b^2 + b - 2) \div (b + 1)$

20) $(z^4 - 3z^3 + 2z^2 - 4z + 4)(z - 1)^{-1}$

21) $(x^5 - 4x^3 + 4x^2) \div (x - 4)$

22) $\frac{y^3 + 11y^2 - 10y + 6}{y + 2}$

23) $(g^4 - 3g^2 - 18) \div (g - 2)$

مثال 3

24) أيٌّ مما يأتي يكافئ العبارة : $(x^2 + x - 6)(2 - x)^{-1}$ ؟

A $x + 3$ **B** $-x - 1$ **C** $-x + 1$ **D** $-x - 3$

مثال 5 استعمل القسمة التركيبية؛ لإيجاد الناتج في كلٍّ مما يأتي :

25) $(6a^2 - 3a + 9) \div (3a - 2)$

26) $\frac{6x^5 + 5x^4 + x^3 - 3x^2 + x}{3x + 1}$

27) **هندسة:** صُمّم صندوق على شكل متوازي مستطيلات بحيث ترتبط أبعاده بعلاقة معينة بدلالة المتغير x. فإذا كان حجم الصندوق $6x^3 + 31x^2 + 53x + 30$، وارتفاعه $x + 2$، فما عرض قاعدته، وماطولها؟

28) **فيزياء:** يرتبط فرق جهد التيار V بشدة التيار C، والقوة P بالمعادلة $V = \frac{P}{C}$. فإذا عُبّر عن القوة بالدالة $P(t) = t^3 + 9t^2 + 26t + 24$ ، وشدة التيار بالمعادلة $C = t + 4$، فاكتب عبارةً تمثل فرق الجهد V.

بسّط كلَّ عبارة فيما يأتي:

29) $(x^4 - y^4) \div (x - y)$

30) $(28c^3d^2 - 21cd^2) \div (14cd)$

31) $(a^3b^2 - a^2b + 2b)(-ab)^{-1}$

32) $\frac{n^3 + 3n^2 - 5n - 4}{n + 4}$

33) $\frac{p^3 + 2p^2 - 7p - 21}{p + 3}$

34) $\frac{3z^5 + 5z^4 + z + 5}{z + 2}$

35) أعمال: يمكن تقدير عدد النسخ المبيعة من مجلة باستعمال المعادلة $n = \frac{3500a^2}{a^2 + 100}$ ؛ حيث a المبلغ الذي تنفقه المجلة على الإعلان بمئات الريالات، و n عدد النسخ المبيعة من المجلة.

a) أجرِ عملية القسمة المعبر عنها بالمقدار: $\frac{3500a^2}{a^2 + 100}$

b) كم نسخة بيعت من المجلة إذا أُنفق على الدعاية والإعلان 6000 ريال؟

36) تمثيلات متعددة: افترض أن مساحة مستطيل هي $2x^2 + 7x + 3$، وطوله $2x + 1$.

a) حسيًّا: مثّل الموقف باستعمال البطاقات الجبرية، ثم استعملها لإيجاد عرض المستطيل.

b) رمزيًّا: اكتب عبارةً جبريّةً تمثّل إيجاد عرض المستطيل .

c) جبريًّا: حل المسألة جبريًّا باستعمال القسمة التركيبية أو القسمة الطويلة، وهل يتفق الحل باستعمال البطاقات الجبرية مع الحل الجبري؟

الربط مع الحياة

فن الإعلان جزء من النشاط الترويجي المتعدد العناصر، ولكنه يتفوق من حيث إمكانية تحقيقه اتصالًا على نطاق واسع جدًا في وقت محدود. ومع التطور التقني تطوّر تصميم وإخراج الدعاية والإعلانات. ومن أنواع الإعلانات: الإعلان المطبوع، الإعلان المباشر، الإعلان الخارجي، الإعلان المسموع/المرئي، الإعلان التفاعلي.

مسائل مهارات التفكير العليا

37) اكتشف الخطأ: قسَّم كلٌّ من خليفة وجمال $2x^3 - 4x^2 + 3x - 1$ على $x - 3$، فقال خليفة: إن الباقي 26، وقال جمال: إن الباقي -100. فأيُّهما إجابته صحيحة؟ فسّر إجابتك.

38) تحدٍّ: إذا قُسمت كثيرة حدود على ثنائية حد وكان الباقي 0، فما الذي تستنتجه عن العلاقة بينهما؟

39) تبرير: راجع أحد أسئلة القسمة في هذا الدرس، وبيّن العلاقة بين درجة كل من: المقسوم، والمقسوم عليه، وناتج القسمة.

40) مسألة مفتوحة: اكتب عبارة تتضمن قسمة كثيرتي حدود، بحيث يكون الباقي 3 .

41) حدد العبارة المختلفة عن العبارات الثلاث الأخرى، وفسّر إجابتك.

$5b + 11c - 9ad^2$	$x + 5$	$\frac{5}{x^2}$	$3xy + 6x^2$

42) اكتب: استعن بالمعلومات المعطاة في فقرة "لماذا؟" في بداية هذا الدرس، واكتب تعليمات متسلسلة لعمل غلاف لكتاب الرياضيات باستعمال قسمة كثيرات الحدود.

تدريب على اختبار

43) أيٌّ مما يأتي يكافئ العبارة: $(-4x^2 + 2x + 3) - 3(2x^2 - 5x + 1)$؟

A $2x^2$ **B** $-10x^2$ **C** $-10x^2 + 17x$ **D** $2x^2 + 17x$

44) أيُّ كثيرات الحدود الآتية درجتها 3؟

A $x^3 + x^2 - 2x^4$ **B** $-2x^2 - 3x + 4$ **C** $x^2 + x + 12^3$ **D** $1 + x + x^3$

مراجعة تراكمية

بسّط كلَّ عبارة فيما يأتي : (الدرس 3-3)

45) $4a(2a - 3) + 3a(5a - 4)$ **46)** $(xy)^2(2xy^2z)^3$ **47)** $(3ab^2)^{-2}(2a^2b)^2$

إذا كان $f(x) = 4x + 3, h(x) = -2x^2 - 2x + 4$ ، فأوجد قيمة كل مما يأتي: (الدرس 2-1)

48) $f(-6)$ **49)** $h(3)$ **50)** $f(c)$ **51)** $h(2b + 1)$

اختبار منتصف الفصل

الدروس 1-3 إلى 4-3

بسط كلًّا مما يأتي:

1) $\sqrt{-81}$

2) $(15-3i)-(4-12i)$

3) i^{37}

4) $\frac{3-i}{2+5i}$

حل كلًّا من المعادلتين الآتيتين:

5) $x^2-8x-9=0$

6) $-4.8x^2+1.6x+24=0$

بسط كلًّا مما يأتي مفترضًا أن أيًّا من المتغيرات لا يساوي صفرًا:

7) $(3x^2y^{-3})(-2x^3y^5)$

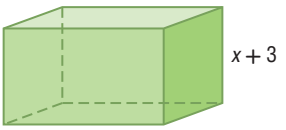
8) $4t(3rt-r)$

9) $\frac{3a^4b^3c}{6a^2b^5c^3}$

10) $\left(\frac{p^2r^3}{pr^4}\right)^2$

11) $(4m^2-6m+5)-(6m^2+3m-1)$

12) **اختيار من متعدد:** إذا علمت أن حجم متوازي المستطيلات في الشكل أدناه هو $6x^3+19x^2+2x-3$، فأيُّ كثيرة حدود فيما يأتي تمثل مساحة قاعدته؟



A $6x^4+37x^3+59x^2+3x-9$

B $6x^2+x+1$

C $6x^2+x-1$

D $6x+1$

استعمل القسمة الطويلة (خوارزمية القسمة)؛ لإيجاد الناتج في كلٍّ ممَّا يأتي:

13) $(4r^3-8r^2-13r+20)\div(2r-5)$

14) $\frac{3x^3-16x^2+9x-24}{x-5}$

استعمل القسمة التركيبية؛ لإيجاد الناتج في كلٍّ ممَّا يأتي:

15) $(4x^3-6x^2+6x-3)\div(2x-1)$

16) $(x^4+3x^3-2x^2-4x+10)\div(x+3)$

17) استعمل القسمة الطويلة لإيجاد ناتج:
$(x^2+2x-24)\div(x-4)$

رابط الدرس الرقمي

www.ien.edu.sa

3-5

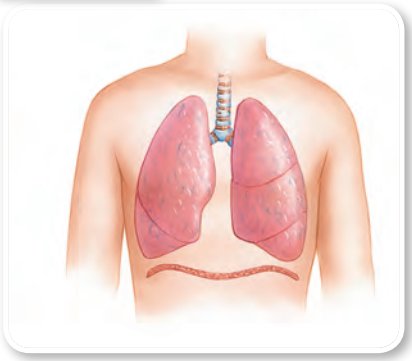
دوال كثيرات الحدود
Polynomial Functions

فيما سبق:
درست تحليل التمثيل البياني للدوال التربيعية. (مهارة سابقة)

والآن:
- أجد قيم دوال كثيرات الحدود.
- أتعرف الأشكال العامة للتمثيل البياني لدوال كثيرات الحدود، وأحدد عدد أصفارها الحقيقية.

المفردات:
كثيرة حدود بمتغير واحد
polynomial in one variable
المعامل الرئيس
leading coefficient
دالة كثيرة الحدود
polynomial function
دالة القوة
power function
سلوك طرفي التمثيل البياني
end behavior
صفر الدالة
zero of a function

لماذا؟



يمكن تمثيل حجم الهواء في رئتي الإنسان خلال دورة تنفس مدتها t ثانية بالدالة: $v(t) = -0.037t^3 + 0.152t^2 + 0.173t$، حيث v الحجم باللترات، t الزمن بالثواني. وهذه الدالة مثال على دالة كثيرة حدود.

دوال كثيرات الحدود: **كثيرة الحدود بمتغير واحد** هي عبارة جبرية على الصورة: $a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_2x^2 + a_1x + a_0$ ، حيث $a_n, a_{n-1}, \ldots, a_2, a_1, a_0$ أعداد حقيقية ، $a_n \neq 0$ ، n عدد صحيح غير سالب. وتكون كثيرة الحدود مكتوبة بالصيغة القياسية إذا كانت أسس المتغير في حدودها مرتبة ترتيبًا تنازليًّا، ودرجة كثيرة الحدود هي أسّ المتغير ذي أكبر أسّ فيها، ويُسمى معامل الحد الأول في كثيرة الحدود المكتوبة بالصيغة القياسية **المعامل الرئيس**.

كثيرة الحدود	مثال	الدرجة	المعامل الرئيس
الثابتة	12	0	12
الخطية	$4x - 9$	1	4
التربيعية	$5x^2 - 6x - 9$	2	5
التكعيبية	$8x^3 + 12x^2 - 3x + 1$	3	8
الصيغة العامة	$a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1x + a_0$	n	a_n

مثال 1 درجة كثيرة الحدود ومعاملها الرئيس

حدد الدرجة والمعامل الرئيس لكل كثيرة حدود بمتغير واحد فيما يأتي، وإذا لم تكن كثيرة حدود بمتغير واحد، فاذكر السبب:

a) $8x^5 - 4x^3 + 2x^2 - x - 3$

هذه كثيرة حدود بمتغير واحد، وأكبر أس للمتغير فيها 5، لذا درجتها **5** ، والمعامل الرئيس 8.

b) $12x^2 - 3xy + 8x$

هذه ليست كثيرة حدود بمتغير واحد؛ فهناك متغيران هما x, y .

c) $3x^4 + 6x^3 - 4x^8 + 2x$

هذه كثيرة حدود بمتغير واحد، وأكبر أس للمتغير فيها 8، لذا درجتها 8، والمعامل الرئيس -4.

تحقق من فهمك

1A) $5x^3 - 4x^2 - 8x + \frac{4}{x}$ **1B)** $5x^6 - 3x^4 + 12x^3 - 14$ **1C)** $8x^4 - 2x^3 - x^6 + 3$

دالة كثيرة الحدود هي دالة متصلة يمكن وصفها بمعادلة كثيرة حدود بمتغير واحد ، فمثلا $f(x) = 3x^3 - 4x + 6$ دالة كثيرة حدود تكعيبية. وتكتب أبسط دوال كثيرات الحدود على الصورة $f(x) = ax^b$ ، حيث a عدد حقيقي، b عدد صحيح غير سالب، وتُسمى عندئذٍ **دوال القوة**.

إذا علمت عنصرًا في مجال دالة كثيرة حدود، تستطيع معرفة القيمة المقابلة له في المدى.

الربط مع الحياة

تصل سعة الرئة لدى الشخص البالغ السليم إلى 6 لترات تقريبًا.

مثال 2 من واقع الحياة

إيجاد قيمة دالة كثيرة حدود

التنفس: ارجع إلى الفقرة في بداية الدرس، وأوجد حجم الهواء في الرئتين خلال دورة تنفس مدتها ثانيتان.

بتعويض العدد 2 في الدالة نجد $v(2)$، وهو حجم الهواء في الرئتين خلال دورة تنفس مدتها ثانيتين.

$v(t) = -0.037t^3 + 0.152t^2 + 0.173t$	الدالة الأصلية
$v(2) = -0.037(2)^3 + 0.152(2)^2 + 0.173(2)$	عوّض 2 بدلًا من t
$= -0.296 + 0.608 + 0.346$	بسّط
$= 0.658$ L	اجمع

تحقق من فهمك

2) تنفس: أوجد حجم الهواء في الرئتين خلال دورة تنفس مدتها 4 ثوانٍ.

يمكنك إيجاد قيم الدوال عند متغيرات وعبارات جبرية.

مثال 3

قيمة دالة كثيرة الحدود عند متغير

إذا كانت $f(x) = x^2 + 2x - 3$، فأوجد: $f(3c - 4) - 5f(c)$.

لإيجاد قيمة $f(3c - 4)$، عوض $3c - 4$ بدلًا من x في الدالة $f(x)$

$f(x) = x^2 + 2x - 3$	الدالة الأصلية
$f(3c - 4) = (3c - 4)^2 + 2(3c - 4) - 3$	عوّض $3c - 4$ بدلًا من x
$= 9c^2 - 24c + 16 + 6c - 8 - 3$	اضرب
$= 9c^2 - 18c + 5$	بسّط

لإيجاد قيمة $5f(c)$، عوض c بدلًا من x في الدالة $f(x)$، واضرب الناتج في العدد 5.

$f(x) = x^2 + 2x - 3$	الدالة الأصلية
$5f(c) = 5(c^2 + 2c - 3)$	عوّض c بدلًا من x
$= 5c^2 + 10c - 15$	خاصية التوزيع

والآن أوجد قيمة $f(3c - 4) - 5f(c)$.

$$f(3c - 4) - 5f(c) = (9c^2 - 18c + 5) - (5c^2 + 10c - 15)$$

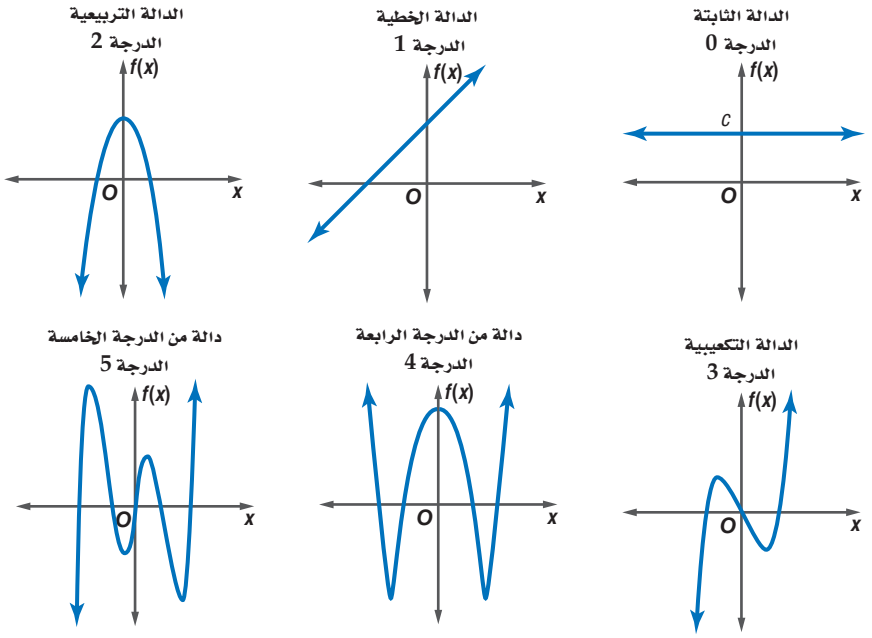
$= 9c^2 - 18c + 5 - 5c^2 - 10c + 15$	خاصية التوزيع
$= 4c^2 - 28c + 20$	بسّط

تحقق من فهمك

3A) إذا كانت $g(x) = x^2 - 5x + 8$، فأوجد $g(5a - 2) + 3g(2a)$.

3B) إذا كانت $h(x) = 2x^2 + 5x + 3$، فأوجد $h(-4d + 3) - 0.5h(d)$.

التمثيل البياني لدوال كثيرات الحدود: إن التمثيل البياني لدالة كثيرة حدود يظهر عدد المرات التي قد يقطع فيها هذا التمثيل المحور x ، وهذا العدد يمثل درجة كثيرة الحدود.



مجال دالة كثيرة الحدود هو مجموعة الأعداد الحقيقية ويُحدد **سلوك طرفي التمثيل البياني** للدالة $f(x)$ عندما تقترب x من المالانهاية $(x \to +\infty)$، أو سالب المالانهاية $(x \to -\infty)$ بكل من: درجة دالة كثيرة الحدود والمعامل الرئيس لها.

قراءة الرياضيات

الرمزان $+\infty$, $-\infty$

نعبر عن التزايد غير المحدود لقيم المتغير x، باستعمال الرمز $+\infty$ ويُقرأ ما لا نهاية ويُكتب $x \to +\infty$،

كما نعبر عن التناقص غير المحدود لقيم المتغير x، باستعمال الرمز $-\infty$ ويُقرأ سالب ما لا نهاية ويُكتب $x \to -\infty$.

إرشادات للدراسة

سلوك طرفَي التمثيل البياني

المعامل الرئيس ودرجة كثيرة الحدود هما العاملان الوحيدان في تحديد سلوك طرفي التمثيل البياني.

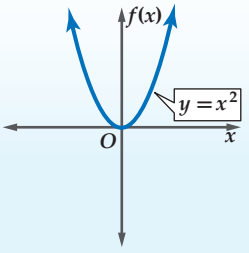
مفهوم أساسي

سلوك طرفي التمثيل البياني لدالة كثيرة الحدود

أضف إلى مطويتك

الدرجة: زوجية

المعامل الرئيس: موجب



المجال: مجموعة الأعداد الحقيقية

المدى: مجموعة الأعداد الحقيقية الأكبر من أو التي تساوي القيمة الصغرى .

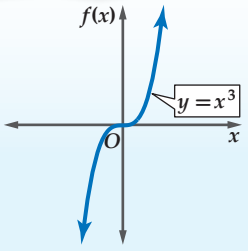
سلوك طرفي التمثيل البياني: (في الاتجاه نفسه)

$x \to -\infty$ عندما $f(x) \to +\infty$

$x \to +\infty$ عندما $f(x) \to +\infty$

الدرجة: فردية

المعامل الرئيس: موجب



المجال: مجموعة الأعداد الحقيقية

المدى: مجموعة الأعداد الحقيقية

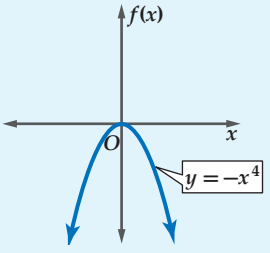
سلوك طرفي التمثيل البياني: (في اتجاهين مختلفين)

$x \to -\infty$ عندما $f(x) \to -\infty$

$x \to +\infty$ عندما $f(x) \to +\infty$

الدرجة: زوجية

المعامل الرئيس: سالب



المجال: مجموعة الأعداد الحقيقية

المدى: مجموعة الأعداد الحقيقية الأقل من أو التي تساوي القيمة العظمى

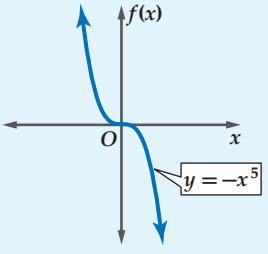
سلوك طرفي التمثيل البياني: (في الاتجاه نفسه)

$x \to -\infty$ عندما $f(x) \to -\infty$

$x \to +\infty$ عندما $f(x) \to -\infty$

الدرجة: فردية

المعامل الرئيس: سالب



المجال: مجموعة الأعداد الحقيقية

المدى: مجموعة الأعداد الحقيقية

سلوك طرفي التمثيل البياني: (في اتجاهين مختلفين)

$x \to -\infty$ عندما $f(x) \to +\infty$

$x \to +\infty$ عندما $f(x) \to -\infty$

صفر الدالة هو الإحداثي x لنقطة تقاطع التمثيل البياني للدالة مع المحور x، لذا فإنه يمكن تحديد عدد الأصفار المنتمية لمجموعة الأعداد الحقيقية لمعادلة كثيرة الحدود من التمثيل البياني لدالة كثيرة الحدود المرتبطة بها. تذكّر أن مقاطع x تحدد هذه الأصفار؛ ولذا فإن عدد مرات تقاطع التمثيل البياني مع محور x يساوي عدد هذه الأصفار.

إرشادات للدراسة

الصفر المكرر

عندما يمس التمثيل البياني المحور x، يكون للدالة صفران متساويان (صفر مكرر).

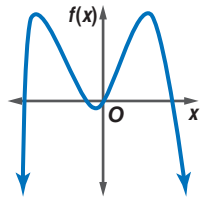
مفهوم أساسي

أضف إلى مطويتك

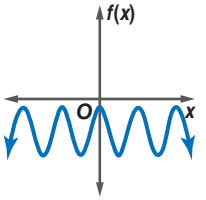
أصفار الدوال الفردية الدرجة والزوجية الدرجة

يكون للدوال الفردية الدرجة عدد فردي من الأصفار المنتمية لمجموعة الأعداد الحقيقية، ويكون للدوال الزوجية الدرجة عدد زوجي من الأصفار أو لا يكون لها أصفار تنتمي إلى مجموعة الأعداد الحقيقية.

كثيرتا حدود زوجيتا الدرجة

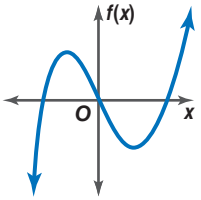


لها 4 أصفار حقيقية

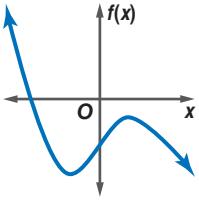


ليس لها أصفار حقيقية

كثيرتا حدود فرديتا الدرجة



لها 3 أصفار حقيقية



لها صفر واحد حقيقي

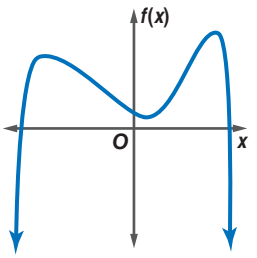
مثال 4

وصف دالة كثيرة الحدود من تمثيلها البياني

أجب عن الأسئلة الآتية لكل من التمثيلين البيانيين أدناه :

- صف سلوك طرفي التمثيل البياني .
- حدد ما إذا كانت درجة دالة كثيرة الحدود فردية أم زوجية.
- اذكر عدد الأصفار الحقيقية للدالة.

(a)

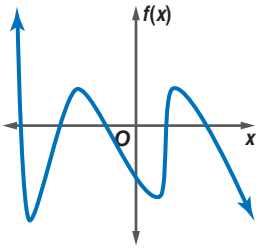


$x \to -\infty$ عندما $f(x) \to -\infty$

$x \to +\infty$ عندما $f(x) \to -\infty$

بما أن سلوك طرفي التمثيل البياني في الاتجاه نفسه، فالدالة زوجية الدرجة، وبما أن التمثيل البياني للدالة يقطع المحور x في نقطتين؛ لذا فللدالة صفران حقيقيان.

(b)



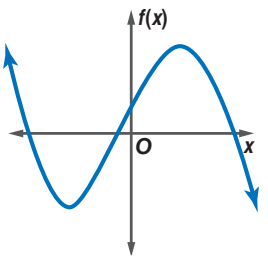
$x \to -\infty$ عندما $f(x) \to +\infty$

$x \to +\infty$ عندما $f(x) \to -\infty$

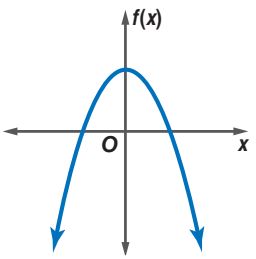
بما أن سلوك طرفي التمثيل البياني في اتجاهين مختلفين، فالدالة فردية الدرجة، وبما أن التمثيل البياني للدالة يقطع المحور x في 5 نقاط؛ لذا فللدالة 5 أصفار حقيقية.

تحقق من فهمك

(4A)



(4B)



تأكد

مثال 1 حدد الدرجة والمعامل الرئيس لكلِّ كثيرة حدود بمتغير واحد فيما يأتي، وإذا لم تكن كثيرة حدود بمتغير واحد فاذكر السبب:

1) $11x^6 - 5x^5 + 4x^2$

2) $-10x^7 - 5x^3 + 4x - 22$

3) $14x^4 - 9x^3 + 3x - 4y$

4) $8x^5 - 3x^2 + 4xy - 5$

مثال 2 أوجد $w(-4), w(5)$ لكلٍّ من الدالتين الآتيتين:

5) $w(x) = -2x^3 + 3x - 12$

6) $w(x) = 2x^4 - 5x^3 + 3x^2 - 2x + 8$

مثال 3 إذا كانت $c(x) = 4x^3 - 5x^2 + 2,\ d(x) = 3x^2 + 6x - 10$، فأوجد كلًّا مما يأتي:

7) $c(y^3)$

8) $-4[d(3z)]$

9) $6c(4a) + 2d(3a - 5)$

10) $-3c(2b) + 6d(4b - 3)$

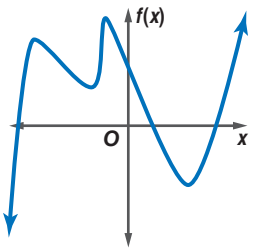
مثال 4 أجب عن الفروع a – c لكل من التمثيلين البيانيين أدناه :

a) صف سلوك طرفي التمثيل البياني.

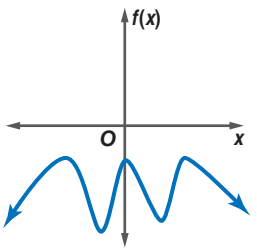
b) حدد ما إذا كانت درجة دالة كثيرة الحدود فردية أم زوجية.

c) اذكر عدد الأصفار الحقيقية للدالة.

11)



12)



تمارين ومسائل

مثال 1 حدد الدرجة والمعامل الرئيس لكلِّ كثيرة حدود بمتغير واحد فيما يأتي، وإذا لم تكن كثيرة حدود بمتغير واحد فاذكر السبب:

13) $-6x^6 - 4x^5 + 13xy$

14) $3a^7 - 4a^4 + \frac{3}{a}$

15) $8x^5 - 12x^6 + 14x^3 - 9$

16) $-12 - 8x^2 + 5x - 21x^7$

17) $13b^3 - 9b + 3b^5 - 18$

18) $(5 - 2y)(4 + 3y)$

19) $6x^5 - 5x^4 + 2x^9 - 3x^2$

20) $7x^4 + 3x^7 - 2x^8 + 7$

مثال 2 أوجد $p(3)$, $p(-6)$ لكلِّ دالة ممَّا يأتي:

21) $p(x) = x^4 - 2x^2 + 3$

22) $p(x) = x^4 - 4x^3 + 3x^2 - 5x + 24$

23) $p(x) = -x^3 + 3x^2 - 5$

24) $p(x) = 2x^4 + x^3 - 4x^2$

مثال 3 إذا كانت $c(x) = 2x^2 - 4x + 3\ ,\ d(x) = -x^3 + x + 1$، فأوجد كلًّا مما يأتي:

25) $c(3a)$

26) $5d(2a)$

27) $c(b^2)$

28) $d(4a^2)$

29) $d(4y - 3)$

30) $c(y^2 - 1)$

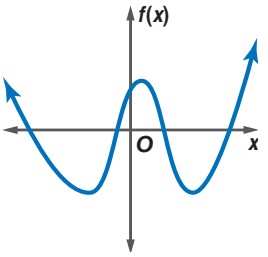
مثال 4 أجب عن الفروع من a–c لكل التمثيلات البيانية الآتية:

a) صف سلوك طرفي التمثيل البياني.

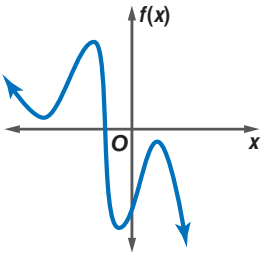
b) حدد ما إذا كانت درجة دالة كثيرة الحدود فردية أم زوجية.

c) اذكر عدد الأصفار الحقيقية للدالة.

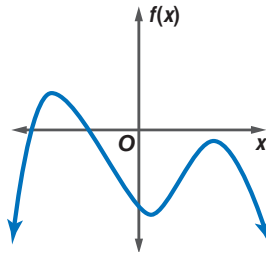
(31



(32



(33



(34 فيزياء: تعطى الطاقة الحركية KE بالجول لجسم متحرك كتلته m kg بالدالة $KE(v) = 0.5mv^2$، حيث تمثل v سرعة الجسم بالأمتار لكل ثانية. أوجد الطاقة الحركية لعربة كتلتها 171 kg تسير بسرعة $11 m/s$.

أوجد $f(8), f(-2)$ لكلِّ دالة ممَّا يأتي:

(35 $f(x) = \frac{1}{4}x^4 + \frac{1}{2}x^3 - 4x^2$

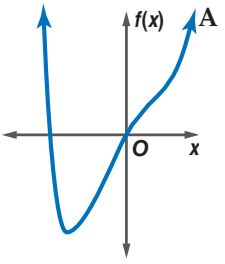
(36 $f(x) = \frac{1}{8}x^4 - \frac{3}{2}x^3 + 12x - 18$

(37 $f(x) = \frac{3}{4}x^4 - \frac{1}{8}x^2 + 6x$

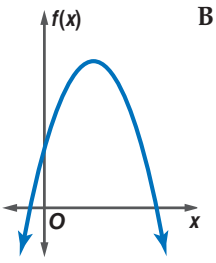
(38 $f(x) = \frac{5}{8}x^3 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{3}{4}x + 10$

حدّد التمثيل البياني المناسب لكل دالة في الأسئلة (39–42) مستعملًا درجة كثيرة الحدود وسلوك طرفي التمثيل البياني لها.

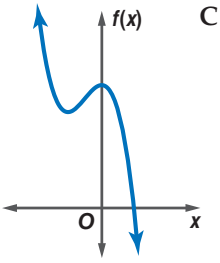
A



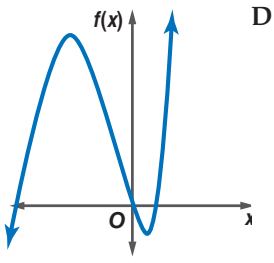
B



C



D



(39 $f(x) = x^3 + 3x^2 - 4x$

(40 $f(x) = -2x^2 + 8x + 5$

(41 $f(x) = x^4 - 3x^2 + 6x$

(42 $f(x) = -4x^3 - 4x^2 + 8$

إذا كانت $d(x) = 4x^2 - 6x + 8$, $c(x) = x^3 - 2x$، فأوجد كلًّا مما يأتي:

(43 $3c(a-4) + 3d(a+5)$

(44 $-2d(2a+3) - 4c(a^2+1)$

(45 $5c(a^2) - 8d(6-3a)$

(46 $-7d(a^3) + 6c(a^4+1)$

(47 ملابس: تُمثل أرباح مصنع للملابس بدالة كثيرة الحدود $w(x) = -x^4 + 40x^2 - 144$، حيث x عدد قطع الملابس المبيعة بالألوف، و$w(x)$ ربح المصنع بألوف الريالات.

a) أنشئ جدولًا لتمثيل الدالة بيانيًّا، ثم مثِّلها (استعمل قيم x التالية: $-7, -6, -4, -3, -2, 0, 1, 2, 4, 6, 7$).

b) أوجد أصفار الدالة.

c) بين أي قيمتين يجب أن يبيع المصنع من قطع الملابس ليحقق ربحًا.

d) وضّح لماذا أُخذ صفران فقط بعين الاعتبار في الفرع c.

الربط مع الحياة

فن صناعة تصميم الملابس يعتمد على العلم والجمال، ويقوم على عدة عناصر تتكامل من حيث الخط والشكل واللون والنسيج، وتتناسق من حيث التصميم والابتكار ليحصل الفرد في النهاية على زي يُشعره بالتناسق، ويراعى مراحل ترتيب قياسية في مراحل إنتاج الملابس الجاهزة. وتنتج الملابس من الألياف الصناعية بجانب الألياف الطبيعية والمخلوطة ذات الطبيعة الخاصة.

48) تمثيلات متعددة: افترض أن $g(x) = (x-2)(x+1)(x-3)(x+4)$.

a) تحليليًّا: حدد المقطع x والمقطع y والجذور، ودرجة الدالة $g(x)$، وصف سلوك طرفي تمثيلها البياني.

b) جبريًّا: اكتب الدالة بالصيغة القياسية.

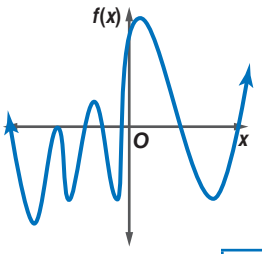
c) جدوليًّا: أنشئ جدولًا لتمثيل الدالة بيانيًّا، ثم مثِّلها.

d) بيانيًّا: مثِّل الدالة بيانيًّا بتعيين نقاط، والتوصيل بينها بمنحنى.

صف سلوك طرفي التمثيل البياني لكل دالة فيما يأتي:

49) $f(x) = -5x^4 + 3x^2$ **50)** $g(x) = 2x^5 + 6x^4$ **51)** $h(x) = -4x^7 + 8x^6 - 4x$

مسائل مهارات التفكير العليا



52) اكتشف الخطأ: حدّد كل من ماجد وبدر عدد أصفار التمثيل البياني المجاور. فأيُّهما إجابته صحيحة؟ فسّر إجابتك.

ماجد

يوجد 8 أصفار؛ لأن التمثيل البياني يقطع المحور x 7 مرات، وأحد الجذور مكرر مرتين.

بدر

يوجد 7 أصفار؛ لأن التمثيل البياني يقطع المحور x سبع مرات.

53) تحدٍّ: إذا كانت $g(x)$ من عوامل $f(x)$، وكانت درجة $f(x)$ تساوي 5، ومعاملها الرئيس موجبًا، وكانت درجة $g(x)$ تساوي 3 ومعاملها الرئيس موجبًا، فصف سلوك طرفي التمثيل البياني للدالة $\frac{f(x)}{g(x)}$، وفسّر إجابتك.

54) مسألة مفتوحة: مثّل بيانيًّا كثيرة حدود زوجية الدرجة عدد جذورها 8، وأحدها مكرر مرتين.

55) اكتب: صف المقصود بسلوك طرفي التمثيل البياني لدالة كثيرة حدود، وكيف يتم تحديده؟

تدريب على اختبار

56) ما باقي قسمة: $x^3 - 7x + 5$ على $x + 3$ ؟

A -11 **B** 1 **C** -1 **D** 11

57) إذا كان $i = \sqrt{-1}$ ، فإن $5i(7i)$ يساوي :

A 70 **B** 35 **C** -35 **D** -70

مراجعة تراكمية

بسّط كل عبارة مما يأتي : (الدرس 4-3)

58) $\frac{16x^4y^3 + 32x^6y^5z^2}{8x^2y}$ **59)** $\frac{18ab^4c^5 - 30a^4b^3c^2 + 12a^5bc^3}{6abc^2}$ **60)** $\frac{18c^5d^2 - 3c^2d^2 + 12a^5c^3d^4}{3c^2d^2}$

حدد ما إذا كانت كل عبارة مما يأتي كثيرة حدود أم لا، وإن كانت كذلك فاذكر درجتها : (الدرس 3-3)

61) $8x^2 + 5x^4 - 6x + 4$ **62)** $9x^4 + 12x^6 - 16$ **63)** $3x^4 + 2x^2 - x^{-1}$

حل كلًّا من المعادلات الآتية مستعملًا القانون العام لحل المعادلة التربيعية: (الدرس 3-2)

64) $x^2 - x - 3 = 0$ **65)** $x + x^2 + 1 = 0$ **66)** $x^2 - 13x + 12 = 0$

رابط الدرس الرقمي

www.ien.edu.sa

3-6

حل معادلات كثيرات الحدود
Solving Polynomial Equations

فيما سبق:
درستُ حل معادلات تربيعية بالتحليل إلى العوامل. (الدرس 2 - 3)

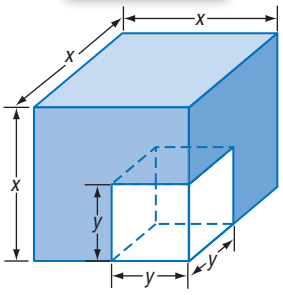
والآن:
- أحلّل كثيرات الحدود.
- أحلّ معادلات كثيرات الحدود بالتحليل إلى العوامل.

المفردات

كثيرة حدود أولية
prime polynomial

الصورة التربيعية
quadratic form

لماذا؟



قُطع مكعب صغير من آخر كبير كما في الشكل المجاور، وأُعطي حجم الجزء المتبقي والعلاقة بين بعدي المكعبين، والمطلوب إيجاد أبعاد المكعبين الصغير والكبير. لاحظ أنه يمكن إيجادها بتحليل كثيرة الحدود التكعيبية $x^3 - y^3$.

تحليل كثيرات الحدود: تعلمت سابقًا أنه يمكنك تحليل كثيرات الحدود التربيعية تمامًا كما تحلل الأعداد الكلية، ولكن عواملها ستكون كثيرات حدود أخرى، وكما هو الحال في كثيرات الحدود التربيعية يمكنك تحليل بعض كثيرات الحدود التكعيبية بقوانين خاصة.

مفهوم أساسي مجموع مكعبين والفرق بينهما

أضف إلى مطويتك

طريقة التحليل	الحالة العامة
مجموع مكعبين	$a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 - ab + b^2)$
الفرق بين مكعبين	$a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2)$

تُسمى كثيرة الحدود التي لا يمكن تحليلها إلى كثيرتي حدود درجة كل منهما أقل من درجة كثيرة الحدود المُعطاة **كثيرة حدود أولية**.

إرشادات للدراسة

التحليل التام لكثيرات الحدود
يعد تحليل كثيرة الحدود تحليلًا تامًا إذا كتبت في صورة ناتج ضرب كثيرات حدود جميعها أولية، أي إذا حللت إلى أقصى درجة ممكنة.

مثال 1 مجموع مكعبين والفرق بينهما

حلّل كلًّا من كثيرتي الحدود الآتيتين تحليلًا تامًّا، وإذا لم يكن ذلك ممكنًا، فاكتب كثيرة حدود أولية :

a $16x^4 + 54xy^3$

$16x^4 + 54xy^3 = 2x(8x^3 + 27y^3)$ — أخرج العامل المشترك الأكبر

كل من $8x^3$ و $27y^3$ مكعب كامل، لذا تستطيع استعمال طريقة مجموع مكعبين.

$8x^3 + 27y^3 = (2x)^3 + (3y)^3$ — $8x^3 = (2x)^3$; $27y^3 = (3y)^3$

$= (2x + 3y)[(2x)^2 - (2x)(3y) + (3y)^2]$ — مجموع مكعبين

$= (2x + 3y)(4x^2 - 6xy + 9y^2)$ — بسّط

$16x^4 + 54xy^3 = 2x(2x + 3y)(4x^2 - 6xy + 9y^2)$ — اكتب العامل المشترك الأكبر

b $8y^3 + 5x^2$

الحد الأول مكعب كامل، لكن الحد الثاني ليس كذلك، لذا لا يمكن تحليل كثيرة الحدود باستعمال طريقة مجموع مكعبين، ولا يمكن تحليلها كذلك بطرائق تحليل كثيرات الحدود التربيعية، أو بإخراج العامل المشترك الأكبر؛ لذا فهي كثيرة حدود أولية.

تحقق من فهمك

1A $5y^4 - 320yz^3$

1B $-54w^4 - 250wz^3$

يلخص الجدول الآتي معظم الطرائق المستعملة لتحليل كثيرات الحدود، وعندما تريد تحليل كثيرة حدود ابحث أولًا عن العامل المشترك الأكبر، ثم حدد ما إذا كانت كثيرة الحدود الناتجة بعد إخراج العامل المشترك الأكبر قابلة للتحليل أم لا مستعملًا واحدة أو أكثر من الطرائق المذكورة في الجدول أدناه:

ملخص المفهوم

أضف إلى مطويتك

طرائق التحليل

عدد الحدود	طريقة التحليل	نموذج
أي عدد	إخراج العامل المشترك الأكبر	$4a^3b^2 - 8ab = 4ab(a^2b - 2)$
حدّان	الفرق بين مربعين	$a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)$
	مجموع مكعبين	$a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 - ab + b^2)$
	الفرق بين مكعبين	$a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2)$
ثلاثة حدود	ثلاثية حدود المربع الكامل	$a^2 + 2ab + b^2 = (a + b)^2$ $a^2 - 2ab + b^2 = (a - b)^2$
	ثلاثية الحدود بالصورة العامة	$acx^2 + (ad + bc)x + bd = (ax + b)(cx + d)$
أربعة حدود أو أكثر	تجميع الحدود	$ax + bx + ay + by = x(a + b) + y(a + b)$ $= (a + b)(x + y)$

مثال 2

التحليل بتجميع الحدود

حلّل كلًّا من كثيرتي الحدود الآتيتين تحليلًا تامًّا، وإذا لم يكن ذلك ممكنًا، فاكتب كثيرة حدود أولية:

a $8ax + 4bx + 4cx + 6ay + 3by + 3cy$

العبارة الأصلية	$8ax + 4bx + 4cx + 6ay + 3by + 3cy$
جمّع لإخراج العامل المشترك الأكبر	$= (8ax + 4bx + 4cx) + (6ay + 3by + 3cy)$
أخرج العامل المشترك الأكبر لكل تجميع	$= 4x(2a + b + c) + 3y(2a + b + c)$
خاصية التوزيع	$= (4x + 3y)(2a + b + c)$

b $20fy - 16fz + 15gy + 8hz - 10hy - 12gz$

العبارة الأصلية	$20fy - 16fz + 15gy + 8hz - 10hy - 12gz$
جمّع لإخراج العامل المشترك الأكبر	$= (20fy + 15gy - 10hy) + (-16fz - 12gz + 8hz)$
أخرج العامل المشترك الأكبر لكل تجميع	$= 5y(4f + 3g - 2h) - 4z(4f + 3g - 2h)$
خاصية التوزيع	$= (5y - 4z)(4f + 3g - 2h)$

تحقق من فهمك

2A $30ax - 24bx + 6cx - 5ay^2 + 4by^2 - cy^2$

2B $13ax + 18bz - 15by - 14az$

إرشادات للدراسة

التحقق من الإجابة: للتحقق من صحة إجابتك، اضرب العوامل لتتحقق من صحة تحليل كثيرة الحدود.

تُعد طريقة التحليل بتجميع الحدود هي الطريقة الأساسية لتحليل كثيرات الحدود المكونة من أربعة حدود أو أكثر، أما كثيرات الحدود المتضمنة حدين أو ثلاثة حدود فيمكنك تحليلها اعتمادًا على إحدى الطرائق الموجودة في الجدول أعلاه .

مثال 3 التحليل باستعمال الفرق بين مربعين، ومجموع مكعبين، والفرق بين مكعبين

حلّل كلًّا من كثيرتي الحدود الآتيتين، وإذا لم يكن ذلك ممكنًا فاكتب كثيرة حدود أولية:

a) $x^6 - y^6$

يمكن اعتبار كثيرة الحدود هذه فرقًا بين مربعين أو فرقًا بين مكعبين، وفي مثل هذه الحالة يجب أن يتم التحليل أولًا على اعتبار أنها فرق بين مربعين قبل التحليل على اعتبار أنها فرق بين مكعبين؛ تسهيلًا للتحليل.

$x^6 - y^6 = (x^3 + y^3)(x^3 - y^3)$ الفرق بين مربعين

$= (x + y)(x^2 - xy + y^2)(x - y)(x^2 + xy + y^2)$ مجموع مكعبين والفرق بين مكعبين

b) $a^3x^2 - 6a^3x + 9a^3 - b^3x^2 + 6b^3x - 9b^3$

بما أن كثيرة الحدود هذه من 6 حدود ، إذن حلل أولًا بتجميع الحدود.

$a^3x^2 - 6a^3x + 9a^3 - b^3x^2 + 6b^3x - 9b^3$

$= (a^3x^2 - 6a^3x + 9a^3) + (-b^3x^2 + 6b^3x - 9b^3)$ جمّع لإخراج العامل المشترك الأكبر

$= a^3(x^2 - 6x + 9) - b^3(x^2 - 6x + 9)$ أخرج العامل المشترك الأكبر لكل تجميع

$= (a^3 - b^3)(x^2 - 6x + 9)$ خاصية التوزيع

$= (a - b)(a^2 + ab + b^2)(x^2 - 6x + 9)$ الفرق بين مكعبين

$= (a - b)(a^2 + ab + b^2)(x - 3)^2$ ثلاثية حدود المربع الكامل

تحقق من فهمك

3A) $a^6 + b^6$ **3B)** $x^5 + 4x^4 + 4x^3 + x^2y^3 + 4xy^3 + 4y^3$

إرشادات للدراسة

التحليل باستعمال الفرق بين مكعبين:

في مثال 3a، إذا بدأت بالتحليل على اعتبار أن كثيرة الحدود المعطاة فرق بين مكعبين؛ فإنك تحصل على التحليل التالي:

$(x^2-y^2)(x^4-x^2y^2+y^4)$

وهو تحليل غير تام ويصعب إتمامه.

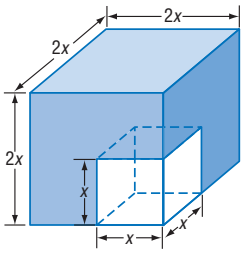
إرشادات للدراسة

تجميع 6 حدود أو أكثر

جمّع الحدود التي بينها أكبر عدد من العوامل المشتركة.

حل معادلات كثيرات الحدود: يمكنك تطبيق طرائق حل المعادلات التربيعية في حل معادلات كثيرات الحدود ذات الدرجات الأعلى من الدرجة الثانية.

مثال 4 من واقع الحياة حل معادلات كثيرات الحدود بالتحليل



هندسة: ارجع إلى فقرة لماذا في بداية هذا الدرس. إذا كان طول حرف المكعب الصغير يساوي نصف طول ضلع المكعب الكبير، وحجم الجزء المتبقي 7000cm^3، فما بُعدا المكعبين؟

بما أن طول حرف المكعب الصغير يساوي نصف طول ضلع المكعب الكبير فيمكن أن يعبَّر عن طول ضلع المكعب الصغير بـ x، وطول ضلع المكعب الكبير بـ $2x$.

لاحظ أن حجم الجزء المتبقي يساوي حجم المكعب الكبير مطروحًا منه حجم المكعب الصغير.

$(2x)^3 - x^3 = 7000$ حجم الجزء المتبقي

$8x^3 - x^3 = 7000$ $8x^3 = (2x)^3$

$7x^3 = 7000$ بالطرح

$x^3 = 1000$ اقسم على 7 للطرفين

$x^3 - 1000 = 0$ اطرح 1000 من كلا الطرفين

$(x - 10)(x^2 + 10x + 100) = 0$ فرق بين مكعبين

$x - 10 = 0$ أو $x^2 + 10x + 100 = 0$ خاصية الضرب الصفري

$x = 10$ $x = -5 \pm 5i\sqrt{3}$

وبما أن العدد 10 هو الحل الحقيقي الوحيد. فإن طولي ضلعي المكعبين هما 10cm, 20cm.

تحقق من فهمك

4) هندسة: إذا كان طول حرف المكعب الصغير ثلث طول ضلع المكعب الكبير، وحجم الجزء المتبقي 3250cm^3، فأوجد بُعدي المكعبين.

تستطيع أحيانًا أن تكتب كثيرة حدود فيها المتغير x على الصورة $au^2 + bu + c$ ، فمثلًا بفرض أن $u = x^2$، يمكنك كتابة كثيرة الحدود $x^4 + 12x^2 + 32$ على الصورة $(x^2)^2 + 12(x^2) + 32$ أو $u^2 + 12u + 32$.
وكثيرة الحدود الجديدة هذه تكافئ كثيرة الحدود الأصلية، ولكنها مكتوبة على **الصورة التربيعية**.

مفهوم أساسي — الصورة التربيعية

أضف إلى مطويتك

التعبير اللفظي: الصورة التربيعية لكثيرة الحدود هي: au^2+bu+c ، $a\neq0$ ، a,b,c أعداد حقيقية، ويمكن أن نكتب بعض كثيرات الحدود في المتغير x على هذه الصورة، وذلك بعد تعريف u بدلالة x.

مثال: $12x^6 + 8x^3 + 1 = 3(2x^3)^2 + 4(2x^3) + 1$

مثال 5 — كتابة عبارات في الصورة التربيعية

اكتب كلًّا من العبارتين الآتيتين في الصورة التربيعية إن أمكن ذلك:

a $150n^8 + 40n^4 - 15$

ابحث عن عاملين للعدد 150 ؛ أحدهما مربع كامل، وعن عاملين للعدد 40؛ أحدهما الجذر التربيعي لأحد عاملي العدد 150.

$150n^8 + 40n^4 - 15 = 6\times25n^8 + 8\times5n^4 - 15$ — $150 = 6\times25,\ 40 = 8\times5$

$= 6(5n^4)^2 + 8(5n^4) - 15$ — $25n^8 = (5n^4)^2$

b $y^8 + 12y^3 + 8$

لا يمكن كتابتها على الصورة التربيعية؛ لأن $y^8 \neq (y^3)^2$.

تحقق من فهمك

5A $x^4 + 5x + 6$ **5B** $8x^4 + 12x^2 + 18$

إرشادات للدراسة

الصورة التربيعية

لكتابة كثيرة حدود على الصورة التربيعية، اختر العبارة المكافئة لـ u بالنظر إلى الحدود التي تحوي متغيرات، واهتم خصوصًا بأسس المتغير الأصلي في تلك الحدود. فهناك كثيرات حدود لا يمكن كتابتها على الصورة التربيعية.

يمكنك في بعض الأحيان استعمال الصورة التربيعية لحل معادلات كثيرات الحدود ذات درجات أكبر من الدرجة الثانية.

مثال 6 — حل معادلات كثيرات الحدود باستعمال الصورة التربيعية

حل المعادلة: $18x^4 - 21x^2 + 3 = 0$.

$18x^4 - 21x^2 + 3 = 0$	المعادلة الأصلية
$2(3x^2)^2 - 7(3x^2) + 3 = 0$	$18x^4 = 2(3x^2)^2$
$2u^2 - 7u + 3 = 0$	افرض أن $u = 3x^2$
$(2u - 1)(u - 3) = 0$	حلّل إلى العوامل
$u = \frac{1}{2}$ أو $u = 3$	خاصية الضرب الصفري
$3x^2 = \frac{1}{2}$ $\quad 3x^2 = 3$	عوّض $3x^2$ بدلًا من u
$x^2 = \frac{1}{6}$ $\quad x^2 = 1$	اقسم على 3
$x = \pm\frac{\sqrt{6}}{6}$ $\quad x = \pm1$	أوجد الجذر التربيعي

حلول المعادلة هي: $1, -1, \frac{\sqrt{6}}{6}, -\frac{\sqrt{6}}{6}$.

تحقق من فهمك

6A $4x^4 - 8x^2 + 3 = 0$ **6B** $8x^4 + 10x^2 - 12 = 0$

تأكد

الأمثلة 1-3 حلّل كلَّ كثيرة حدود مما يأتي تحليلاً تامًّا. وإذا لم يكن ذلك ممكنًا، فاكتب كثيرة حدود أولية :

1) $3ax + 2ay - az + 3bx$

2) $16g^3 + 2h^3$

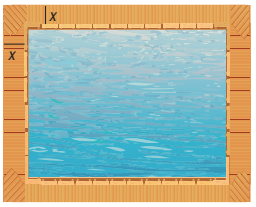
3) $12qw^3 - 12q^4$

4) $a^6x^2 - b^6x^2$

5) $x^3y^2 - 8x^3y + 16x^3 + y^5 - 8y^4 + 16y^3$

6) $8c^3 - 125d^3$

مثال 4 **7) إنشاءات:** صنع أنس ممرًّا خشبيًّا عرضه x ft حول بركة مستطيلة الشكل. فإذا كان طول البركة 40ft وعرضها 30 ft، ومساحتها مع الممر 2000ft^2، فما عرض الممر الخشبي؟



مثال 5 اكتب كلًّا من العبارتين الآتيتين على الصورة التربيعية إن كان ذلك ممكنًا:

8) $4x^6 - 2x^3 + 8$

9) $25y^6 - 5y^2 + 20$

مثال 6 حل كلًّا من المعادلتين الآتيتين:

10) $x^4 - 6x^2 + 8 = 0$

11) $y^4 - 18y^2 + 72 = 0$

تدرب وحل المسائل

الأمثلة 1-3 حلّل كلَّ كثيرة حدود مما يأتي تحليلاً تامًّا. وإذا لم يكن ذلك ممكنًا، فاكتب كثيرة حدود أولية:

12) $8c^3 - 27d^3$

13) $64x^4 + xy^3$

14) $a^8 - a^2b^6$

15) $x^6y^3 + y^9$

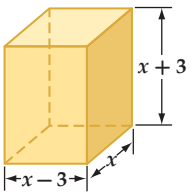
16) $gx^2 - 3hx^2 - 6fy^2 - gy^2 + 6fx^2 + 3hy^2$

17) $18x^6 + 5y^6$

18) $8x^5 - 25y^3 + 80x^4 - x^2y^3 + 200x^3 - 10xy^3$

19) $12ax^2 - 20cy^2 - 18bx^2 - 10ay^2 + 15by^2 + 24cx^2$

مثال 4 **20) هندسة:** إذا كان حجم المجسم المجاور يساوي $55x\text{cm}^3$ حيث $x > 0$، فأوجد كلًّا من قيمة x، وطول قاعدته وعرضها، وارتفاعه.



مثال 5 اكتب كلَّ عبارة مما يأتي على الصورة التربيعية إن كان ذلك ممكنًا:

21) $x^4 + 12x^2 - 8$ **22)** $-15x^4 + 18x^2 - 4$ **23)** $8x^6 + 6x^3 + 7$

24) $5x^6 - 2x^2 + 8$ **25)** $9x^8 - 21x^4 + 12$ **26)** $16x^{10} + 2x^5$

مثال 6 حُلَّ كلَّ معادلة مما يأتي:

27) $x^4 + 6x^2 + 5 = 0$ **28)** $x^4 - 3x^2 - 10 = 0$ **29)** $4x^4 - 14x^2 + 12 = 0$

30) $9x^4 - 27x^2 + 20 = 0$ **31)** $4x^4 - 5x^2 - 6 = 0$ **32)** $24x^4 + 14x^2 - 3 = 0$

حلّل كلَّ كثيرة حدود مما يأتي تحليلاً تامًّا، وإن لم يكن ذلك ممكنًا، فاكتب كثيرة حدود أولية:

33) $x^4 - 625$ **34)** $x^6 - 64$ **35)** $x^5 - 16x$ **36)** $8x^5y^2 - 27x^2y^5$

37) $15ax - 10bx + 5cx + 12ay - 8by + 4cy + 15az - 10bz + 5cz$

38) $6a^2x^2 - 24b^2x^2 + 18c^2x^2 - 5a^2y^3 + 20b^2y^3 - 15c^2y^3 + 2a^2z^2 - 8b^2z^2 + 6c^2z^2$

39) $6x^5 - 11x^4 - 10x^3 - 54x^3 + 99x^2 + 90x$

40) $20x^6 - 7x^5 - 6x^4 - 500x^4 + 175x^3 + 150x^2$

حُلَّ كلَّ معادلة مما يأتي:

41) $x^4 + x^2 - 90 = 0$ **42)** $x^4 - 16x^2 - 720 = 0$ **43)** $x^4 - 7x^2 - 44 = 0$

44) $x^4 + 6x^2 - 91 = 0$ **45)** $x^3 + 216 = 0$ **46)** $64x^3 + 1 = 0$

حُلَّ كلَّ معادلة مما يأتي:

47) $8x^4 + 10x^2 - 3 = 0$ **48)** $6x^4 - 5x^2 - 4 = 0$

49) $20x^4 - 53x^2 + 18 = 0$ **50)** $18x^4 + 43x^2 - 5 = 0$

51) $8x^4 - 18x^2 + 4 = 0$ **52)** $3x^4 - 22x^2 - 45 = 0$

53) $x^6 - 26x^3 - 27 = 0$ **54)** $4x^4 - 4x^2 - x^2 + 1 = 0$

55) $x^6 - 9x^4 - x^2 + 9 = 0$ **56)** $x^4 + 8x^2 + 15 = 0$

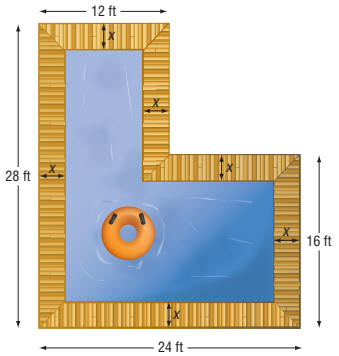
57) هندسة: منشور متوازي مستطيلات أبعاده $x - 2, x - 4, x - 6$ ، وحجمه $40x$ وحدة مكعبة.

a) اكتب معادلة كثيرة حدود تمثل حجم المنشور.

b) حل المعادلة باستعمال التحليل إلى العوامل.

c) هل هناك قيم غير مقبولة للمتغير x عند حل المعادلة؟ وضِّح إجابتك.

d) ما أبعاد المنشور؟



58) تصميم: يريد سليمان أن يبني بركة سباحة وفق التصميم المجاور، حيث يحيط بها ممر خشبي بعرض ثابت.

a) إذا كانت مساحة سطح البركة فقط 336ft^2، فما قيمة x؟

b) إذا أصبحت قيمة x مثليها وذلك بتقليل مساحة سطح البركة، فما المساحة الجديدة لسطح البركة؟

c) إذا نصفت قيمة x بزيادة مساحة سطح البركة، فما مساحة سطح البركة فقط عندئذٍ؟

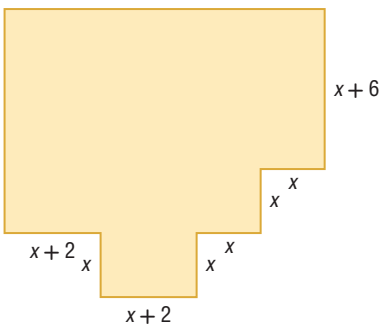
59) أحياء: قدّر حسام عدد الفيروسات في إحدى التجارب بالدالة: $P(t) = -0.012t^3 - 0.24t^2 + 6.3t + 8000$، حيث t الزمن بالساعات، $P(t)$ عدد الفيروسات. فإذا أراد حسام أن يحدد الزمن الذي يصبح فيه عدد الفيروسات 8000 فيروس.

a) فأوجد قيمة t باستعمال التحليل إلى العوامل.

b) كيف أجريت عملية التحليل إلى العوامل؟

c) ماقيم t المقبولة؟ وما القيم غير المقبولة؟ وضِّح إجابتك.

60) تصميم المباني: يمثل الشكل المجاور مخطط شقة سكنية.



a) اكتب دالة بدلالة المتغير x تمثل مساحة الشقة.

b) إذا كانت مساحة الشقة 1366ft^2، فما قيمة x؟

حلّل كلَّ كثيرة حدود فيما يأتي تحليلًا تامًّا. وإن لم يكن ذلك ممكنًا فاكتب كثيرة حدود أولية:

61) $x^6 - 4x^4 - 8x^4 + 32x^2 + 16x^2 - 64$ **62)** $y^9 - y^6 - 2y^6 + 2y^3 + y^3 - 1$

63) $x^6 - 3x^4y^2 + 3x^2y^4 - y^6$

64) حدائق: حديقة مستطيلة الشكل بُعداها 32ft و 40ft، تم توسعتها لتصبح مساحتها 4.5 أمثال مساحتها الأصلية بزيادة كل من طولها وعرضها بالمقدار نفسه.

a) ارسم شكلًا يمثل الموقف.

b) اكتب معادلة كثيرة حدود تمثل المساحة الجديدة، وحلها بالتحليل إلى العوامل.

c) مثّل الدالة بيانيًّا. **d)** ما الحل غير المقبول؟ وضِّح إجابتك.

مسائل مهارات التفكير العليا

65) **تحد:** حلّل المقدار $36x^{2n} + 12x^n + 1$ إلى عوامله.

66) **تبرير:** أعط مثالًا مضادًا للعبارة: $a^2 + b^2 = (a + b)^2$.

67) **مسألة مفتوحة:** إذا كانت الصورة التكعيبية لمعادلة هي: $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$، فاكتب معادلة من الدرجة السادسة يمكن كتابتها على الصورة التكعيبية.

68) **اكتب:** وضِّح كيف يمكن أن يساعدك تمثيل دالة كثيرة حدود بيانيًّا على تحليلها؟

تدريب على اختبار

69) **إجابة قصيرة** حل المعادلة: $x^3 + 27 = 0$.

70) إذا كان الفرق الموجب بين العددين k, $\frac{1}{12}$ مساويًا للفرق الموجب بين العددين $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{5}$، فما قيمة k ؟

A $\frac{1}{60}$ **B** $\frac{1}{20}$ **C** $\frac{1}{15}$ **D** $\frac{13}{60}$

مراجعة تراكمية

حدّد الدرجة والمعامل الرئيس لكل كثيرة حدود بمتغير واحد فيما يأتي، وإذا لم تكن كثيرة حدود بمتغير واحد فاذكر السبب: (الدرس 5-3)

71) $4x^3 - 6x^2 + 5x^4 - 8x$ **72)** $-2x^5 + 5x^4 + 3x^2 + 9$ **73)** $-x^4 - 3x^3 + 2x^6 - x^7$

74) **كهرباء:** دائرة كهربائية تتكون من جزأين موصولين على التوالي؛ معاوقة الأول $4j + 3$ أوم، ومعاوقة الثاني $6j - 2$ أوم. اجمع هذين العددين المركبين لتجد المعاوقة الكلية لهذه الدائرة. (الدرس 3-1)

اقسم كلًّا مما يأتي: (الدرس 4-3)

75) $(x^2 + 6x - 2) \div (x + 4)$ **76)** $(2x^2 + 8x - 10) \div (2x + 1)$ **77)** $(8x^3 + 4x^2 + 6) \div (x + 2)$

تحدَّ: **أوجد حلول كل من المعادلتين:**

78) $(x^2 - 4)^2 - (x^2 - 4) - 2 = 0$

79) $(x^2 + 3)^2 - 7(x^2 + 3) + 12 = 0$

حل متباينات كثيرات الحدود

رابط الدرس الرقمي
www.ien.edu.sa

الهدف أستعمل الحاسبة البيانية TI-nspire لإيجاد حلول تقريبية لمتباينة كثيرة الحدود.

يمكنك استعمل الحاسبة البيانية TI-nspire لحل متباينات كثيرات الحدود.

نشاط

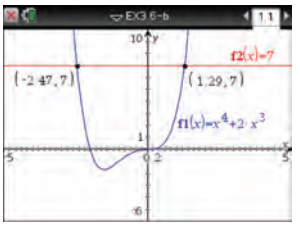
حُلَّ المتباينة $x^4 + 2x^3 \le 7$

الطريقة 1 : تمثيل المعادلات المرتبطة بكل طرف بيانيًّا بشكل منفصل .

الخطوات:

- افتح الآلة الحاسبة بالضغط على (on) ثم اختر 1 مستند جديد
- اختر 2:إضافة تطبيق الرسوم البيانية ، واكتب في الطرف الأيسر $x^4 + 2x^3$ بجانب $f1(x) =$، ثم اضغط مفتاح (enter) ليظهر التمثيل البياني.
- اضغط المفتاح (tab)؛ لكتابة الطرف الأيمن 7 بجانب $f2(x) =$ ، ثم اضغط مفتاح (enter) ليظهر التمثيل البياني.

  ملاحظة: تدريج الآلة المعتاد على المحور y بين $(-6.67, 6.67)$، وحتى يظهر التمثيل للمعادلة $f2(x) = 7$ ، قم بالضغط على مفتاح (menu) واختر 4: تكبير/تصغير النافذة ومنها اختر 1: إعدادات النافذة... ؛ لتحديد التدريج المناسب لكلٍّ من x, y
- حدِّد نقاط التقاطع من خلال الضغط على مفتاح (menu) ومنها اختر 6: تحليل الرسم البياني ثم اختر منها 4: نقاط التقاطع ، وقم بالضغط في أي نقطة على الشاشة، وحرّك المؤشر مرورًا بنقطة التقاطع لتظهر نقطة التقاطع، كرّر ذلك مع نقطة التقاطع الثانية فيكون الحل هو : $-2.47 \le x \le 1.29$ تقريبًا.



[−5, 5] scl: 0.2 by [−6, 10] scl: 1

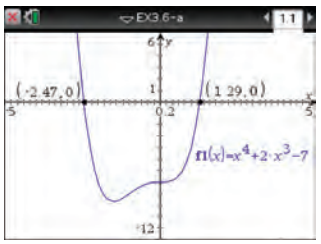
الطريقة 2 : تمثيل المعادلة المرتبطة بعد مساواتها بالصفر بيانيًّا.

$$x^4 + 2x^3 = 7 \longrightarrow x^4 + 2x^3 - 7 = 0$$

الخطوات:

- من الشاشة الظاهرة اختر 1 مستند جديد ثم اختر 2:إضافة تطبيق الرسوم البيانية .
- اكتب المعادلة المرتبطة $x^4 + 2x^3 - 7$ ، ثم اضغط مفتاح (enter) ليظهر التمثيل البياني.

  ملاحظة: اختر التدريج المناسب.
- حدِّد أصفار المعادلة من خلال الضغط على مفتاح (menu) ، ومنها اختر 6: تحليل الرسم البياني ، ثم اختر منها 1: أصفار الدالة، وقم بالضغط في أي نقطة من الشاشة مرورًا بنقطة تقاطع التمثيل البياني مع المحور x فيظهر صفر الدالة،كرّر ذلك مع النقطة الأخرى، ستظهر إحداثيات صفرَي الدالة، فيكون الحل هو : $-2.47 \le x \le 1.29$ تقريبًا.



[−5, 5] scl: 0.2 by [−12, 6] scl: 1

تمارين:

حُلَّ كلَّ متباينة مما يأتي، وقرّب الإجابة إلى أقرب جزء من مئة :

1) $\frac{2}{3}x^3 + x^2 - 5x \ge -9$
2) $x^3 - 9x^2 + 27x \le 20$
3) $x^3 + 1 \ge 4x^2$
4) $x^6 - 15 \le 5x^4 - x^2$
5) $\frac{1}{2}x^5 \ge \frac{1}{5}x^2 - 2$
6) $x^8 < -x^7 + 3$
7) $x^4 - 15x^2 > -24$
8) $x^3 - 6x^2 + 4x < -6$
9) $x^4 - 15x^2 + x + 65 > 0$

رابط الدرس الرقمي

www.ien.edu.sa

3-7

نظريتا الباقي والعوامل
The Remainder and Factor Theorems

فيما سبق:
درستُ استعمال خاصية التوزيع والتحليل لتبسيط عبارات جبرية.
(الدرس 3 - 3)

والآن:
- أجد قيم الدوال باستعمال التعويض التركيبي.
- أستعمل التعويض التركيبي لأحدّد ما إذا كانت ثنائية حدٍّ عاملًا من عوامل كثيرة حدود أم لا.

المفردات:
نظرية الباقي
Remainder Theorm
التعويض التركيبي
synthetic substitution
نظرية العوامل
Factor Theorm

لماذا؟

قدّر صاحب بقالة أرباحه السنوية بالدالة: $S(x) = 0.02x^4 - 0.52x^3 + 4.03x^2 + 0.09x + 77.54$، حيث x عدد السنوات منذ العام 1420هـ، وتمثل $S(x)$ قيمة الأرباح بمئات الريالات.

يمكنك استعمال هذه الدالة لتقدير الأرباح في العام 1440هـ، بإيجاد قيمة الدالة $S(x)$ عندما $x = 20$، ويمكنك استعمال التعويض التركيبي باعتباره طريقة أخرى للوصول إلى ذلك.

التعويض التركيبي: يمكنك إيجاد باقي قسمة دالة كثيرة حدود مثل: $f(x) = -3x^2 + 5x + 4$ على الدالة $x - 3$ بطريقتين:

الطريقة 1: القسمة الطويلة

$$\begin{array}{r} -3x - 4 \\ x-3 \overline{)\,-3x^2 + 5x + 4} \\ (-)\ \underline{-3x^2 + 9x} \\ \quad -4x + 4 \\ (-)\ \underline{-4x + 12} \\ \quad -8 \end{array}$$

الطريقة 2: القسمة التركيبية

3	−3	5	4
		−9	−12
	−3	−4	−8

قارن بين باقي القسمة وهو العدد -8، وقيمة $f(3)$.

$f(3) = -3(3)^2 + 5(3) + 4$ عوّض العدد 3 بدلًا من x

$= -27 + 15 + 4$ اضرب

$= -8$ بسّط

لاحظ أن قيمة $f(3)$ تساوي باقي قسمة كثيرة الحدود على $x - 3$. وهذا يوضِّح **نظرية الباقي**.

مفهوم أساسي — **نظرية الباقي**

أضف إلى مطويتك

التعبير اللفظي إذا قسمت كثيرة حدود $P(x)$ على $x - r$، فإن الباقي ثابت ويساوي $P(r)$، وكذلك:

المقسوم		ناتج القسمة		المقسوم عليه		الباقي
$P(x)$	$=$	$Q(x)$	$\cdot$	$(x - r)$	$+$	$P(r)$

حيث $Q(x)$ دالة كثيرة حدود تقل درجتها بواحد عن درجة $P(x)$.

مثال $x^2 + 6x + 2 = (x - 4) \cdot (x + 10) + 42$

إن عملية إيجاد قيمة دالة عند عدد بتطبيق نظرية الباقي واستعمال القسمة التركيبية تسمى **التعويض التركيبي**. وهي طريقة سهلة لإيجاد قيم دوال كثيرات الحدود، خصوصًا عندما تكون درجة كثيرة الحدود أكبر من الدرجة الثانية.

مثال 1 التعويض التركيبي

إذا كان $f(x) = 3x^4 - 2x^3 + 5x + 2$، فأوجد $f(4)$ باستعمال التعويض التركيبي.

بناءً على نظرية الباقي، فإن $f(4)$ يساوي باقي قسمة كثيرة الحدود على $x - 4$.

4	3	−2	0	5	2
		12	40	160	660
	3	10	40	165	662

بما أنه لا يوجد حد يحتوي على x^2، لذا ضع 0 للمحافظة على مكان عامل الحد x^2.

بما أن باقي القسمة يساوي 662 ، فإنه باستعمال التعويض التركيبي يكون $f(4) = 662$

وللتحقق نستعمل التعويض المباشر.

عوض عن x بالعدد 4 في دالة كثيرة الحدود.

$f(x) = 3x^4 - 2x^3 + 5x + 2$ الدالة الأصلية

$f(4) = 3(4)^4 - 2(4)^3 + 5(4) + 2$ عوّض العدد 4 بدلًا من x

$= 768 - 128 + 20 + 2 = 662$ بسّط

وعليه فإن $f(4) = 662$. وبذلك نكون قد توصلنا إلى الإجابة نفسها من خلال التعويض المباشر .

تحقق من فهمك

1A) إذا كان $f(x) = 3x^3 - 6x^2 + x - 11$، فأوجد $f(3)$.

1B) إذا كان $g(x) = 4x^5 + 2x^3 + x^2 - 1$، فأوجد $g(-1)$.

يمكنك استعمال التعويض التركيبي في الحالات التي تكون فيها حسابات التعويض المباشر معقدة.

مثال 2 من واقع الحياة إيجاد قيم الدالة

مبيعات: **ارجع إلى فقرة "لماذا؟" في بداية هذا الدرس. ما قيمة الأرباح في العام 1440 هـ؟**

أوجد ناتج قسمة $0.02x^4 - 0.52x^3 + 4.03x^2 + 0.09x + 77.54$ على $x - 20$ مستعملًا القسمة التركيبية.

20	0.02	−0.52	4.03	0.09	77.54
		0.4	−2.4	32.6	653.8
	0.02	−0.12	1.63	32.69	731.34

تقدر الأرباح بـ 73134 ريالًا تقريبًا.

تحقق من فهمك

2) مدارس: يمكن استعمال الدالة $C(x) = 2.4x^3 - 22.3x^2 + 53.8x + 548.2$ لتقدير عدد الطلاب في إحدى المناطق منذ عام 1427 هـ، حيث تمثل x عدد السنوات، $C(x)$ عدد الطلاب بالعشرات، قدّر عدد طلاب المنطقة عام 1442 هـ.

عوامل كثيرات الحدود: تبيّن القسمة التركيبية أدناه أن ناتج قسمة $2x^3 - 3x^2 - 17x + 30$ على $x + 3$ هو $2x^2 - 9x + 10$.

-3	2	-3	-17	30
		-6	27	-30
	2	-9	10	0

عند قسمة كثيرة حدود على ثنائية حد من عواملها، يكون ناتج القسمة كثيرة حدود تقل درجتها بواحد عن درجة كثيرة الحدود الأصلية.

بناءً على عملية القسمة وباستعمال نظرية الباقي فإن:

المقسوم		ناتج القسمة		المقسوم عليه		الباقي
$2x^3 - 3x^2 - 17x + 30$	$=$	$(2x^2 - 9x + 10)$	$\cdot$	$(x + 3)$	$+$	0

وبما أن باقي القسمة يساوي صفرًا، فإن $f(-3) = 0$. و هذا يعني أن $x + 3$ عامل لكثيرة الحدود $2x^3 - 3x^2 - 17x + 30$. وهذا يوضِّح **نظرية العوامل**، التي تعدُّ حالة خاصة من نظرية الباقي.

مفهوم أساسي

نظرية العوامل

أضف إلى مطويتك

تكون ثنائية الحد $x - r$ عاملًا من عوامل كثيرة الحدود $P(x)$ إذا وفقط إذا كان $P(r) = 0$.

يمكنك استعمال نظرية العوامل للتحقق من أن ثنائية حد معينة عامل من عوامل كثيرة حدود معطاة.

مثال 3 **استعمال نظرية العوامل**

حدّد ما إذا كان $x - 5$ عاملًا من عوامل كثيرة الحدود $P(x) = x^3 - 7x^2 + 7x + 15$ أم لا، ثم أوجد عواملها الأخرى.

الخطوة 1: استعمال نظرية العوامل

بناءً على نظرية العوامل تكون ثنائية الحد $x - 5$ عاملًا من عوامل $P(x)$ إذا كان $P(5) = 0$، ولإيجاد $P(5)$، يمكنك استعمال التعويض التركيبي.

5	1	-7	7	15
		5	-10	-15
	1	-2	-3	0

وبما أن باقي القسمة يساوي صفرًا؛ أي أن $P(5) = 0$ ، فإن $x - 5$ عامل لكثيرة الحدود.

الخطوة 2: تحليل كثيرة الحدود

بما أن $x - 5$ عامل لكثيرة الحدود؛ لذا يمكن تحليل كثيرة الحدود $x^3 - 7x^2 + 7x + 15$ على النحو الآتي: $(x - 5)(x^2 - 2x - 3)$. وتكون $x^2 - 2x - 3$ هي كثيرة الحدود الناتجة عن قسمة كثيرة الحدود $x^3 - 7x^2 + 7x + 15$ على $(x - 5)$.

تحقق مما إذا كانت كثيرة الحدود هذه قابلة للتحليل أم لا.

$x^2 - 2x - 3 = (x + 1)(x - 3)$ حلّل ثلاثية الحدود

وعليه فإن $x^3 - 7x^2 + 7x + 15 = (x - 5)(x + 1)(x - 3)$

تحقق: يمكنك التحقق من إجابتك بضرب العوامل ومقارنة كثيرة الحدود الناتجة بكثيرة الحدود الأصلية.

تحقق من فهمك

3) حدد ما إذا كان $x - 2$ عاملًا من عوامل كثيرة الحدود $x^3 - 7x^2 + 4x + 12$ أم لا، ثم أوجد عواملها الأخرى.

إرشادات للدراسة

التحليل إلى العوامل

ليس شرطًا أن تكون عوامل كثيرة الحدود ثنائيات حد. فمثلاً، عاملا كثيرة الحدود $x^3 + x^2 - x + 15$ هما $x + 3$ و $x^2 - 2x + 5$.

تأكد

مثال 1 أوجد $f(-2)$, $f(4)$ لكلٍّ من الدالتين الآتيتين مستعملًا التعويض التركيبي:

1) $f(x) = 2x^3 - 5x^2 - x + 14$

2) $f(x) = x^4 + 8x^3 + x^2 - 4x - 10$

مثال 2

3) جوارح: يمكن تمثيل عدد أزواج النسور في محمية باستعمال الدالة $P(x) = -0.16x^3 + 15.83x^2 - 154.15x + 1147.97$ حيث x عدد السنوات منذ عام 1390 هـ، فما العدد التقريبي المتوقع لأزواج هذه النسور في عام 1443 هـ؟

مثال 3 في كلٍّ مما يأتي كثيرة حدود ودالة من الدرجة الأولى، حدّد ما إذا كانت هذه الدالة عاملًا من عوامل كثيرة الحدود أم لا، ثم أوجد عواملها الأخرى:

4) $x^3 - 6x^2 + 11x - 6; x - 1$

5) $x^3 + x^2 - 16x - 16; x + 1$

6) $3x^3 + 10x^2 - x - 12; x - 1$

7) $2x^3 - 5x^2 - 28x + 15; x + 3$

تمارين ومسائل

مثال 1 أوجد $f(2)$, $f(-5)$ لكل دالة مما يأتي مستعملاً التعويض التركيبي:

8) $f(x) = x^3 + 2x^2 - 3x + 1$

9) $f(x) = x^2 - 8x + 6$

10) $f(x) = 3x^4 + x^3 - 2x^2 + x + 12$

11) $f(x) = 2x^3 - 8x^2 - 2x + 5$

12) $f(x) = x^3 - 5x + 2$

13) $f(x) = x^5 + 8x^3 + 2x - 15$

14) $f(x) = x^6 - 4x^4 + 3x^2 - 10$

15) $f(x) = x^4 - 6x - 8$

مثال 2

16) وقود: يقدر استهلاك سيارة للوقود (بالميل لكل جالون) وفقًا للدالة $f(x) = 0.00000056x^4 - 0.000018x^3 - 0.016x^2 + 1.38x - 0.38$، حيث x سرعة السيارة بالأميال لكل ساعة. حدد استهلاك السيارة للوقود إذا سارت بالسرعات الآتية $40\text{mi/h}, 50\text{mi/h}, 60\text{mi/h}$.

مثال 3 في كلٍّ مما يأتي كثيرة حدود ودالة من الدرجة الأولى. حدّد ما إذا كانت هذه الدالة عاملًا من عوامل كثيرة الحدود أم لا، ثم أوجد عواملها الأخرى:

17) $x^3 - 3x + 2; x + 2$

18) $x^4 + 2x^3 - 8x - 16; x + 2$

19) $x^3 - x^2 - 10x - 8; x + 2$

20) $x^3 - x^2 - 5x - 3; x - 3$

21) $2x^3 + 17x^2 + 23x - 42; x - 1$

22) $2x^3 + 7x^2 - 53x - 28; x - 4$

23) $x^4 + 2x^3 + 2x^2 - 2x - 3; x - 1$

24) $x^3 + 2x^2 - x - 2; x + 2$

25) $6x^3 - 25x^2 + 2x + 8; 2x + 1$

26) $16x^5 - 32x^4 - 81x + 162; 2x - 3$

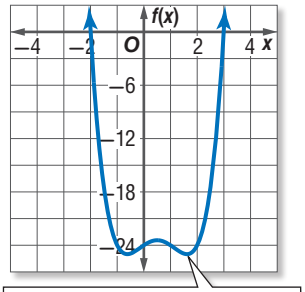
27) زوارق: تحرك زورق بخاري من السكون في اتجاه معاكس للأمواج، فإذا كانت سرعته بالأقدام لكل ثانية تعطى بالدالة $f(t) = -0.04t^4 + 0.8t^3 + 0.5t^2 - t$، حيث t الزمن بالثواني.

a) أوجد سرعة الزورق بعد مرور زمن: $1\text{s}, 2\text{s}, 3\text{s}$.

b) إذا استغرق الزورق، 6s ليقطع المسافة بين عوامتين، فأوجد $f(6)$ مستعملاً التعويض التركيبي، ووضِّح ماذا يعني ذلك.

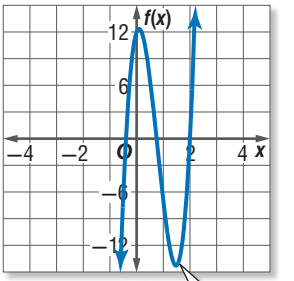
استعمل التمثيل البياني لإيجاد جميع عوامل كل دالة كثيرة حدود فيما يأتي:

(28)



$f(x) = x^4 - 2x^3 - x^2 + 2x - 24$

(29)



$f(x) = 20x^3 - 47x^2 + 8x + 12$

(30) **تمثيلات متعددة:** لتكن الدالة: $f(x) = x^4 - 4x^2$.

a) جبريًا: إذا كان $x - 2$ عاملاً من عوامل هذه الدالة، فأوجد كثيرة الحدود الناتجة عن قسمة هذه الدالة على $(x - 2)$.

b) جدوليًا: كوّن جدول قيم لكثيرة الحدود التي وجدتها في الفرع "a" حيث $x \in \{-2, -1, 0, 1, 2\}$.

c) تحليليًا: اعتمادًا على جدول القيم الذي كوّنته، ما الاستنتاجات التي يمكن أن نتوصل إليها حول بقية عوامل الدالة: $f(x) = x^4 - 4x^2$؟ وضِّح إجابتك.

d) بيانيًا: مثّل الدالة الأصلية بيانيًّا لتؤكد الاستنتاجات التي توصلت إليها.

تنبيه!

التعويض التركيبي

تذكر أنه في التعويض التركيبي يتم قسمة كثيرة حدود على ثنائية حد على الصورة $(x - a)$. وفي هذه الحالة استعمل a، وإذا كانت ثنائية الحد على الصورة $(x + a)$، فاستعمل $-a$.

أوجد قيم k التي تجعل باقي القسمة في كلٍّ مما يأتي يساوي 3:

(31) $(x^2 - x + k) \div (x - 1)$

(32) $(x^2 + kx - 17) \div (x - 2)$

(33) $(x^2 + 5x + 7) \div (x - k)$

(34) $(x^3 + 4x^2 + x + k) \div (x + 2)$

مسائل مهارات التفكير العليا

(35) **تبرير:** إذا قسمت دالة كثيرة الحدود $f(x)$ على $x - c$، فماذا يمكن أن تستنتج إذا كان:

a) الباقي يساوي صفرًا؟

b) الباقي يساوي 1؟

c) ناتج القسمة يساوي 1 والباقي يساوي صفرًا؟

(36) **مسألة مفتوحة:** اكتب دالة تكعيبية يكون باقي قسمتها على $x - 2$ يساوي 8، وباقي قسمتها على $x - 3$ يساوي -5.

(37) **اكتب:** وضِّح لماذا تعد نظرية العوامل حالة خاصة من نظرية الباقي؟

تدريب على اختبار

38) أيٌّ مما يأتي هو تحليل للعبارة $27x^3 + y^3$ ؟

A $(3x + y)(3x + y)(3x + y)$

B $(3x + y)(9x^2 - 3xy + y^2)$

C $(3x - y)(9x^2 + 3xy + y^2)$

D $(3x - y)(9x^2 + 9xy + y^2)$

39) ما حاصل ضرب العددين المركبين $(4 - i)(4 + i)$؟

A 15 **C** 17

B $16 - i$ **D** $17 - 8i$

مراجعة تراكمية

حُلَّ كلَّ معادلة مما يأتي: (الدرس 2-3)

40) $x^4 - 4x^2 - 21 = 0$

41) $x^4 - 6x^2 = 27$

42) $4x^4 - 8x^2 - 96 = 0$

حُلَّ كلًّا من النظامين الآتيين بيانيًّا: (مهارة سابقة)

43) $y=3x-1$
$y=-2x+4$

44) $3x+2y=8$
$-4x+6y=11$

إذا كان $c(x) = x^2 - 2x$, $d(x) = 3x^2 - 6x + 4$، فأوجد قيمة كل مما يأتي: (الدرس 3-3)

45) $c(a + 2) - d(a - 4)$

46) $c(a-3)+d(a+1)$

47) $c(-3a) + d(a + 4)$

48) $3d(3a)-2c(-a)$

49) $c(a) + 5d(2a)$

50) $-2d(2a + 3) - 4c(a^2 + 1)$

رابط الدرس الرقمي

www.ien.edu.sa

3-8 الجذور والأصفار
Roots and Zeros

فيما سبق:
درستُ استعمال الأعداد المركبة لوصف حلول المعادلات التربيعية. (الدرس 2 - 3)

والآن:
- أحدد عدد جذور معادلة كثيرة حدود وأنواعها.
- أجد عدد الأصفار الحقيقية الموجبة والسالبة والأصفار التخيلية للدالة.
- أكتب دالة كثيرة حدود بأقل درجة ممكنة بمعرفة أصفارها.

المفردات:
النظرية الأساسية في الجبر
Fundamental Theorem of Algebra

لماذا؟

يستعمل مدير الإنتاج في مصنع الدالةَ: $g(x) = 1.384x^4 - 0.003x^3 + 0.28x^2 - 0.078x + 1.365$، لتقدير معدل تكلفة إنتاج القطعة الواحدة على مدى عدة سنوات، حيث x عدد السنوات منذ 1410هـ.

ولكي تجد العام الذي يبلغ فيه معدل تكلفة إنتاج قطعة واحدة قيمة معينة، يمكنك استعمال جذور معادلة كثيرة الحدود المرتبطة بالدالة.

أنواع الجذور تعلمت سابقًا أن صفر دالة مثل $f(x)$ يمكن أن يكون أية قيمة مثل c، حيث $f(c) = 0$. وعند تمثيل الدالة بيانيًّا تكون أصفارها الحقيقية هي مقاطع المحور x.

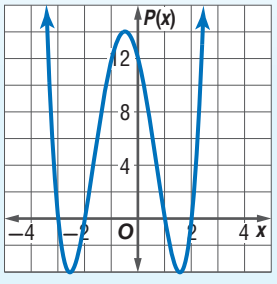
ملخص المفهوم
أضف إلى مطويتك

الأصفار، والعوامل، والجذور، والمقاطع

التعبير اللفظي: إذا كانت $P(x) = a_n x^n + \ldots + a_1 x + a_0$ دالة كثيرة حدود، فإن العبارات الآتية متكافئة:

- c صفر للدالة $P(x)$.
- c جذر أو حل للمعادلة $P(x) = 0$.
- $x - c$ عامل من عوامل كثيرة الحدود $P(x)$.
- إذا كان c عددًا حقيقيًّا، فإن $(c, 0)$ هي نقطة تقاطع تمثيل الدالة $P(x)$ مع المحور x.

مثال: افترض أن دالة كثيرة الحدود هي: $P(x) = x^4 + 2x^3 - 7x^2 - 8x + 12$.



فإن أصفار هذه الدالة هي: $-3, -2, 1, 2$

وجذور المعادلة $x^4 + 2x^3 - 7x^2 - 8x + 12 = 0$ هي: $-3, -2, 1, 2$

وعوامل كثيرة الحدود $x^4 + 2x^3 - 7x^2 - 8x + 12$ هي: $(x + 3), (x + 2), (x - 1), (x - 2)$

ونقاط تقاطع التمثيل البياني للدالة $P(x)$ مع المحور x هي: $(-3, 0), (-2, 0), (1, 0), (2, 0)$.

عند حل معادلة كثيرة حدود درجتها أكبر من صفر من الممكن أن يكون لها جذر حقيقي واحد أو أكثر، وقد لا يوجد جذور حقيقية (أيْ أن الجذور أعداد تخيلية). وبما أن الأعداد الحقيقية والتخيلية جميعها تنتمي إلى مجموعة الأعداد المركبة، يمكن القول إن أية معادلة كثيرة حدود درجتها أكبر من الصفر لها جذر واحد مركب على الأقل، وهذه هي **النظرية الأساسية في الجبر**.

مفهوم أساسي
أضف إلى مطويتك

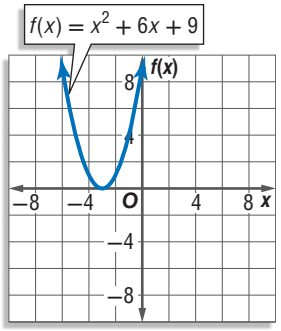
النظرية الأساسية في الجبر

كل معادلة كثيرة حدود درجتها أكبر من صفر لها جذر واحد على الأقل ينتمي إلى مجموعة الأعداد المركبة.

مثال 1 تحديد عدد الجذور وأنواعها

حُلَّ كلَّ معادلة مما يأتي، واذكر عدد جذورها، ونوعها :

(a $x^2 + 6x + 9 = 0$

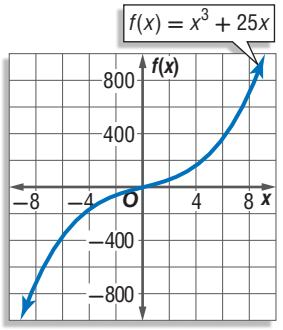


$x^2 + 6x + 9 = 0$	المعادلة الأصلية
$(x + 3)^2 = 0$	حلّل إلى العوامل
$x + 3 = 0$	خُذ الجذر التربيعي لكلا الطرفين
$x = -3$	أوجد قيمة x

وبما أن العامل $(x + 3)$ مكرر مرتين في تحليل كثيرة الحدود، فإن -3 جذر مكرر مرتين. أي للمعادلة جذر حقيقي واحد مكرر مرتين هو -3 .

تحقق: بما أن التمثيل البياني للدالة يمس المحور x عندما $x = -3$. فإن -3 جذر مكرر مرتين. ✓

(b $x^3 + 25x = 0$



$x^3+25x=0$	المعادلة الأصلية
$x\,(x^2+25)=0$	حلّل إلى العوامل
$x = 0$ أو $x^2 + 25 = 0$	خاصيّة الضرب الصفري
$x^2 = -25$	اطرح **25** من كلا الطرفين
$x = \pm\sqrt{-25} = \pm 5i$	خاصية الجذر التربيعي، ثم التبسيط

للمعادلة ثلاثة جذور: جذر حقيقي واحد هو 0، وجذران تخيليان هما $5i$, $-5i$.

تحقق: بما أن التمثيل البياني للدالة يقطع المحور x عندما $x = 0$ ،
فإن للمعادلة جذرًا حقيقيًّا واحدًا هو 0. ✓

تحقق من فهمك

(1A $x^3 + 2x = 0$ **(1B** $x^4 - 16 = 0$ **(1C** $3x^3 - x^2 + 9x - 3 = 0$

إرشادات للدراسة

الجذور المكررة

يمكن أن يكون لمعادلات كثيرات الحدود جذر مكرر مرتين أو ثلاث أو أربع مرات وهكذا.

اختبر حُلَّ كلَّ معادلة في المثال 1، ولاحظ أن عدد حلول كل معادلة يساوي درجة كثيرة الحدود. والنتيجة الآتية للنظرية الأساسية في الجبر تصف العلاقة بين درجة معادلة كثيرة الحدود وعدد جذورها.

مفهوم أساسي — **نتيجة للنظرية الأساسية في الجبر**

أضف إلى مطويتك

التعبير اللفظي: يكون لمعادلة كثيرة الحدود من الدرجة n العدد n فقط من الجذور المركبة بما في ذلك الجذور المكررة.

مثال:

$x^3 + 2x^2 + 6 = 0$	$4x^4 - 3x^3 + 5x - 6 = 0$	$-2x^5 - 3x^2 + 8 = 0$
3 جذور	4 جذور	5 جذور

وبالمثل دالة كثيرة الحدود من الدرجة n لها فقط العدد n من الأصفار المركبة.

وقد اكتشف العالم الفرنسي ديكارت علاقة بين إشارات معاملات دالة كثيرة الحدود وعدد الأصفار الحقيقية.

مفهوم أساسي

أضف إلى مطويتك

قانون ديكارت للإشارات

إذا كانت $P(x) = a_n x^n + \ldots + a_1 x + a_0$ دالة كثيرة حدود معاملات حدودها أعداد حقيقية، فإن :

- عدد الأصفار الحقيقية الموجبة للدالة $P(x)$ يساوي عدد مرات تغير إشارة معاملات حدود الدالة $P(x)$ ، أو أقل منه بعدد زوجي.
- عدد الأصفار الحقيقية السالبة للدالة $P(x)$ يساوي عدد مرات تغير إشارة معاملات حدود الدالة $P(-x)$ ، أو أقل منه بعدد زوجي.

تاريخ الرياضيات

رينيه ديكارت

(1650 – 1596 م)، فيلسوف، ورياضي، وفيزيائي فرنسي، يلقب بـ"أبو الفلسفة الحديثة". له تأثير واضح في علم الرياضيات؛ فقد اخترع نظامًا رياضيًا شكّل أساس الهندسة التحليلية سمّي باسمه وهو نظام الإحداثيات الديكارتية.

مثال 2

إيجاد عدد الأصفار الحقيقية الموجبة والسالبة والأصفار التخيلية لدالة

اذكر العدد الممكن للأصفار الحقيقية الموجبة، والحقيقية السالبة، والتخيلية للدالة $f(x) = x^6 + 3x^5 - 4x^4 - 6x^3 + x^2 - 8x + 5$.

بما أن درجة الدالة $f(x)$ تساوي 6، فإن لها 6 أصفار: حقيقية أو تخيلية أو كليهما. استعمل قانون ديكارت للإشارات لتحديد العدد الممكن للأصفار الحقيقية ونوعها.

احسب عدد مرات تغير إشارة معاملات الدالة $f(x)$.

$$f(x) = \underset{+\,+}{x^6} + \underset{+\,-}{3x^5} - \underset{-\,-}{4x^4} - \underset{-\,+}{6x^3} + \underset{+\,-}{x^2} - \underset{-\,+}{8x} + 5$$

(لا، نعم، لا، نعم، نعم، نعم)

نجد أن هناك 4 تغيرات في إشارة المعاملات، لذا فإن عدد الأصفار الحقيقية الموجبة سيكون: 4 أو 2 أو 0.

احسب عدد مرات تغير إشارة معاملات الدالة $f(-x)$.

$$\begin{aligned} f(-x) &= (-x)^6 + 3(-x)^5 - 4(-x)^4 - 6(-x)^3 + (-x)^2 - 8(-x) + 5 \\ &= \underset{+\,-}{x^6} - \underset{-\,-}{3x^5} - \underset{-\,+}{4x^4} + \underset{+\,+}{6x^3} + \underset{+\,+}{x^2} + \underset{+\,+}{8x} + 5 \end{aligned}$$

(نعم، لا، نعم، لا، لا، لا)

نجد أن هناك تغيرين في إشارة المعاملات، لذا فإن عدد الأصفار الحقيقية السالبة سيكون: 2 أو 0.

أنشئ جدولاً يبين عدد الجذور الحقيقية والتخيلية الممكنة.

عدد الأصفار الحقيقية الموجبة	عدد الأصفار الحقيقية السالبة	عدد الأصفار التخيلية يساوي العدد 6 مطروحًا منه مجموع عدد الأصفار الحقيقية
4	2	0
	0	2
2	2	2
	0	4
0	2	4
	0	6

تنبيه!

أصفار الدوال

لن تناقش الحالة التي يكون فيها الحد الثابت مساويًا للصفر في هذا الدرس.

تحقق من فهمك

2) اذكر العدد الممكن للأصفار الحقيقية الموجبة، والحقيقية السالبة، والتخيلية للدالة.

$h(x) = 2x^5 + x^4 + 3x^3 - 4x^2 - x + 9$.

تعلمت سابقًا أن حاصل ضرب العددين المركبين المترافقين هو عدد حقيقي دائمًا، ومن الجدير بالذكر أن الجذور المركبة تكون في أزواج مترافقة. فمثلًا إذا علمت أن أحد جذري المعادلة $x^2 - 8x + 52 = 0$ هو $4 + 6i$، فإنك تستنتج أن الجذر الآخر هو $4 - 6i$.

وينطبق هذا الأمر على أصفار دوال كثيرات الحدود أيضًا. فإذا كان العدد المركب صفرًا لدالة كثيرة حدود معاملات حدودها أعداد حقيقية، فإن مرافقه أيضًا صفر لدالة كثيرة الحدود.

مفهوم أساسي — نظرية الأصفار المركبة المترافقة

أضف إلى مطويتك

التعبير اللفظي: إذا كان a, b عددين حقيقيين، و كان $a + bi$ صفرًا لدالة كثيرة حدود معاملات حدودها أعداد حقيقية. فإن $a - bi$ صفر للدالة أيضًا.

مثال: إذا كان $3 + 4i$ صفرًا للدالة $f(x) = x^3 - 4x^2 + 13x + 50$، فإن $3 - 4i$ صفر للدالة أيضًا.

عندما تعطى جميع أصفار دالة كثيرة حدود ويطلب إليك تحديد الدالة، حوّل الأصفار إلى عوامل، ثم اضرب جميع العوامل بعضها في بعض؛ لتحصل على دالة كثيرة الحدود المطلوبة.

إرشادات للدراسة

استعمال الأصفار لكتابة الدالة

إن أي دالة على الصورة $f(x) = a(x^3 - 9x^2 + 16x + 26)$، (حيث a عدد صحيح لا يساوي الصفر)، تحقق المعطيات الواردة في المثال 3، ولكن اعتبر أن $a = 1$ للتسهيل فقط.

مثال 3 — استعمال الأصفار لكتابة دالة كثيرة حدود

اكتب دالة كثيرة حدود درجتها أقل ما يمكن، ومعاملات حدودها أعداد صحيحة، إذا كان العددان $-1, 5 - i$ من أصفارها .

افهم: **المعطيات:** العددان $-1, 5 - i$ من أصفار كثيرة حدود.

المطلوب: كتابة دالة كثيرة حدود درجتها أقل ما يمكن، ومعاملات حدودها أعداد صحيحة، والعددان $-1, 5 - i$ من أصفارها.

خطط: بما أن $5 - i$ صفر للدالة، فإن $5 + i$ أيضًا صفر للدالة بحسب نظرية الأصفار المركبة المترافقة.

لذا فإن $x + 1 , x - (5 - i) , x - (5 + i)$ عوامل لكثيرة الحدود.

حل: اكتب المعادلة كثيرة الحدود على صورة حاصل ضرب عواملها.

$$P(x) = (x + 1)[x - (5 - i)][x - (5 + i)]$$

اضرب العوامل لتحصل على دالة كثيرة الحدود.

اكتب الدالة	$P(x) = (x + 1)\,[x - (5 - i)][x - (5 + i)]$
أعد تجميع الحدود	$= (x + 1)\,[(x - 5) + i][(x - 5) - i]$
الفرق بين مربعين	$= (x + 1)\,[(x - 5)^2 - i^2]$
أوجد مربع الحدين	$= (x + 1)\,[(x^2 - 10x + 25 - (-1)]$
بسّط	$= (x + 1)\,(x^2 - 10x + 26)$
اضرب	$= x^3 - 10x^2 + 26x + x^2 - 10x + 26$
اجمع الحدود المتشابهة	$= x^3 - 9x^2 + 16x + 26$

تحقق: بما أن هناك 3 أصفار، فإن دالة كثيرة الحدود ستكون من الدرجة الثالثة، ولذا فإن $P(x) = x^3 - 9x^2 + 16x + 26$ دالة كثيرة حدود درجتها أقل ما يمكن، ومعاملات حدودها أعداد صحيحة، وأصفارها هي: $5 + i\ ,\ -1, 5 - i$.

تحقق من فهمك

3) اكتب دالة كثيرة حدود درجتها أقل ما يمكن، ومعاملات حدودها أعداد صحيحة، إذا كان العددان $-1, 1 + 2i$ من أصفارها.

تأكد

مثال 1 حُلَّ كلَّ معادلة مما يأتي، واذكر عدد جذورها، ونوعها:

1) $x^2 - 3x - 10 = 0$

2) $x^3 + 12x^2 + 32x = 0$

3) $16x^4 - 81 = 0$

4) $0 = x^3 - 8$

مثال 2 اذكر العدد الممكن للأصفار الحقيقية الموجبة، والحقيقية السالبة، والتخيلية لكلِّ دالة ممَّا يأتي :

5) $f(x) = x^3 - 2x^2 + 2x - 6$

6) $f(x) = 6x^4 + 4x^3 - x^2 - 5x - 7$

7) $f(x) = 3x^5 - 8x^3 + 2x - 4$

8) $f(x) = -2x^4 - 3x^3 - 2x - 5$

مثال 3 اكتب دالة كثيرة حدود درجتها أقل ما يمكن، ومعاملات حدودها أعداد صحيحة، إذا كانت الأعداد المعطاة في كل مما يأتي من أصفارها :

9) $4, -1, 6$

10) $3, -1, 1, 2$

11) $-2, 5, -3i$

12) $-4, 4 + i$

تدرب وحل المسائل

مثال 1 حُلَّ كلَّ معادلة مما يأتي، واذكر عدد جذورها، ونوعها:

13) $4x^2 + 1 = 0$

14) $2x^2 - 5x + 14 = 0$

15) $-3x^2 - 5x + 8 = 0$

16) $8x^3 - 27 = 0$

17) $16x^4 - 625 = 0$

18) $x^3 - 6x^2 + 7x = 0$

19) $x^5 - 8x^3 + 16x = 0$

20) $x^5 + 2x^3 + x = 0$

مثال 2 اذكر العدد الممكن للأصفار الحقيقية الموجبة، والحقيقية السالبة، والتخيلية لكلِّ دالة ممَّا يأتي :

21) $f(x) = x^4 - 5x^3 + 2x^2 + 5x + 7$

22) $f(x) = 2x^3 - 7x^2 - 2x + 12$

23) $f(x) = -3x^5 + 5x^4 + 4x^2 - 8$

24) $f(x) = x^4 - 2x^2 - 5x + 19$

25) $f(x) = 4x^6 - 5x^4 - x^2 + 24$

26) $f(x) = -x^5 + 14x^3 + 18x - 36$

مثال 3 اكتب دالة كثيرة حدود درجتها أقل ما يمكن، ومعاملات حدودها أعداد صحيحة، إذا كانت الأعداد المعطاة في كل مما يأتي من أصفارها :

(27 $5, -2, -1$

(28 $-4, -3, 5$

(29 $-1, -1, 2i$

(30 $-3, 1, -3i$

(31 $0, -5, 3 + i$

(32 $-2, -3, 4 - 3i$

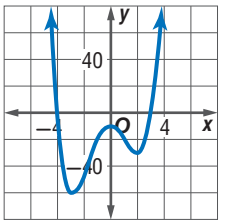
اكتب بجانب التمثيل البياني للدالة الرمز الذي يمثل أصفارها في كل مما يأتي:

(a $-3, 4, i, -i$

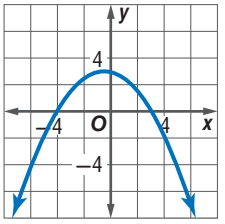
(b $-4, 3$

(c $-4, 3, i, -i$

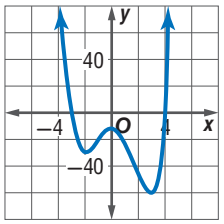
(33



(34

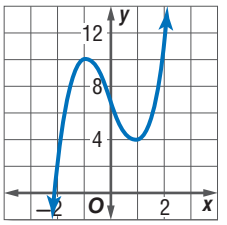


(35



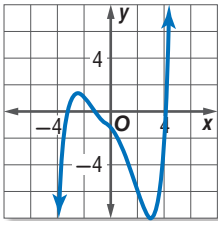
حدد عدد الأصفار الحقيقية الموجبة، والحقيقية السالبة، والتخيلية لكلٍّ من الدالتين الممثلتين بيانيًّا فيما يأتي، ووضِّح إجابتك:

(36



الدرجة : 3

(37



الدرجة : 5

مسائل مهارات التفكير العليا

38) **مسألة مفتوحة:** في كل مما يأتي، مثِّل بيانيًّا دالة كثيرة حدود بحيث يكون لها :

a) 3 أصفار حقيقية وصفران تخيليان **b)** 4 أصفار حقيقية **c)** صفران تخيليان

39) **تحدَّ:** اكتب معادلة على صورة حاصل ضرب عوامل دالة كثيرة حدود من الدرجة الخامسة، لها صفران تخيليان، وصفر غير صحيح، وصفران غير نسبيين، ووضِّح إجابتك .

40) حدد أي المعادلات الآتية تختلف عن الأخريات، ووضِّح إجابتك:

$r^3 - 8 = 0$	$r^2 - 1 = 0$	$r^3 + 1 = 0$	$r^4 + 1 = 0$

41) **تبرير:** اكتب مثالاً مضادًّا لكل عبارة فيما يأتي:

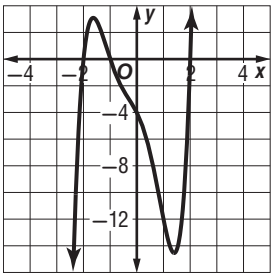
a) جميع دوال كثيرات الحدود التي تزيد درجتها على 2 لها على الأقل صفر حقيقي سالب.

b) جميع دوال كثيرات الحدود التي تزيد درجتها على 2 لها على الأقل صفر حقيقي موجب.

42) **اكتب:** وضِّح لزميلك كيف تستعمل قانون ديكارت للإشارات لتحديد عدد الأصفار الحقيقية الموجبة والسالبة الممكنة لدالة كثيرة الحدود: $f(x) = x^4 - 2x^3 + 6x^2 + 5x - 12$

تدريب على اختبار

43) استعمل التمثيل البياني للدالة: $f(x) = x^5 + x^4 - 3x^3 - 3x^2 - 4x - 4$،
وحدّد أيًّا مما يأتي لا يعد عاملاً لكثيرة الحدود $x^5 + x^4 - 3x^3 - 3x^2 - 4x - 4$؟



A $x - 2$ **B** $x - 1$

C $x + 2$ **D** $x + 1$

مراجعة تراكمية

أوجد $f(4)$, $f(-8)$ لكلِّ دالة ممَّا يأتي مستعملًا التعويض التركيبي: (الدرس 3-7)

44) $f(x) = 4x^3 + 6x^2 - 3x + 2$

45) $f(x) = 5x^4 - 2x^3 + 4x^2 - 6x$

46) $f(x) = 2x^5 - 3x^3 + x^2 - 4$

حلّل كلَّ كثيرة حدود مما يأتي تحليلًا تامًّا، وإن لم يكن ذلك ممكنًا فاكتب كثيرة حدود أولية: (الدرس 3-6)

47) $x^6 - y^6$

48) $4x^2y + 8xy + 16y - 3x^2z - 6xz - 12z$

49) $5a^3 - 30a^2 + 40a + 2a^2b - 12ab + 16b$

ملخص الفصل

المفاهيم الأساسية

الأعداد المركبة (الدرس 3-1)

- i هي الوحدة التخيلية، $i^2 = -1$ ، $i = \sqrt{-1}$
- العدد المركب هو أيُّ عدد يمكن كتابته على الصورة $a + bi$ ؛ حيث a و b عددان حقيقيان، ويسمى a الجزء الحقيقي، وb الجزء التخيُّلي.

القانون العام والمميز (الدرس 3-2)

- القانون العام لحل المعادلة التربيعية: $x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$

العمليات على كثيرات الحدود (الدرسان 3-3, 3-4)

- عند الجمع أو الطرح: أجمِّع الحدود المتشابهة.
- عند الضرب: أستعمل خاصية التوزيع.
- عند القسمة: أستعمل القسمة الطويلة أو التركيبية.

دوال كثيرات الحدود (الدرس 3-5)

- تعرَّف دالة كثيرة الحدود بأنها دالة متصلة يمكن وصفها بمعادلة كثيرة حدود بمتغير واحد.

حل معادلات كثيرات الحدود (الدرس 3-6)

- يمكن تحليل كثيرة الحدود باستعمال العامل المشترك الأكبر أو تجميع الحدود، أو بإحدى طرائق تحليل الدالة التربيعية.

نظريتا الباقي والعوامل (الدرس 3-7)

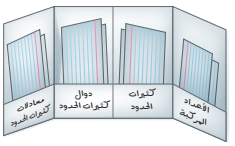
- نظرية الباقي: إذا قسمت كثيرة حدود $P(x)$ على $x - r$ ، فإن الباقي ثابت ويساوي $P(r)$.
- نظرية العوامل: تكون ثنائية الحد $x - a$ عاملًا من عوامل كثيرة الحدود $f(x)$ إذًا وفقط إذا كان $f(a) = 0$.

الجذور، والأصفار (الدرس 3-8)

- نظرية الأصفار المركبة المترافقة: إذا كان $a + bi$ صفرًا للدالة، فإن $a - bi$ صفر للدالة أيضًا.

المطويات منظم أفكار

تأكد أن المفاهيم الأساسية مدونة في مطويتك.



المفردات الأساسية

الوحدة التخيلية (108)
العد التخيلي البحت (108)
العدد المركب (109)
المركبان المترافقان (111)
القانون العام (115)
المميز (118)
التبسيط (125)
درجة كثيرة الحدود (127)
القسمة التركيبية (132)
كثيرة حدود بمتغير واحد (138)
المعامل الرئيس (138)
دالة كثيرة الحدود (139)
دالة القوة (139)
سلوك طرفي التمثيل البياني (140)
صفر الدالة (141)
كثيرة الحدود الأولية (145)
الصورة التربيعية (148)
نظرية الباقي (154)
التعويض التركيبي (154)
نظرية العوامل (156)
النظرية الأساسية في الجبر (160)

اختبر مفرداتك

بيّن ما إذا كانت كل عبارة فيما يأتي صحيحة أم خاطئة. وإذا كانت خاطئة فاستبدل ما تحته خط لتصبح العبارة صحيحة:

1) العدد 6i تخيلي بحت

2) يسمى القانون: $x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$ بالمميز

3) يُسمّى معامل الحد الأول في كثيرة الحدود المكتوبة بالصيغة القياسية المعامل الرئيس.

4) تُسمى كثيرة الحدود التي لا يمكن تحليلها كثيرة حدود بمتغير واحد.

5) دالة كثيرة الحدود هي دالة متصلة يمكن وصفها بمعادلة كثيرة حدود بمتغير واحد.

6) تبسيط عبارات تتضمن قوى، يعني إعادة كتابتها دون أقواس أو أسس سالبة.

7) القسمة التركيبية هي طريقة مختصرة لقسمة كثيرة حدود على ثنائية حد.

8) $(x^3)^2 + 3x^3 - 8 = 0$ هي دالة قوة.

مراجعة الدروس

3-1 الأعداد المركبة (الصفحات: 108-114)

بسّط كلًّا مما يأتي:

9) $\sqrt{-8}$ **10)** $(2-i)+(13+4i)$

11) $(6+2i)-(4-3i)$ **12)** $(6+5i)(3-2i)$

13) كهرباء: تبلغ المعاوقة في أحد أجزاء دائرة كهربائية $2i+3$ أوم، وفي الجزء الآخر منها $3i-4$ أوم. اجمع هذين العددين لتجد المعاوقة الكلية في الدائرة الكهربائية.

حل كلًّا من المعادلات الآتية:

14) $2x^2+50=0$ **15)** $4x^2+1=0$

مثال 1

حل المعادلة: $3x^2+12=0$

$3x^2+12=0$	المعادلة الأصلية
$3x^2=-12$	اطرح 12 من كلا الطرفين
$x^2=-4$	اقسم كلا الطرفين على 3
$x=\pm\sqrt{-4}$	خاصية الجذر التربيعي
$x=\pm 2i$	$\sqrt{-4}=\sqrt{4}\cdot\sqrt{-1}$

3-2 القانون العام والمميز (الصفحات: 115-122)

أجب عن الفروع a–c لكلِّ معادلة تربيعية فيما يأتي:

a) أوجد قيمة المميز.

b) أوجد عدد الجذور المختلفة، وحدد أنواعها.

c) حل المعادلة باستعمال القانون العام.

16) $x^2-10x+25=0$ **17)** $x^2+4x-32=0$

18) $2x^2+3x-18=0$ **19)** $4x^2-4x+1=0$

20) فيزياء: قذف محمد كرة رأسيًّا إلى أعلى بسرعة ابتدائية مقدارها 40 ft\s. إذا علمت أن ارتفاع الكرة عن الأرض (h) بالأقدام يعطى بالمعادلة $h=-16t^2+40t+5$، حيث t الزمن بالثواني، فأوجد الزمن اللازم لتصل الكرة إلى الأرض.

مثال 2

حل المعادلة: $x^2-4x-45=0$

$a=1, b=-4, c=-45$

القانون العام: $x=\dfrac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$

$a=1, b=-4, c=-45$: $=\dfrac{-(-4)\pm\sqrt{(-4)^2-4(1)(-45)}}{2(1)}$

بسّط: $=\dfrac{4\pm 14}{2}$

اكتب على صورة معادلتين: $x=\dfrac{4+14}{2}$, $x=\dfrac{4-14}{2}$

بسّط: $=9$, $=-5$

إذن الحلّان هُمَا: $-5, 9$.

3-3 العمليات على كثيرات الحدود (الصفحات: 125-130)

بسّط كلًّا مما يأتي مفترضًا أن أيًّا من المتغيرات لا يساوي صفرًا:

21) $\dfrac{14x^4y}{2x^3y^5}$

22) $3t(tn-5)$

23) $(4r^2+3r-1)-(3r^2-5r+4)$

24) $(x^4)^3$

25) $(m+p)(m^2-2mp+p^2)$

26) $3b(2b-1)+2b(b+3)$

مثال 3

بسّط كلًّا مما يأتي:

a) $(-4a^3b^5)(5ab^3)$

اضرب القوى: $(-4a^3b^5)(5ab^3)=(-4)(5)a^{3+1}b^{5+3}$

بسّط: $=-20a^4b^8$

b) $(2x^2+3x-8)+(3x^2-5x-7)$

$=(2x^2+3x^2)+(3x-5x)+[-8+(-7)]$

$=5x^2-2x-15$

3-4 قسمة كثيرات الحدود (الصفحات: 131-136)

بسّط كلَّ عبارة مما يأتي:

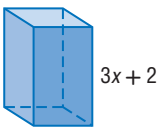
(27) $\dfrac{12x^4y^5 + 8x^3y^7 - 16x^2y^6}{4xy^5}$

(28) $(6y^3 + 13y^2 - 10y - 24) \div (y + 2)$

(29) $(a^4 + 5a^3 + 2a^2 - 6a + 4)(a + 2)^{-1}$

(30) $(4a^6 - 5a^4 + 3a^2 - a) \div (2a + 1)$

(31) هندسة: حجم المنشور المتوازي المستطيلات في الشكل المجاور يساوي $3x^3 + 11x^2 - 114x - 80$ وحدة مكعبة، فما مساحة القاعدة؟



مثال 4

بسّط العبارة: $(6x^3 - 31x^2 - 34x + 22) \div (2x - 1)$.

$$\begin{array}{r} 3x^2 - 14x - 24 \\ 2x - 1 \overline{)\ 6x^3 - 31x^2 - 34x + 22} \\ (-)\ 6x^3 - 3x^2 \\ \hline -28x^2 - 34x + 22 \\ (-)\ -28x^2 + 14x \\ \hline -48x + 22 \\ (-)\ -48x + 24 \\ \hline -2 \end{array}$$

وعليه يكون الناتج هو $3x^2 - 14x - 24 - \dfrac{2}{2x - 1}$.

3-5 دوال كثيرات الحدود (الصفحات: 138-144)

حدد الدرجة والمعامل الرئيس لكلِّ كثيرة حدود بمتغير واحد فيما يأتي، وإذا لم تكن كثيرة حدود بمتغير واحد، فاذكر السبب:

(32) $5x^6 - 3x^4 + x^3 - 9x^2 + 1$

(33) $6xy^2 - xy + y^2$

(34) $12x^3 - 5x^4 + 6x^8 - 3x - 3$

أوجد $p(x + h)$, $p(-2)$ لكلِّ دالة فيما يأتي :

(35) $p(x) = x^2 + 2x - 3$

(36) $p(x) = 3x^2 - x$

(37) $p(x) = 3 - 5x^2 + x^3$

مثال 5

حدّد درجة كثيرة الحدود $4x^3 + 3x^2 - 7x^7 + 4x - 1$ ؟ وما معاملها الرئيس؟

أكبر أس يساوي 7 ؛ لذا فدرجة كثيرة الحدود تساوي 7، والمعامل الرئيس هو -7.

مثال 6

إذا كان $p(x) = 3x + 2x^2 - x^3$، فأوجد $p(a - 2)$.

$$\begin{aligned} p(a - 2) &= 3(a - 2) + 2(a - 2)^2 - (a - 2)^3 \\ &= 3a - 6 + 2a^2 - 8a + 8 - (a^3 - 6a^2 + 12a - 8) \\ &= -a^3 + 8a^2 - 17a + 10 \end{aligned}$$

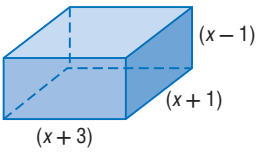
3-6 حل معادلات كثيرات الحدود (الصفحات: 145-152)

حلّ كلًّا من المعادلتين الآتيتين:

(38) $x^3 + 2x^2 - 35x = 0$

(39) $8x^4 - 10x^2 + 3 = 0$

(40) هندسة: إذا كان حجم المنشور في الشكل الآتي يساوي $315\ \text{in}^3$. فأوجد كلًّا من قيمة x وطول المنشور وعرضه وارتفاعه.



مثال 7

حلّ المعادلة: $4x^4 - 25x^2 + 36 = 0$.

$(x^2 - 4)(4x^2 - 9) = 0$	حلّل إلى العوامل
$x^2 - 4 = 0$ أو $4x^2 - 9 = 0$	خاصية الضرب الصفري
$x^2 = 4$ $\quad x^2 = \dfrac{9}{4}$	أضف 9 لكلا الطرفين، ثم اقسم على 4
$x = \pm 2$ $\quad x = \pm\dfrac{3}{2}$	أوجد الجذر التربيعي

الحلول هي: $-2, 2, -\dfrac{3}{2}, \dfrac{3}{2}$.

3-7 نظريتا الباقي والعوامل (الصفحات: 154-159)

أوجد $f(4)$, $f(-2)$ لكلِّ دالة فيما يأتي مستعملًا التعويض التركيبي:

41 $f(x) = x^2 - 3$

42 $f(x) = x^2 - 5x + 4$

43 $f(x) = x^3 + 4x^2 - 3x + 2$

44 $f(x) = 2x^4 - 3x^3 + 1$

في كلٍّ مما يأتي كثيرة حدود وأحد عواملها. أوجد عواملها الأخرى:

45 $3x^3 + 20x^2 + 23x - 10,\ x + 5$

46 $2x^3 + 11x^2 + 17x + 5,\ 2x + 5$

47 $x^3 + 2x^2 - 23x - 60,\ x - 5$

مثال 8

حدد ما إذا كان $x - 6$ عاملًا من عوامل كثيرة الحدود:
$x^3 - 2x^2 - 21x - 18$

6	1	−2	−21	−18
		6	24	18
	1	4	3	0

$x - 6$ عامل من عوامل كثيرة الحدود؛ لأن باقي قسمة كثيرة الحدود عليه يساوي صفرًا.

3-8 الجذور والأصفار (الصفحات: 160-166)

اذكر العدد الممكن للأصفار الحقيقية الموجبة، والحقيقية السالبة، والتخيلية لكلِّ دالة ممَّا يأتي:

48 $f(x) = -2x^3 + 11x^2 - 3x + 2$

49 $f(x) = -4x^4 - 2x^3 - 12x^2 - x - 23$

50 $f(x) = x^6 - 5x^3 + x^2 + x - 6$

51 $f(x) = -2x^5 + 4x^4 + x^2 - 3$

52 $f(x) = -2x^6 + 4x^4 + x^2 - 3x - 3$

مثال 9

اذكر العدد الممكن للأصفار الحقيقية الموجبة، والحقيقية السالبة، والتخيلية للدالة: $f(x) = 3x^4 + 2x^3 - 2x^2 - 26x - 48$.

تتغير إشارة الدالة $f(x)$ مرة واحدة؛ لذا يوجد صفر حقيقي موجب واحد.

تتغير إشارة الدالة $f(-x)$ ثلاث مرات؛ لذا يوجد للدالة صفر واحد، أو ثلاثة أصفار حقيقية سالبة.

الدالة ليس لها أصفار تخيلية، أو لها صفران تخيليان.

اختبار الفصل

بسّط كلًّا مما يأتي:

1) $\frac{2-i}{1+3i}$

2) $(2+3i)-(2-3i)$

3) $(3-i)\,.\,(4+2i)$

بسّط كلًّا مما يأتي:

4) $(3a)^2(7b)^4$

5) $(7x-2)(2x+5)$

6) $(2x^2+3x-4)-(4x^2-7x+1)$

7) $(4x^3-x^2+5x-4)+(5x-10)$

8) $(x^4+5x^3+3x^2-8x+3)\div(x+3)$

9) $(3x^3-5x^2-23x+24)\div(x-3)$

10) إذا كانت $c(x)=3x^3+5x^2-4$ ، فما قيمة $4c(3b)$؟

حلّل كلَّ كثيرة حدود فيما يأتي، وإذا لم يكن ذلك ممكنًا فاكتب كثيرة حدود أولية:

11) $8y^4+x^3y$

12) $2x^2+2x+1$

13) $a^2x+3ax+2x-a^2y-3ay-2y$

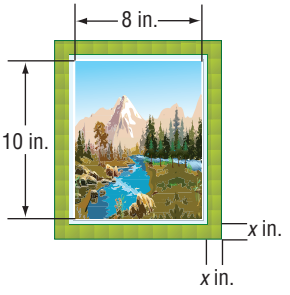
حل كلًّا من المعادلات الآتية:

14) $8x^3+1=0$

15) $x^4-11x^2+28=0$

16) حل المعادلة الآتية باستعمال القانون العام: $x^2-4x+3=0$

17) **إطارات:** إذا كانت مساحة الصورة وإطارها في الشكل الآتي 168 in^2، فما عرض الإطار؟



18) **اختيار من متعدد:** إذا كان $f(x)=x^4-3x^3+5x-3$، فما قيمة $f(-2)$؟

A 37 B 27

C -33 D -21

19) فيما يأتي كثيرة حدود وأحد عواملها . أوجد عواملها الأخرى:

$2x^3+15x^2+22x-15\ ;\ x+5$

اذكر العدد الممكن للأصفار الحقيقية الموجبة، والحقيقية السالبة، والتخيلية لكلٍّ من الدالتين الآتيتين:

20) $p(x)=x^3-x^2-x-3$

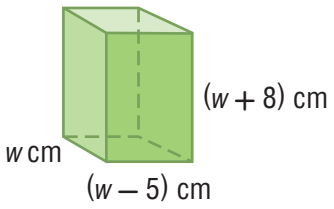
21) $p(x)=2x^6+5x^4-x^3-5x-1$

أوجد جميع أصفار كلٍّ من الدالتين الآتيتين:

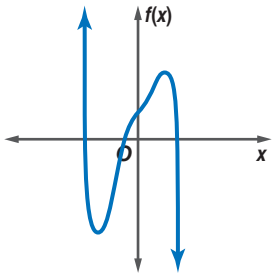
22) $p(x)=x^3-4x^2+x+6$

23) $p(x)=x^3+2x^2+4x+8$

24) **هندسة:** إذا كان حجم المنشور المتوازي المستطيلات الموضَّح بالشكل أدناه 612 cm^3، فأوجد أبعاده.

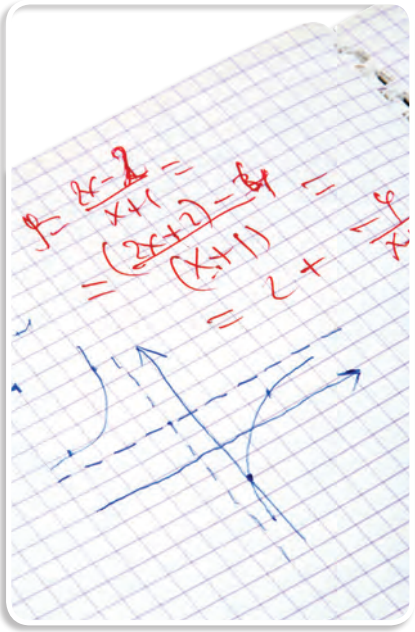


25) صف سلوك طرفي التمثيل البياني الآتي، وحدد ما إذا كانت درجة دالة كثيرة الحدود فردية أم زوجية. واذكر عدد الأصفار الحقيقية للدالة.



رسم شكل

يعدُّ رسم الشكل طريقة مفيدة في حل المسألة، فهو يعطي تصورًا لكيفية الحل، لذا ارسم شكلًا يمثّل المسألة في ورقة مسودة أو في ورقة الإجابة (إذا سمح بذلك).



استراتيجيات لرسم شكل

خطوة 1

اقرأ المسألة بعناية.

واسأل نفسك الأسئلة الآتية:

- ما المطلوب حله؟
- ما معطيات المسألة؟
- ما المجاهيل التي يُراد نمذجتها وإيجادها؟

خطوة 2

ارسم شكلًا وضع عليه المسميات والبيانات على أن يكون:

- واضحًا ودقيقًا ما أمكن.
- تشتمل المسميات التي توضع على الشكل على جميع معطيات المسألة.

خطوة 3

حل المسألة.

- استعمل الشكل لمساعدتك على نمذجة المسألة بمعادلة، ثم حلَّها.
- تحقق من معقولية إجابتك.

مثال

اقرأ المسألة وحدد المطلوب، واستعمل المعلومات المعطاة لحلِّها.

لدى فيصل بركة سباحة سطحها على شكل مستطيل أبعاده 14 ft, 25 ft، وأراد أن يرصف حولها ممرًّا متساوي العرض، إذا كانت مساحة سطح البركة مع الممرِّ 672 ft^2، فما عرض الممرِّ؟

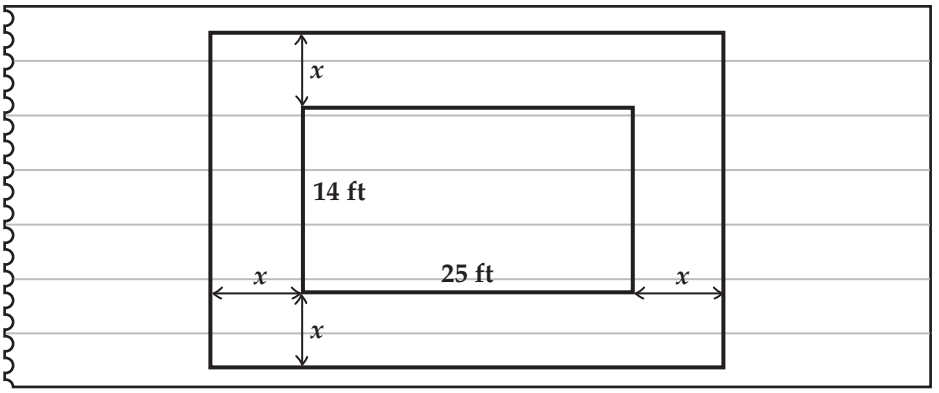
A 2.75 ft

B 3 ft

C 3.25 ft

D 3.5 ft

ارسم شكلًا ليساعدك على تصوُّر المسألة، وافترض أن x يمثل عرض الممرِّ غير المعلوم.



طول البركة مع الممرِّ يساوي $25 + 2x$ ، وعرضها مع الممرِّ يساوي $14 + 2x$.

اضرب العبارتين السابقتين لإيجاد مساحة سطح البركة والممر معًا، وساوِ الناتج بالقيمة المعطاة وهي $672\ ft^2$ ثم حُلَّها لإيجاد x.

$$(25 + 2x)(14 + 2x) = 672$$
$$350 + 78x + 4x^2 = 672$$
$$4x^2 + 78x - 322 = 0$$
$$x = 3.5 \text{ أو } x = -23$$

وبما أن عرض الممرِّ لا يمكن أن يكون سالبًا، فإن القيمة الأنسب هي 3.5 ft

إذن الإجابة الصحيحة هي D

تمارين ومسائل

اقرأ كل مسألة من المسألتين الآتيتين، وحدد المطلوب واستعمل المعطيات المعطاة لحلها:

1) لدى مزارع سياج طوله 240 ft، ويريد أن يحيط به حديقة مستطيلة الشكل على أن يكون جدار منزله أحد جوانبها. فما أكبر مساحة ممكنة للحديقة؟

A $7200\ ft^2$

B $4960\ ft^2$

C $3600\ ft^2$

D $3280\ ft^2$

2) يتم تصنيع الحلقات المعدنية بعمل ثقب في رقاقة معدنية دائرية. إذا صنعت حلقة بعمل ثقب عند مركز رقاقة معدنية قطرها 1.8 in، وكانت مساحة سطح الحلقة $0.65\pi\ in^2$ ، فما نصف قطر الثقب؟

A 0.35 in

B 0.38 in

C 0.40 in

D 0.42 in

أسئلة الاختيار من متعدد

اختر رمز الإجابة الصحيحة لكل مما يأتي:

1) أبسط صورة للمقدار $(5n^2 + 11n - 6) - (2n^2 - 5)$ هي:

A $3n^2 + 11n - 11$

B $3n^2 + 11n - 1$

C $7n^2 + 11n - 11$

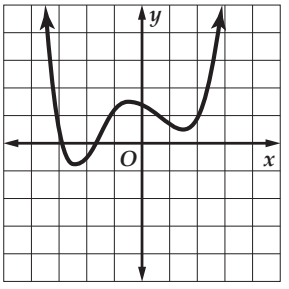
D $7n^2 + 11n - 1$

2) أيٌّ مما يأتي ليس حلاً للمعادلة: $x^3 - 37x - 84 = 0$ ؟

A -4 **C** 6

B -3 **D** 7

3) كم صفرًا حقيقيًّا لدالة كثيرة الحدود الممثلة بيانيًّا أدناه؟



A 2 **C** 4

B 3 **D** 5

4) إذا كانت المصفوفة $\begin{bmatrix} x+1 & x \\ -2 & 8 \end{bmatrix}$ ليس لها نظير ضربي ، فإن قيمة x تساوي:

A $\frac{4}{3}$

B $\frac{4}{5}$

C $-\frac{4}{3}$

D $-\frac{4}{5}$

5) استعمل عبد الرحمن الدالة:
$P(x) = -0.000047x^2 + 0.027x + 3$
لتقدير عدد سكان المدينة التي يسكنها ما بين عامي 1400، 1440هـ ؛ حيث x عدد السنوات منذ عام 1400هـ ، P عدد السكان بالملايين. فما قيمة $P(20)$ التي تمثل عدد سكان هذه المدينة عام 1420هـ ؟

A 2 مليون تقريبًا

B 2.5 مليون تقريبًا

C 3 ملايين تقريبًا

D 3.5 ملايين تقريبًا

6) أبسط صورة للمقدار $\frac{2}{1-5i}$ هي:

A $\frac{1}{13} - \frac{5}{13}i$

B $\frac{1}{2} - \frac{5}{2}i$

C $\frac{1}{13} + \frac{5}{13}i$

D $2 - \frac{2}{5}i$

7) ما قيمة مميِّز المعادلة: $x^2 - x - 20 = 0$ ؟

A 9 **C** 5

B 81 **D** -4

8) إذا كان $\underline{A} = \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$ ، $\underline{B} = \begin{bmatrix} -2 & 3 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ وكانت $\underline{X}$ مصفوفة رتبتها 2×2 بحيث $\underline{X} = 2\underline{A} - \underline{B}$ فإن:

A $\underline{X} = 3\,\underline{B}$

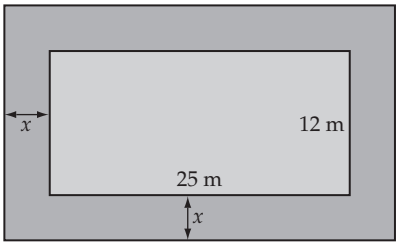
B $\underline{X} = 2\,\underline{A}$

C $\underline{X} = -2\,\underline{B}$

D $\underline{X} = 3\,\underline{A}$

أسئلة ذات إجابات قصيرة

9) يبين الشكل الآتي حديقة محاطة بممر عرضه x مترًا. فإذا علمت أن مساحة الحديقة مع الممر $558\ m^2$ ، فأوجد عرض الممر بالأمتار.



10) حلّل المقدار: $64a^4 + ab^3$ تحليلًا تامًّا، وبيّن خطوات الحلّ.

11) بسّط المقدار:

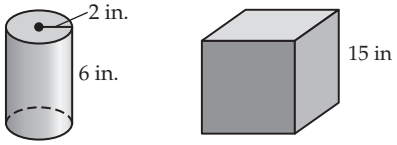
$$\frac{3x^3 - 4x^2 - 28x - 16}{x + 2}$$

واكتب إجابتك على صورة حاصل ضرب عوامل مبينًا خطوات الحل.

12) ما قيمة a في المعادلة المصفوفية الآتية؟

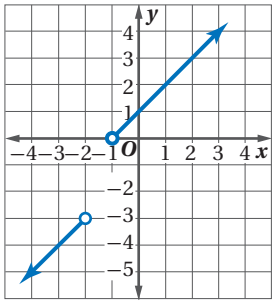
$$\begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 21 \\ 9 \end{bmatrix}$$

13) يريد صالح أن يملأ الإناء المكعب بالماء مستعملًا العلبة الأسطوانية في الشكل أدناه. فكم مرة يستعمل العلبة؟



أسئلة ذات إجابات مطولة

14) اكتب الدالة المتعددة التعريف التي لها التمثيل البياني أدناه:



هل تحتاج إلى مساعدة إضافية؟														
إذا لم تستطع حل سؤال ...	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
فعد إلى الدرس ...	3-3	3-6	3-8	2-5	3-5	3-1	3-2	2-2	3-6	3-5	3-4	2-5	3-8	1-3

الفصل 4

العلاقات والدوال العكسية والجذرية
Inverses and Radical Functions and Relations

فيما سبق

درست تبسيط كثيرات الحدود.

والآن

- أجد معكوس دالة، وتركيب دالتين.
- أمثّل بيانيًّا دوال ومتباينات الجذر التربيعي وأحلّلها.
- أبسّط معادلات تتضمن جذورًا وأسسًا نسبية وأحلّها.

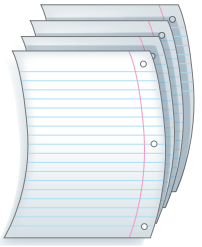
لماذا؟

إدارة الموارد المالية:
يعد ربط إدارة الموارد المالية بالرياضيات مهارة، وإذا أتقنتها فإنك ستستفيد منها في مجالات حياتك المختلفة. إن تعلم إدارة مواردك المالية يساعدك على وضع ميزانية والعيش ضمن حدودها، وسوف تتعرض في هذا الفصل لمواقف مالية مثل: التوفير، التضخم، صرف العملة.

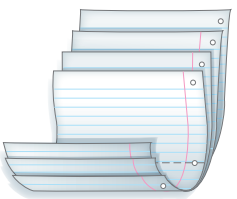
المطويات منظم أفكار

العلاقات والدوال العكسية والجذرية: اعمل هذه المطوية لتساعدك على تنظيم ملاحظاتك حول العلاقات والدوال العكسية والجذرية، مبتدئًا بأربع أوراق من دفتر الملاحظات.

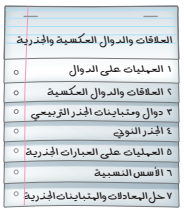
1. **ثبّت** الأوراق الأربع بعضها فوق بعض، بحيث تعلو كل ورقة الورقة التي أمامها بمقدار 2.5 سم.



2. **اطو** أسفل الورقات الأربع إلى أعلى، وحاذِ الحوافَ بحيث تكون المسافات بين نهايات جميع الأوراق متساوية.



3. **عندما** تتأكد من تساوي المسافات بين الحواف، اثنِ الأوراق جيدًا، ثم ثبتها على طول خط الطي، ثم اقلب المطوية واكتب عنوان الفصل وعناوين الدروس كما في الشكل.



رابط الدرس الرقمي

www.ien.edu.sa

التهيئة للفصل 4

تشخيص الاستعداد:

أجب عن الاختبار الآتي، وارجع إلى "المراجعة السريعة" ؛ لمساعدتك على ذلك.

اختبار سريع

بسّط كلَّ عبارة فيما يأتي: (يستعمل مع الدرس 2-4)

1) $\sqrt{28}$

2) $\sqrt{\frac{25}{4}}$

3) **طاقة حركية:** يمكن تحديد سرعة كرة بالمعادلة $v = \sqrt{\frac{2KE}{m}}$، حيث (KE) تشير إلى الطاقة الحركية للكرة، (m) إلى كتلة الكرة. بسّط هذه المعادلة معتبرًا كتلة الكرة $50\,\text{kg}$.

بسّط كلًّا من العبارات الآتية مستعملًا القسمة التركيبية: (يستعمل مع الدروس 4-4 إلى 4-6)

4) $(5x^2 - 22x - 15) \div (x - 5)$

5) $(3x^2 + 14x - 12) \div (x + 4)$

6) $(2x^3 - 7x^2 - 36x + 36) \div (x - 6)$

7) $(3x^4 - 13x^3 + 17x^2 - 18x + 15) \div (x - 3)$

8) **مبيعات:** يمكن تقدير عدد السلع المبيعة من متجر بالمعادلة $n = \frac{4000x^2}{x^2 + 50}$، حيث x تمثل المبلغ الذي أُنفق بمئات الريالات على الدعاية، n عدد السلع المبيعة.

a) أجرِ عملية القسمة المشار إليها بالعبارة $\frac{4000x^2}{x^2 + 50}$

b) ما العدد التقريبي للسلع التي ستباع، إذا أنفق المتجر 1000 ريال على الدعاية؟

مراجعة سريعة

مثال 1

بسّط العبارة $\sqrt{\frac{45}{20}}$.

$\sqrt{\frac{45}{20}} = \frac{\sqrt{45}}{\sqrt{20}}$ — خاصية قسمة الجذور

$= \frac{\sqrt{45}}{\sqrt{20}} \times \frac{\sqrt{20}}{\sqrt{20}}$ — اضرب في $\frac{\sqrt{20}}{\sqrt{20}}$

$= \frac{\sqrt{900}}{20}$ — خاصية ضرب الجذور

$= \frac{30}{20}$ — أوجد قيمة $\sqrt{900}$

$= \frac{3}{2} = 1.5$ — بسّط

مثال 2

بسّط العبارة $(3x^4+4x^3+x^2+9x-6) \div (x + 2)$، مستعملًا القسمة التركيبية.

$x - r = x + 2$، لذلك $r = -2$.

-2	3	4	1	9	-6
	↓	-6	4	-10	2
	3	-2	5	-1	-4

النتيجة هي: $3x^3 - 2x^2 + 5x - 1 - \frac{4}{x+2}$.

رابط الدرس الرقمي

www.ien.edu.sa

4-1

العمليات على الدوال
Operations on Functions

فيما سبق

درست إجراء العمليات على كثيرات الحدود.

والآن

- أجد مجموع دالتين والفرق بينهما وحاصل ضربهما وقسمتهما.
- أجد تركيب دالتين.

المفردات

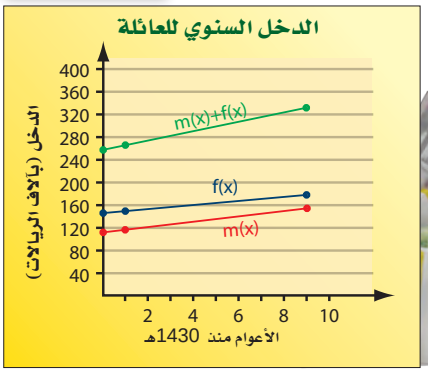
تركيب دالتين

composition of functions

لماذا؟

تبين التمثيلات البيانية المجاورة الدخل السنوي لعائلة منذ عام 1430هـ؛ حيث $f(x)$ تعبِّر عن الدخل السنوي للزوج، و$m(x)$ تعبِّر عن الدخل السنوي للزوجة.

يمكن التعبير عن إجمالي الدخل السنوي لتلك العائلة بالدالة $f(x) + m(x)$.



العمليات الحسابية: لقد أجريت العمليات الحسابية على كثيرات الحدود في الفصل السابق. ويمكنك إجراء عمليات الجمع، والطرح، والضرب، والقسمة على الدوال أيضًا.

يمكنك الاعتماد على القواعد الآتية لإجراء العمليات الحسابية على الدوال:

مفهوم أساسي — العمليات على الدوال

أضف إلى مطويتك

العملية	التعريف	مثال لتكن $f(x) = 2x$, $g(x) = -x + 5$
الجمع	$(f+g)(x) = f(x) + g(x)$	$2x + (-x + 5) = x + 5$
الطرح	$(f-g)(x) = f(x) - g(x)$	$2x - (-x + 5) = 3x - 5$
الضرب	$(f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x)$	$2x(-x + 5) = -2x^2 + 10x$
القسمة	$\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)}, g(x) \neq 0$	$\frac{2x}{-x+5}, x \neq 5$

مثال 1 جمع الدوال وطرحها

إذا كان $g(x) = 2x + 1$, $f(x) = x^2 - 4$، فأوجد كلَّ دالة فيما يأتي:

a) $(f+g)(x)$

$(f+g)(x) = f(x) + g(x)$ — جمع دالتين

$= (x^2 - 4) + (2x + 1)$ — عوِّض

$= x^2 + 2x - 3$ — بسِّط

b) $(f-g)(x)$

$(f-g)(x) = f(x) - g(x)$ — طرح دالتين

$= (x^2 - 4) - (2x + 1)$ — عوِّض

$= x^2 - 2x - 5$ — بسِّط

تحقق من فهمك

$f(x) = x^2 + 5x - 2$, $g(x) = 3x - 2$

1A) $(f+g)(x)$ **1B)** $(f-g)(x)$

في المثال 1، الدالتان $g(x)$ و $f(x)$ لهما المجال نفسه، وهو مجموعة الأعداد الحقيقية. وكذلك الدالتان $(f+g)(x)$ و $(f-g)(x)$ مجالاهما مجموعة الأعداد الحقيقية. يتكون مجال جميع الدوال الناتجة عن عمليات الجمع أو الطرح أو الضرب للدالتين $g(x)$ و $f(x)$ من تقاطع مجاليهما. كما أن مجال الدالة الناتجة عن قسمة هاتين الدالتين هو تقاطع مجاليهما أيضًا، مع استثناء القيم التي تجعل المقام يساوي صفرًا.

مراجعة المفردات

التقاطع

تقاطع مجموعتين هو مجموعة العناصر المشتركة بين هاتين المجموعتين، ويرمز له بالرمز ∩.

مثال 2 ضرب الدوال وقسمتها

إذا كان $f(x) = x^2 + 7x + 12, g(x) = 3x - 4$، فأوجد كلَّ دالة مما يأتي:

a $(f \cdot g)(x)$

$(f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x)$ ضرب دالتين

$= (x^2 + 7x + 12)(3x - 4)$ عوّض

$= 3x^3 + 21x^2 + 36x - 4x^2 - 28x - 48$ خاصية التوزيع

$= 3x^3 + 17x^2 + 8x - 48$ بسّط

b $\left(\frac{f}{g}\right)(x)$

$\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$ قسمة دالتين

$= \frac{x^2 + 7x + 12}{3x - 4}, x \neq \frac{4}{3}$ عوّض

بما أن $x = \frac{4}{3}$ تجعل المقام $3x - 4$ يساوي صفرًا، فإن $\frac{4}{3}$ تستثنى من مجال الدالة $\left(\frac{f}{g}\right)(x)$.

تنبيه!

قسمة دالتين

بما أنه قد تم تعلُّم قسمة كثيرات الحدود في الفصل 3، فإنه سيُكتفي عند إيجاد ناتج قسمة دالتين (في هذا الدرس) بكتابتهما في صورة دالة نسبية، وتحديد مجالها من دون إجراء عملية القسمة.

تحقق من فهمك

$f(x) = x^2 - 7x + 2, g(x) = x + 4$

2A $(f \cdot g)(x)$

2B $\left(\frac{f}{g}\right)(x)$

تركيب دالتين: هي إحدى الطرائق التي تستعمل لدمج دالتين. وعند **تركيب دالتين** فإن قيم دالة منهما تستعمل لحساب قيم الدالة الأخرى.

قراءة الرياضيات

تركيب دالتين

يرمز إلى تركيب الدالتين f و g بالرمز $f \circ g$ أو $f[g(x)]$، وتقرأ f بعد g.

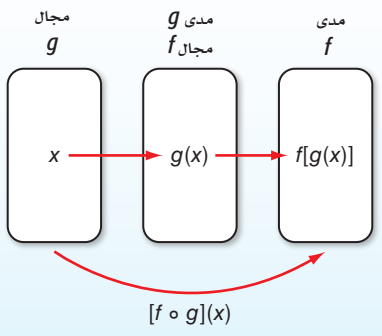
مفهوم أساسي تركيب دالتين

أضف إلى مطويتك

التعبير اللفظي: إذا كانت f و g دالتين وكان مدى g مجموعة جزئية من مجال f. فإنه يمكن إيجاد دالة التركيب $f \circ g$ بالشكل:

$[f \circ g](x) = f[g(x)]$

النموذج:



يمكن أن يكون تركيب دالتين غير معرّف. فإذا كانت f و g دالتين، فإن $[f \circ g](x)$ يكون معرفًا فقط عند قيم x التي تجعل $g(x)$ عنصرًا في مجال الدالة f. وكذلك تكون الدالة $[g \circ f](x)$ معرّفة فقط عند قيم x التي تجعل $f(x)$ عنصرًا في مجال الدالة g.

مثال 3 تركيب دالتين

أوجد $[g \circ f](x)$, $[f \circ g](x)$، لكل زوج من الدوال الآتية، إذا كان ذلك ممكنًا:

a) $f = \{(1, 8), (0, 13), (14, 9), (15, 11)\}, g = \{(8, 15), (5, 1), (10, 14), (9, 0)\}$

لإيجاد $f \circ g$، أوجد قيم $g(x)$ أولًا، ثم استعملها كقيم من مجال الدالة f لإيجاد $f[g(x)]$

$f[g(10)] = f(14) = 9$ **$g(10) = 14$**
$f[g(9)] = f(0) = 13$ **$g(9) = 0$**
$f[g(8)] = f(15) = 11$ **$g(8) = 15$**
$f[g(5)] = f(1) = 8$ **$g(5) = 1$**

$f \circ g = \{(8, 11), (5, 8), (10, 9), (9, 13)\}$

لإيجاد $g \circ f$، أوجد قيم $f(x)$ أولًا ثم استعملها كقيم من مجال الدالة g ، لإيجاد $g[f(x)]$

$g[f(14)] = g(9) = 0$ **$f(14) = 9$**
$g[f(15)] = g(11)$ **$f(15) = 11$**
$g(11)$ غير معرّفة
$g[f(1)] = g(8) = 15$ **$f(1) = 8$**
$g[f(0)] = g(13)$ **$f(0) = 13$**
$g(13)$ غير معرّفة

وبما أن 13 , 11 لا ينتميان لمجال الدالة g فإن الدالة $g \circ f$ غير معرّفة عند $x = 11$ و $x = 13$ وبما أن $g[f(14)] = 0, g[f(1)] = 15$ ، فإن $g \circ f = \{(1, 15), (14, 0)\}$.

b) $f(x) = 2x - 5, g(x) = 4x$

$[f \circ g](x) = f[g(x)]$	تعريف تركيب الدالتين	$[g \circ f](x) = g[f(x)]$
$= f(4x)$	عوّض	$= g(2x - 5)$
$= 2(4x) - 5$	عوّض	$= 4(2x - 5)$
$= 8x - 5$	بسّط	$= 8x - 20$

تحقق من فهمك

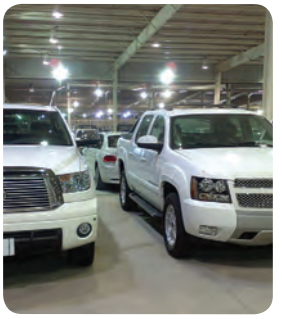
3A) $f(x) = \{(3, -2), (-1, -5), (4, 7), (10, 8)\}$, $g(x) = \{(4, 3), (2, -1), (9, 4), (3, 10)\}$

3B) $f(x) = x^2 + 2, g(x) = x - 6$

لاحظ أنه في معظم الحالات تكون $f \circ g \neq g \circ f$؛ لذا فإن ترتيب الدالتين عند تركيبهما مهم.

إرشادات للدراسة

التركيب
كن حذرًا من الخلط بين عملية تركيب دالتين $f[g(x)]$ وعملية ضرب دالتين $(f \cdot g)(x)$.



الربط مع الحياة

في أعقاب الأزمة المالية العالمية عام 2009م، هبطت مبيعات كبرى شركات صناعة السيارات الأمريكية بصورة كبيرة بلغت 53% في أكبر انخفاض لها منذ 42 عامًا، مما اضطر هذه الشركات إلى خفض حجم إنتاجها بمقدار 40%.

مثال 4 من واقع الحياة — **استعمال تركيب دالتين**

سيارات: استعمل تركيب دالتين لحل المسألة الآتية: قدَّم معرض لبيع السيارات عرضًا بتخفيض 12% من قيمة كل سيارة جديدة. مضافًا إليه خصم مقداره 1500 ريال يقدمه وكيل شركة السيارات. فإذا أراد أحمد شراء سيارة جديدة سعرها 64500 ريال، فهل سيكون السعر النهائي للسيارة أقل إذا طبق التخفيض قبل الخصم أم بعده؟

افهم: **المعطيات:**
- نسبة التخفيض من قيمة كل سيارة 12%، وقيمة الخصم 1500 ريال.
- سعر السيارة التي يريد أحمد شراءها 64500 ريال.

المطلوب: هل سيكون السعر النهائي للسيارة أقل إذا طبق التخفيض قبل الخصم أم بعده؟

خطط: افترض أن x تمثل السعر الأصلي للسيارة، و$d(x)$ تمثل السعر بعد التخفيض، و $r(x)$ تمثل السعر بعد الخصم؛ إذن $[r \circ d]$ (x) تمثل السعر إذا طبق التخفيض قبل الخصم، و $[d \circ r]$ (x) تمثل السعر إذا طبق الخصم قبل التخفيض.

حل: اكتب معادلتين لدالتي التخفيض $d(x)$ ، والخصم $r(x)$.

يخفض المعرض 12% من السعر الأصلي للسيارة. فتكون دالة التخفيض

$$d(x) = x - 0.12x = 0.88x$$

يخصم الوكيل1500 ريال من سعر كل سيارة جديدة؛ لذا فإن دالة الخصم هي:

$$r(x) = x - 1500$$

إذا طُبّق التخفيض قبل الخصم، فإن السعر النهائي للسيارة يُمثّل بـ $[r \circ d](64500)$.

$$[r \circ d](x) = r[d(x)]$$

$$\begin{aligned}[r \circ d](64500) &= r\,[d(64500)] \\ &= r\,[0.88\ (64500)] \\ &= r(56760) \\ &= 56760 - 1500 = 55260\end{aligned}$$

أما إذا طُبّق الخصم قبل التخفيض، فإن السعر النهائي للسيارة يُمثّل بـ $[d \circ r](64500)$.

$$[d \circ r](x) = d[r(x)]$$

$$\begin{aligned}[d \circ r](64500) &= d\,[r(64500)] \\ &= d(64500 - 1500) \\ &= d(63000) \\ &= 0.88\ (63000) \\ &= 55440\end{aligned}$$

وبما أن $[d \circ r](64500) = 55440$, $[r \circ d](64500) = 55260$.

فإن السعر النهائي للسيارة سيكون أقل عندما يُطبق التخفيض قبل الخصم.

تحقق: تبدو الإجابة منطقية؛ لأن تخفيضًا نسبته 12% سيتم تطبيقه على قيمة أكبر؛ لذا ستكون قيمة التخفيض أعلى.

تحقق من فهمك

4) تسوق: يقدم محل أجهزة كهربائية عرضين معًا على جهاز كهربائي هما: خصم 35 ريالًا، وتخفيض نسبته 15% ، فإذا كان سعر الجهاز الأصلي 300 ريال، فأيُّهما يعطي سعرًا أقل: تطبيق التخفيض قبل الخصم أم بعده؟

تأكد

المثالان 2 , 1 أوجد $(f+g)(x)$, $(f-g)(x)$, $(f\cdot g)(x)$, $\left(\frac{f}{g}\right)(x)$ للدالتين $f(x)$, $g(x)$ في كلٍّ مما يأتي:

1) $f(x)=x+2$, $g(x)=3x-1$

2) $f(x)=x^2-5$, $g(x)=-x+8$

مثال 3 أوجد $f\circ g$, $g\circ f$ لكلِّ زوج من الدوال الآتية، إذا كان ذلك ممكنًا:

3) $f=\{(2,5),(6,10),(12,9),(7,6)\}$, $g=\{(9,11),(6,15),(10,13),(5,8)\}$

4) $f=\{(-5,4),(14,8),(12,1),(0,-3)\}$, $g=\{(-2,-4),(-3,2),(-1,4),(5,-6)\}$

أوجد $[g\circ f](x)$, $[f\circ g](x)$ في كلٍّ مما يأتي، إذا كان ذلك ممكنًا.

5) $f(x)=-3x$, $g(x)=5x-6$

6) $f(x)=x+4$, $g(x)=x^2+3x-10$

مثال 4

7) ادِّخار: يُقتطع ما نسبته 8% من راتب موظف للادِّخار. ويستطيع الموظف أن يختار بحيث يكون الاقتطاع قبل تسديده قسطًا آخر قيمته 17.5% من الراتب، أو بعده. فإذا كان راتب الموظف قبل الاقتطاع وتسديد القسط 9500 ريال، فهل يكون ادّخاره أكثر إذا كان الاقتطاع قبل تسديد القسط أم بعده؟ وضِّح إجابتك.

تدرب وحل المسائل

المثالان 2 , 1 أوجد $(f+g)(x)$, $(f-g)(x)$, $(f\cdot g)(x)$, $\left(\frac{f}{g}\right)(x)$ للدالتين $f(x)$, $g(x)$ في كلٍّ مما يأتي:

8) $f(x)=x-1$, $g(x)=5x-2$

9) $f(x)=x^2$, $g(x)=-x+1$

10) $f(x)=3x^2-4$, $g(x)=x^2-8x+4$

11) رياضة المشي: يمشي راشد على ممر متحرك. فإذا كانت سرعته يُعبر عنها بالدالة: $I(x)=3x-4$، وسرعة الممر المتحرك يعبر عنها بالدالة: $W(x)=4x+7$، حيث x الزمن بالثواني.

a) ما الدالة التي تعبِّر عن سرعته الكلية إذا كان يمشي في اتجاه سير الممر المتحرك؟

b) ما الدالة التي تعبِّر عن سرعته الكلية إذا مشى في عكس اتجاه سير الممر المتحرك؟

مثال 3 أوجد $f\circ g$, $g\circ f$ لكلِّ زوج من الدوال الآتية، إذا كان ذلك ممكنًا:

12) $f=\{(-8,-4),(0,4),(2,6),(-6,-2)\}$, $g=\{(4,-4),(-2,-1),(-4,0),(6,-5)\}$

13) $f=\{(5,13),(-4,-2),(-8,-11),(3,1)\}$, $g=\{(-8,2),(-4,1),(3,-3),(5,7)\}$

14) $f=\{(-4,-14),(0,-6),(-6,-18),(2,-2)\}$, $g=\{(-6,1),(-18,13),(-14,9),(-2,-3)\}$

15) $f=\{(-1,11),(2,-2),(5,-7),(4,-4)\}$, $g=\{(5,-4),(4,-3),(-1,2),(2,3)\}$

أوجد $[g\circ f](x)$, $[f\circ g](x)$ في كلٍّ مما يأتي، إذا كان ذلك ممكنًا:

16) $f(x)=2x^2-x+1$, $g(x)=4x+3$

17) $f(x)=4x-1$, $g(x)=x^3+2$

18) $f(x)=2x^2$, $g(x)=8x^2+3x$

مثال 4

19) صناعة: ينتج مصنع نوعًا من الفناجين. فإذا كان ثمن بيع x فنجان يُعبر عنه بالدالة: $r(x) = 6.5x$، وتكلفة إنتاج x فنجان يُعبر عنها بالدالة: $c(x) = 0.75x + 1850$.

a) اكتب الدالة $p(x)$ التي تعبّر عن ربح المصنع إذا باع x فنجان.

b) أوجد ربح المصنع عند بيع 500 فنجان و1000 فنجان و5000 فنجان.

20) تسوق: يرغب سامر في شراء تلفاز ذي شاشة مسطحة معروض للبيع بخصم نسبته 35% من السعر الأصلي. فإذا كان سعره الأصلي 2299 ريالًا، ويضاف إليه 6.25% بدل ضمان بعد الخصم.

a) اكتب دالتين: الأولى تمثل سعر التلفاز بعد الخصم $p(x)$ ، والثانية سعر التلفاز بعد إضافة بدل الضمان $t(x)$.

b) أيّ الدالتين الآتيتين يمثّل سعر التلفاز النهائي: $[p \circ t](x)$، أم $[t \circ p](x)$؟ وضّح إجابتك.

c) كم سيدفع سامر ثمنًا للتلفاز؟

الربط مع الحياة

الخاصية المميزة للشاشات المسطحة HDTV هي أن نسبة عرضها إلى ارتفاعها هي 16:9، فتوفر للمشاهد صورة أوضح.

إذا كان $f(x) = x^2 + x - 12$, $g(x) = x - 3$. فأوجد كلَّ دالة فيما يأتي، وحدد مجالها:

21) $(f - g)(x)$ **22)** $2(g \cdot f)(x)$ **23)** $\left(\frac{f}{g}\right)(x)$

إذا كان $f(x) = 5x$, $g(x) = -2x + 1$, $h(x) = x^2 + 6x + 8$ فأوجد قيمة كلٍّ مما يأتي:

24) $g[h(3)]$ **25)** $h[f(-5)]$ **26)** $h[f(9)]$

27) $f[g(3a)]$ **28)** $f[h(a + 4)]$ **29)** $g[f(a^2 - a)]$

30) تمثيلات متعددة: لتكن: $f(x) = x^2, g(x) = x$.

a) جدوليًّا: أنشئ جدولًا يبين بعض قيم الدوال: $f(x), g(x), (f + g)(x), (f - g)(x)$.

b) بيانيًّا: مثّل بيانيًّا الدوال $f(x), g(x), (f + g)(x)$ على مستوى إحداثي واحد.

c) بيانيًّا: مثّل بيانيًّا الدوال $f(x), g(x), (f - g)(x)$ على مستوى إحداثي واحد.

d) لفظيًّا: صف العلاقة بين التمثيلات البيانية للدوال $f(x), g(x), (f + g)(x), (f - g)(x)$.

31) توظيف: يمكن التعبير عن عدد الرجال والنساء الذين تم توظيفهم منذ عام 1434 هـ في مؤسسة ما بالمعادلتين الآتيتين:

عدد الرجال: $y = 7x + 6$

عدد النساء: $y = 5x + 5$

حيث x تمثل عدد الأعوام منذ عام 1434 هـ ، وy تمثل عدد الموظفين.

a) اكتب دالة تمثل العدد الكلي للرجال والنساء الذين تم توظيفهم منذ عام 1434 هـ.

b) إذا كانت الدالة f تمثل عدد الرجال الذين تم توظيفهم، والدالة g تمثل عدد النساء اللاتي تم توظيفهن، فماذا تمثل الدالة $(f - g)(x)$؟

إذا كان $f(x) = x + 2$, $g(x) = -4x + 3$, $h(x) = x^2 - 2x + 1$ فأوجد قيمة كلٍّ مما يأتي:

32) $(f \cdot g \cdot h)(3)$ **33)** $[(f + g) \cdot h](1)$ **34)** $\left(\frac{h}{f \cdot g}\right)(-6)$

35) $[f \circ (g \circ h)](2)$ **36)** $[g \circ (h \circ f)](-4)$ **37)** $[h \circ (f \circ g)](5)$

مسائل مهارات التفكير العليا

38 **مسألة مفتوحة:** أوجد دالتين $f(x), g(x)$ بحيث يكون $[f \circ g](4) = 0$.

39 **اكتشف الخطأ:** تقوم ريم والعنود بإيجاد الدالة $[f \circ g](x)$، حيث $f(x) = x^2 + 2x - 8, g(x) = x^2 + 8$. من منهما إجابتها صحيحة؟ وضِّح إجابتك.

ريم

$$[f \circ g](x) = f[g(x)]$$
$$= (x^2 + 8)^2 + 2(x^2 + 8) - 8$$
$$= x^4 + 16x^2 + 64 + 2x^2 + 16 - 8$$
$$= x^4 + 18x^2 + 72$$

العنود

$$[f \circ g](x) = f[g(x)]$$
$$= (x^2 + 8)^2 + 2x - 8$$
$$= x^4 + 16x^2 + 64 + 2x - 8$$
$$= x^4 + 16x^2 + 2x + 56$$

40 **تحدَّ:** إذا كان $f(x) = \sqrt{x^3}, g(x) = \sqrt{x^6}$ فحدد مجال كلٍّ من الدالتين الآتيتين:

a $[g \circ g](x)$ **b** $[f \circ f](x)$

41 **تبرير:** حدد ما إذا كانت كلٌّ من الجملتين الآتيتين صحيحة أحيانًا أو صحيحة دائمًا أو غير صحيحة أبدًا. وفسِّر إجابتك.

a يكون مجال الدالة $g[f(x)]$ هو نفس مجال الدالة f أو جزءًا منه.

b يكون مجال الدالة $g[f(x)]$ هو نفس مجال الدالة g أو جزءًا منه.

42 **اكتب:** وضِّح لماذا نقوم بتركيب دالتين. وأعطِ مثالًا من واقع الحياة يمكنك حلّه باستعمال تركيب دالتين.

تدريب على اختبار

43 إذا كان $h(x) = 2(x + 5)^2, g(x) = x^2 + 9x + 21$ فما الدالة المكافئة للدالة $h(x) - g(x)$؟

A $k(x) = -x^2 - 11x - 29$

B $k(x) = x^2 + 11x + 29$

C $k(x) = x + 4$

D $k(x) = x^2 + 7x + 11$

44 إذا كان $f(x) = 2x + 4, g(x) = x^2 + 5$ فإن قيمة $f[g(6)]$ تساوي:

A 38

B 43

C 86

D 261

مراجعة تراكمية

اذكر العدد الممكن للأصفار الحقيقية الموجبة، والحقيقية السالبة، والتخيلية، لكلٍّ من الدوال الآتية: (الدرس 3-8)

45 $f(x) = 2x^4 - x^3 + 5x^2 + 3x - 9$ **46** $f(x) = 2x^4 - 3x^3 - 2x^2 + 3$

47 صندوق أبعاده $12\text{in}, 16\text{in}, 18\text{in}$. ما المقدار الثابت من الطول الذي يجب إضافته إلى كلٍّ بعد من أبعاده، ليصبح حجمه 5985in^3؟ (الدرس 3-6)

حل كلَّ معادلة فيما يأتي، بالنسبة للمتغير المبين إزاء كل منها: (مهارة سابقة)

48 $5x - 7y = 12, x$ **49** $3x^2 - 6xy + 1 = 4, y$ **50** $(x + 2)^2 - (y + 5)^2 = 4, y$

رابط الدرس الرقمي

www.ien.edu.sa

4-2

العلاقات والدوال العكسية
Inverse Functions and Relations

فيما سبق

درست كتابة معادلات بالنسبة لمتغير محدد وحلها.

والآن

- أجد كلًّا من العلاقة العكسية والدالة العكسية.
- أحدّد ما إذا كانت علاقة (أو دالة) تمثل علاقة عكسية (أو دالة عكسية) لأخرى أم لا.

المفردات

العلاقة العكسية
inverse relation

الدالة العكسية
inverse function

لماذا؟

يبين الجدول المجاور قيمة الريال السعودي مقارنة بالدولار الأمريكي، والدالة $d = 0.267\,r$ تمثل عدد الدولارات التي تحصل عليها مقابل كل ريال سعودي، ولمعرفة عدد الريالات التي تحصل عليها مقابل كل دولار أمريكي، حل المعادلة السابقة بالنسبة للمتغير r فتكون النتيجة $r \approx 3.75\,d$ وتمثل دالة عكسية للدالة السابقة .

السعودية	أمريكا
	0.267
3.75	

السعودية	أمريكا

إيجاد العلاقة العكسية : تذكّر أن العلاقة هي مجموعة من الأزواج المرتبة. **والعلاقة العكسية** هي مجموعة من الأزواج المرتبة، يمكنك الحصول عليها عن طريق تبديل إحداثيات كل زوج مرتب في العلاقة، فيصبح مجال العلاقة هو مدى العلاقة العكسية لها، ومداها هو مجال العلاقة العكسية لها.

مفهوم أساسي — العلاقة العكسية

أضف إلى مطويتك

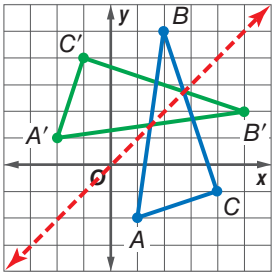
التعبير اللفظي: تكون كل من العلاقتين عكسية للأخرى إذا وفقط إذا تحقق الشرط التالي:
كلما احتوت إحداهما على زوج مرتب (a, b)، احتوت الأخرى على الزوج المرتب (b, a).

مثال: كل من العلاقتين A, B علاقة عكسية للأخرى:

$$A = \{(1, 5), (2, 6), (3, 7)\} \quad B = \{(5, 1), (6, 2), (7, 3)\}$$

مثال 1 — إيجاد العلاقة العكسية

هندسة : يمكن تمثيل رؤوس $\triangle ABC$ بالعلاقة $\{(1, -2), (2, 5), (4, -1)\}$.
أوجد العلاقة العكسية لها، ثم مثّل بيانيًّا العلاقة والعلاقة العكسية لها على مستوى إحداثي واحد، واذكر التحويل الهندسي الذي يحوّل العلاقة المعطاة إلى العلاقة العكسية لها.



مثّل العلاقة بيانيًّا. ولإيجاد العلاقة العكسية قم بتبديل إحداثيات الأزواج المرتبة. فتكون العلاقة العكسية هي: $\{(-1, 4), (5, 2), (-2, 1)\}$. وبتمثيل هذه الأزواج المرتبة للعلاقة العكسية بيانيًّا يتضح أنها تمثل رؤوس $\triangle A'B'C'$ بعد انعكاس رؤوس $\triangle ABC$ حول المستقيم $y = x$.

تحقق من فهمك

1) هندسة : إذا كانت الأزواج المرتبة للعلاقة $\{(-3, -6), (-8, -6), (-8, -3)\}$، تمثّل إحداثيات رؤوس مثلث قائم الزاوية. فأوجد العلاقة العكسية لها، وصف تمثيلها البياني.

إن ما ينطبق على الأزواج المرتبة في العلاقة والعلاقة العكسية، ينطبق أيضًا على الأزواج المرتبة في الدالة ومعكوسها، وإذا كان معكوس الدالة يمثل دالةً أيضًا، فإنه يسمى **دالة عكسية**. ويرمز إلى الدالة العكسية للدالة $f(x)$ بالرمز $f^{-1}(x)$.

مفهوم أساسي

أضف إلى مطويتك

خواص الدالة العكسية

التعبير اللفظي: إذا كان كل من f, f^{-1} دالة عكسية للأخرى، فإن $f(a) = b$ إذا وفقط إذا كان $f^{-1}(b) = a$.

مثال: ليكن $f(x) = x - 4$ ودالتها العكسية هي $f^{-1}(x) = x + 4$.

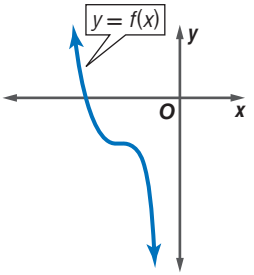
أوجد $f(6)$. أوجد $f^{-1}(2)$.

$f(x) = x - 4$ $f^{-1}(x) = x + 4$

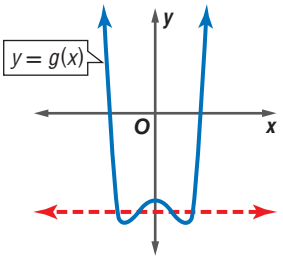
$f(6) = 6 - 4 = 2$ $f^{-1}(2) = 2 + 4 = 6$

وبما أن كلًّا من $f^{-1}(x), f(x)$ دالة عكسية للأخرى، فإن $f(6) = 2, f^{-1}(2) = 6$.

اختبار الخط الأفقي: إذا كان معكوس دالة يمثل دالة أيضًا، فإن الدالة الأصلية تكون دالة متباينة. تذكّر أنه يمكنك استعمال اختبار الخط الرأسي لمعرفة ما إذا كانت العلاقة تمثل دالة أم لا. وبالمثل يمكنك استعمال اختبار الخط الأفقي لتحديد ما إذا كان معكوس دالة يمثل دالة أم لا.



لا يمكن رسم أي مستقيم أفقي يقطع منحنى الدالة في أكثر من نقطة (الدالة متباينة)؛ لذا يمثّل معكوس الدالة $y = f(x)$ دالة أيضًا.



يمكن رسم مستقيم أفقي يقطع منحنى الدالة، في أكثر من نقطة (الدالة ليست متباينة)؛ لذا لا يكون معكوس الدالة $y = g(x)$ دالةً.

يمكنك إيجاد معكوس دالة بالتبديل بين x و y في قاعدة الدالة.

مثال 2

إيجاد معكوس الدالة وتمثيله بيانيًّا

أوجد معكوس كلٍّ من الدالتين الآتيتين، ثم مثّل الدالة ومعكوسها بيانيًّا على مستوى إحداثي واحد.

a $f(x) = 2x - 5$

الخطوة 1: أعد كتابة الدالة كمعادلة بدلالة المتغيرين x, y

$f(x) = 2x - 5 \rightarrow y = 2x - 5$

الخطوة 2: بدِّل بين كلٍّ من المتغير x والمتغير y في المعادلة $x = 2y - 5$

الخطوة 3: حل المعادلة بالنسبة للمتغير y.

$x = 2y - 5$

$x + 5 = 2y$ أضف 5 للطرفين

$\frac{x+5}{2} = y$ اقسم الطرفين على 2

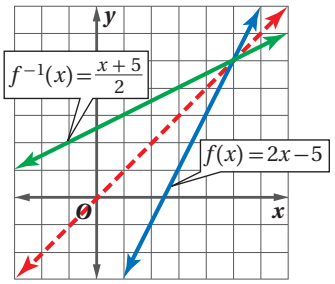
الخطوة 4: ضع $f^{-1}(x)$ بدلًا من المتغير y، إذا كان المعكوس دالةً.

بما أن الدالة $f(x)$ خطية، وباستعمال اختبار الخط الأفقي، تجد أن معكوسها هو دالة أيضًا، لذا يمكنك استعمال الرمز $f^{-1}(x)$

$y = \frac{x+5}{2} \rightarrow f^{-1}(x) = \frac{x+5}{2}$

فتكون الدالة العكسية للدالة $f(x) = 2x - 5$ هي $f^{-1}(x) = \frac{x+5}{2}$

والتمثيل البياني للدالة $f^{-1}(x) = \frac{x+5}{2}$ هي انعكاس للتمثيل البياني للدالة $f(x) = 2x - 5$ حول المستقيم $y = x$.



قراءة الرياضيات

الدالة العكسية

f^{-1} يقرأ الدالة العكسية للدالة f. تذكّر أن (-1) ليس أسًّا.

إرشادات للدراسة

رمز الدالة العكسيّة

بما أن معكوس الدالة $f(x)$ في الفرع a من المثال 2 هو دالة أيضًا، لذا تم التعبير عنها بـ $f^{-1}(x)$.

(b $f(x) = x^2 + 1$

الخطوة 1: $f(x) = x^2 + 1 \rightarrow y = x^2 + 1$

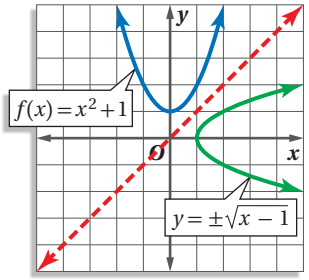
الخطوة 2: $x = y^2 + 1$

الخطوة 3: $x = y^2 + 1$

اطرح 1 من كلا الطرفين $x - 1 = y^2$

خُذ الجذر التربيعي للطرفين $\pm\sqrt{x-1} = y$

الخطوة 4: $y = \pm\sqrt{x-1}$



مثّل بيانيًّا $y = \pm\sqrt{x-1}$ بإجراء انعكاس لمنحنى الدالة $f(x) = x^2 + 1$ حول المستقيم $y = x$.

ارشادات للدراسة

الدوال

معكوس الدالة f في الفرع b لا يمثل دالة؛ لأنه لا يحقق اختبار الخط الرأسي، أو لأن الدالة f لا تحقق اختبار الخط الأفقي.

تحقق من فهمك

(2A $f(x) = \frac{x-3}{5}$

(2B $f(x) = 3x^2$

التأكد من الدالة العكسية: يمكنك تحديد ما إذا كانت دالتان، كلٌّ منهما تمثل دالة عكسية للأخرى أم لا، وذلك بإيجاد كلٍّ من تركيبَيهما.

مفهوم أساسي — **الدالة العكسية**

أضف إلى مطويتك

التعبير اللفظي: تكون كلٌّ من الدالتين f, g دالة عكسيةً للأخرى، إذا وفقط إذا كان تركيب كلٍّ منهما يساوي الدالة المحايدة $I(x) = (x)$.

الرموز: الدالتان $f(x), g(x)$ كلٌّ منهما تمثل دالة عكسية للأخرى، إذا وفقط إذا كان $[g \circ f](x) = [f \circ g](x) = x$.

مثال 3 — **التأكد أن كل دالة تمثل دالة عكسية للأخرى**

في كلِّ زوجٍ ممَّا يأتي حدد هل كل دالة تمثل دالة عكسية للأخرى أم لا؟ ووضِّح إجابتك.

(a $f(x) = 3x + 9, g(x) = \frac{1}{3}x - 3$

تأكد بأن تركيب الدالتين $g(x), f(x)$ يساوي الدالة المحايدة.

$[f \circ g](x) = f[g(x)]$
$= f\left(\frac{1}{3}x - 3\right)$
$= 3\left(\frac{1}{3}x - 3\right) + 9$
$= x - 9 + 9 = x$

$[g \circ f](x) = g[f(x)]$
$= g(3x + 9)$
$= \frac{1}{3}(3x + 9) - 3$
$= x + 3 - 3 = x$

إذن تمثل كلٌّ من الدالتين دالة عكسية للأخرى؛ لأن $[f \circ g](x) = [g \circ f](x) = x$.

(b $f(x) = 4x^2, g(x) = 2\sqrt{x}$

$[f \circ g](x) = f[g(x)] = f(2\sqrt{x})$
$= 4(2\sqrt{x})^2$
$= 4(4x) = 16x$

بما أن $[f \circ g](x) \neq x$، فإن الدالتين $g(x)$ و $f(x)$ لا تمثل كلٌّ منهما دالة عكسية للأخرى.

تنبيه!

الدالة العكسية

تأكد أن التركيبين $[f \circ g](x)$ و $[g \circ f](x)$ يساوي كلّ منهما الدالة المحايدة $I(x) = x$؛ وذلك لتكون كل من الدالتين دالة عكسية للأخرى.

تحقق من فهمك

(3A $f(x) = 3x - 3, g(x) = \frac{1}{3}x + 4$

(3B $f(x) = 2x^3 - 1, g(x) = \sqrt[3]{\frac{x+1}{2}}$

تأكد

مثال 1 أوجد العلاقة العكسية لكلٍّ من العلاقتين الآتيتين:

1) $\{(-9, 10), (1, -3), (8, -5)\}$ **2)** $\{(-2, 9), (4, -1), (-7, 9), (7, 0)\}$

مثال 2 أوجد معكوس كلٍّ من الدوال الآتية، ثم مثّل الدالة ومعكوسها بيانيًّا على مستوى إحداثي واحد:

3) $f(x) = -3x$ **4)** $g(x) = 4x - 6$ **5)** $h(x) = x^2 - 3$

مثال 3 في كلِّ زوجٍ ممَّا يأتي، حدد هل كلُّ دالةٍ تمثل دالة عكسية للأخرى أم لا؟ ووضِّح إجابتك.

6) $f(x) = x - 7$, $g(x) = x + 7$

7) $f(x) = \frac{1}{2}x + \frac{3}{4}$, $g(x) = 2x - \frac{4}{3}$

8) $f(x) = 2x^3$, $g(x) = \frac{1}{3}\sqrt{x}$

تدرب وحل المسائل

مثال 1 أوجد العلاقة العكسية لكلٍّ من العلاقتين الآتيتين:

9) $\{(1, -5), (2, 6), (3, -7), (4, 8), (5, -9)\}$ **10)** $\{(3, 0), (5, 4), (7, -8), (9, 12), (11, 16)\}$

مثال 2 أوجد معكوس كل من الدوال الآتية، ثم مثّل الدالة ومعكوسها بيانيًّا على مستوى إحداثي واحد:

11) $f(x) = x + 2$ **12)** $g(x) = 5x$ **13)** $l(x) = -2x + 1$

14) $h(x) = \frac{x - 4}{3}$ **15)** $k(x) = -\frac{5}{3}x - 8$ **16)** $h(x) = x^2 + 4$

17) $f(x) = 5x^2$ **18)** $f(x) = \frac{1}{2}x^2 - 1$ **19)** $f(x) = (x + 1)^2 + 3$

مثال 3 في كلِّ زوجٍ ممَّا يأتي، حدد هل كلُّ دالةٍ تمثل دالة عكسية للأخرى أم لا؟ ووضِّح إجابتك.

20) $f(x) = 2x + 3$, $g(x) = 2x - 3$

21) $f(x) = -\frac{1}{3}x + 3$, $g(x) = -3x + 9$

22) $f(x) = \frac{x + 10}{8}$, $g(x) = 8x - 10$

23) $f(x) = \frac{2}{3}x^3$, $g(x) = \sqrt{\frac{2}{3}x}$

24) $f(x) = (x + 6)^2$, $g(x) = \sqrt{x} - 6$

25) $f(x) = 2\sqrt{x - 5}$, $g(x) = \frac{1}{4}x^2 - 5$

26) وقود: إذا كان عدد الكيلومترات التي تقطعها سيارة فهد لكل l لتر من البنزين يُعبر عنه بالدالة $k(l) = 12l$، وكان سعر اللتر كما هو موضح في الشكل المجاور.

a) أوجد الدالة $c(l)$ التي تمثل سعر l من لترات البنزين

b) أوجد دالة تمثل سعر الوقود المستهلك في الكيلو متر الواحد، مستعملاً فكرة الدالة العكسية.

27) هندسة: يُعبر عن مساحة الدائرة بالدالة $A = \pi r^2$.

a) أوجد معكوس الدالة.

b) استعمل المعكوس لإيجاد نصف قطر دائرة مساحتها 36cm^2.

استعمل اختبار الخط الأفقي لتحدد ما إذا كان معكوس كلِّ دالة من الدوال الآتية دالة أيضًا أم لا:

28) $f(x) = x^3 - 8$ **29)** $h(x) = 2x^2$ **30)** $g(x) = 3x + 7$

31) درجات الحرارة: تستعمل الصيغة $F(x) = \frac{9}{5}x + 32$ للتحويل من درجة الحرارة السيليزية إلى درجة الحرارة الفهرنهايتية.

a) أوجد $F^{-1}(x)$. ثم بيِّن أن $F^{-1}(x)$ و $F(x)$ تمثل كلٌّ منهما دالة عكسية للأخرى.

b) فيم تستعمل $F^{-1}(x)$ ؟

32) تمثيلات متعددة: تأمل الدالة $y = x^n$، حيث $n = 0, 1, 2, \ldots$.

a) بيانيًا: مثِّل الدوال $y = x^n$ بيانيًّا للقيم $n = 0, 1, 2, 3, 4$.

b) جدوليًّا: ما قيم n التي تجعل معكوس هذه الدوال دوال أيضًا؟ سجل نتائجك في جدول.

c) تحليليًّا: استنتج قيم n التي يكون عندها معكوس الدوال $f(x) = x^n$ دوال أيضًا، على فرض أن n عدد كلي.

مسائل مهارات التفكير العليا

33) تبرير: حدد ما إذا كانت الجملة الآتية صحيحة دائمًا، أو صحيحة أحيانًا، أو غير صحيحة أبدًا. وضّح إجابتك.

"إذا كانت العلاقة لا تمثل دالة، فإن معكوسها لا يمثل دالةً أيضًا."

34) مسألة مفتوحة: أعطِ مثالًا على دالة، ودالتها العكسية . وتحقق من أن كلًّا منهما دالة عكسية للأخرى.

35) تحدٍّ: أعطِ مثالًا على دالة معكوسها الدالة نفسها.

36) اكتب: إذا كان لديك تركيب لدالتين، كل منهما دالة عكسية للأخرى. فلماذا تكون قيمة تركيب الدالتين عند العدد 5 تساوي العدد 5 دائمًا؟

تدريب على اختبار

37) إذا كان $g(x) = -x + 1$ ، $f(x) = x^2 + 3$، فأيٌّ مما يأتي يمثل $f[g(x)]$؟

A $x^2 - x + 2$ **C** $-x^3 + x^2 - 3x + 3$

B $-x^2 - 2$ **D** $x^2 - 2x + 4$

38) أيُّ الدوال الآتية هي دالة عكسية للدالة: $f(x) = \frac{3x - 5}{2}$ ؟

A $g(x) = \frac{2x + 5}{3}$ **C** $g(x) = 2x + 5$

B $g(x) = \frac{3x + 5}{2}$ **D** $g(x) = \frac{2x - 5}{3}$

مراجعة تراكمية

إذا كان $h(x) = x^2 - 1$ ، $g(x) = x - 2$ ، $f(x) = 3x + 5$، فأوجد قيمة كلٍّ مما يأتي: (الدرس: 4-1)

39) $g[f(3)]$ **40)** $f[h(-2)]$ **41)** $h[g(1)]$

42) مساحة: قطعة أرض على شكل شبه منحرف، طول قاعدتها الأطول يزيد بمقدار 8 ft على 3 أمثال طول قاعدتها الأقصر، ويزيد ارتفاعها قدمًا واحدةً على 3 أمثال طول قاعدتها الأقصر. ما أبعاد قطعة الأرض إذا كانت مساحتها 4104ft^2؟ (الدرس: 3-6)

بسّط كلًّا مما يأتي: (الدرس: 3-1)

43) $(3 + 4i)(5 - 2i)$ **44)** $(\sqrt{6} + i)(\sqrt{6} - i)$ **45)** $\frac{1 + i}{1 - i}$ **46)** $\frac{4 - 3i}{1 + 2i}$

رابط الدرس الرقمي
www.ien.edu.sa

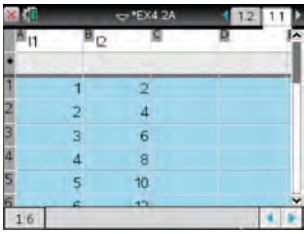
الهدف
أقارن دالةً بمعكوسها باستعمال الحاسبة البيانية TI-nspire.

يمكنك استعمال الحاسبة البيانية TI-nspire لمقارنة دالة بمعكوسها، باستعمال التمثيلات البيانية.

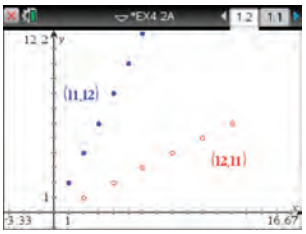
نشاط 1 تمثيل المعكوس بيانيًّا باستعمال الأزواج المرتبة

مثّل الدالة: $f(x) = \{(1, 2), (2, 4), (3, 6), (4, 8), (5, 10), (6, 12)\}$ ومعكوسها بيانيًّا.

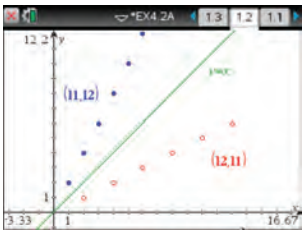
الخطوات:



- افتح الآلة الحاسبة بالضغط على on .
- من الشاشة الظاهرة اختر 1 مستند جديد ، ومنها اختر 4:إضافة تطبيق القوائم وجداول البيانات فيظهر جدول إلكتروني.
- اكتب في أعلى العمود A الرمز $l1$ ثم اضغط enter ، واكتب في أعلى العمود B الرمز $l2$ ثم اضغط enter .



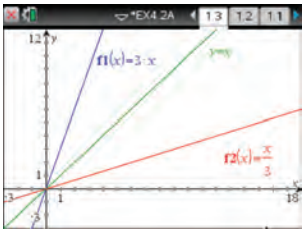
- أدخل قيم x في العمود $l1$ بالترتيب، وقيم y في العمود $l2$.
- اضغط مفتاح on واختر من الشاشة الظاهرة ، ثم اضغط enter فيظهر أمامك مستوى إحداثي، ثم اضغط على menu واختر منها 3: إدخال/تحرير الرسم البياني ومنها اختر 5: التمثيل النقطي المتعدد ، فتظهر شاشة تتضمن مستوى إحداثيًّا أسفله إشارة لقيم x, y .



- اضغط مفتاح var واختر $l1$ الموجودة عند x ثم تحرك بالسهم عند y ، ثم اضغط مفتاح var مرّةً ثانيةً واختر $l2$ ، ثم اضغط enter .
- اضغط tab ، ثم أعد الخطوة السابقة باختيار $l2$ عند x ، و $l1$ عند y ثم اضغط enter .
- اضغط menu ثم اختر منها 3: إدخال/تحرير الرسم البياني ومنها اختر 2: معادلة ومنها 1: مستقيم ، ثم أدخل الدالة $f1(x) = x$ ثم اضغط enter .
- لإظهار الشكل كاملًا اضغط menu ومنها 4: تكبير/تصغير النافذة واختر منها 6: تكبير/تصغير الربع الأول .

نشاط 2 تمثيل المعكوس بيانيًّا باستعمال صيغة الدالة

مثّل الدالة $f(x) = 3x$ ودالتها العكسية $g(x) = \frac{x}{3}$ بيانيًّا.



يمكن استعمال الآلة في تمثيل الدالة ومعكوسها بالضغط على المفاتيح من اليمين إلى اليسار:

on 1 مستند جديد 2:إضافة تطبيق الرسوم البيانية

ثم كتابة الدالتين $f3(x) = \frac{x}{3}$, $f2(x) = 3x$, $f1(x) = x$ كما مرّ سابقًا، ارسم المعادلة $y = x$ بالضغط على menu ثم اختر 2: معادلة ومنها اختر 1: مستقيم ثم أدخل المعادلة $y = x$، فيظهر التمثيل المطلوب.

تمارين: مثّل بيانيًّا كلًّا من الدالة $f(x)$، ومعكوسها $g(x)$، و $[f \circ g](x)$ في كلٍّ مما يأتي:

1) $f(x) = 5x$
2) $f(x) = x - 3$
3) $f(x) = 2x + 1$
4) $f(x) = \frac{1}{2}x + 3$
5) $f(x) = x^2$
6) $f(x) = x^2 - 3$
7) ما العلاقة بين التمثيل البياني لدالة والتمثيل البياني لمعكوسها ؟
8) **خمن:** ماذا يساوي $[(f \circ g)](x)$ لأيِّ دالة $f(x)$ ودالتها العكسية $g(x)$ ؟

رابط الدرس الرقمي

www.ien.edu.sa

4-3

دوال ومتباينات الجذر التربيعي
Square Root Functions and Inequalities

فيما سبق

درست تبسيط عبارات تحتوي جذورًا تربيعية. (مهارة سابقة)

والآن

- أمثل بيانيًا دوال الجذور التربيعية وأحلّلها.
- أمثل بيانيًا متباينات الجذور التربيعية.

المفردات

دالة الجذر التربيعي
square root function

الدالة الجذرية
radical function

متباينة الجذر التربيعي
square root inequality

لماذا؟

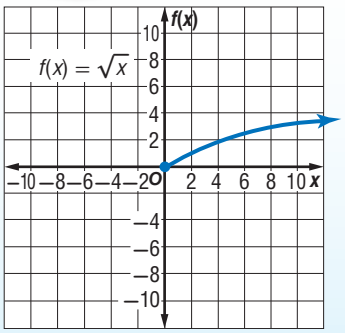
يُمثل الزمن الدوري للبندول بدالة الجذر التربيعي: $T=2\pi\sqrt{\frac{L}{g}}$ ، حيث T الزمن الدوري بالثواني، L طول البندول بالأقدام ، g تسارع السقوط الحر، الذي يساوي 32 قدمًا لكل ثانية مربعة.

دوال الجذر التربيعي: إذا احتوت دالة على الجذر التربيعي لمتغير، تُسمى **دالة الجذر التربيعي**. وهي نوع من أنواع **الدالة الجذرية**.

مفهوم أساسي

الدالة الرئيسة (الأم) لدوال الجذر التربيعي

أضف إلى مطويتك



الدالة الرئيسة (الأم):	$f(x)=\sqrt{x}$
المجال:	$\{x \mid x \geq 0\}$
المدى:	$\{f(x) \mid f(x) \geq 0\}$
المقطعان:	$x=0, f(x)=0$
غير معرّفة عندما:	$x<0$
سلوك الدالة عند طرفيها:	$x \to 0, f(x) \to 0$
	$x \to +\infty, f(x) \to +\infty$

مجال دالة الجذر التربيعي محدد بالقيم التي تكون عندها الدالة معرّفة.

مثال 1 تعيين المجال والمدى

عين كلًّا من المجال والمدى للدالة: $f(x)=\sqrt{x+4}$.

مجال دالة الجذر التربيعي يشمل فقط القيم التي يكون ما تحت الجذر عندها غير سالب.

$x+4 \geq 0$ اكتب المتباينة

$x \geq -4$ اطرح 4 من الطرفين

وبالتالي فالمجال هو: $\{x \mid x \geq -4\}$.

وبما أن $\sqrt{x+4} \geq 0$ دائمًا، وتزيد قيم الدالة بتزايد قيم x، فإن أقل قيمة للدالة تكون عندما $x+4=0$؛ أي عندما $x=-4$؛ لذا فإن $f(-4)$ تمثل الحد الأدنى للمدى.

$(f(-4)=\sqrt{-4+4}=0)$

لذلك، فالمدى هو $\{f(x) \mid f(x) \geq 0\}$.

تحقق من فهمك

(1A) $f(x)=\sqrt{x-3}$

(1B) $f(x)=\sqrt{x+6}+2$

يمكنك تمثيل دالة الجذر التربيعي بيانيًّا، بتحديد القيم الصغرى لها، وعمل جدول لبعض قيم x وقيم $f(x)$ المقابلة لها.

إرشادات للدراسة

المجال والمدى

حدود المجال والمدى تمثل إحداثيات نقطة بدء منحنى دالة الجذر التربيعي.

مثال 2 تمثيل دوال الجذر التربيعي بيانيًّا

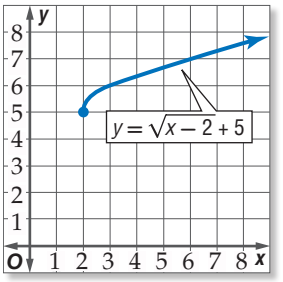
مثّل كلَّ دالة مما يأتي بيانيًّا، وحدِّد مجالها ومداها:

a) $y = \sqrt{x-2} + 5$

القيمة الصغرى للدالة عند $(2, 5)$. اعمل جدولًا من قيم x، حيث $x \geq 2$، ومثّل الدالة بيانيًّا. لاحظ سلوك الدالة عند الأطراف، فكلما زادت x، زادت y.

المجال هو $\{x \mid x \geq 2\}$، والمدى هو $\{y \mid y \geq 5\}$.

x	y
2	5
3	6
4	6.4
5	6.7
6	7
7	7.2
8	7.4

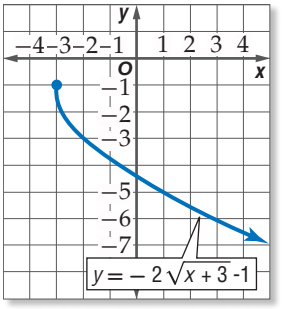


b) $y = -2\sqrt{x+3} - 1$

القيمة الصغرى لمجال الدالة هي -3. اعمل جدولًا من قيم x، حيث $x \geq -3$، ومثّل الدالة بيانيًّا.

المجال هو $\{x \mid x \geq -3\}$، المدى هو $\{y \mid y \leq -1\}$.

x	y
−3	−1
−2	−3
−1	−3.8
0	−4.5
1	−5
2	−5.5
3	−5.9



تحقق من فهمك

2A) $f(x) = 2\sqrt{x+4}$

2B) $f(x) = -3\sqrt{x-1} + 2$

إرشادات حل المسألة

عمل جدول

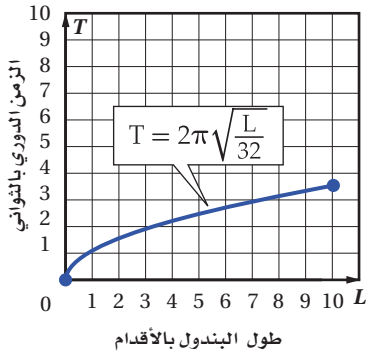
يعد عمل جدول طريقة جيدة لترتيب الأزواج المرتبة؛ لدراسة سلوك التمثيل البياني للدالة.

مثال 3 من واقع الحياة استعمال التمثيل البياني لتحليل دوال الجذر التربيعي

فيزياء: بالرجوع إلى فقرة لماذا؟ بداية هذا الدرس، يمكنك تحديد الزمن الدوري للبندول T بالثواني باستعمال الدالة $T = 2\pi\sqrt{\frac{L}{32}}$ حيث تمثل L طول البندول بالأقدام.

a) مثّل هذه الدالة بيانيًّا في الفترة $0 \leq L \leq 10$.

L	T
0	0
2	1.57
4	2.22
6	2.72
8	3.14
10	3.51



b) ما الزمن الدوري إذا كان طول البندول 8 أقدام؟

بناءً على التمثيل البياني والجدول فإن الزمن الدوري يكون 3.14 ثوانٍ تقريبًا.

تحقق من فهمك

3) صوت: يمكن تحديد تردد اهتزازات وتر مشدود باستعمال الدالة: $f = 200\sqrt{m_t}$، حيث f تمثل عدد الاهتزازات في الثانية، m_t كتلة ثقل قوة الشّد مقيسة بالرطل. مثّل هذه الدالة بيانيًّا في الفترة $0 \le m_t \le 10$، ثم أوجد التردد عندما تكون قوة الشّد 3 أرطال.

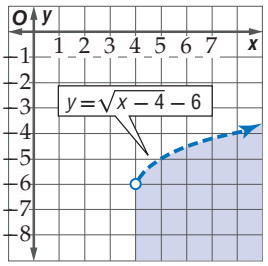
متباينات الجذر التربيعي: **متباينة الجذر التربيعي** هي متباينة تحتوي الجذر التربيعي. ويمكن تمثيلها بيانيًّا تمامًا مثل طريقة تمثيل المتباينات الأخرى.

مثال 4 تمثيل متباينة الجذر التربيعي بيانيًّا

مثّل المتباينة $y < \sqrt{x-4} - 6$ بيانيًّا.

مثّل الحد $y = \sqrt{x-4} - 6$ بيانيًّا.

المجال هو $\{x \mid x \ge 4\}$. وبما أن المتباينة تحوي «y أقل من»، فإن التمثيل البياني للمتباينة هو المنطقة المظللة تحت الحد، وضمن المجال.



تحقق: اختر نقطة في المنطقة المظللة، وتأكد أنها تحقق المتباينة.

اختبر $(7, -5)$:

$$-5 \stackrel{?}{<} \sqrt{7-4} - 6$$
$$-5 \stackrel{?}{<} \sqrt{3} - 6$$
$$-5 < -4.27 \quad \checkmark$$

تحقق من فهمك

4A) $f(x) \ge \sqrt{2x+1}$

4B) $f(x) < -\sqrt{x+2} - 4$

تأكد

مثال 1 عيِّن المجال والمدى لكلِّ دالة فيما يأتي:

1) $f(x) = \sqrt{4x}$

2) $f(x) = \sqrt{x-5}$

3) $f(x) = \sqrt{x+8} - 2$

مثال 2 مثّل كل دالة مما يأتي بيانيًّا، وحدد مجالها ومداها:

4) $f(x) = \sqrt{x} - 2$

5) $f(x) = 3\sqrt{x-1}$

6) $f(x) = \frac{1}{2}\sqrt{x+4} - 1$

7) $f(x) = -\sqrt{3x-5} + 5$

مثال 3 **8) محيطات:** يمكن تمثيل سرعة موجات تسونامي باستعمال الدالة: $v = 356\sqrt{d}$، حيث تمثل v السرعة بالكيلومترات لكل ساعة، و d متوسط عمق الماء بالكيلومترات. إذا كانت سرعة الموجة 145 km/h، فما متوسط عمق الماء ؟ قرّب إجابتك إلى أقرب جزء من مئة من الكيلومتر.

مثال 4 مثّل كلَّ متباينة مما يأتي بيانيًّا:

9) $f(x) \ge \sqrt{x} + 4$

10) $f(x) \le \sqrt{x-6} + 2$

11) $f(x) < -2\sqrt{x+3}$

12) $f(x) > \sqrt{2x-1} - 3$

تدرب وحل المسائل

مثال 1 عيِّن المجال والمدى لكل دالة فيما يأتي:

13) $f(x) = -\sqrt{2x} + 2$ **14)** $f(x) = \sqrt{x} - 6$ **15)** $f(x) = 4\sqrt{x-2} - 8$

مثال 2 مثّل كل دالة مما يأتي بيانيًّا، وحدد مجالها ومداها:

16) $f(x) = \sqrt{6x}$ **17)** $f(x) = -\sqrt{5x}$ **18)** $f(x) = \sqrt{x+1}$

19) $f(x) = \sqrt{x-4} - 10$ **20)** $f(x) = \frac{3}{4}\sqrt{x+12} + 3$ **21)** $f(x) = -3\sqrt{x+7} + 9$

مثال 3 **22) القفز بالمظلات:** إذا كان الزمن التقريبي t بالثواني، اللازم لسقوط جسم من ارتفاع d بالأقدام يعطى بالدالة $t = \sqrt{\frac{d}{16}}$، فإذا قفز مظلي قبل 11 ثانية من فتح المظلة، فكم قدمًا هبط المظلي خلال هذا الزمن؟

23) ألعاب: إذا كانت سرعة العربة الدوّارة V في مدينة الألعاب في أثناء نزولها من أعلى قمة تعطى بالدالة: $V = \sqrt{{v_0}^2 + 64h}$، حيث v_0 السرعة الابتدائية بالأقدام لكل ثانية، و h الارتفاع الرأسي بالأقدام. أراد مصمم اللعبة أن تكون سرعة العربة 90 ft/s عندما تصل أدنى مستوى لها.

a) إذا كانت السرعة الابتدائية للعربة عند القمة هي 10 ft/s ، فاكتب معادلة تمثل ذلك الموقف.

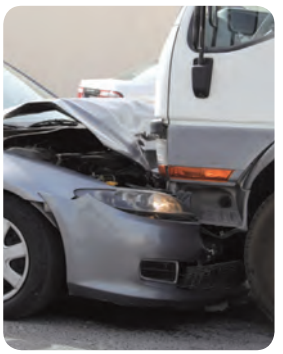
b) حتى يتحقق ما يريده المصمم، كم يجب أن يكون ارتفاع القمة، إذا كانت سرعة العربة الابتدائية عند القمة 10ft/s ؟

مثال 4 مثّل كلَّ متباينة مما يأتي بيانيًّا:

24) $y < \sqrt{x-5}$ **25)** $y > \sqrt{x+6}$

26) $y \geq -4\sqrt{x+3}$ **27)** $y > 2\sqrt{x+7} - 5$

28) $y \geq 4\sqrt{x-2} - 12$ **29)** $y \leq 6 - 3\sqrt{x-4}$



الربط مع الحياة

توصلت دراسة إلى أن السبب الأول لحوادث السيارات بين أوساط الشباب يعود إلى استخدام الهاتف الجوال أثناء القيادة.

30) قيادة: تستطيع إدارة المرور بعد كل حادث سير، تحديد سرعة السيارة قبل ضغط السائق على الكوابح (الفرامل) وذلك باستعمال الدالة: $v = \sqrt{30fd}$، حيث v تمثل السرعة بالأميال لكل ساعة، f معامل الاحتكاك الذي يصف حالة سطح الطريق، d طول أثر احتكاك العجلات بالأقدام. بما أن معامل الاحتكاك يعتمد على حالة الطريق، افترض أن $f = 0.6$.

a) أوجد سرعة سيارة طول أثر احتكاك عجلاتها بالأرض 25ft.

b) إذا كانت سيارتك تسير بسرعة 35 mil/h، فكم قدمًا تحتاج لتقف وقوفًا تامًّا؟

c) إذا تضاعفت سرعة سيارة مرة واحدة، فهل يتضاعف طول أثر احتكاك العجلات بالأرض عند الوقوف المفاجئ مرة واحدة؟ وضح إجابتك.

31) عيِّن المجال والمدى للدالة: $f(x) = -\sqrt{x-6} + 5$، ثم مثلها بيانيًّا.

مسائل مهارات التفكير العليا

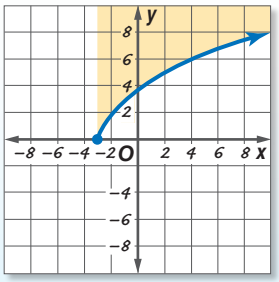
32) تحدٍّ: اكتب معادلة لدالة جذر تربيعي مجالها $\{x \mid x \geq -4\}$، ومداها $\{y \mid y \leq 6\}$، وتمر بالنقطة $(5, 3)$.

33) تبرير: ما قيم a الصحيحة الموجبة التي تجعل مجال ومدى الدالة $f(x) = \sqrt[a]{x}$ مجموعة الأعداد الحقيقية (R) ؟

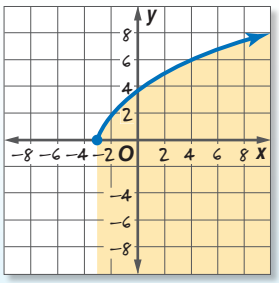
34) اكتب: وضِّح لماذا لا تمثل $y = \pm\sqrt{x}$ دالة؟

35) اكتشف الخطأ: مثَّل كلٌّ من عبد الرحمن وعبد العزيز المتباينة $y \leq \sqrt{5x + 15}$. فأيُّهما إجابته صحيحة ؟ برِّر إجابتك.

عبد الرحمن



عبد العزيز



تدريب على اختبار

36) أيٌّ مما يأتي يكافئ العبارة $\frac{-64x^6}{8x^3}$, $x \neq 0$:

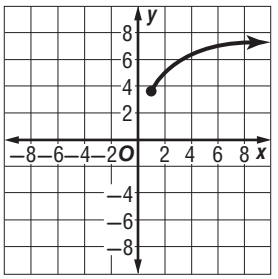
A $8x^2$

B $8x^3$

C $-8x^2$

D $-8x^3$

37) يمثّل الشكل المجاور التمثيل البياني لدالة جذر تربيعي. فأيٌّ ممَّا يأتي صحيح؟



I) المجال هو مجموعة الأعداد الحقيقية

II) الدالة هي $y = \sqrt{x} + 3.5$

III) المدى هو $\{y \mid y \geq 3.5\}$ تقريبًا

A I فقط **B** II, III فقط **C** I, II, III **D** III فقط

مراجعة تراكمية

في كلِّ زوج مما يأتي حدد هل كلّ دالة تمثل دالة عكسية للأخرى، أم لا ؟ (الدرس: 2-4)

38) $f(x) = 2x$, $g(x) = \frac{1}{2}x$

39) $f(x) = 3x - 7$, $g(x) = \frac{1}{3}x - \frac{7}{16}$

40) $f(x) = \frac{3x + 2}{5}$, $g(x) = \frac{5x - 2}{3}$

41) زمن: إذا كانت الدالة: $h = \frac{m}{60}$ تستعمل لتحويل الدقائق m إلى ساعات h ، والدالة: $d = \frac{h}{24}$ تستعمل لتحويل الساعات h إلى أيام d، فاكتب دالة يمكن استعمالها لتحويل الدقائق إلى أيام. (الدرس: 2-1)

حدد ما إذا كان كلُّ عدد مما يأتي نسبيًّا أو غير نسبي: (مهارة سابقة)

42) 6.34 **43)** 3.787887888... **44)** 5.333... **45)** 1.25

رابط الدرس الرقمي

www.ien.edu.sa

4-4 الجذر النوني
nth Root

فيما سبق
درست دوال الجذر التربيعي.

والآن
- أبسّط عبارات جذرية.
- أستعمل الحاسبة لتقريب قيم الجذور.

المفردات
الجذر النوني
*n*th root
رمز الجذر
radical sign
الدليل
index
ما تحت الجذر
radicand
الجذر الرئيس
principal root

لماذا؟

لوحظ تزايد عدد الحوادث بين الدراجات الهوائية والسيارات على الطريق كلما زاد عدد الدراجات. ويمكن تمثيل العلاقة بينهما بالدالة $c = \sqrt[5]{b^2}$، حيث b عدد الدراجات، c عدد الحوادث.

تبسيط الجذور: يعدُّ إيجاد الجذر التربيعي لعددٍ عمليةً عكسية لتربيعه. فلإيجاد الجذر التربيعي للعدد a، يجب أن تجد العدد الذي مربعه يساوي a. وبالمثل فإن العملية العكسية لرفع عدد لقوة (n) هي إيجاد **الجذر النوني** للعدد.

القوى	العوامل	التعبير اللفظي	الجذور
$x^3 = 64$	$4 \cdot 4 \cdot 4 = 64$	4 هو الجذر التكعيبي للعدد 64	$\sqrt[3]{64} = 4$
$x^4 = 625$	$5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 = 625$	5 هو الجذر الرابع للعدد 625	$\sqrt[4]{625} = 5$
$x^5 = 32$	$2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 32$	2 هو الجذر الخامس للعدد 32	$\sqrt[5]{32} = 2$
$a^n = b$	$\underbrace{a \cdot a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{n \text{ مرة}} = b$	a هو الجذر النوني للعدد b	$\sqrt[n]{b} = a$

يقترح هذا النموذج التعريف الآتي للجذر النوني:

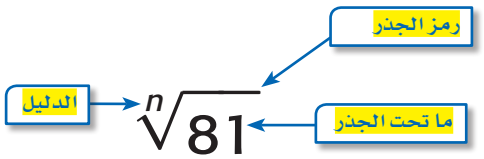
مفهوم أساسي — **تعريف الجذر النوني**

أضف إلى مطويتك

التعبير اللفظي: لأيِّ عددين حقيقيين a, b، ولأيِّ عدد صحيح n، $n > 1$ إذا كان $a^n = b$، فإن a هو جذر نوني للعدد b.

مثال: بما أن $(-3)^4 = 81$، فإن -3 هو جذر رابع للعدد 81 .

يشير الرمز $\sqrt[n]{\ }$ إلى الجذر النوني.



بعض الأعداد لها أكثر من جذر نوني حقيقي . فعلى سبيل المثال، العدد 64 له جذران تربيعيان هما: 8 و -8؛ لأن 8^2 و $(-8)^2$ كليهما يساوي 64. فعندما يكون هناك أكثر من جذر حقيقي، ويكون n عددًا زوجيًّا، فإن الجذر غير السالب يسمى **الجذر الرئيس**.

وفيما يأتي بعض الأمثلة على الجذر النوني:

$\sqrt{25} = 5$ ، $\sqrt{25}$ يشير إلى الجذر التربيعي الرئيس للعدد 25.
$-\sqrt{25} = -5$ ، $-\sqrt{25}$ يشير إلى معكوس (النظير الجمعي) الجذر التربيعي الرئيس للعدد 25.
$\pm\sqrt{25} = \pm 5$ ، $\pm\sqrt{25}$ يشير إلى كلا الجذرين التربيعيين للعدد 25.

مفهوم أساسي

الجذر النوني الحقيقي

أضف إلى مطويتك

ليكن n عددًا صحيحًا أكبر من 1، و a عددًا حقيقيًا.

a	n عدد زوجي	n عدد فردي
$a > 0$	هناك جذر حقيقي موجب وحيد، وجذر حقيقي سالب وحيد: $\pm\sqrt[n]{a}$، الجذر الموجب هو الجذر الرئيس	هناك جذر حقيقي موجب وحيد، وليس هناك جذر حقيقي سالب: $\sqrt[n]{a}$.
$a < 0$	ليس هناك جذور حقيقية.	ليس هناك جذور حقيقية موجبة. وهناك فقط جذر حقيقي سالب وحيد: $\sqrt[n]{a}$
$a = 0$	هناك فقط جذر حقيقي: $\sqrt[n]{0} = 0$	

مثال 1

إيجاد الجذور

بسِّط كلًّا ممّا يأتي:

a $\pm\sqrt{16y^4}$

$\pm\sqrt{16y^4} = \pm\sqrt{(4y^2)^2}$

$= \pm 4y^2$

الجذران التربيعيان لـ $16y^4$ هما $\pm 4y^2$.

b $-\sqrt{(x^2-6)^8}$

$-\sqrt{(x^2-6)^8} = -\sqrt{[(x^2-6)^4]^2}$

$= -(x^2-6)^4$

معكوس الجذر التربيعي الرئيس لـ $(x^2-6)^8$ هو $-(x^2-6)^4$.

c $\sqrt[5]{243a^{20}b^{25}}$

$\sqrt[5]{243a^{20}b^{25}} = \sqrt[5]{(3a^4b^5)^5}$

$= 3a^4b^5$

الجذر الخامس لـ $243a^{20}b^{25}$ هو $3a^4b^5$.

d $\sqrt[7]{128}$

$\sqrt[7]{128} = \sqrt[7]{2^7} = 2$

الجذر السابع لـ 128 هو 2

تحقق من فهمك

1A $\sqrt[3]{8x^6}$

1B $-\sqrt{(y+7)^{16}}$

إذا كان دليل الجذر عددًا زوجيًّا وأسّ ما تحت الجذر عددًا زوجيًّا، وكان أسّ الناتج عددًا فرديًّا، يجب أن تجد القيمة المطلقة للناتج لتتأكد من أن الجواب ليس سالبًا.

مثال 2

التبسيط باستعمال القيمة المطلقة

بسِّط كلًّا ممّا يأتي:

a $\sqrt[4]{y^4}$

$\sqrt[4]{y^4} = |y|$

بما أن y من الممكن أن تكون سالبة فالجذر الرئيس لهذه العبارة يساوي القيمة المطلقة لـ y.

b $\sqrt[6]{64(x^2-3)^{18}}$

$\sqrt[6]{64(x^2-3)^{18}} = 2|(x^2-3)^3|$

بما أن دليل الجذر (العدد 6) عدد زوجي، وأس العبارة x^2-3 (العدد 3) عدد فردي فيجب استعمال رمز القيمة المطلقة.

تحقق من فهمك

2A $\sqrt{36y^6}$

2B $\sqrt[4]{16(x-3)^{12}}$

إرشادات للدراسة

دليل الجذر

إذا كان n عددًا فرديًّا فهناك فقط جذر حقيقي واحد، وبناءً على ذلك، فلا يوجد هناك جذر رئيس، ولا يوجد حاجة إلى استعمال رمز القيمة المطلقة. أما إذا كان n عددًا زوجيًّا فإن $\sqrt[n]{x^n} = |x|$

تقريب الجذور باستعمال الحاسبة: تذكَّر أن الأعداد الحقيقية التي لا يمكن كتابتها في صورة كسور عشرية منتهية أو دورية، تُسمى أعدادًا غير نسبية. وغالبًا ما يستعمل تقريب الأعداد غير النسبية في مسائل من واقع الحياة.

الربط مع الحياة

تشير الإحصاءات في الولايات المتحدة إلى وقوع أكثر من 500 ألف حادث اصطدام للدراجات الهوائية والسقوط من عليها وإصابة راكبيها سنويًا، منهم أكثر من 11 ألف طفل ومراهق، مما يرفع تكلفة العلاج إلى ما يجاوز 200 مليون دولار سنويًا. ويُنصح بارتداء الخوذة لأهميتها لحماية رؤوس راكبي الدراجات الهوائية عند تعرضهم لحوادث السقوط.

مثال 3 من واقع الحياة — تقريب الجذور

حوادث الدراجات: ارجع إلى الفقرة الواردة في بداية الدرس.

a) إذا كانت $c = \sqrt[5]{b^2}$ تمثل عدد الحوادث، وb تمثل عدد الدراجات الهوائية، فقدّر عدد الحوادث الشهرية على طريقٍ ما، إذا عُلم أن 1000 دراجة تمرُّ خلاله كل شهر.

افهم: **المعطيات:** • $c = \sqrt[5]{b^2}$ توضح العلاقة بين عدد الدراجات الهوائية (b) التي تمر في طريق، وعدد الحوادث (c). بينها وبين السيارات

• عدد الدراجات الهوائية التي تمر خلال الطريق كلَّ شهر هو 1000 دراجة.

المطلوب: تقدير عدد الحوادث بين الدراجات الهوائية والسيارات في هذا الطريق خلال شهر.

خطّط: عوض عن b (عدد الدراجات الهوائية) بالعدد 1000.

حل:

$c = \sqrt[5]{b^2}$ — المعادلة الأصلية

$= \sqrt[5]{1000^2}$ — $b = 1000$

≈ 15.85 — باستعمال الحاسبة

فهناك 16 حادثًا تقريبًا كل شهر على ذلك الطريق.

تحقق

$15.85 \stackrel{?}{=} \sqrt[5]{b^2}$ — $c = 15.85$

$15.85^5 \stackrel{?}{=} b^2$ — ارفع الطرفين للأس 5

$1000337 \stackrel{?}{=} b^2$ — بسّط

$1000 \approx b$ ✓ — خُذ الجذر التربيعي للطرفين، مع إهمال الجذر السالب

b) إذا كان عدد الحوادث المسجلة على طريقٍ ما في أحد الأشهر يساوي 21 حادثًا، فقدر عدد الدراجات الهوائية التي مرَّت في الطريق خلال ذلك الشهر.

$c = \sqrt[5]{b^2}$ — المعادلة الأصلية

$21 = \sqrt[5]{b^2}$ — $c = 21$

$21^5 = b^2$ — ارفع الطرفين للأس 5

$4084101 = b^2$ — بسّط

$2021 \approx b$ — خُذ الجذر التربيعي للطرفين، مع إهمال الجذر السالب

إذن عدد الدراجات الهوائية التي مرَّت في الطريق خلال ذلك الشهر هو 2021 دراجةً تقريبًا.

تحقق من فهمك

3A) قياس: يمكن إيجاد مساحة سطح كرة إذا علم حجمها، باستعمال الدالة $S = \sqrt[3]{36\pi V^2}$، حيث V تمثل حجم الكرة. أوجد مساحة سطح كرة حجمها $200\,\text{in}^3$.

3B) قياس: إذا كانت مساحة سطح كرة تساوي $214.5\,\text{in}^2$، فأوجد حجم الكرة.

تأكد

المثالان 1 , 2 بسِّط كلًّا ممّا يأتي:

1) $\pm\sqrt{100y^8}$

2) $-\sqrt{49u^8v^{12}}$

3) $\sqrt{(y-6)^8}$

4) $\sqrt[4]{16g^{16}h^{24}}$

5) $\sqrt[3]{-125}$

6) $\sqrt[6]{64(2y+1)^{18}}$

7) قمر اصطناعي: إذا كان نصف القطر r لمدار قمر اصطناعي تلفزيوني يُعطى بالدالة $r = \sqrt[3]{\frac{GMt^2}{4\pi^2}}$؛ حيث G تمثل ثابت الجذب الكوني، M كتلة الأرض، t الزمن اللازم لإكمال القمر الاصطناعي دورة واحدة حول الأرض، فأوجد نصف قطر مدار القمر الاصطناعي إذا كانت :

$G = 6.67 \times 10^{-11} N.m^2/kg^2$, $M = 5.98 \times 10^{24}\,kg$, $t = 2.6 \times 10^6 s$

مثال 3 **استعمل الحاسبة لتقريب قيمة كلٍّ مما يأتي، إلى أقرب ثلاث منازل عشرية:**

8) $\sqrt{58}$ **9)** $-\sqrt{76}$ **10)** $\sqrt[5]{-43}$ **11)** $\sqrt[4]{71}$

تدرب وحل المسائل

المثالان 2 , 1 **بسِّط كلًّا ممّا يأتي:**

12) $\pm\sqrt{225a^{16}b^{36}}$ **13)** $-\sqrt{400x^{32}y^{40}}$ **14)** $\sqrt{(a^2+4a)^{12}}$

15) $\sqrt[3]{27b^{18}c^{12}}$ **16)** $\sqrt[5]{-243}$ **17)** $\sqrt[3]{-(y-9)^9}$

18) $\sqrt[6]{x^{18}}$ **19)** $\sqrt[3]{a^{12}}$ **20)** $\sqrt[4]{81(x+4)^4}$

21) $\sqrt[3]{(y^3+5)^{18}}$ **22)** $\sqrt[8]{x^{16}y^8}$ **23)** $\sqrt[5]{32a^{15}b^{10}}$

مثال 3

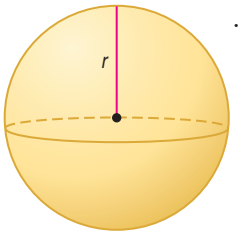
24) شحن: يريد متجر لبيع الكتب عبر الإنترنت زيادة حجم الصناديق المستعملة في الشحن. إذا كان حجم الصندوق الجديد N يساوي حجم الصندوق القديم V مضروبًا في مكعب عدد ثابت F؛ أيْ أن $N = V \cdot F^3$. فما قيمة العدد F إذا كان الحجم الأصلي للصندوق يساوي $0.8\,ft^3$ ، والحجم الجديد يساوي $21.6\,ft^3$؟

25) هندسة : يمكن إيجاد طول ضلع مكعب r باستعمال القانون $r = \sqrt[3]{V}$، حيث V تمثل حجم المكعب بالوحدات المكعبة . أوجد طول ضلع مكعب حجمه $512\,cm^3$.

استعمل الآلة الحاسبة لتقريب قيمة كلٍّ مما يأتي إلى أقرب ثلاث منازل عشرية:

26) $-\sqrt{150}$ **27)** $\sqrt{0.43}$ **28)** $\sqrt[5]{-4382}$ **29)** $\sqrt[6]{(8912)^2}$

30) هندسة : يمكن إيجاد نصف القطر r لكرة حجمها V باستعمال القانون $r = \sqrt[3]{\frac{3V}{4\pi}}$.



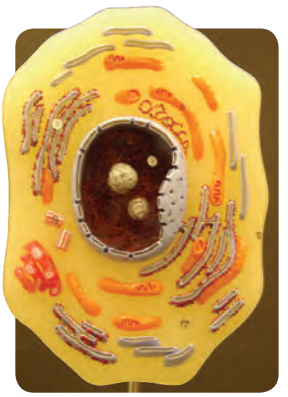
a) أوجد نصف قطر كلٍّ من الكرات ذات الأحجام الآتية:
$1000\,cm^3$, $8000\,cm^3$, $64000\,cm^3$.

b) ما مقدار التغيّر في حجم الكرة عند زيادة نصف القطر إلى مثليه؟

بسِّط كلًّا ممّا يأتي:

31) $\sqrt{196c^6d^4}$ **32)** $\sqrt[3]{-27a^{15}b^9}$ **33)** $\sqrt[3]{64(x+y)^6}$

34) فيزياء: طوَّر جوهانز كيبلر (Johannes kepler) القانون $d = \sqrt[3]{6t^2}$، حيث d تمثل المسافة بملايين الأميال بين أي كوكب والشمس ، و t تمثل عدد الأيام الأرضية التي يستغرقها الكوكب ليدور حول الشمس. إذا كان كوكب المريخ يستغرق 687 يومًا أرضيًّا ليدور حول الشمس، فكم يبعد المريخ عن الشمس؟



الربط مع الحياة

الأيض metabolism هو جميع العمليات الكيميائية التي ينتج عنها بناء أو تحليل المواد الغذائية داخل جسم الكائن الحي.

35) أحياء: يبين قانون كليبر (kleiber) $P = 73.3\sqrt[4]{m^3}$، العلاقة بين كتلة كائن حي m بالكيلوجرام ومتوسط الأيض اليومي له P بالسعرات الحرارية. أوجد متوسط الأيض اليومي لكل من الحيوانات في الجدول المجاور.

الحيوان	كتلته (kg)
النسر	4.5
الكلب	30
التمساح	72
الدولفين	156
الفيل	2300

36) **تمثيلات متعددة:** سوف تستعمل في هذا السؤال كلًّا من: $f(x) = x^n, g(x) = \sqrt[n]{x}$ لاستكشاف المعكوس.

a) جدوليًّا: اعمل جدولًا لكلٍّ من $f(x), g(x)$ مستعملًا $n = 4, n = 3$.

b) بيانيًّا: مثّل كلًّا من المعادلتين السابقتين بيانيًّا.

c) تحليليًّا: أيُّ المعادلتين السابقتين تمثل دالة؟ وأيّها تمثل دالة متباينة؟

d) تحليليًّا: ما قيم n التي يكون عندها كلٌّ من الدالتين $f(x), g(x)$ دالة عكسية للأخرى؟

e) لفظيًّا: ما الاستنتاجات التي يمكن أن تتوصل إليها حول $g(x) = \sqrt[n]{x}$ و $f(x) = x^n$، لقيم n الزوجية الموجبة، وقيم n الفردية الموجبة؟

مسائل مهارات التفكير العليا

37) **تحدٍّ:** ما قيم x التي تنتمي لمجموعة الأعداد الحقيقية وتحقق المتباينة $\sqrt[3]{x} > x$؟

38) **مسألة مفتوحة:** أوجد عددًا يكون جذره التربيعي الرئيس وجذره التكعيبي عددين صحيحين.

39) **اكتب:** وضِّح متى يكون استعمال رمز القيمة المطلقة ضروريًّا عند إيجاد الجذر النوني؟ ولماذا؟

40) **تحدٍّ:** حل المعادلة: $\frac{-5}{\sqrt{a}} = -125$

تدريب على اختبار

41) أيُّ الآتية هو الأقرب إلى قيمة المقدار $\sqrt[3]{7.32}$؟

A 1.8

B 1.9

C 2

D 2.1

42) قيمة $\sqrt[4]{256x^8y^{16}}$ هي:

A $16x^8y^{16}$

B $16x^2y^{16}$

C $4x^2y^4$

D $4x^4y^4$

مراجعة تراكمية

مثّل كلَّ دالة مما يأتي بيانيًّا: (الدرس 4-3)

43) $y = \sqrt{x-5}$

44) $y = \sqrt{x} - 2$

45) $y = 3\sqrt{x} + 4$

46) **صحة:** تبلغ كتلة طفل وُلد حديثًا $7\frac{1}{2}$ أرطال، وطوله 19.5in. فإذا كان الكيلوجرام الواحد يساوي 2.2 رطل تقريبًا، والسنتمتر الواحد يساوي 0.3937in تقريبًا. فأوجد كتلة المولود بالكيلوجرامات وطوله بالسنتمترات. (الدرس 4-2)

بسِّط كلًّا ممّا يأتي: (الدرس 3-3)

47) $(11x^2 + 13x - 15) - (7x^2 - 9x + 19)$

48) $(2a^2 + 6)^2$

أوجد حاصل الضرب في كلٍّ مما يأتي: (الدرس 3-3)

49) $(x + 4)(x + 5)$

50) $(x + 2y)(x - y)$

51) $2(w + z)(w - 4z)$

تمثيل دالة الجذر النوني بيانيًّا

رابط الدرس الرقمي
www.ien.edu.sa

الهدف
أستعمل الحاسبة البيانية TI-nspire لتمثيل دوال الجذر النوني بيانيًّا.

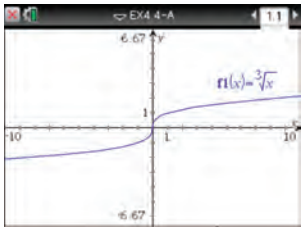
يمكنك استعمال الحاسبة البيانية TI-nspire لتمثيل دوال الجذور النونية بيانيًّا.

مثال 1 تمثيل دالة الجذر النوني بيانيًّا

مثِّل $y = \sqrt[3]{x}$ بيانيًّا.

- استعمل المفاتيح التالية بالترتيب من اليمين إلى اليسار.

- أدخل الدالة الجذرية بالضغط على مفتاح ctrl ثم مفتاح ^ ، ثم أدخل الدالة. ثم اضغط enter فيظهر تمثيلها البياني.



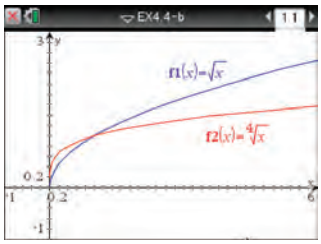
[−10, 10] scl: 1 by [−6.67, 6.67] scl: 1

مثال 2 دوال الجذور النونية المختلفة الدليل

مثّل الدالتين: $y = \sqrt{x}$ وَ $y = \sqrt[4]{x}$ بيانيًّا .

أدخل المعادلة $f1(x) = \sqrt{x}$ ومثلها مستعملًا الخطوات السابقة، ثم أدخل المعادلة $f2(x) = \sqrt[4]{x}$ فيظهر التمثيل البياني المجاور.

ملاحظة: اختر التدريج المناسب.

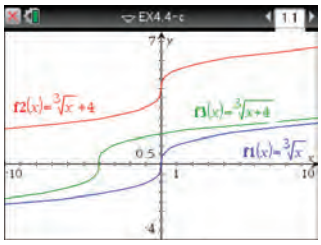


[−1, 6] scl: 0.2 by [−1, 3] scl: 0.2

مثال 3 دوال الجذور النونية المختلفة فيما تحت الجذر

مثِّل الدوال الثلاث: $y = \sqrt[3]{x} + 4$ ، $y = \sqrt[3]{x + 4}$ ، $y = \sqrt[3]{x}$ بيانيًّا .

باستعمال الخطوات السابقة يظهر التمثيل البياني المجاور.



[−10, 10] scl: 1 by [−4, 7] scl: 0.5

تمارين:

مثّل كلَّ دالةٍ مما يأتي بيانيًّا:

1) $y = \sqrt[4]{x}$
2) $y = \sqrt[4]{x + 2}$
3) $y = \sqrt[4]{x} + 2$
4) $y = \sqrt[5]{x}$
5) $y = \sqrt[5]{x - 5}$
6) $y = \sqrt[5]{x} - 5$

7) ما تأثير جمع أو طرح عددٍ ثابتٍ لما تحت الجذر في التمثيل البياني لدالة الجذر النوني؟

8) ما تأثير جمع أو طرح عددٍ ثابتٍ لدالة الجذر النوني في تمثيلها البياني؟

اختبار منتصف الفصل

الدروس 4-1 إلى 4-4

إذا كان $g(x) = 5x - 2$, $f(x) = 2x^2 + 4x - 3$، فأوجد كلَّ دالة مما يأتي:

1) $(f+g)(x)$

2) $(f-g)(x)$

3) $(f \cdot g)(x)$

4) $\left(\frac{f}{g}\right)(x)$

5) $[f \circ g](x)$

6) $[g \circ f](x)$

في كلِّ زوج ممَّا يأتي حدِّد هل كلَّ دالة تمثل دالة عكسية للأخرى أم لا، ووضِّح إجابتك:

7) $f(x) = 2x + 16$, $g(x) = \frac{1}{2}x - 8$

8) $g(x) = 4x + 15$, $h(x) = \frac{1}{4}x - 15$

9) $f(x) = x^2 - 5$, $g(x) = 5 + x^{-2}$

10) $g(x) = -6x + 8$, $h(x) = \frac{8 - x}{6}$

أوجد معكوس كلِّ دالة مما يأتي، إذا كان ذلك ممكنًا:

11) $h(x) = \frac{2}{5}x + 8$

12) $f(x) = \frac{4}{9}(x - 3)$

13) $h(x) = -\frac{10}{3}(x + 5)$

14) $f(x) = \frac{x + 12}{7}$

15) **تنسيق حدائق:** تتقاضى مؤسسة لتنسيق الحدائق 25 ريالًا أجرة للمعدات، إضافة إلى 15 ريالًا عن كل ساعة عمل. وتمثل الدالة $f(h) = 15h + 25$ تكلفة العمل لمدة h ساعة.

a) أوجد $f^{-1}(h)$. وماذا تمثل $f^{-1}(h)$؟

b) إذا كانت أجرة تنسيق حديقة 85 ريالًا، فكم عدد ساعات عمل المؤسسة في الحديقة؟

مثّل كلَّ متباينة مما يأتي بيانيًّا:

16) $y < \sqrt{x - 5}$

17) $y \le -2\sqrt{x}$

18) $y > \sqrt{x + 9} + 3$

19) $y \ge \sqrt{x + 4} - 5$

مثّل كلًّا من الدالتين الآتيتين بيانيًّا، وحدِّد مجال كل منهما ومداها:

20) $y = 2 + \sqrt{x}$

21) $y = \sqrt{x + 4} - 1$

22) **اختيار من متعدد:** ما مجال الدالة $f(x) = \sqrt{2x + 5}$؟

A $\left\{x \middle| x > \frac{5}{2}\right\}$

C $\left\{x \middle| x \ge \frac{5}{2}\right\}$

B $\left\{x \middle| x > -\frac{5}{2}\right\}$

D $\left\{x \middle| x \ge -\frac{5}{2}\right\}$

بسّط كلًّا مما يأتي:

23) $\sqrt{121a^4b^{18}}$

24) $\sqrt{(x^4 + 3)^{12}}$

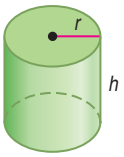
25) $\sqrt[3]{27(2x - 5)^{15}}$

26) $\sqrt[5]{-(y - 6)^{20}}$

27) $\sqrt[3]{8(x + 4)^6}$

28) $\sqrt[4]{16(y + x)^8}$

29) **اختيار من متعدد:** نصف قطر الأسطوانة أدناه يساوي ارتفاعها. ويمكن إيجاد نصف قطرها r باستعمال القانون $r = \sqrt[3]{\frac{V}{\pi}}$، حيث V حجم الأسطوانة. ما نصف القطر التقريبي للأسطوانة إذا كان حجمها $500\ \text{in}^3$ ؟



A 2.53 in

B 5.42 in

C 7.94 in

D 24.92 in

30) **إنتاج:** إذا كانت تكلفة إنتاج p قطعة بالريالات في مصنع يعبّر عنها بالدالة: $C(p) = 5p + 60$. وكان عدد القطع المنتجة في نهاية h ساعة عمل يُعبَّر عنه بالدالة: $P(h) = 40h$.

a) أوجد $C[p\ (h)]$.

b) أوجد تكلفة الإنتاج في نهاية 8 ساعات عمل.

رابط الدرس الرقمي

www.ien.edu.sa

4-5

العمليات على العبارات الجذرية
Operations with Radical Expressions

فيما سبق

درستُ تبسيط عبارات تتضمن الجذر النوني. (الدرس 4-4)

والآن

- أبسّط عبارات جذرية.
- أجمع عبارات جذرية وأطرحها وأضربها وأقسمها.

المفردات

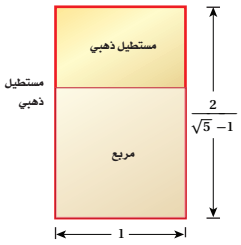
إنطاق المقام
rationalizing the denominator

الجذور المتشابهة
like radical expressions

المرافق
conjugate

لماذا؟

عُرف المستطيل الذهبي قديمًا، حيث استعمله الفنانون والمهندسون في تصاميمهم، والنسبة بين طوله إلى عرضه هي $\frac{2}{\sqrt{5}-1}$. ومن أهم خصائصه أنه إذا أزيل منه مربع طول ضلعه هو عرض المستطيل فالشكل الباقي مستطيل ذهبي أيضًا. وستتعلم في هذا الدرس تبسيط عبارات جذرية مثل $\frac{2}{\sqrt{5}-1}$.



تبسيط العبارات الجذرية: يمكن تبسيط العبارات التي تحوي جذورًا نونية باستعمال خواص العمليات عليها.

مفهوم أساسي — خاصية ضرب الجذور

أضف إلى مطويتك

التعبير اللفظي: لأيِّ عددين حقيقيين a , b ولأي عدد صحيح n حيث $n > 1$، فإن $\sqrt[n]{ab} = \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b}$، إذا كانت n عددًا زوجيًّا وكان a , b عددين غير سالبين أو إذا كان n عددًا فرديًّا.

مثالان: $\sqrt{2} \cdot \sqrt{8} = \sqrt{16} = 4$ $\quad$ $\sqrt[3]{3} \cdot \sqrt[3]{9} = \sqrt[3]{27} = 3$

ولكي تكون العبارة الجذرية التي تتضمن جذورًا في أبسط صورة، يجب ألا يتضمن ما تحت الجذر عوامل (غير العدد 1) يمكن أن تكتب في صورة قوى نونية لعدد صحيح أو كثيرة حدود.

مثال 1 — تبسيط عبارات جذرية باستعمال خاصية الضرب

بسّط كلًّا مما يأتي:

(a) $\sqrt{32x^8}$

$\sqrt{32x^8} = \sqrt{4^2 \cdot 2 \cdot (x^4)^2}$ — حلّل ما يمكن تحليله إلى عوامل مربعة

$= \sqrt{4^2} \cdot \sqrt{(x^4)^2} \cdot \sqrt{2}$ — خاصية ضرب الجذور

$= 4x^4\sqrt{2}$ — بسّط

(b) $\sqrt[4]{16a^{24}b^{13}}$

$\sqrt[4]{16a^{24}b^{13}} = \sqrt[4]{2^4 \cdot (a^6)^4 (b^3)^4 \cdot b}$ — حلّل ما يمكن تحليله إلى عوامل مرفوعة للأس 4

$= \sqrt[4]{2^4} \cdot \sqrt[4]{(a^6)^4} \cdot \sqrt[4]{(b^3)^4} \cdot \sqrt[4]{b}$ — خاصية ضرب الجذور

$= 2a^6|b^3|\sqrt[4]{b}$ — بسّط

ولا ضرورة لكتابة رمز القيمة المطلقة في هذه الحالة؛ لأنه حتى يكون $\sqrt[4]{16a^{24}b^{13}}$ معرّفًا، يجب أن تكون b موجبة.

لذا فإن $\sqrt[4]{16a^{24}b^{13}} = 2a^6b^3\sqrt[4]{b}$.

تحقق من فهمك

(1A) $\sqrt{12d^3c^{12}}$ $\quad$ **(1B)** $\sqrt[3]{27y^{12}z^7}$

خاصية قسمة الجذور هي خاصية أخرى تستعمل في تبسيط العبارات الجذرية.

مفهوم أساسي

أضف إلى مطويتك

خاصية قسمة الجذور

التعبير اللفظي: لأيِّ عددين حقيقيين a, b، حيث $b \neq 0$ ولأي عدد صحيح n حيث $n > 1$، فإن $\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$، إذا كانت جميع الجذور معرّفة.

مثالان: $\sqrt{\frac{27}{4}} = \frac{\sqrt{27}}{\sqrt{4}} = \frac{3\sqrt{3}}{2}$ $\qquad$ $\sqrt[3]{\frac{x^6}{8}} = \frac{\sqrt[3]{x^6}}{\sqrt[3]{8}} = \frac{x^2}{2} = \frac{1}{2}x^2$

لإزالة الجذور من المقام أو الكسور تحت الجذر، استعمل عملية تُسمى **إنطاق المقام**. ولعمل ذلك، اضرب البسط والمقام في مقدار بحيث تكون جميع أسس الثوابت والمتغيرات الموجودة تحت الجذر من مضاعفات دليل الجذر مما يسهل إيجاد الجذر الدقيق.

إذا كان المقام	فاضرب البسط والمقام في	مثال
$\sqrt{b}$	$\sqrt{b}$	$\frac{2}{\sqrt{3}} = \frac{2}{\sqrt{3}} \cdot \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{3}}{3}$
$\sqrt[n]{b^x}$	$\sqrt[n]{b^{n-x}}$	$\frac{5}{\sqrt[3]{2}} = \frac{5}{\sqrt[3]{2}} \cdot \frac{\sqrt[3]{2^2}}{\sqrt[3]{2^2}} = \frac{5\sqrt[3]{4}}{2}$

إرشادات للدراسة

الجذور الدقيقة

يسهل إيجاد الجذور بصورة دقيقة عندما تكون جميع أسس الثوابت والمتغيرات الموجودة تحت الجذر من مضاعفات دليل الجذر، فمثلًا:

$\sqrt{25a^4} = 5a^2$

مثال 2

تبسيط عبارات جذرية باستعمال خاصية القسمة

بسّط كلًّا مما يأتي:

a) $\sqrt{\frac{x^6}{y^7}}$

$\sqrt{\frac{x^6}{y^7}} = \frac{\sqrt{x^6}}{\sqrt{y^7}}$ خاصية قسمة الجذور

$= \frac{\sqrt{(x^3)^2}}{\sqrt{(y^3)^2 \cdot y}}$ حلّل ما يمكن تحليله إلى عوامل مربعة

$= \frac{\sqrt{(x^3)^2}}{\sqrt{(y^3)^2} \cdot \sqrt{y}}$ خاصية ضرب الجذور

$= \frac{|x^3|}{y^3\sqrt{y}}$ بسّط

$= \frac{|x^3|}{y^3\sqrt{y}} \cdot \frac{\sqrt{y}}{\sqrt{y}}$ إنطاق المقام

$= \frac{|x^3|\sqrt{y}}{y^4}$ $\sqrt{y} \cdot \sqrt{y} = y$

b) $\sqrt[4]{\frac{6}{5x}}$

$\sqrt[4]{\frac{6}{5x}} = \frac{\sqrt[4]{6}}{\sqrt[4]{5x}}$ خاصية قسمة الجذور

$= \frac{\sqrt[4]{6}}{\sqrt[4]{5x}} \cdot \frac{\sqrt[4]{5^3x^3}}{\sqrt[4]{5^3x^3}}$ إنطاق المقام

$= \frac{\sqrt[4]{6 \cdot 5^3x^3}}{\sqrt[4]{5x \cdot 5^3x^3}}$ خاصية ضرب الجذور

$= \frac{\sqrt[4]{750x^3}}{\sqrt[4]{5^4x^4}}$ اضرب

$= \frac{\sqrt[4]{750x^3}}{5x}$ $\sqrt[4]{5^4x^4} = 5x$

تحقق من فهمك

2A) $\frac{\sqrt{a^9}}{\sqrt{b^5}}$

2B) $\sqrt[5]{\frac{3}{4y}}$

فيما يأتي ملخص للقواعد التي تستعمل في تبسيط العبارات الجذرية:

ملخص المفاهيم

أضف إلى مطويتك

تبسيط العبارات الجذرية

تكون العبارة الجذرية في أبسط صورة إذا تحققت جميع الشروط الآتية:

- إذا كان دليل الجذر n أصغر ما يمكن.
- إذا لم يتضمن ما تحت الجذر عوامل (غير العدد 1) يمكن أن تُكتب على صورة قوى نونية لعدد صحيح أو لكثيرة حدود.
- إذا لم يتضمن ما تحت الجذر كسورًا.
- إذا لم توجد جذور في المقام.

العمليات على العبارات الجذرية: يمكنك استعمال خاصيتي الضرب والقسمة لضرب بعض العبارات الجذرية وقسمتها.

مثال 3 ضرب العبارات الجذرية

بسّط العبارة الجذرية: $5\sqrt[3]{-12ab^4} \cdot 3\sqrt[3]{18a^2b^2}$.

$5\sqrt[3]{-12ab^4} \cdot 3\sqrt[3]{18a^2b^2} = 5 \cdot 3 \cdot \sqrt[3]{-12ab^4 \cdot 18a^2b^2}$ خاصية ضرب الجذور

$= 15 \cdot \sqrt[3]{-2^2 \cdot 3 \cdot ab^4 \cdot 2 \cdot 3^2 \cdot a^2b^2}$ حلّل الثوابت

$= 15 \cdot \sqrt[3]{-2^3 \cdot 3^3 \cdot a^3b^6}$ جمّع العوامل في صورة أسس تكعيبية

$= 15 \cdot \sqrt[3]{-2^3} \cdot \sqrt[3]{3^3} \cdot \sqrt[3]{a^3} \cdot \sqrt[3]{b^6}$ خاصية ضرب الجذور

$= 15 \cdot (-2) \cdot 3 \cdot a \cdot b^2$ بسّط

$= -90ab^2$ اضرب

تحقق من فهمك

(3A) $6\sqrt{8c^3d^5} \cdot 4\sqrt{2cd^3}$

(3B) $2\sqrt[4]{8x^3y^2} \cdot 3\sqrt[4]{2x^5y^2}$

يمكنك جمع العبارات الجذرية وطرحها بالأسلوب المستعمل عند جمع وحيدات الحد أو طرحها، ولكن بشرط أن تكون **الجذور متشابهة**؛ أي أن يكون للجذور الدليل نفسه وما تحت الجذور المقادير نفسها.

متشابهان: $\sqrt{3b}$ و $4\sqrt{3b}$

غير متشابهين: $\sqrt{3b}$ و $\sqrt[3]{3b}$

غير متشابهين: $\sqrt{2b}$ و $\sqrt{3b}$

مثال 4 جمع العبارات الجذرية وطرحها

بسّط العبارة الجذرية: $\sqrt{98} - 2\sqrt{32}$.

$\sqrt{98} - 2\sqrt{32} = \sqrt{2 \cdot 7^2} - 2\sqrt{4^2 \cdot 2}$ حلّل ما يمكن تحليله إلى عوامل مربعة

$= \sqrt{7^2} \cdot \sqrt{2} - 2 \cdot \sqrt{4^2} \cdot \sqrt{2}$ خاصية ضرب الجذور

$= 7\sqrt{2} - 2 \cdot 4 \cdot \sqrt{2}$ بسّط العبارات الجذرية

$= 7\sqrt{2} - 8\sqrt{2}$ اضرب

$= -\sqrt{2}$ $(7 - 8)\sqrt{2} = (-1)(\sqrt{2})$

تحقق من فهمك

(4A) $4\sqrt{8} + 3\sqrt{50}$

(4B) $5\sqrt{12} + 2\sqrt{27} - \sqrt{128}$

إرشادات للدراسة

جمع العبارات الجذرية وطرحها

بسّط كل جذر على حدة قبل محاولة تجميع الجذور المتشابهة.

وبما أنه يمكنك جمع الجذور وطرحها بالطريقة نفسها المتبعة في جمع وحيدات الحد وطرحها، فإنه يمكنك أيضًا ضرب الجذور باستعمال التوزيع بالترتيب لضرب ثنائيتي حد.

مثال 5 ضرب العبارات الجذرية

بسّط العبارة الجذرية $(4\sqrt{3}+5\sqrt{2})(3\sqrt{2}-6)$.

$(4\sqrt{3}+5\sqrt{2})(3\sqrt{2}-6) = 4\sqrt{3}\cdot 3\sqrt{2} + 4\sqrt{3}\cdot(-6) + 5\sqrt{2}\cdot 3\sqrt{2} + 5\sqrt{2}\cdot(-6)$ خاصية التوزيع

$= 12\sqrt{3\cdot 2} - 24\sqrt{3} + 15\sqrt{2^2} - 30\sqrt{2}$ خاصية ضرب الجذور

$= 12\sqrt{6} - 24\sqrt{3} + 30 - 30\sqrt{2}$ بسّط

تحقق من فهمك

(5A) $(6\sqrt{3}-5)(2\sqrt{5}+4\sqrt{2})$ **(5B)** $(7\sqrt{2}-3\sqrt{3})(7\sqrt{2}+3\sqrt{3})$

إرشادات للدراسة

المُرافق

حاصل ضرب عددين مترافقين هو عدد نسبي دائمًا.

تعتبر كلٌّ من ثنائيتي الحد اللتين على الصورة $a\sqrt{b}-c\sqrt{d}$ ، $a\sqrt{b}+c\sqrt{d}$ حيث a, b, c, d أعداد نسبية مرافقة للأخرى. ويمكنك استعمال **المرافق** لإنطاق المقام.

مثال 6 من واقع الحياة استعمال المرافق لإنطاق المقام

هندسة: ارجع إلى الفقرة الواردة في بداية الدرس، واستعمل المرافق لإنطاق المقام وتبسيط العبارة الجذرية: $\frac{2}{\sqrt{5}-1}$.

$\frac{2}{\sqrt{5}-1} = \frac{2}{\sqrt{5}-1}\cdot\frac{\sqrt{5}+1}{\sqrt{5}+1}$ $\sqrt{5}+1$ مرافق لـ $\sqrt{5}-1$

$= \frac{2\sqrt{5}+2(1)}{(\sqrt{5})^2+1(\sqrt{5})-1(\sqrt{5})-1(1)}$ اضرب واستعمل خاصية التوزيع

$= \frac{2\sqrt{5}+2}{5+\sqrt{5}-\sqrt{5}-1}$ بسّط

$= \frac{2\sqrt{5}+2}{4}$ اطرح

$= \frac{\sqrt{5}+1}{2}$ بسّط

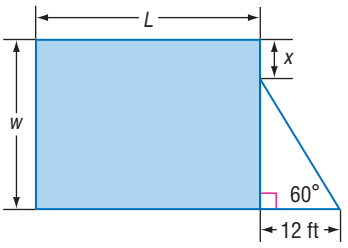
إرشادات للدراسة

يمكنك إيجاد ناتج $(\sqrt{5}-1)(\sqrt{5}+1)$ مباشرة باستعمال الفرق بين مربعين بالشكل:

$(\sqrt{5}-1)(\sqrt{5}+1)$
$= (\sqrt{5})^2 - (1)^2$
$= 5 - 1 = 4$

تحقق من فهمك

(6) هندسة: إذا كانت مساحة المستطيل في الشكل المجاور تساوي $900\ \text{ft}^2$، فاكتب معادلة تمثل طول المستطيل L بدلالة x، ثم بسطها.



تأكد

الأمثلة 1-5 بسّط كلَّ عبارة جذرية فيما يأتي:

(1) $\sqrt{36ab^4c^5}$ **(2)** $\sqrt{144x^7y^5}$ **(3)** $\frac{\sqrt{c^5}}{\sqrt{d^9}}$ **(4)** $\sqrt[4]{\frac{5x}{8y}}$

(5) $5\sqrt{2x}\cdot 3\sqrt{8x}$ **(6)** $3\sqrt[3]{36xy}\cdot 2\sqrt[3]{6x^2y^2}$

(7) $\sqrt[4]{3x^3y^2}\cdot\sqrt[4]{27xy^2}$ **(8)** $5\sqrt{32}+\sqrt{27}+2\sqrt{75}$

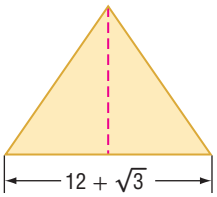
9) $(4+2\sqrt{5})(3\sqrt{3}+4\sqrt{5})$ **10)** $(8\sqrt{3}-2\sqrt{2})(8\sqrt{3}+2\sqrt{2})$

11) $\dfrac{5}{\sqrt{2}+3}$ **12)** $\dfrac{8}{\sqrt{6}-5}$

13) $\dfrac{4+\sqrt{2}}{\sqrt{2}-3}$ **14)** $\dfrac{6-\sqrt{3}}{\sqrt{3}+4}$

مثال 6

15) هندسة: أوجد ارتفاع المثلث في الشكل المجاور في أبسط صورة إذا كانت مساحته $189+4\sqrt{3}\ \text{cm}^2$.



تدرب وحل المسائل

الأمثلة 1-4

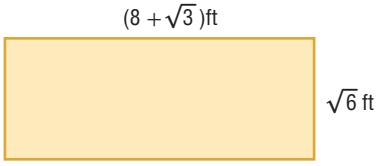
بسّط كلَّ عبارة جذرية فيما يأتي:

16) $\sqrt{72a^8b^5}$ **17)** $\sqrt{9a^{15}b^3}$ **18)** $\sqrt{18a^6b^3c^5}$ **19)** $\sqrt{\dfrac{7x}{10y^3}}$

20) $\dfrac{\sqrt[3]{6x^2}}{\sqrt[3]{5y}}$ **21)** $\sqrt[4]{\dfrac{7x^3}{4b^2}}$ **22)** $3\sqrt{5y}\cdot 8\sqrt{10yz}$ **23)** $2\sqrt{32a^3b^5}\cdot\sqrt{8a^7b^2}$

24) $3\sqrt{90}+4\sqrt{20}+\sqrt{162}$ **25)** $4\sqrt{28}-8\sqrt{810}+\sqrt{44}$

26) هندسة: أوجد محيط المستطيل في الشكل المجاور واكتبه في أبسط صورة. ثم أوجد مساحته واكتبها في أبسط صورة.



المثالان 5, 6

بسّط كلًّا من العبارات الجذرية الآتية:

27) $(7\sqrt{2}-3\sqrt{3})(4\sqrt{6}+3\sqrt{12})$ **28)** $(6\sqrt{3}+5\sqrt{2})(2\sqrt{6}+3\sqrt{8})$

29) $\dfrac{6}{\sqrt{3}-\sqrt{2}}$ **30)** $\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{5}-\sqrt{3}}$ **31)** $\dfrac{9-2\sqrt{3}}{\sqrt{3}+6}$ **32)** $\dfrac{2\sqrt{2}+2\sqrt{5}}{\sqrt{5}+\sqrt{2}}$

بسّط كلًّا من العبارات الجذرية الآتية:

33) $\sqrt[3]{-54x^6y^{11}}$ **34)** $\sqrt[4]{\dfrac{12x^3y^2}{5a^2b}}$ **35)** $\dfrac{\sqrt[3]{36xy^2}}{\sqrt[3]{10xz}}$

36) $\dfrac{x+1}{\sqrt{x}-1}$ **37)** $\dfrac{x-2}{\sqrt{x^2-4}}$ **38)** $\dfrac{\sqrt{x}}{\sqrt{x^2-1}}$

الربط مع الحياة

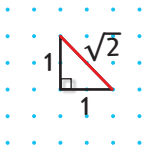
التفاح يطفو على الماء لأن نسبة الهواء فيه 25% من حجمه.

39) تفاح: يرتبط قطر التفاحة مع كتلتها بالدالة $d=\sqrt[3]{3w}$، حيث d تمثل القطر بالبوصة، w الكتلة بالأونصات. أوجد قطر تفاحة كتلتها 6.47 أونصات.

بسّط كلَّ عبارة جذرية فيما يأتي، حيث b عدد زوجي:

40) $\sqrt[b]{a^b}$ **41)** $\sqrt[b]{a^{4b}}$ **42)** $\sqrt[b]{a^{2b}}$ **43)** $\sqrt[b]{a^{3b}}$

44) تمثيلات متعددة: ستستكشف في هذا السؤال العمليات على الجذور المتشابهة.



a) عدديًّا: انقل الشكل المجاور على ورقة نقطية. واستعمل نظرية فيثاغورس لإثبات أن طول القطعة المستقيمة الحمراء يساوي $\sqrt{2}$ وحدة.

b) بيانيًّا: زد طول القطعة المستقيمة الحمراء ليصبح $\sqrt{2}+\sqrt{2}$.

c) تحليليًّا: استعمل الشكل الذي رسمته لتبين أن: $\sqrt{2}+\sqrt{2}\neq\sqrt{2+2}=2$.

d) بيانيًّا: استعمل الورقة النقطية لرسم مربع طول ضلعه $\sqrt{2}$ وحدة.

e) عدديًّا: برهن على أن مساحة المربع تساوي $\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}=2$ وحدة مربعة.

مسائل مهارات التفكير العليا

45) اكتشف الخطأ: بسّط كلّ من خالد وناصر العبارة الجذرية $4\sqrt{32} + 6\sqrt{18}$، فأيٌّ منهما إجابته صحيحة؟ وضِّح إجابتك.

خالد

$$4\sqrt{32} + 6\sqrt{18}$$
$$= 4\sqrt{4^2 \cdot 2} + 6\sqrt{3^2 \cdot 2}$$
$$= 16\sqrt{2} + 18\sqrt{2}$$
$$= 34\sqrt{2}$$

ناصر

$$4\sqrt{32} + 6\sqrt{18}$$
$$= 4\sqrt{16 \cdot 2} + 6\sqrt{9 \cdot 2}$$
$$= 64\sqrt{2} + 54\sqrt{2}$$
$$= 118\sqrt{2}$$

46) تحدٍّ: بيّن أن $\frac{-1 - i\sqrt{3}}{2}$ هو جذر تكعيبي للعدد 1.

47) تبرير: ما قيم a، التي تجعل العبارة الجذرية $\sqrt{a} \cdot \sqrt{-a}$ عددًا حقيقيًّا؟ فسِّر إجابتك.

48) مسألة مفتوحة: أوجد عددًا غير الواحد الصحيح بحيث يكون كلٌّ من جذوره: التربيعي، والتكعيبي، والرابع عددًا كليًّا موجبًا.

49) اكتب: وضّح متى يكون وضع رمز القيمة المطلقة ضروريًّا، أو غير ضروري في ناتج تبسيط الجذر النوني لعبارة ما .

تدريب على اختبار

50) أيّ العبارات الجذرية الآتية تكافئ العبارة الجذرية $\sqrt{180a^2b^8}$؟

A $5\sqrt{6}|a|b^4$ **B** $6\sqrt{5}|a|b^4$ **C** $3\sqrt{10}|a|b^4$ **D** $36\sqrt{5}|a|b^4$

مراجعة تراكمية

بسّط كلًّا من العبارات الجذرية الآتية:

51) $\sqrt{81x^6}$ **52)** $\sqrt[3]{729a^3b^9}$ **53)** $\sqrt{(g+5)^2}$

54) مثّل المتباينة $y \le \sqrt{x-2}$ بيانيًّا. (الدرس: 3-1)

حل كلَّ معادلة مما يأتي: (الدرس: 3-6)

55) $x^4 - 34x^2 + 225 = 0$ **56)** $x^4 + 6x^2 - 27 = 0$ **57)** $27x^3 + 1 = 0$

58) قوارب: تربح شركة لصناعة القوارب، 5000 ريال من صنع القارب الصغير، و 9000 ريال من صنع القارب الكبير. فإذا زاد عدد ما أنتجته الشركة من القوارب الصغيرة 5 قوارب على عدد القوارب الكبيرة خلال فصلي الصيف والربيع. وربحت مقابل ذلك 81000 ريال. فكم عدد القوارب التي أنتجتها الشركة من كل نوع؟ (الدرس: 3-6)

أوجد ناتج كلٍّ مما يأتي: (مهارة سابقة)

59) $3\left(\frac{1}{8}\right)$ **60)** $\frac{1}{2} + \frac{3}{8}$ **61)** $\frac{5}{6} - \frac{2}{5}$

رابط الدرس الرقمي

www.ien.edu.sa

4-6

الأسس النسبية
Rational Exponents

فيما سبق

درست استعمال خصائص الأسس. (مهارة سابقة)

والآن

- أكتب عبارات ذات أسس نسبية بالصورة الجذرية وبالعكس.
- أُبسّط عبارات أسية أو جذرية.

لماذا؟

يمكن أن تستعمل الصيغة $P = c(1 + r)^n$ لتقدير الثمن المستقبلي لسلعة اعتمادًا على التضخم المالي، حيث P يمثل الثمن المستقبلي، c تمثل الثمن الحالي، r يمثل معدَّل التضخم السنوي، n تمثل عدد السنوات المستقبلية. فمثلًا يمكن أن تستعمل الصيغة:

$$P = c(1 + r)^{\frac{1}{2}}$$

لتقدير الثمن المستقبلي لجهاز تبريد ماء في ستة أشهر.

الأسس النسبية والعبارات الجذرية: تعلم أن تربيع عدد غير سالب وإيجاد جذره التربيعي هما عمليتان عكسيتان. ولكن كيف يمكنك إيجاد قيمة عبارة تتضمن أسًّا نسبيًّا كما في الصيغة أعلاه؟ يمكنك إيجاد قيم مثل هذه العبارات بافتراض أن عبارات الأسس النسبية يصح فيها ما يصح في عبارات الأسس الصحيحة.

$$\left(b^{\frac{1}{2}}\right)^2 = b^{\frac{1}{2}} \cdot b^{\frac{1}{2}}$$ اكتبه على صورة حاصل ضرب

$$= b^{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}}$$ اجمع الأسس

$$= b^1 = b$$ بسّط

لذا فإن $b^{\frac{1}{2}}$ هو عدد مربعه يساوي b؛ إذن $b^{\frac{1}{2}} = \sqrt{b}$.

مفهوم أساسي

أضف إلى مطويتك

الأسس النسبية ($b^{\frac{1}{n}}$)

التعبير اللفظي: لأيِّ عدد حقيقي b، وأيِّ عدد صحيح موجب n، $b^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{b}$، إلا إذا كانت $b < 0$، و n عددًا زوجيًّا فإن الجذر النوني يكون عددًا مركبًا.

مثالان: $(-16)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{-16} = 4i$ ، $27^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{27} = 3$

مثال 1 الصورتان الجذرية والأسية

a) اكتب $x^{\frac{1}{6}}$ على الصورة الجذرية.

$x^{\frac{1}{6}} = \sqrt[6]{x}$ تعريف $b^{\frac{1}{n}}$

b) اكتب $\sqrt[4]{z}$ على الصورة الأسّية.

$\sqrt[4]{z} = z^{\frac{1}{4}}$ تعريف $b^{\frac{1}{n}}$

تحقق من فهمك

1A) اكتب $a^{\frac{1}{5}}$ على الصورة الجذرية.

1B) اكتب $\sqrt[8]{c}$ على الصورة الأسّية

وبشكل عام يمكنك تقديم التعريف العام الآتي للأسس النسبية:

مفهوم أساسي

أضف إلى مطويتك

الأسس النسبية ($b^{\frac{x}{y}}$)

التعبير اللفظي: يكون $b^{\frac{x}{y}} = \sqrt[y]{b^x} = (\sqrt[y]{b})^x$ لأيِّ عدد حقيقي b لا يساوي صفرًا، ولأي عددين صحيحين x, y بحيث $y > 1$، إلا إذا كانت $b < 0$ و y عددًا زوجيًّا، فإن الجذر قد يكون عددًا مركّبًا.

مثالان: $(-16)^{\frac{3}{2}} = (\sqrt{-16})^3 = (4i)^3 = -64i$ $\quad 27^{\frac{2}{3}} = (\sqrt[3]{27})^2 = 3^2 = 9$

كما أن القواعد التي تنطبق على الأسس الصحيحة السالبة تنطبق أيضًا على الأسس النسبية السالبة.

مثال 2 إيجاد قيم عبارات تتضمن أسسًا نسبية

أوجد قيمة كلِّ عبارة مما يأتي:

a) $81^{-\frac{1}{4}}$

$81^{-\frac{1}{4}} = \frac{1}{81^{\frac{1}{4}}}$ $\quad b^{-n} = \frac{1}{b^n}$

$= \frac{1}{\sqrt[4]{81}}$ $\quad 81^{\frac{1}{4}} = \sqrt[4]{81}$

$= \frac{1}{\sqrt[4]{3^4}}$ $\quad 81 = 3^4$

$= \frac{1}{3}$ بسّط

b) $216^{\frac{2}{3}}$

$216^{\frac{2}{3}} = (6^3)^{\frac{2}{3}}$ $\quad 216 = 6^3$

$= 6^{3 \cdot \frac{2}{3}}$ خاصية قوة القوة

$= 6^2$ ضرب الأسس

$= 36$ بسّط

تحقق من فهمك

2A) $-3125^{-\frac{1}{5}}$ $\quad$ **2B)** $256^{\frac{3}{8}}$

مثال 3 من واقع الحياة حل معادلات تتضمن أسسًا نسبية

ثقافة مالية: ارجع إلى الفقرة الواردة في بداية الدرس، وافترض أن الثمن الحالي لجهاز تبريد الماء هو 390 ريالًا. فكم سيزيد الثمن خلال ستة أشهر إذا كان معدَّل التضخم المالي السنوي 5.3% ؟

$P = c(1 + r)^n$ الصيغة

$= 390(1 + 0.053)^{\frac{1}{2}}$ $\quad c = 390, r = 0.053, n = \frac{\text{6 أشهر}}{\text{12 شهرًا}} = \frac{1}{2}$

≈ 400.20 استعمل الحاسبة

$400.20 - 390.00 = 10.20$ إذن سيزيد ثمن جهاز تبريد الماء بعد ستة أشهر بمقدار 10.20 ريالات تقريبًا.

تحقق من فهمك

3) ثقافة مالية: افترض أن ثمن لتر الحليب الآن 4 ريالات. فكم سيزيد الثمن بعد تسعة أشهر، إذا كان معدَّل التضخم المالي السنوي 5.3%؟

تبسيط العبارات: خواص الأسس التي تعلمتها سابقًا تنطبق أيضًا على الأسس النسبية؛ لذا اكتب كل عبارة على صورة أسس موجبة. واحرص على أن تكون الأسس في مقام الكسر أعدادًا صحيحة موجبة؛ لذلك أنت في حاجة إلى إنطاق المقام أحيانًا.

مثال 4 تبسيط عبارات بأسس نسبية

بسّط كلَّ عبارة مما يأتي:

(a $a^{\frac{2}{7}} \cdot a^{\frac{4}{7}}$

$a^{\frac{2}{7}} \cdot a^{\frac{4}{7}} = a^{\frac{2}{7}+\frac{4}{7}}$ خاصية ضرب القوى

$= a^{\frac{6}{7}}$ جمع الأسس

(b $b^{-\frac{5}{6}}$

$b^{-\frac{5}{6}} = \frac{1}{b^{\frac{5}{6}}}$ $b^{-n} = \frac{1}{b^n}$

$= \frac{1}{b^{\frac{5}{6}}} \cdot \frac{b^{\frac{1}{6}}}{b^{\frac{1}{6}}}$ اضرب في $\frac{b^{\frac{1}{6}}}{b^{\frac{1}{6}}}$

$= \frac{b^{\frac{1}{6}}}{b^{\frac{6}{6}}}$ $b^{\frac{5}{6}} \cdot b^{\frac{1}{6}} = b^{\frac{5}{6}+\frac{1}{6}}$

$= \frac{b^{\frac{1}{6}}}{b}$ $b^{\frac{6}{6}} = b^1 = b$

(c $\frac{x^{\frac{1}{2}} - 2}{3x^{\frac{1}{2}} + 2}$

$\frac{x^{\frac{1}{2}} - 2}{3x^{\frac{1}{2}} + 2} = \frac{x^{\frac{1}{2}} - 2}{3x^{\frac{1}{2}} + 2} \cdot \frac{3x^{\frac{1}{2}} - 2}{3x^{\frac{1}{2}} - 2}$ $3x^{\frac{1}{2}} - 2$ مرافق لـ $3x^{\frac{1}{2}} + 2$

$= \frac{3x^{\frac{2}{2}} - 8x^{\frac{1}{2}} + 4}{9x^{\frac{2}{2}} - 4}$ اضرب

$= \frac{3x - 8x^{\frac{1}{2}} + 4}{9x - 4}$ بسّط

تحقق من فهمك

(4A $p^{\frac{1}{4}} \cdot p^{\frac{9}{4}}$

(4B $r^{-\frac{4}{5}}$

(4C $\frac{y^{\frac{1}{2}} + 2}{y^{\frac{1}{2}} - 2}$

إرشادات للدراسة

تبسيط العبارات

عند تبسيط عبارات تحوي أسسًا نسبية، اترك الأسس على الصورة النسبية بدلًا من كتابة العبارة على الصورة الجذرية.

عند تبسيط عبارة جذرية اجعل دليل الجذر أقل ما يمكن. وتذكّر أن استعمال الأسس النسبية يسهّل هذه العملية، وبعد الانتهاء من استعمال الأسس النسبية، أعد كتابة الناتج في الصورة الجذرية.

مثال 5 تبسيط العبارات الجذرية

بسّط كلَّ عبارة مما يأتي:

(a $\frac{\sqrt[4]{27}}{\sqrt{3}}$

$\frac{\sqrt[4]{27}}{\sqrt{3}} = \frac{27^{\frac{1}{4}}}{3^{\frac{1}{2}}}$ الأسس النسبية

$= \frac{(3^3)^{\frac{1}{4}}}{3^{\frac{1}{2}}}$ $27 = 3^3$

$= \frac{3^{\frac{3}{4}}}{3^{\frac{1}{2}}}$ خاصية قوة القوة

(b $\sqrt[4]{9g^2}$

$\sqrt[4]{9g^2} = (9g^2)^{\frac{1}{4}}$ الأسس النسبية

$= [(3g)^2]^{\frac{1}{4}}$ $9g^2 = (3g)^2$

$= (3g)^{\frac{1}{2}}$ خاصية قوة القوة

$= 3^{\frac{3}{4}-\frac{1}{2}}$ خاصية قسمة قوتين

$= 3^{\frac{1}{4}}$ بسّط

$= \sqrt[4]{3}$ أعد كتابة العبارة على الصورة الجذرية

$= \sqrt{3g}$ أعد كتابة العبارة على الصورة الجذرية

تحقق من فهمك

(5A $\frac{\sqrt[4]{32}}{\sqrt[3]{2}}$

(5B $\sqrt[3]{16x^4}$

إرشادات للدراسة

العبارات الجذرية والأسية

اكتب العبارة بعد تبسيطها (الناتج النهائي) على الصورة التي كان عليها قبل التبسيط؛ أيْ إذا بدأت بعبارة جذرية، فاكتب الناتج النهائي على الصورة الجذرية، وإذا بدأت بعبارة تتضمن أسسًا نسبية، فاكتب الناتج النهائي على الصورة الأسية.

ملخص المفاهيم

أضف إلى مطويتك

عبارات تتضمن أسسًا نسبية

تكون العبارات التي تتضمن أسسًا نسبية في أبسط صورة إذا تحققت الشروط الآتية:

- جميع الأسس غير سالبة.
- جميع الأسس في المقام هي أعداد صحيحة موجبة.
- لا يتضمن أي من البسط أو المقام أو كليهما كسرًا.
- دليل الجذر أو الجذور المتبقية فيها أصغر ما يمكن.

تأكد

مثال 1 اكتب العبارة الأسية على الصورة الجذرية، والعبارة الجذرية على الصورة الأسية في كلٍّ مما يأتي:

(1 $10^{\frac{1}{4}}$ **(2** $x^{\frac{3}{5}}$ **(3** $\sqrt[3]{15}$ **(4** $\sqrt[4]{7x^6y^9}$

مثال 2 أوجد قيمة كلِّ عبارة مما يأتي:

(5 $343^{\frac{1}{3}}$ **(6** $32^{-\frac{1}{5}}$ **(7** $125^{\frac{2}{3}}$ **(8** $\frac{24}{4^{\frac{3}{2}}}$

مثال 3 **(9 قياس:** إذا علمت مساحة مربع هي A ، فإنه يمكن إيجاد طول ضلعه ℓ باستعمال القانون $\ell = A^{\frac{1}{2}}$. فإذا علمت أن مساحة حديقة مربعة الشكل 169m^2، فما طول ضلعها؟

المثالان 4, 5 بسّط كلَّ عبارة مما يأتي:

(10 $a^{\frac{3}{4}} \cdot a^{\frac{1}{2}}$ **(11** $\frac{x^{\frac{4}{5}}}{x^{\frac{1}{5}}}$ **(12** $\frac{b^3}{c^{\frac{1}{2}}} \cdot \frac{c}{b^{\frac{1}{3}}}$

(13 $\sqrt[3]{64z^6}$ **(14** $\frac{\sqrt[5]{64}}{\sqrt[5]{4}}$ **(15** $\frac{g^{\frac{1}{2}}-1}{g^{\frac{1}{2}}+1}$

تدرب وحل المسائل

مثال 1 اكتب العبارة الأسية على الصورة الجذرية، والعبارة الجذرية على الصورة الأسّية في كلٍّ مما يأتي:

(16 $8^{\frac{1}{5}}$ **(17** $(x^3)^{\frac{3}{2}}$ **(18** $\sqrt{17}$ **(19** $\sqrt[4]{625x^2}$

مثال 2 أوجد قيمة كلِّ عبارة مما يأتي:

(20 $27^{\frac{1}{3}}$ **(21** $256^{\frac{1}{4}}$ **(22** $16^{-\frac{1}{2}}$ **(23** $(-27)^{-\frac{2}{3}}$

مثال 3

24) كرة سلة: يوجد حجمان لكرة السلة؛ حجم كبير وآخر صغير، كما في الصورة جانبًا. فإذا كان نصف قطر الكرة r التي تسع V وحدة مكعبة من الهواء يُعبَّر عنه بالعلاقة $r = \left(\frac{3V}{4\pi}\right)^{\frac{1}{3}}$، فأجب عمَّا يأتي:

a) أوجد نصف قطر كرة السلة ذات الحجم الصغير.

b) أوجد نصف قطر كرة السلة ذات الحجم الكبير.

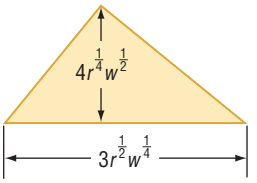
المثالان 4, 5

بسّط كلَّ عبارة مما يأتي:

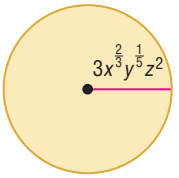
25) $x^{\frac{1}{3}} \cdot x^{\frac{2}{5}}$ **26)** $y^{-\frac{4}{5}}$ **27)** $\frac{\sqrt[8]{81}}{\sqrt[6]{3}}$ **28)** $\sqrt[4]{25x^2}$ **29)** $\frac{x^{\frac{1}{4}} + 2}{x^{\frac{1}{4}} - 2}$

هندسة: أوجد مساحة كل شكل فيما يأتي:

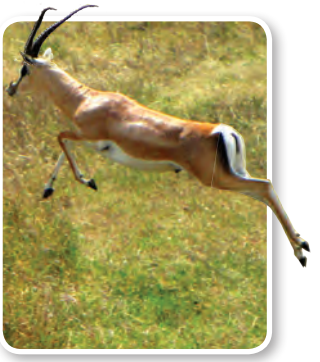
30)



31)



32) ما أبسط صورة للعبارة $18^{\frac{1}{2}} + 2^{\frac{1}{2}} - 32^{\frac{1}{2}}$ ؟



الربط مع الحياة

الطريقة الأكثر دقة لتحديد عمر بعض أنواع الغزلان هي النظر إلى مقطع عرضي لإحدى أسنانه، حيث تنمو كل فصل شتاء طبقة كلسية تكسو السن على شكل حلقة، وكل حلقة تمثل سنة كما هو الحال في حلقات جذع الشجرة.

بسّط كلَّ عبارة مما يأتي:

33) $a^{\frac{7}{4}} \cdot a^{\frac{5}{4}}$ **34)** $\left(y^{-\frac{3}{5}}\right)^{-\frac{1}{4}}$ **35)** $\sqrt[6]{216}$ **36)** $w^{-\frac{7}{8}}$

37) محميات: إذا افترضنا أن عدد الغزلان يتضاعف في المحميات الطبيعية كل سنتين. فإذا كان في المحمية 100 غزال، وكان عدد الغزلان D بعد t من السنوات يعبَّر عنه بالصيغة $D = 100 \cdot 2^{\frac{t}{2}}$، فأجب عما يأتي:

a) كم سيصبح عدد الغزلان بعد أربع سنوات ونصف؟

b) اعمل جدولًا يحدد عدد الغزلان في كل سنة من السنوات الخمس القادمة.

c) مثّل بيانيًّا بيانات الجدول الذي كوّنته في الفرع **b**.

d) قرِّر باستعمال الجدول، والتمثيل البياني: هل عدد الغزلان في المحمية معقول على المدى البعيد أم لا؟ ووضِّح إجابتك.

بسّط كلَّ عبارة مما يأتي:

38) $\frac{f^{-\frac{1}{4}}}{4f^{\frac{1}{2}} \cdot f^{-\frac{1}{3}}}$ **39)** $\frac{g^{\frac{5}{2}}}{g^{\frac{1}{2}} + 2}$ **40)** $\frac{c^{\frac{2}{3}}}{c^{\frac{1}{6}}}$ **41)** $\sqrt{23} \cdot \sqrt[3]{23^2}$

42) $\sqrt{\sqrt{81}}$ **43)** $\sqrt[4]{\sqrt{256}}$ **44)** $\frac{xy}{\sqrt[3]{z}}$ **45)** $\frac{8^{\frac{1}{6}} - 9^{\frac{1}{4}}}{\sqrt{3} + \sqrt{2}}$

46) تمثيلات متعددة: ستستكشف في هذا السؤال الدالتين:

$f(x) = x^3, g(x) = x^{\frac{1}{3}}$.

a) جدوليًّا: انسخ الجدول المجاور، وأكمله.

b) بيانيًّا: مثّل بيانيًّا كلًّا من: $f(x), g(x)$.

c) لفظيًّا: ما التحويل الهندسي الذي يصف العلاقة بين تمثيليهما البيانيين؟

x	$f(x)$	$g(x)$
−2		
−1		
0		
1		
2		

مسائل مهارات التفكير العليا

47) **تبرير:** حدِّد ما إذا كانت المعادلة $-x^{-2} = (-x)^{-2}$ صحيحة دائمًا، أو صحيحة أحيانًا، أو غير صحيحة أبدًا. ووضِّح إجابتك.

48) **اكتشف الخطأ:** بسَّط كل من محمود وعلي العبارة $\frac{x^{\frac{3}{4}}}{x^{\frac{1}{2}}}$، فهل إجابة أيٍّ منهما صحيحة؟

محمود

$$\frac{x^{\frac{3}{4}}}{x^{\frac{1}{2}}} = x^{\frac{3}{4}+\frac{1}{2}}$$
$$= x^{\frac{3}{4}+\frac{2}{4}}$$
$$= x^{\frac{5}{4}}$$

علي

$$\frac{x^{\frac{3}{4}}}{x^{\frac{1}{2}}} = x^{\frac{3}{4}\div\frac{1}{2}}$$
$$= x^{\frac{3}{4}\cdot\frac{2}{1}}$$
$$= x^{\frac{3}{2}}$$

49) **مسألة مفتوحة:** أوجد عبارتين مختلفتين على الصورة $x^{\frac{1}{a}}$ بحيث تكون قيمة كلٍّ منهما 2 .

50) **اكتب:** وضِّح كيف يمكن أن يكون استعمال الأسس النسبية لتبسيط عبارة أسهل من استعمال الجذور.

تدريب على اختبار

51) تكون العبارة $\sqrt{56 - c}$ مساويةً لعدد صحيح موجب عندما تكون قيمة c هي:

A 8 **B** -8 **C** 56 **D** 36

52) ما قيمة p التي تحقق المعادلة: $p = 3^3 \cdot 3^5$؟

A 2^{-3} **B** 3^{-2} **C** 3^2 **D** 2^3

مراجعة تراكمية

بسّط كلًّا مما يأتي: (الدرس: 5-4)

53) $\sqrt{243}$ **54)** $\sqrt[3]{16y^3}$ **55)** $3\sqrt[3]{56y^6z^3}$

56) **فيزياء:** تعطى سرعة الصوت في سائل بالعلاقة $s = \sqrt{\frac{B}{d}}$، حيث B معامل تغيّر حجم السائل، d كثافة السائل. أما بالنسبة للماء، فإن $B = 2.1 \times 10^9\ \text{N/m}^2, d = 10^3\ \text{kg/m}^3$. أوجد سرعة الصوت في الماء لأقرب متر لكل ثانية. (الدرس: 5-4)

أوجد $p(x + h)$, $p(-4)$ لكلِّ دالة مما يأتي: (الدرس: 2-1)

57) $p(x) = x - 2$ **58)** $p(x) = -x + 4$ **59)** $p(x) = 6x + 3$

60) $p(x) = x^2 + 5$ **61)** $p(x) = x^2 - x$ **62)** $p(x) = 2x^3 - 1$

أوجد $(\frac{f}{g})(x)$, $(f.g)(x)$, $(f-g)(x)$, $(f+g)(x)$ لكلِّ دالتين فيما يأتي: (الدرس: 1-4)

63) $f(x) = -x^2 + 6$, $g(x) = 2x^2 + 3x - 5$

64) $f(x) = 2x^2$, $g(x) = 8 - x$

بسّط كلَّ عبارة مما يأتي: (الدرس: 5-4)

65) $(\sqrt{x-3})^2$ **66)** $(\sqrt[3]{3x-4})^3$ **67)** $(2\sqrt{x}-5)^2$

رابط الدرس الرقمي

www.ien.edu.sa

4-7 حل المعادلات والمتباينات الجذرية
Solving Radical Equations and Inequalities

فيما سبق

درست حل معادلات كثيرات الحدود. (الدرس 3-6)

والآن

- أحل معادلات تحتوي جذورًا.
- أحل متباينات تحتوي جذورًا.

المفردات

المعادلة الجذرية
radical equation

الحل الدخيل
extraneous solution

المتباينة الجذرية
radical inequality

لماذا؟

عندما تقفز إلى الأعلى فإنك ترتفع عن الأرض وتبقى زمنًا معينًا في الهواء يُسمى زمن التحليق. ويمكنك إيجاد زمن التحليق t بالثواني إذا علمت ارتفاع القفزة h بالأقدام، وذلك باستعمال الصيغة $t = 0.5\sqrt{h}$.

إذا عُلم أن زمن تحليق أحد لاعبي كرة السلة 0.98 ثانية تقريبًا، فكيف يمكنك حساب ارتفاع قفزته؟

حل المعادلات الجذرية: تحتوي **المعادلات الجذرية** على عبارات جذرية يكون المتغير فيها تحت الجذر. ويمكنك حلها عن طريق رفع طرفي المعادلة لأس معين.

مفهوم أساسي حل المعادلات الجذرية

أضف إلى مطويتك

الخطوة 1: اجعل الجذر في طرف واحد من المعادلة.

الخطوة 2: ارفع طرفَي المعادلة لقوة مساوية لدليل الجذر؛ وذلك للتخلص من الجذر.

الخطوة 3: حل معادلة كثيرة الحدود الناتجة، ثم تحقق من صحة الحل.

عند حل بعض المعادلات الجذرية، قد لا يحقق الحل المعادلة الأصلية. ويُسمى مثل هذا الحل **حلًّا دخيلا**.

مثال 1 حل معادلات جذرية

حلّ كل معادلة مما يأتي:

(a) $\sqrt{x+2} + 4 = 7$

$\sqrt{x+2} + 4 = 7$	المعادلة الأصلية
$\sqrt{x+2} = 3$	اطرح 4 من الطرفين لفصل الجذر
$(\sqrt{x+2})^2 = 3^2$	ربِّع الطرفين للتخلص من الجذر
$x + 2 = 9$	أوجد مربع الطرفين
$x = 7$	اطرح 2 من الطرفين

تحقق:

$\sqrt{x+2} + 4 = 7$	المعادلة الأصلية
$\sqrt{7+2} + 4 \stackrel{?}{=} 7$	عوض عن x بالعدد 7
✓ $7 = 7$	بسّط

(b) $\sqrt{x-12} = 2 - \sqrt{x}$

$\sqrt{x-12} = 2 - \sqrt{x}$	المعادلة الأصلية
$(\sqrt{x-12})^2 = (2-\sqrt{x})^2$	ربِّع الطرفين
$x - 12 = 4 - 4\sqrt{x} + x$	أوجد مربع الطرفين
$-16 = -4\sqrt{x}$	اطرح $4 + x$ من الطرفين لفصل الجذر
$4 = \sqrt{x}$	اقسم الطرفين على -4
$16 = x$	ربِّع الطرفين

إرشادات للدراسة

التحقق من الحل

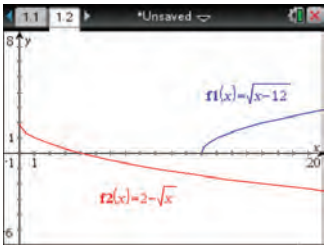
يمكنك استعمال الحاسبة البيانية للتحقق من حل المعادلة، مثّل كل طرف من أطراف المعادلة الأصلية بيانيًا، ثم ابحث عن نقاط التقاطع.

تحقق: $\sqrt{x-12} = 2 - \sqrt{x}$

$\sqrt{16-12} \stackrel{?}{=} 2 - \sqrt{16}$

$\sqrt{4} \stackrel{?}{=} 2 - 4$

$2 \neq -2$



يكون حل هذه المعادلة دخيلًا. والتمثيلان البيانيان للمعادلة $y = \sqrt{x-12}$، والمعادلة $y = 2 - \sqrt{x}$ لا يتقاطعان، وهذا يؤكد أنه لا يوجد حل حقيقي.

تحقق من فهمك

(1A) $z5 = \sqrt{x-2} - 1$ (1B) $\sqrt{x+15} = 5 + \sqrt{x}$

للتخلص من الجذر التربيعي ارفع العبارة الجذرية للأسّ 2، وللتخلص من الجذر التكعيبي ارفع العبارة الجذرية للأسّ 3.

مثال 2 حل معادلة جذر تكعيبي

حل المعادلة: $2(6x-3)^{\frac{1}{3}} - 4 = 0$.

للتخلص من الأس $\frac{1}{3}$ (الجذر التكعيبي) يجب أولًا جعل المقدار المرفوع للأس $\frac{1}{3}$ في طرف لوحده، ثم رفع طرفي المعادلة للأس 3.

$2(6x-3)^{\frac{1}{3}} - 4 = 0$	المعادلة الأصلية
$2(6x-3)^{\frac{1}{3}} = 4$	أضف **4** للطرفين
$(6x-3)^{\frac{1}{3}} = 2$	اقسم الطرفين على **2**
$\left[(6x-3)^{\frac{1}{3}}\right]^3 = 2^3$	كعّب الطرفين
$6x - 3 = 8$	أوجد مكعب الطرفين
$6x = 11$	أضف **3** للطرفين
$x = \frac{11}{6}$	اقسم الطرفين على **6**

تحقق:

$2(6x-3)^{\frac{1}{3}} - 4 = 0$	المعادلة الأصلية
$2\left(6 \cdot \frac{11}{6} - 3\right)^{\frac{1}{3}} - 4 \stackrel{?}{=} 0$	عوض عن **x** بالعدد $\frac{11}{6}$
$2(8)^{\frac{1}{3}} - 4 \stackrel{?}{=} 0$	بسّط
$2(2) - 4 \stackrel{?}{=} 0$	الجذر التكعيبي للعدد **8** هو **2**
$0 = 0$ ✓	اطرح

تحقق من فهمك

(2A) $(3n+2)^{\frac{1}{3}} + 1 = 0$ **(2B)** $3(5y-1)^{\frac{1}{3}} - 2 = 0$

يمكنك استعمال طرائق حل معادلات الجذور التربيعية والتكعيبية في حل المعادلات الجذرية أيًّا كان دليل جذرها. وللتخلص من الجذر النوني لأي عبارة ارفعه للأس n.

مثال 3 على اختبار

ما حلُّ المعادلة $3(\sqrt[4]{2n+6}) - 6 = 0$؟

A -1 B 1 C 5 D 11

$3(\sqrt[4]{2n+6}) - 6 = 0$	المعادلة الأصلية
$3(\sqrt[4]{2n+6}) = 6$	أضف **6** للطرفين
$\sqrt[4]{2n+6} = 2$	اقسم الطرفين على **3**
$(\sqrt[4]{2n+6})^4 = 2^4$	ارفع الطرفين للأس **4**
$2n + 6 = 16$	أوجد ناتج كلٍّ من الطرفين
$2n = 10$	اطرح **6** من الطرفين
$n = 5$	اقسم الطرفين على **2**

إذن الجواب هو C.

تحقق من فهمك

3) $4(3x+6)^{\frac{1}{4}} - 12 = 0$

A $x = 7$ B $x = 25$ C $x = 29$ D $x = 37$

إرشادات الاختبار

تعويض البدائل

يمكنك أيضًا حلّ سؤال الاختبار بتعويض كل البدائل المعطاة لقيمة n في المعادلة، لاختيار الحلّ الصحيح منها وهو الذي يحقق المعادلة.

حلُّ المتباينات الجذرية: المتباينة الجذرية هي متباينة تحوي عبارات جذرية، ويكون المتغير فيها تحت الجذر. ولحلّ متباينة جذرية، اتبع الخطوات الآتية:

مفهوم أساسي

أضف إلى مطويتك

حلُّ المتباينات الجذرية

الخطوة 1: إذا كان دليل الجذر عددًا زوجيًّا، فعيِّن قيم المتغير التي لا تجعل ما تحت الجذر سالبًا.

الخطوة 2: حل المتباينة جبريًّا.

الخطوة 3: حدّد حل المتباينة من الخطوتين السابقتين، ثم اختبر القيم لتتأكد من صحة الحل.

مثال 4 حل المتباينة الجذرية

حل المتباينة: $3 + \sqrt{5x - 10} \le 8$

الخطوة 1: بما أن ما تحت الجذر التربيعي يجب أن يكون أكبر من أو يساوي صفرًا، فحل أولًا $5x - 10 \ge 0$ لتعين قيم المتغير x التي تجعل الطرف الأيسر من المتباينة معرّفًا.

$5x - 10 \ge 0$	ما تحت الجذر أكبر من أو يساوي صفرًا
$5x \ge 10$	أضف **10** للطرفين
$x \ge 2$	اقسم الطرفين على **5**

الخطوة 2: حل المتباينة: $3 + \sqrt{5x - 10} \le 8$

$3 + \sqrt{5x - 10} \le 8$	المتباينة الأصلية
$\sqrt{5x - 10} \le 5$	اطرح **3** من الطرفين لفصل الجذر
$5x - 10 \le 25$	ربّع الطرفين للتخلص من الجذر
$5x \le 35$	أضف **10** إلى الطرفين
$x \le 7$	اقسم الطرفين على **5**

إرشادات الاختبار

المتباينات الجذرية

- بما أن الجذر التربيعي الرئيس لا يكون سالبًا أبدًا، فإن المتباينات التي تبسط إلى الصورة: $\sqrt{ax+b} \le c$ حيث c عدد سالب، ليس لها حل، والتي تُبسَّط إلى الصورة $\sqrt{ax+b} > c$ تكون مجموعة حلها هي مجموعة الأعداد الحقيقية.
- إذا كان طرفا المتباينة موجبين، فإنه يمكنك تربيع الطرفين مع بقاء الرمز $\le$ كما هو.

الخطوة 3: يتَّضح من الخطوتين السابقتين أن حل المتباينة هو $2 \le x \le 7$. ويمكنك اختبار بعض قيم x للتأكد من الحل. استعمل ثلاث قيم؛ إحداها أقل من 2، والأخرى تقع بين 2 و 7، والثالثة أكبر من 7. ثم نظم النتائج في جدول:

$x = 9$	$x = 4$	$x = 0$
$3 + \sqrt{5(9) - 10} \stackrel{?}{\le} 8$ ✗ $8.92 \le 8$ وبما أن $8 \not\le 8.92$، فإن المتباينة لا تتحقق.	$3 + \sqrt{5(4) - 10} \stackrel{?}{\le} 8$ ✓ $6.16 \le 8$ وبما أن $8 \le 8$، فإن المتباينة تتحقق.	$3 + \sqrt{5(0) - 10} \stackrel{?}{\le} 8$ ✗ $3 + \sqrt{-10} \le 8$ وبما أن $\sqrt{-10}$ ليس عددًا حقيقيًّا فإن المتباينة لا تتحقق.

تم التحقق من حل المتباينة. والقيم التي تقع في الفترة $2 \le x \le 7$ فقط هي التي تحقق المتباينة.

تحقق من فهمك

4A $\sqrt{2x+2} + 1 \ge 5$

4B $\sqrt{4x-4} - 2 < 4$

تأكد

المثالان 1, 2 حُلّ كلَّ معادلة مما يأتي:

1 $\sqrt{x-4} + 6 = 10$

2 $\sqrt{x+13} - 8 = -2$

3 $8 - \sqrt{x+12} = 3$

4 $\sqrt[3]{x-2} = 3$

5 $(x-5)^{\frac{1}{3}} - 4 = -2$

6 $(4y)^{\frac{1}{3}} + 3 = 5$

7 $\sqrt{y} - 7 = 0$

8 $2 + 4z^{\frac{1}{2}} = 0$

9 $5 + \sqrt{4y-5} = 12$

10 $\sqrt{2t-7} = \sqrt{t+2}$

11 **فيزياء:** يعطى الزمن الدوري للبندول بالصيغة $T = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}}$، حيث T الزمن الدوري للبندول بالثواني، L طول البندول بالأقدام، g تسارع السقوط الحر، والذي يساوي 32 قدمًا لكل ثانيةٍ مربعةٍ.

a) ما الزمن الدوري لبندول ضخم طوله 73 ft ؟

b) يريد صانع ساعات أن يصنع بندولًا يستغرق 5 s لإتمام دورته. كم يجب أن يكون طول البندول؟

مثال 3

12 **اختيار من متعدد:** حلّ المعادلة $(2y+6)^{\frac{1}{4}} - 2 = 0$ هو:

A $y = 1$ B $y = 5$ C $y = 11$ D $y = 15$

مثال 4 حلّ كلَّ متباينة مما يأتي:

13 $\sqrt{3x+4} - 5 \le 4$

14 $\sqrt{b-7} + 6 \le 12$

15 $2 + \sqrt{4y-4} \le 6$

16 $\sqrt{3a+3} - 1 \le 2$

17 $1 + \sqrt{7x-3} > 3$

18 $\sqrt{3x+6} + 2 \le 5$

19 $-2 + \sqrt{9-5x} \ge 6$

20 $6 - \sqrt{2y+1} < 3$

تدرب وحل المسائل

مثال 1 حُلّ كل معادلة مما يأتي:

21) $6+\sqrt{3x+1}=11$

22) $\sqrt{x+6}=5-\sqrt{x+1}$

23) $\sqrt{x-15}=3-\sqrt{x}$

24) $2+\sqrt{3y-5}=10$

25) $\sqrt{7a-2}=\sqrt{a+3}$

26) $\sqrt{b-6}+\sqrt{b}=3$

27) فيزياء: تصف الصيغة: $t=\frac{1}{4}\sqrt{d-h}$ الزمن t بالثواني اللازم لوصول جسم إلى الارتفاع h عن سطح الأرض عند سقوطه من ارتفاع قدره d متر عن سطح الأرض، إذا سقطت مفاتيح بدر من ارتفاع 65 m من أعلى العجلة الدوارة في مدينة الألعاب، فما ارتفاع المفاتيح عن سطح الأرض بالأمتار بعد مرور ثانيتين؟

مثال 2 حُلّ كلَّ معادلة مما يأتي:

28) $(5n-6)^{\frac{1}{3}}+3=4$

29) $(6q+1)^{\frac{1}{4}}+2=5$

30) $(4z-1)^{\frac{1}{5}}-1=2$

31) $3(x+5)^{\frac{1}{3}}-6=0$

32) $\sqrt[3]{4n-8}-4=0$

33) $\frac{1}{7}(14a)^{\frac{1}{3}}=1$

مثال 3 **34) اختيار من متعدد:** حَلّ المعادلة: $\sqrt[4]{y+2}+9=14$ هو:

A 23 **B** 53 **C** 123 **D** 623

مثال 4 حُلّ كلَّ متباينة مما يأتي:

35) $\sqrt{2x+14}-6\geq 4$

36) $10-\sqrt{2x+7}\leq 3$

37) $6+\sqrt{3y+4}<6$

38) $\sqrt{2y+5}+3\leq 6$

39) $-2+\sqrt{8-4z}\geq 8$

40) $-3+\sqrt{6a+1}>4$

41) فيزياء: الصيغة $T=2\pi\sqrt{\frac{L}{32}}$ تُمثل الزمن الدوري للبندول بالثواني، حيث L طول البندول بالأقدام. احسب طول البندول الذي يستغرق 1.5 ثانية لإتمام دورته.

42) أسماك: يمكن تقريب العلاقة بين طول سمكة وكتلتها بالمعادلة: $L=0.46\sqrt[3]{M}$، حيث L الطول بالأمتار، M الكتلة بالكيلوجرامات. حلّ هذه المعادلة بالنسبة للمتغير M.

43) زمن التحليق: عُد إلى الفقرة الواردة في بداية الدرس، وصف كيف يرتبط ارتفاع القفزة بزمن التحليق. واكتب توضيحًا مفصلًا لكيفية تحديد ارتفاع قفزةٍ زمنُ تحليقها 0.98 ثانية.

44) رفع الأثقال: يمكن استعمال الصيغة $M=512-146230B^{-\frac{8}{5}}$؛ لتقدير الكتلة العظمى M التي يستطيع رافع أثقال كتلته B كيلوجرام رفعها. استخدم هذه الصيغة في إيجاد كتلة رافع أثقال يستطيع رفع 470kg على الأكثر؟

مسائل مهارات التفكير العليا

45) تحدٍّ: قالت عائشة: إنه بإمكانها الحكم بعدم وجود حلٍّ حقيقي للمعادلة $(x+5)^{\frac{1}{4}}=-4$ دون حلها. فهل ما تقوله صحيح؟ وضِّح إجابتك.

46) أي معادلة مما يأتي ليس لها حلٌّ؟

$\sqrt{x-1}+3=4$	$\sqrt{x+1}+3=4$
$\sqrt{x-2}+7=10$	$\sqrt{x+2}-7=-10$

47) **تبرير:** حدد ما إذا كانت $x=\frac{\sqrt{(x^2)^2}}{-x}$ ، صحيحة دائمًا، أو صحيحة أحيانًا، أو غير صحيحة أبدًا، وذلك إذا كان x عددًا حقيقيًّا. ووضِّح إجابتك.

48) **مسألة مفتوحة:** اختر عددًا كليًّا، واعمل بشكل عكسي، لكتابة معادلتين جذريتين يكون حلّهما ذلك العدد الكلي، بحيث تكون إحداهما معادلة جذر تربيعي، والأخرى معادلة جذر تكعيبي.

49) **مسألة مفتوحة:** اكتب معادلة يمكن حلّها برفع كلا الطرفين للأس المعطى:

a) $\frac{3}{2}$ **b)** $\frac{5}{4}$ **c)** $\frac{7}{8}$

50) **تحدٍّ:** حَلّ المعادلة: $7^{3x-1}=49^{x+1}$. (إرشاد: $b^x=b^y$ إذا وفقط إذا كان $x=y$).

51) **اكتب:** وضِّح العلاقة بين دليل جذر المتغير في المعادلة الجذرية والأس الذي ترفع طرفي المعادلة له عند حلّها.

تدريب على اختبار

52) أيُّ المجموعات الآتية تمثل دالة؟

A $\{(3,0),(-2,5),(2,-1),(2,9)\}$

B $\{(-3,5),(-2,3),(-1,5),(0,7)\}$

C $\{(2,5),(2,4),(2,3),(2,2)\}$

D $\{(3,1),(-3,2),(3,3),(-3,4)\}$

53) **إجابة قصيرة:** محيط مثلث متطابق الضلعين 56 in. فإذا كان طول أحد الضلعين المتطابقين 20 in، فما طول الضلع الثالث؟

54) ما حلّ المعادلة $\sqrt{x+5}+1=4$ ؟

A 4 **B** 10 **C** 11 **D** 20

مراجعة تراكمية

احسب قيمة كلٍّ مما يأتي: (الدرس: 6-4)

55) $27^{-\frac{2}{3}}$ **56)** $9^{\frac{1}{3}}\cdot 9^{\frac{5}{3}}$ **57)** $\left(\frac{8}{27}\right)^{-\frac{2}{3}}$

58) **هندسة:** العبارتان $8x^2y^2$ ، $4x^2y^2$ تمثلان طولي ساقي الزاوية القائمة في مثلث قائم الزاوية، أوجد عبارةً ثالثةً تمثل طول الوتر باستعمال نظرية فيثاغورس، ثم بسّطها. (الدرس: 6-4)

أوجد معكوس كلِّ دالةٍ مما يأتي: (الدرس: 2-4)

59) $y=3x-4$ **60)** $y=-2x-3$ **61)** $y=x^2$ **62)** $y=(2x+3)^2$

حُلّ كلَّ معادلة مما يأتي، واكتب الحل في أبسط صورة: (مهارة سابقة)

63) $\frac{3}{10}=\frac{12}{25}a$ **64)** $\frac{6}{7}=9m$ **65)** $\frac{9}{8}b=18$ **66)** $\frac{1}{3}p=\frac{5}{6}$

حل المعادلات والمتباينات الجذرية

رابط الدرس الرقمي
www.ien.edu.sa

الهدف
أستعمل الحاسبة البيانية TI-nspire؛ لحل معادلات ومتباينات جذرية.

يمكنك استعمال الحاسبة البيانية TI-nspire لحل المعادلات والمتباينات الجذرية، وإحدى طرق الحل هي إعادة كتابة المعادلة أو المتباينة، بحيث يكون أحد طرفَيها صفرًا، ثم استعمال ميزة **التقاطع** في الحاسبة لإيجاد الحل.

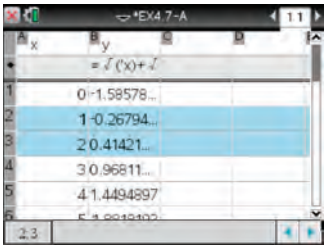
مثال 1 المعادلة الجذرية

حُلَّ المعادلة: $\sqrt{x} + \sqrt{x+2} = 3$

الخطوة 1 أعد كتابة المعادلة.

- اطرح العدد 3 من طرفَي المعادلة لتحصل على المعادلة:
$\sqrt{x} + \sqrt{x+2} - 3 = 0$

الخطوة 2 استعمل جدولًا وقدّر الحلّ.

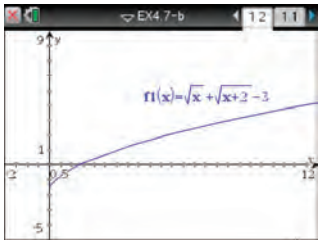


- اضغط المفاتيح التالية بالترتيب من اليمين إلى اليسار:
on | 1: مستند جديد | 4: إضافة تطبيق القوائم وجداول البيانات
- سمِّ رأس العمود A بالرمز x، ثم أدخل قيمًا تختارها لِـ x.
- سمِّ رأس العمود B بالرمز y، واكتب في الخلية الواقعة أسفله مباشرة المعادلة $y = \sqrt{x} + \sqrt{x+2} - 3$، ثم اضغط enter فتظهر شاشة اختر منها مرجع المتغير
ثم اضغط enter لتحصل على الجدول المطلوب.

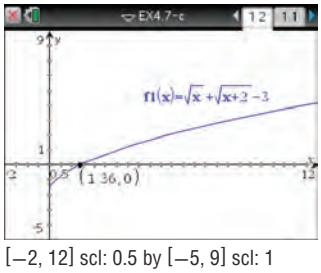
بما أن إشارة الدالة تتغير من سالبٍ إلى موجبٍ بين $x = 2$ ، $x = 1$ فهناك حلٌّ بين العددين 1 ، 2

الخطوة 3 استعمل ميزة أصفار الدالة لإيجاد الحلّ.

- اضغط على المفاتيح التالية بالترتيب من اليمين إلى اليسار:
on | 1: مستند جديد | 2: إضافة تطبيق الرسوم البيانية
- اكتب الدالة: $f1(x) = \sqrt{x} + \sqrt{x+2} - 3$
ثم اضغط enter فيظهر التمثيل البياني المجاور.



- حدِّد أصفار الدالة بالضغط على مفتاح menu:
ومنها اختر 6: تحليل الرسم البياني ثم اختر 1: أصفار الدالة وقم بالضغط في أي نقطة من الشاشة مرورًا بنقطة تقاطع التمثيل البياني مع المحور x، فيظهر إحداثيات صفر الدالة.
ثم الضغط على كلٍّ من منحنى الدالة والمحور x، فيظهر صفر الدالة كما في الشكل المجاور.



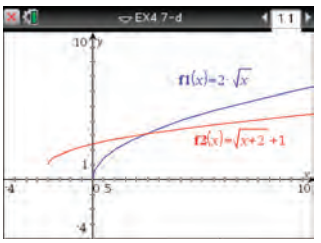
فيكون الحل هو 1.36 تقريبًا، وهو يقع بين العددين 1 ، 2 كما تبين في الخطوة 2

مثال 2 المتباينة الجذرية

حُلَّ المتباينة: $2\sqrt{x} > \sqrt{x+2} + 1$

الخطوة 1 ارسم طرفي المتباينة

- مثّل المعادلة المرتبطة بالطرف الأيسر $f1(x) = 2\sqrt{x}$ بيانيًّا، والمعادلة المرتبطة بالطرف الأيمن $f2(x) = \sqrt{x+2} + 1$ بيانيًّا فتظهر الشاشة التالية:

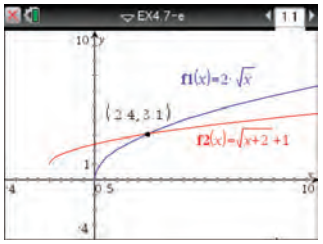


[−4, 10] scl: 0.5 by [−4, 10] scl: 1

تبيِّن الشاشة أعلاه أن النقاط التي تقع عن يسار نقطة تقاطع المنحنيين تكون عندها f2 < f1 أي $2\sqrt{x} < \sqrt{x+2} + 1$، ولحل المتباينة الأصلية، يجب أن تجد النقاط التي تكون عندها f2 > f1، وهذه النقاط تقع عن يمين نقطة تقاطع المنحنيين.

الخطوة 2 استعمل ميزة نقاط التقاطع.

- يمكنك استعمال ميزة نقاط التقاطع بالضغط على مفتاح menu ومنها اختر 6: تحليل الرسم البياني ومنها اختر نقاط التقاطع وقم بالضغط في أي نقطة على الشاشة وحرّك المؤشر مرورًا بنقطة التقاطع، يظهر الزوج المرتب (2.4, 3.1)

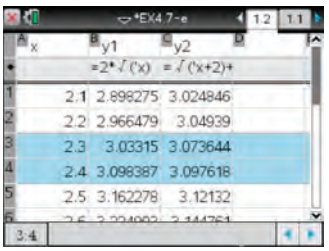


[−4, 10] scl: 0.5 by [−4, 10] scl: 1

أي أن الإحداثي x لنقطة تقاطع المنحنيين هو 2 تقريبًا؛ لذلك فإن الحل التقريبي للمتباينة هو $x > 2.4$ استعمل الرمز > في الحل؛ لأنه الرمز الموجود في المتباينة الأصلية.

الخطوة 3 تحقق من حلّك باستعمال الجداول البيانية.

- اضغط مفتاح on، واختر 4: إضافة تطبيق القوائم وجداول البيانات.
- سمِّ رأس العمود A بالرمز x، ثم أدخل قيمًا عشرية بين العددين الصحيحين 2 , 3
- سَمِّ رأس العمود B بالرمز y1، واكتب في الخلية الواقعة أسفله مباشرة المعادلة $y1 = 2\sqrt{x}$، ثم اضغط enter.
- سَمِّ رأس العمود C بالرمز y2، واكتب في الخلية الواقعة أسفله مباشرة المعادلة $y2 = \sqrt{x+2} + 1$ ثم اضغط enter فيظهر الشكل المجاور.



لاحظ أنه عندما تكون x أقل من أو تساوي 2.4، فإن y2 > y1.

وهذا يُثبت أن الحل هو $\{x | x > 2.4\}$.

تمارين:

استعمل طريقة التمثيل البياني لحلّ كلِّ معادلة أو متباينة مما يأتي:

1) $\sqrt{x+4} = 3$
2) $\sqrt{x+5} = \sqrt{3x+4}$
3) $\sqrt{x+3} + \sqrt{x-2} = 4$
4) $\sqrt{x-3} \geq 2$
5) $\sqrt{x+3} > 2\sqrt{x}$
6) $\sqrt{x} + \sqrt{x-1} < 4$

7) **اكتب:** وضِّح كيف يمكنك تطبيق الأسلوب المتَّبع في حلّ المثال الأول لحلّ متباينة؟

ملخص الفصل

المفاهيم الأساسية

العمليات على الدوال. (الدرس 4-1)

العملية	التعريف
الجمع	$(f+g)(x)=f(x)+g(x)$
الطرح	$(f-g)(x)=f(x)-g(x)$
الضرب	$(f\cdot g)(x)=f(x)\cdot g(x)$
القسمة	$\left(\frac{f}{g}\right)(x)=\frac{f(x)}{g(x)}, g(x)\neq 0$
التركيب	$[f\circ g](x)=f[g(x)]$

العلاقات والدوال العكسية ودوال الجذر التربيعي (الدرسان 4-2, 4-3)

- اعكس إحداثيات الأزواج المرتبة لتجد العلاقة العكسية.
- تكون كل من الدالتين دالة عكسية للأخرى إذا وفقط إذا كان كل من تركيبيهما يساوي الدالة المحايدة.
- الدالة الرئيسة (الأم) لدوال الجذر التربيعي هي $f(x)=\sqrt{x}$ ومجالها هو $\{x \mid x \geq 0\}$ ومداها $\{f(x) \mid f(x) \geq 0\}$.

الجذور النونية للأعداد الحقيقية (الدرس 4-4)

الجذور الحقيقية النونية للعدد a			
n	$a>0$	$a<0$	$a=0$
عدد زوجي	له جذر وحيد موجب وله جذر وحيد سالب	ليس له جذور حقيقية	له جذر حقيقي وحيد وهو 0
عدد فردي	له جذر وحيد موجب وليس له جذور سالبة	ليس له جذور موجبة وله جذر وحيد سالب	

العبارات الجذرية (الدروس 4-5 إلى 4-7)

إذا كان a, b عددين حقيقيين، وَ n, x, y أعداد صحيحة حيث $n>1, y>1$ $b\neq 0$ يُعد كل مما يأتي صحيحًا، وذلك عندما تكون جميع الجذور معرفة.

- خاصية الضرب: $\sqrt[n]{ab}=\sqrt[n]{a}\cdot\sqrt[n]{b}$
- خاصية القسمة: $\sqrt[n]{\frac{a}{b}}=\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$
- الأسس النسبية: $b^{\frac{x}{y}}=\sqrt[y]{b^x}=\left(\sqrt[y]{b}\right)^x$.

المطويات منظم أفكار

تأكد أن المفاهيم الأساسية مدونة في مطويتك.

المفردات الأساسية

تركيب دالتين (179)
العلاقة العكسية (185)
دالة عكسية (185)
دالة الجذر التربيعي (191)
الدالة الجذرية (191)
متباينة الجذر التربيعي (193)
الجذر النوني (196)
رمز الجذر (196)
الدليل (196)
ما تحت الجذر (196)
الجذر الرئيس (196)
إنطاق المقام (204)
الجذور المتشابهة (205)
المرافق (206)
المعادلة الجذرية (215)
الحل الدخيل (215)
المتباينة الجذرية (217)

اختبر مفرداتك

اختر المفردة المناسبة من القائمة السابقة لإكمال كل جملة فيما يأتي:

1) عند _____، تستعمل قيم دالة منهما لحساب قيم الدالة الأخرى.

2) عندما يكون هناك أكثر من جذر حقيقي، فإن الجذر غير السالب يُسمّى _____.

3) للتخلص من الجذور في المقام، فإنك تستعمل عملية تُسمّى _____.

4) عند حل معادلات جذرية، تحصل أحيانًا على عدد لا يحقق المعادلة الأصلية. ويُسمّى مثل هذا العدد _____.

5) دالة الجذر التربيعي هي نوع من أنواع _____.

6) _____ هي مجموعة من الأزواج المرتبة التي نحصل عليها عن طريق تبديل إحداثيات كل زوج مرتب للعلاقة الأصلية.

7) إذا ساوى كل من تركيبي دالتين الدالةَ المحايدةَ فإن كلتيهما تكون _____ للأخرى.

8) تعد $\sqrt{x-3}>5$ مثالًا على: _____

دليل الدراسة والمراجعة

مراجعة الدروس

4-1 العمليات على الدوال (الصفحات: 178-184)

أوجد $[f \circ g](x)$, $[g \circ f](x)$ لكلٍّ مما يأتي:

9) $f(x) = 2x + 1$, $g(x) = 4x - 5$

10) $f(x) = x^2 + 1$, $g(x) = x - 7$

11) $f(x) = x^3$, $g(x) = x - 1$

12) $f(x) = 4x$, $g(x) = 5x - 1$

13) قياسات: تستعمل الصيغة $f = 3y$ لتحويل الياردات y إلى أقدام f، كذلك تستعمل الصيغة $f = \frac{n}{12}$ لتحويل البوصات n إلى أقدام f. اكتب الصيغة التي تحول الياردات إلى بوصات.

مثال 1

إذا كان $f(x) = x^2 + 3, g(x) = 3x - 2$ فأوجد كلًّا من $[f \circ g](x), [g \circ f](x)$

$[g \circ f](x) = g[f(x)]$ — عوّض عن $f(x)$ بالمقدار $x^2 + 3$

$= g(x^2 + 3)$

$= 3(x^2 + 3) - 2$

$= 3x^2 + 9 - 2$ — اضرب

$= 3x^2 + 7$ — بسّط

$[f \circ g](x) = f[g(x)]$ — عوّض عن $g(x)$ بالمقدار $3x - 2$

$= f(3x - 2)$

$= (3x - 2)^2 + 3$

$= 9x^2 - 12x + 4 + 3$ — اضرب

$= 9x^2 - 12x + 7$ — بسّط

4-2 العلاقات والدوال العكسية (الصفحات: 185-189)

أوجد معكوس كلِّ دالة مما يأتي، ثم مثّل الدالة ومعكوسها بيانيًّا على مستوى إحداثي واحد. وبيِّن ما إذا كان معكوس الدالة يمثِّل دالة أم لا، وإذا كان كذلك فاكتب قاعدة الدالة العكسية.

14) $f(x) = 5x - 6$

15) $f(x) = -3x - 5$

16) $f(x) = \frac{1}{2}x + 3$

17) $f(x) = \frac{4x + 1}{5}$

18) $f(x) = x^2$

19) $f(x) = (2x + 1)^2$

في كلِّ زوج ممَّا يأتي حدّد هل كل دالة تمثل داالة عكسية للأخرى أم لا، ووضّح إجابتك.

20) $f(x) = 2x + 1, g(x) = x - 2$

21) $f(x) = x^3, g(x) = \sqrt[3]{x}$

22) ثقافة مالية: قام عبدالله بالنشاطات المالية الآتية خلال الشهر الماضي: أودع مبلغًا يعادل مثلي رصيده الأصلي، ثم أودع مبلغين قيمة كل منهما 450 ريالًا، ثم سحب مبلغ 350 ريالًا خمس مرات من رصيده. إذا كان رصيده الآن 1890 ريالًا، فاكتب معادلة تمثل هذه المسألة، وماذا كان رصيده في بداية الشهر؟

مثال 2

أوجد معكوس الدالة: $f(x) = -2x + 7$.

ضع المتغير y بدلًا من رمز الدالة $f(x)$: $y = -2x + 7$،

ثم قم بالتبديل بين المتغيرين x, y، وحل المعادلة بالنسبة للمتغير y.

$x = -2y + 7$ — بالتبديل بين المتغيرين

$2y = -x + 7$ — بالحل بالنسبة للمتغير y

$y = \frac{-x + 7}{2}$ — اقسم الطرفين على 2

$f^{-1}(x) = \frac{-x + 7}{2}$ — ضع الرمز $f^{-1}(x)$ بدلًا من المتغير y؛ لأن معكوس الدالة $f(x)$ هو دالة أيضًا.

4-3 دوال ومتباينات الجذر التربيعي (الصفحات: 191-195)

مثّل بيانيًّا كلَّ دالة فيما يأتي، وحدد مجالها ومداها:

23) $f(x) = \sqrt{3x}$

24) $f(x) = -\sqrt{6x}$

25) $f(x) = \sqrt{x - 7}$

26) $f(x) = \sqrt{x + 5} - 3$

27) $f(x) = \frac{3}{4}\sqrt{x - 1} + 5$

28) $f(x) = -\frac{1}{3}\sqrt{x + 4} - 1$

29) هندسة: يُعبَّر عن مساحة الدائرة بالقانون $A = \pi r^2$. حيث r نصف قطرها. فما قيمة نصف قطر دائرة مساحتها $300\,cm^2$؟

مثّل بيانيًّا كلَّ متباينة فيما يأتي:

30) $y \geq \sqrt{x} + 3$

31) $y < 2\sqrt{x - 5}$

32) $y > -\sqrt{x - 1} + 2$

مثال 3

مثِّل بيانيًّا الدالة: $f(x) = \sqrt{x + 1} - 2$، وحدّد مجالها ومداها.

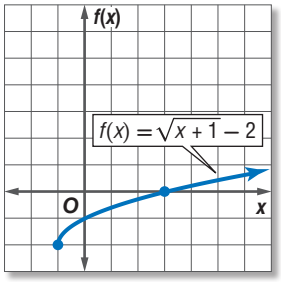
تحديد المجال:

$x + 1 \geq 0$ ما تحت الجذر أكبر من أو يساوي الصفر.

$x \geq -1$ اطرح العدد 1 من الطرفين.

اعمل جدولًا لبعض قيم المتغير x، حيث $x \geq -1$، ومثّل الدالة بيانيًّا.

x	f(x)
−1	−2
0	−1
1	−0.59
2	−0.27
3	0
4	0.24
5	0.45



المجال هو $\{x | x \geq -1\}$، والمدى هو $\{f(x) | f(x) \geq -2\}$.

4-4 الجذر النوني (الصفحات: 196-200)

بسّط كلًّا مما يأتي:

33) $\pm\sqrt{121}$

34) $\sqrt[3]{-125}$

35) $\sqrt{(-6)^2}$

36) $\sqrt[6]{(x^2 + 2)^{18}}$

37) $\sqrt[3]{27(x + 3)^3}$

38) $\sqrt[4]{a^8 b^{12}}$

39) $\sqrt[5]{243x^{10}y^{25}}$

40) فيزياء: تستعمل الصيغة $v = \sqrt{\frac{2K}{m}}$ لحساب سرعة جسم v، حيث v السرعة بالأمتار لكل ثانية، m كتلة الجسم بالجرام، K الطاقة الحركية بالجول. أوجد السرعة بالأمتار لكل ثانية لجسم كتلته 17 جرامًا وطاقته الحركية 850 جولًا.

مثال 4

بسّط العبارة الجذرية: $\sqrt{64x^6}$

$64x^6 = (8x^3)^2$ $\sqrt{64x^6} = \sqrt{(8x^3)^2}$

بسّط $= 8|x^3|$

استعمل رمز القيمة المطلقة لتجنب القيم السالبة للمتغير x.

مثال 5

بسّط العبارة الجذرية: $\sqrt[6]{4096x^{12}y^{24}}$

$4096x^{12}y^{24} = (4x^2y^4)^6$ $\sqrt[6]{4096x^{12}y^{24}} = \sqrt[6]{(4x^2y^4)^6}$

بسّط $= 4x^2y^4$

4-5 العمليات على العبارات الجذرية (الصفحات: 203–208)

بسّط كلَّ عبارة جذرية فيما يأتي:

41 $\sqrt[3]{54}$

42 $\sqrt{144a^3b^5}$

43 $4\sqrt{6y} \cdot 3\sqrt{7x^2y}$

44 $6\sqrt{72} + 7\sqrt{98} - \sqrt{50}$

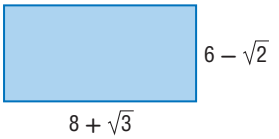
45 $(6\sqrt{5} - 2\sqrt{2})(3\sqrt{5} + 4\sqrt{2})$

46 $\dfrac{\sqrt{6m^5}}{\sqrt{p^{11}}}$

47 $\dfrac{3}{5 + \sqrt{2}}$

48 $\dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{5} - \sqrt{6}}$

49 **هندسة:** أوجد محيط المستطيل في الشكل أدناه ومساحته.



مثال 6

بسّط العبارة $2\sqrt[3]{18a^2b} \cdot 3\sqrt[3]{12ab^5}$

$2\sqrt[3]{18a^2b} \cdot 3\sqrt[3]{12ab^5}$

$= (2 \cdot 3)\sqrt[3]{18a^2b \cdot 12ab^5}$ خاصية ضرب الجذور

$= 6\sqrt[3]{2^3 3^3 a^3 b^6}$ حلّل إلى العوامل

$= 6 \cdot \sqrt[3]{2^3} \cdot \sqrt[3]{3^3} \cdot \sqrt[3]{a^3} \cdot \sqrt[3]{b^6}$ خاصية ضرب الجذور

$= 6 \cdot 2 \cdot 3 \cdot a \cdot b^2$ أوجد الجذر التكعيبي

$= 36ab^2$ بسّط

مثال 7

بسّط العبارة $\sqrt{\dfrac{x^4}{y^5}}$

$\sqrt{\dfrac{x^4}{y^5}} = \dfrac{\sqrt{x^4}}{\sqrt{y^5}}$ خاصية قسمة الجذور

$= \dfrac{\sqrt{(x^2)^2}}{\sqrt{(y^2)^2} \cdot \sqrt{y}}$ حلّل ما يمكن تحليله إلى عوامل مربعة

$= \dfrac{x^2}{y^2\sqrt{y}} \cdot \dfrac{\sqrt{y}}{\sqrt{y}}$ أنطق المقام

$= \dfrac{x^2\sqrt{y}}{y^3}$ $\sqrt{y} \cdot \sqrt{y} = y$

4-6 الأسس النسبية (الصفحات: 209-214)

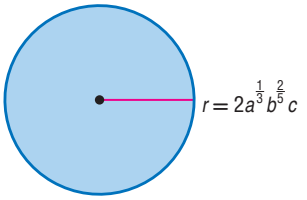
بسّط كلَّ عبارة مما يأتي:

50 $x^{\frac{1}{2}} \cdot x^{\frac{2}{3}}$ **51** $m^{-\frac{3}{4}}$ **52** $\dfrac{d^{\frac{1}{6}}}{d^{\frac{3}{4}}}$

بسّط كلَّ عبارة مما يأتي:

53 $\dfrac{1}{y^{\frac{1}{4}}}$ **54** $\sqrt[3]{\sqrt{729}}$ **55** $\dfrac{x^{\frac{2}{3}} - x^{\frac{1}{3}}y^{\frac{2}{3}}}{x^{\frac{1}{3}}}$

56 **هندسة:** ما مساحة الدائرة في الشكل أدناه؟



مثال 8

بسّط العبارة $a^{\frac{2}{3}} \cdot a^{\frac{1}{5}}$

$a^{\frac{2}{3}} \cdot a^{\frac{1}{5}} = a^{\frac{2}{3} + \frac{1}{5}}$ خاصية ضرب القوى

$= a^{\frac{13}{15}}$ اجمع الأسس

مثال 9

بسّط العبارة $\dfrac{2a}{\sqrt[3]{b}}$

$\dfrac{2a}{\sqrt[3]{b}} = \dfrac{2a}{b^{\frac{1}{3}}}$ اكتب العبارة على الصورة الأسية

$= \dfrac{2a}{b^{\frac{1}{3}}} \cdot \dfrac{b^{\frac{2}{3}}}{b^{\frac{2}{3}}}$ أنطق المقام

$= \dfrac{2ab^{\frac{2}{3}}}{b} = \dfrac{2a\sqrt[3]{b^2}}{b}$ اكتب العبارة على الصورة الجذرية

حُلّ كل معادلة مما يأتي:

57 $\sqrt{x-3}+5=15$

58 $-\sqrt{x-11}=3-\sqrt{x}$

59 $4+\sqrt{3x-1}=8$

60 $\sqrt{m+3}=\sqrt{2m+1}$

61 $\sqrt{2x+3}=3$

62 $(x+1)^{\frac{1}{4}}=-3$

63 $a^{\frac{1}{3}}-4=0$

64 $3(3x-1)^{\frac{1}{3}}-6=0$

65 **فيزياء:** تُعطى المسافة الأفقية d بالكيلومترات التي يمكن أن يراها شخص بالعلاقة $d=3.57\sqrt{L}$، حيث L تمثل ارتفاع النقطة التي ينظر منها الشخص عن الأرض ويقاس بالأمتار. فإذا كانت المسافة الأفقية التي يراها شخص هي 71.4 كيلومترًا، فكم مترًا ترتفع النقطة التي ينظر منها الشخص عن الأرض؟

حُلّ كلَّ متباينة مما يأتي:

66 $2+\sqrt{3x-1}<5$

67 $\sqrt{3x+13}-5\geq 5$

68 $6-\sqrt{3x+5}\leq 3$

69 $\sqrt{-3x+4}-5\geq 3$

70 $5+\sqrt{2y-7}<5$

71 $3+\sqrt{2x-3}\geq 3$

72 $\sqrt{3x+1}-\sqrt{6+x}>0$

مثال 10

حُلّ المعادلة الجذرية $\sqrt{2x+9}-2=5$

$\sqrt{2x+9}-2=5$	المعادلة الأصلية
$\sqrt{2x+9}=7$	أضف **2** للطرفين
$(\sqrt{2x+9})^2=7^2$	ربّع الطرفين
$2x+9=49$	أوجد مربع الطرفين
$2x=40$	اطرح **9** من الطرفين
$x=20$	اقسم الطرفين على **2**

تحقق: $\sqrt{2\times 20+9}-2\stackrel{?}{=}5$ ✓

مثال 11

حل المتباينة $\sqrt{2x-5}+2>5$.

$2x-5\geq 0$	ما تحت الجذر ليس سالبًا
$2x\geq 5$	أضف **5** للطرفين
$x\geq 2.5$	اقسم الطرفين على **2**

يجب أن يكون الحلّ أكبر من أو يساوي 2.5 لينتمي إلى المجال.

$\sqrt{2x-5}+2>5$	المتباينة الأصلية
$\sqrt{2x-5}>3$	اطرح **2** من الطرفين
$(\sqrt{2x-5})^2>3^2$	ربّع الطرفين
$2x-5>9$	أوجد مربع الطرفين
$2x>14$	أضف **5** للطرفين
$x>7$	اقسم الطرفين على **2**

بما أن $x\geq 2.5$ تحوي $x>7$، فإن حل المتباينة هو $x>7$.

تحقق: $x=0,\ \sqrt{2\times 0-5}+2\stackrel{?}{>}5$

✗ $\sqrt{-5}+2>5$

وبما أن $\sqrt{-5}$ ليس عددًا حقيقيًّا، فإن المتباينة لا تتحقق.

$x=8,\ \sqrt{2\times 8-5}+2\stackrel{?}{>}5$

✓ $\sqrt{11}+2>5$

وبما أن $5.3>5$، فإن المتباينة تتحقق.

اختبار الفصل

في كلِّ زوج ممَّا يأتي، حدِّد هل كلُّ دالةٍ تمثل دالة عكسية للأخرى أم لا ؟

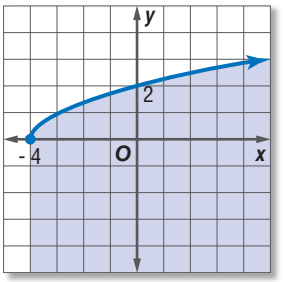
1 $f(x)=3x+8, g(x)=\frac{x-8}{3}$

2 $f(x)=\frac{1}{3}x+5, g(x)=3x-15$

3 $f(x)=x+7, g(x)=x-7$

4 $f(x)=\frac{x-2}{3}, g(x)=3x-2$

5 **اختيار من متعدد:** أيُّ المتباينات الآتية لها التمثيل البياني الظاهر في الشكل أدناه؟



A $y \geq \sqrt{x+4}$
B $y \leq \sqrt{x+4}$
C $y \geq \sqrt{x-4}$
D $y \leq \sqrt{x-4}$

إذا كان $f(x)=3x+2, g(x)=x^2-2x+1$ فأوجد كلَّ دالة مما يأتي:

6 $(f+g)(x)$

7 $(f \cdot g)(x)$

8 $(f-g)(x)$

9 $\left(\frac{f}{g}\right)(x)$

حُلَّ كلَّ معادلة مما يأتي:

10 $\sqrt{a+12}=\sqrt{5a-4}$

11 $\sqrt{3x}=\sqrt{x-2}$

12 $4(\sqrt[4]{3x+1})-8=0$

13 $\sqrt[3]{5m+6}+15=21$

14 $1+\sqrt{x+11}=\sqrt{2x+15}$

15 $\sqrt{x-6}-\sqrt{x}=3$

16 **اختيار من متعدد:** قيمة العبارة $125^{-\frac{1}{3}}$ هي:

A -5
B $-\frac{1}{5}$
C $\frac{1}{5}$
D 5

بسّط كلًّا مما يأتي:

17 $(2+\sqrt{5})(6-3\sqrt{5})$

18 $(3-2\sqrt{2})(-7+\sqrt{2})$

19 $\frac{12}{2-\sqrt{3}}$

20 $\frac{m^{\frac{1}{2}}-1}{2m^{\frac{1}{2}}+1}$

21 $4\sqrt{3}-8\sqrt{48}$

22 $5^{\frac{2}{3}} \cdot 5^{\frac{1}{2}} \cdot 5^{\frac{5}{6}}$

23 $\sqrt[6]{729a^9b^{24}}$

24 $\sqrt[5]{32x^{15}y^{10}}$

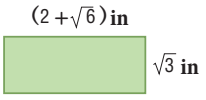
25 $w^{-\frac{4}{5}}$

26 $\frac{r^{\frac{2}{3}}}{r^{\frac{1}{6}}}$

27 $\frac{a^{-\frac{1}{2}}}{6a^{\frac{1}{3}} \cdot a^{-\frac{1}{4}}}$

28 $\frac{y^{\frac{3}{2}}}{y^{\frac{1}{2}}+2}$

29 **اختيار من متعدد:** ما مساحة المستطيل في الشكل أدناه؟



A $2\sqrt{3}+3\sqrt{2}$ وحدة مربعة
B $4+2\sqrt{6}+2\sqrt{3}$ وحدة مربعة
C $2\sqrt{3}+\sqrt{6}$ وحدة مربعة
D $2\sqrt{3}+3$ وحدة مربعة

حُلَّ كلَّ متباينة مما يأتي:

30 $\sqrt{4x-3}<5$

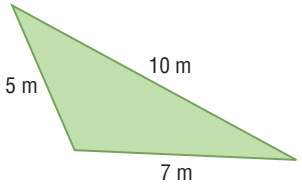
31 $2+\sqrt{4x-4} \leq 6$

32 $\sqrt{2x+3}-4 \leq 5$

33 $\sqrt{b+12}-\sqrt{b}>2$

34 $\sqrt{y-7}+5 \geq 10$

35 **قانون هيرو (HERO):** يمكن إيجاد مساحة المثلث الذي أطوال أضلاعه a, b, c باستعمال قانون هيرو:
$A=\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$، حيث $s=\frac{1}{2}(a+b+c)$.
اكتب مساحة المثلث في الشكل أدناه على الصورة الجذرية في أبسط صورة.



الحل عكسيًّا

تعطي بعض مسائل الرياضيات معلومات عن النتيجة النهائية، وتتطلب استنتاج بعض الأمور التي حدثت مسبقًا. ويمكنك في مثل هذه المسائل الحل باستعمال استراتيجية الحل عكسيًّا.

استراتيجية الحل عكسيًّا:

خطوة 1

اقرأ المسألة بعناية.

اسأل نفسك:

- ما المعلومات المعطاة؟
- ما المطلوب إيجاده؟
- هل توجد معطيات ترتبط بالنتيجة النهائية؟
- هل المطلوب هو إحدى القيم غير المعطاة، والتي لم تذكر في نص المسألة؟
- ما العمليات المستعملة في المسألة؟

خطوة 2

عبِّر عن المسألة بما يناسبها: معادلة أو متباينة أو تمثيل بيانيٌّ، ثم اعمل عكسيًّا لحلّ المسألة.

- مثّل تتابع الأحداث بمخطط حسب نص المسألة إذا تطلب الأمر ذلك.
- استعمل العملية العكسية لكلِّ عملية أثناء الحل عكسيًّا لتصل إلى الإجابة.

خطوة 3

تحقق من صحة الحل مبتدئًا بإجابتك التي حصلت عليها، وتأكد من أنك ستصل إلى النتيجة المعطاة في نص المسألة نفسها؟

مثال

اقرأ المسألة الآتية جيدًا، وحدد المطلوب فيها، ثم استعمل معطيات المسألة لحلِّها.

اشترى عبدالرحمن سيارة مستعملة. فكان مجموع ما دفعه 39540 ريالًا. ويتضمن ذلك المبلغ رسوم نقل الملكية وهي 150 ريالا، وعمولة مكتب الوساطة وهي 1% من ثمن السيارة. فما ثمن السيارة؟ بين خطوات الحلّ.

اقرأ المسألة بعناية. أنت تعلم المبلغ الذي دفعه عبد الرحمن بما فيه رسوم نقل الملكية وعمولة المكتب .

والمطلوب هو إيجاد ثمن السيارة قبل إضافة رسوم نقل الملكية وعمولة المكتب.

افترض أن x تمثل ثمن السيارة. اكتب معادلة، واستعمل استراتيجية الحل عكسيًّا لحلها.

التعبير اللفظي: ثمن السيارة مضاف إليه رسوم نقل الملكية وعمولة مكتب الوساطة يساوي المبلغ الذي دفعه عبدالرحمن.

المتغير: x = ثمن السيارة.

المعادلة: $x + 0.01x + 150 = 39540$

ينتج عن استعمال استراتيجية الحل عكسيًّا معادلة بسيطة. استعمل العمليات العكسية لإيجاد قيمة x.

$$1.01x + 150 = 39540$$
$$1.01x = 39390$$
$$x = 39000$$

تحقق من صحة حلِّك بالبدء بالإجابة التي حصلت عليها؛ لتتأكد من أنك ستحصل على القيمة نفسها المعطاة في نص المسألة.

$39000(1.01) = 39390$ أوجد عمولة مكتب الوساطة

$39390 + 150 = 39540$ اجمع رسوم نقل الملكية

$39540 = 39540$ القيمة نفسها المعطاة

لذا فإن ثمن السيارة هو 39000 ريال.

تمارين ومسائل

اقرأ المسألتين الآتيتين جيدًا، وحدد المطلوب في كلٍّ منها، ثم استعمل معطياتها لحلِّها:

1) قذف جسم رأسيًّا إلى أعلى بسرعة ابتدائية مقدارها 800ft/s. إذا كان ارتفاع الجسم h بالأقدام بعد t ثانية فإنه يُعبَّر عنه بالمعادلة: $h = -16t^2 + 800t$.
فبعد كم ثانية يصل الجسم إلى ارتفاع 10000ft؟

A 10 ثوانٍ

B 25 ثانية

C 100 ثانية

D 625 ثانية

2) يقوم عليٌّ بعمل نموذج لسيارة مستعملًا مقياس رسم، فوجد أن ارتفاع نموذج السيارة يعادل $\frac{1}{32}$ من ارتفاع السيارة الحقيقي x. فأيُّ المعادلات الآتية تمثّل هذه العلاقة ؟

A $y = x - \frac{1}{32}$ **C** $y = \frac{1}{32}x$

B $y = \frac{1}{32}x$ **D** $y = x + \frac{1}{32}$

اختبار تراكمي

للفصول 4-1

اسئلة الاختيار من متعدد

اختر الإجابة الصحيحة في كل مما يأتي:

1) يقدم محل خصمًا نسبته 20% على جميع لوازم التخييم. ويملك بدر قسيمة حسم إضافية بقيمة 5 ريالات عند أيّ عملية شراء من المحل. إذا استعمل بدر القسيمة بعد الخصم لشراء خيمة، فأيُّ الدوال الآتية يمكن أن تستعمل لإيجاد سعر خيمة سعرها الأصلي d ريالًا؟

A $P(d) = 0.8 \times (d + 5)$

B $P(d) = (0.8 \times d) - 5$

C $P(d) = 0.2 \times (d - 5)$

D $P(d) = 0.8 \times (d - 5)$

2) إذا كان $\underline{X} = \begin{bmatrix} a+b & 2 \\ 7 & c+d \end{bmatrix}, \underline{Y} = \begin{bmatrix} 8 & d \\ b & a \end{bmatrix}$

وكانت $\underline{X} = \underline{Y}$ فإن قيمة c تساوي:

A -1

B 2

C -2

D 1

3) أيُّ العبارات الآتية تكافئ: $3a(2a+1)-(2a-2)(a+3)$؟

A $2a^2 + 6a + 7$

B $4a^2 - a + 6$

C $4a^2 + 6a - 6$

D $4a^2 - 3a + 7$

4) اشترى سلمان سيارة مستعملة، أضيف إلى ثمنها 6.5% بدل صيانة دورية، ودفع 150 ريالًا رسوم نقل الملكية، أوجد ثمن السيارة إذا كان مجموع ما دفعه سلمان 68310 ريال.

A 64140

B 68000

C 64000

D 68160

5) ما أبسط صورة للعبارة: $\sqrt[3]{-27b^6c^{12}}$.

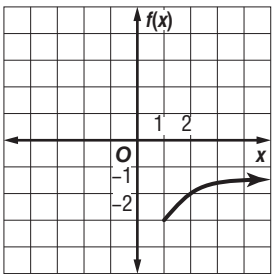
A $-3b^3c^6$

B $-3b^2c^4$

C $3b^2c^4$

D $3b^3c^6$

6) أيّ دوال الجذر التربيعي الآتية لها التمثيل البياني في الشكل المجاور؟



A $f(x) = \sqrt{x-3} - 1$

B $f(x) = \sqrt{x+1} - 3$

C $f(x) = \sqrt{x+3} + 1$

D $f(x) = \sqrt{x-1} - 3$

7) ما حَلُّ المعادلة: $\sqrt[3]{5x} = 10$ ؟

A 2

B 20

C 200

D 1000

8) أوجد الدالة العكسية للدالة: $f(x) = x - 5$.

A $f^{-1}(x) = x + 5$

B $f^{-1}(x) = 5x$

C $f^{-1}(x) = \frac{x}{5}$

D $f^{-1}(x) = 5 - x$

9) أيُّ المعادلات الآتية لها جذران نسبيان مختلفان؟

I. $3x^2 + x - 2 = 0$

II. $x^2 - 2x + 1 = 0$

III. $x^2 + 2x + 5 = 0$

A I فقط

B II فقط

C II، III فقط

D I، III فقط

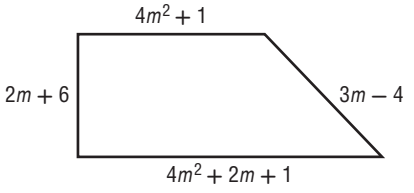
أسئلة ذات إجابات قصيرة

أجب عن كلٍّ مما يأتي:

10) مثّل الدالة $f(x) = |x + 2|$ بيانيًّا، ثم حدد مجالها ومداها.

11) قُذف جسم من منصة إلى أعلى. وتستعمل الصيغة الآتية $h = -16t^2 + 40t + 70$ لإيجاد ارتفاع الجسم h بالأقدام عن سطح الأرض بعد مرور t ثانية من لحظة القذف. فما أعلى ارتفاع يصل إليه الجسم؟

12) إذا كان محيط الشكل الرباعي أدناه 160 وحدة، فما قيمة m؟



أسئلة ذات إجابات مطولة

أجب عن كلٍّ مما يأتي موضحًا خطوات الحل:

13) عمر أب وابنه 56 عامًا فإذا كان عمر الأب يزيد على مثلي عمر الابن بـ 20 عامًا:

a) اكتب نظامًا من المعادلات الخطية يمثل المسألة.

b) اكتب معادلة مصفوفية يمكن استعمالها لحل النظام في a

c) أوجد النظير الضربي لمصفوفة المعاملات، وحل المعادلة المصفوفية لإيجاد عمر كل من الأب وابنه.

14) إذا كانت $f(x)$, $g(x)$ دالتين كل منهما دالة عكسية للأخرى،

a) صف التمثيل البياني لكلتا الدالتين $f(x)$, $g(x)$ على مستوى إحداثي واحد.

b) ما قيمة $f[g(2)]$؟ وضح إجابتك.

هل تحتاج إلى مساعدة إضافية؟														
إذا أخطأت في السؤال ...	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
فعد إلى الدرس ...	4-1	2-1	3-3	4-2	4-3	4-3	4-7	4-2	3-2	1-3	4-7	3-3	2-5	4-2

الصيغ

الهندسة الإحداثية في المستوى

المسافة بين نقطتين	$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$
نقطة المنتصف	$M = \left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2}\right)$
الميل	$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}, x_2 \neq x_1$

المصفوفات

الضرب	$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} e & f \\ g & h \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ae + bg & af + bh \\ ce + dg & cf + dh \end{bmatrix}$
الجمع	$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} e & f \\ g & h \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a + e & b + f \\ c + g & d + h \end{bmatrix}$
محددة الرتبة الثانية	$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc$
الطرح	$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} e & f \\ g & h \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a - e & b - f \\ c - g & d - h \end{bmatrix}$
مساحة مثلث رؤوسه $(a,b),(c,d),(e,f)$	$\frac{1}{2}\begin{vmatrix} a & b & 1 \\ c & d & 1 \\ e & f & 1 \end{vmatrix}$
الضرب بثابت	$k\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ka & kb \\ kc & kd \end{bmatrix}$
محددة الرتبة الثالثة (قاعدة الأقطار)	$\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = aei + bfg + cdh - ceg - afh - bdi$

كثيرات الحدود

مجموع مكعبين	$a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 - ab + b^2)$
القانون العام	$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}, a \neq 0$
الفرق بين مكعبين	$a^3 - b^3 = (a - b)\,(a^2 + ab + b^2)$
مربع المجموع	$(a + b)^2 = (a + b)(a + b) = a^2 + 2ab + b^2$
مكعب المجموع	$(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$
مربع الفرق	$(a - b)^2 = (a - b)(a - b) = a^2 - 2ab + b^2$
مكعب الفرق	$(a - b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$
حاصل ضرب مجموع حدين بالفرق بينهما	$(a + b)(a - b) = (a - b)(a + b) = a^2 - b^2$

الإحصاء والاحتمال

$$n! = n\,(n-1)\,.\,(n-2)\,\ldots\,2\,.\,1$$

$$0! = 1$$

$${}_nP_r = \frac{n!}{(n-r)!}$$

$${}_nC_r = \frac{n!}{(n-r)!r!}$$

$$P(B/A) = \frac{P\,(A \cap B)}{P(A)}, P(A) \neq 0$$

$$P(A') = 1 - P(A)$$

المتتابعات والمتسلسلات

الحد النوني في المتتابعة الهندسية	$a_n = a_1 r^{n-1}$
الحد النوني في المتتابعة الحسابية	$a_n = a_1 + (n - 1)d$
مجموع حدود المتتابعة الهندسية	$S_n = \frac{a_1 - a_1 r^n}{1 - r}$ or $S_n = \frac{a_1 - a_n r}{1 - r}, r \neq 1$
مجموع حدود المتتابعة الحسابية	$S_n = n\left(\frac{a_1 + a_n}{2}\right)$ or $S_n = \frac{n}{2}[2a_1 + (n - 1)d]$

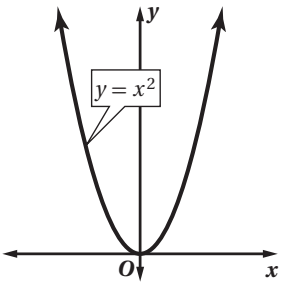
الصيغ

حساب المثلثات

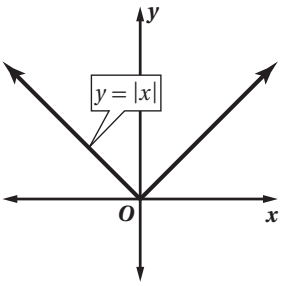
قانون الجيوب	$\frac{\sin A}{a} = \frac{\sin B}{b} = \frac{\sin C}{c},\ a, b, c \neq 0$		
قانون جيب التمام	$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A$	$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cos B$	$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos C$
الدوال المثلثية	$\sin \theta = \frac{\text{المقابل}}{\text{الوتر}}$ $\csc \theta = \frac{\text{الوتر}}{\text{المقابل}} = \frac{1}{\sin \theta}$	$\cos \theta = \frac{\text{المجاور}}{\text{الوتر}}$ $\sec \theta = \frac{\text{الوتر}}{\text{المجاور}} = \frac{1}{\cos \theta}$	$\tan \theta = \frac{\text{المقابل}}{\text{المجاور}} = \frac{\sin \theta}{\cos \theta}$ $\cot \theta = \frac{\text{المجاور}}{\text{المقابل}} = \frac{\cos \theta}{\sin \theta}$
متطابقات مثلثية	$\cos^2 \theta + \sin^2 \theta = 1$	$\tan^2 \theta + 1 = \sec^2 \theta$	$\cot^2 \theta + 1 = \csc^2 \theta$

الدوال الرئيسة (الأم)

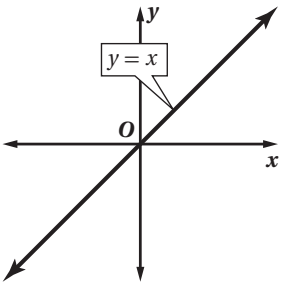
الدوال التربيعية



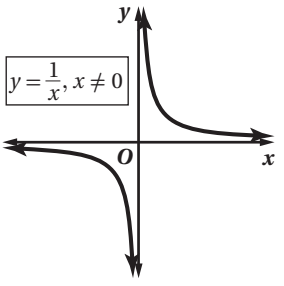
دوال القيمة المطلقة



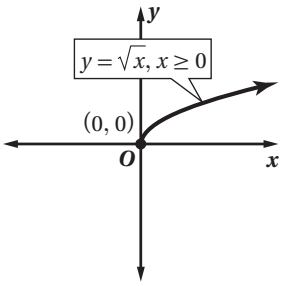
الدوال الخطية



دوال المقلوب



دوال الجذر التربيعي



الرموز

النظير الضربي للمصفوفة $\underline{A}$	$\underline{A}^{-1}$
النظير الجمعي للمصفوفة $\underline{A}$	$-\underline{A}$
مصفوفة الوحدة	$\underline{\mathrm{I}}$
مضروب العدد الصحيح الموجب n	$n!$
المجموع	$\sum$
المتوسط	$\bar{x}$
الانحراف المعياري	s
الحادثة المتممة	A'
احتمال الحادثة A	$P(A)$
احتمال B بشرط A	$P(B \mid A)$
تباديل n مأخوذة r في كل مرة	nPr
توافيق n مأخوذة r في كل مرة	nCr
دالة الجيب	$Sin(x)$
دالة جيب التمام	$Cos(x)$
دالة الظل	$Tan(x)$
دالة مقلوب الظل	$\cot(x)$
دالة مقلوب الجيب	$\csc(x)$
دالة مقلوب جيب التمام	$\sec(x)$
معكوس دالة الجيب	$\sin^{-1} x$
معكوس دالة جيب التمام	$\cos^{-1} x$
معكوس دالة الظل	$\tan^{-1} x$

مجموعة الأعداد الحقيقية	R
مجموعة الأعداد النسبية	Q
مجموعة الأعداد غير النسبية	I
مجموعة الأعداد الصحيحة	Z
مجموعة الأعداد الكلية	W
مجموعة الأعداد الطبيعية	N
دالة f بمتغير x	$f(x)$
أصغر من	$<$
أصغر من أو يساوي	$\leq$
أكبر من	$>$
أكبر من أو يساوي	$\geq$
يساوي تقريبًا	$\approx$
الدالة المتعددة التعريف	$f(x) = \{$
دالة القيمة المطلقة	$f(x) = \lvert x \rvert$
دالة أكبر عدد صحيح	$f(x) = [x]$
دالة بمتغيرين	$f(x, y)$
الوحدة التخيلية	i
تركيب الدالتين f و g	$[f \circ g](x)$
معكوس الدالة f	$f^{-1}(x)$
الجذر النوني لـ b	$b^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{b}$
مصفوفة رتبتها $m \times n$	$\underline{A}_{\,m \times n}$
العنصر في الصف i العمود j من المصفوفة A	aij
محددة المصفوفة $\underline{A}$	$\lvert \underline{A} \rvert$