

# حقيبة اولبياد الرياضيات للمرحلة الثانوية



جميع وإعداد :

زهور الجهني

عبير خياري

فوزية المغامسي

إشراف : أ . لمياء خان

مراجعة : أ . طارق الصيعري

# المحتويات

## صفحة

١	أولاً : الجبر .....
٢	المفردات .....
٤	مراجعة لبعض الحقائق الجبرية .....
١٢	المتتابعات والمتسلسلات .....
٢٠	كثيرات الحدود .....
٢٩	علاقات فيثا .....
٣٤	المتباينات .....
٣٩	ثانياً : الهندسة .....
٤٠	المفردات .....
٤١	التوازي والتعامد .....
٤٢	المسافة بين المستقيمتين .....
٤٤	خصائص المتوسطات .....
٤٨	التطابق والتشابه .....
٥٠	قوانين حساب المثلثات .....
٥٥	الدائرة .....
٥٧	الدائرة والمماس .....
٦٢	ثالثاً : نظرية الأعداد .....
٦٣	المفردات .....
٦٤	قواسم العدد .....
٦٧	الأعداد الأولية وخصائصها ونظرية اقليدس .....
٦٩	القاسم المشترك الأكبر و المضاعف المشترك الأصغر .....
٧٠	رابعاً: التركيبات .....
٧١	المفردات .....
٧٢	حقائق ومسائل في التركيبات .....
٧٩	نظرية ذات الحدين ومثلث باسكال .....
٨٤	مبدأ برج الحمام .....
٨٧	المراجع .....

اولاً : الجبر

## المفردات

- المتتابعات والمتسلسلات
- كثيرات الحدود
- علاقات فيتا
- المتباينات

## مراجعة لبعض الحقائق الجبرية

العمليات على الكسور :

$\frac{3}{5} + \frac{2}{7} = \frac{3 \cdot 7 + 5 \cdot 2}{5 \cdot 7} = \frac{21 + 10}{35} = \frac{31}{35}$	$\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad + bc}{bd}$	جمع الكسور
$\frac{3}{5} - \frac{2}{7} = \frac{3 \cdot 7 - 5 \cdot 2}{5 \cdot 7} = \frac{21 - 10}{35} = \frac{11}{35}$	$\frac{a}{b} - \frac{c}{d} = \frac{ad - bc}{bd}$	طرح الكسور
$\frac{6}{7} \times \frac{5}{3} = \frac{30}{21} = \frac{10}{7}$	$\frac{a}{b} \times \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}$	ضرب الكسور
$\frac{6}{7} \div \frac{5}{3} = \frac{6}{7} \times \frac{3}{5} = \frac{18}{35}$	$\frac{a}{b} \div \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \times \frac{d}{c} = \frac{ad}{bc}$	قسمة الكسور

خصائص التناسب :

إذا كان $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Leftrightarrow ad = bc$ بحيث $b, d \neq 0$ فإن :		
$\frac{5}{2} = \frac{15}{6} \Rightarrow 5 \cdot 6 = 2 \cdot 15$ $\frac{5 \cdot 3}{2 \cdot 3} = \frac{15 \cdot 2}{6 \cdot 2} \Rightarrow 15 \cdot 12 = 30 \cdot 6$	$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Rightarrow ad = bc$ $\frac{ak}{bk} = \frac{cr}{dr} \Rightarrow ak \cdot dr = bk \cdot cr$ $\Rightarrow ad \cdot kr = bc \cdot kr \Rightarrow ad = bc$	يبقى التناسب صحيحاً عند ضرب كل من البسط والمقام بعدد معين
$\frac{3}{5} = \frac{6}{10} \Rightarrow 3 \cdot 10 = 6 \cdot 5$ $\frac{3}{6} = \frac{5}{10} \Rightarrow 3 \cdot 10 = 6 \cdot 5$	$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Rightarrow ad = bc$ $\frac{a}{c} = \frac{b}{d} \Rightarrow ad = bc$	النسبة بين البسطين تساوي النسبة بين المقامين
$\frac{2}{5} = \frac{8}{20} = \frac{2+8}{5+20} = \frac{2-8}{5-20}$	$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} = \frac{a+c}{b+d} = \frac{a-c}{b-d}$	عند جمع بسطي التناسب وجمع مقامي التناسب أو طرح بسطي التناسب وطرح مقامي التناسب فإن الناتج يساوي النسبتين
السرعة تتناسب طردياً مع المسافة فكلما زادت السرعة زادت المسافة المقطوعة	نقول أن $a$ يتناسب طردياً مع $b$ إذا كان حاصل قسمتهما مقدار ثابت وليكن $c$ وتكتب على الصورة : $\frac{a}{b} = c$	التناسب الطردي : نقول عن كميتين يتناسبان طردياً إذا كان حاصل قسمتهما مقدار ثابت
السرعة تتناسب عكسياً مع الزمن فكلما زادت السرعة نقص الزمن	نقول أن $a$ يتناسب عكسياً مع $b$ إذا كان حاصل ضربهما مقدار ثابت وليكن $c$ وتكتب على الصورة : $a \cdot b = c$	التناسب العكسي : نقول عن كميتين يتناسبان عكسياً إذا كان حاصل ضربهما مقدار ثابت

## الأسس

$$a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot \dots \cdot a}_n \text{ من المرات}$$

إذا كان  $n$  عدد صحيح موجب و  $a$  عدد حقيقي فإن :

يسمى العدد  $a$  الأساس ، ويسمى  $n$  الأس أو القوة

$$\text{فمثلاً : } 2^9 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2$$

خواص الأسس :

إذا كان $a, b > 0$ و $m, n \in \mathbb{R}$ فإن :	
$5^{-3} = \frac{1}{5^3} = \frac{1}{125}$	$a^{-n} = \frac{1}{a^n}$
$13^0 = 1$	$a^0 = 1$
$2^3 \cdot 2^5 = 2^{3+5} = 2^8$	$a^n \cdot a^m = a^{n+m}$
$2^7 \div 2^3 = 2^{7-3} = 2^4$	$a^n \div a^m = \frac{a^n}{a^m} = a^{n-m}$
$(3 \cdot 5)^7 = 3^7 \cdot 5^7$	$(a \cdot b)^n = a^n \cdot b^n$
$\left(\frac{3}{5}\right)^4 = \frac{3^4}{5^4}$	$\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$
$(3^2)^5 = (3^5)^2 = 3^{2 \cdot 5} = 3^{10}$	$(a^n)^m = (a^m)^n = a^{nm}$
$\left(\frac{3}{7}\right)^5 = \left(\frac{7}{3}\right)^{-5}$	$\left(\frac{a}{b}\right)^n = \left(\frac{b}{a}\right)^{-n}$
$2^5 = 2^m \Rightarrow m = 5$	إذا كان الأساس متساوي فإن الأسس متساوية $a^n = a^m \Rightarrow n = m$
$3^5 = a^5 \Rightarrow a = 3$	إذا كان الأسس متساوية فإن الأساس متساوي $a^n = b^n \Rightarrow a = b$



(١) لا يمكن توزيع الأس على الجمع أو الطرح بمعنى أن  $(a \pm b)^n \neq a^n \pm b^n$

(٢) الأسس لا تجمع إلا في حالة تساوي الأساسات

## اللوغاريتمات

إذا كان  $a, b$  عددين حقيقيين موجبين ( $a \neq 1$ ) فإن  $a^n = b \Leftrightarrow \log_a b = n$

الأس  $n$  نسميه لوغاريتم العدد  $b$  للأساس  $a$

فمثلاً :  $2^5 = 32 \Leftrightarrow \log_2 32 = 5$

خواص اللوغاريتمات :

إذا كان $a, b, c, d > 0$ و $n \in \mathbb{R}$ فإن :	
$\log_5 1 = 0$	$\log_a 1 = 0$
$\log_5 5 = 1$	$\log_a a = 1$
$\log_5 6 = \log_5 (2 \cdot 3) = \log_5 2 + \log_5 3$	$\log_a (b \cdot c) = \log_a b + \log_a c$
$\log_5 \left(\frac{2}{3}\right) = \log_5 2 - \log_5 3$	$\log_a \left(\frac{b}{c}\right) = \log_a b - \log_a c$
$\log_5 3^7 = 7 \cdot \log_5 3$	$\log_a b^n = n \log_a b$
$\log_{5^3} 7 = \frac{1}{3} \log_5 7$	$\log_{a^n} b = \frac{1}{n} \log_a b$
$\frac{\log_5 3}{\log_5 7} = \log_7 3$	$\frac{\log_a b}{\log_a c} = \log_c b$
$\log_3 5 = \frac{1}{\log_5 3}$	$\log_a b = \frac{1}{\log_b a}$
$\log_5 3 \cdot \log_2 7 = \log_5 7 \cdot \log_2 3$	$\log_a b \cdot \log_c d = \log_a d \cdot \log_c b$
$3^{\log_3 5} = 5$	$a^{\log_a b} = b$
$\log_3 3^5 = 5$	$\log_a a^b = b$



١)  $\log_a (b + c) \neq \log_a b + \log_a c$

٢)  $\log_a (b \cdot c) \neq \log_a b \cdot \log_a c$

٣)  $\log_a \left(\frac{b}{c}\right) \neq \log_a b \div \log_a c$

## الجذور

إذا كان  $a, b$  عددين حقيقيين ،  $n$  عدد صحيح موجب فإننا نقول  $b$  جذر نوني للعدد  $a$  بحيث  $a = b^n$  ونكتب ذلك  $\sqrt[n]{a} = b$  .

فمثلاً :  $2^5 = 32 \Leftrightarrow \sqrt[5]{32} = 2$



(١) الرمز  $\sqrt[n]{a}$  يسمى الجذر النوني ويسمى  $n$  دليل الجذر بينما  $a$  يسمى المجذور

فمثلاً : دليل الجذر في الجذر التربيعي  $\sqrt{15}$  هو 2

دليل الجذر في العدد  $\sqrt[7]{13}$  هو 7

(٣) الجذر النوني ( $\sqrt[n]{a}$ ) معرف لأي عدد حقيقي  $a$  إذا كان  $n$  عدد فردي ،

أما إذا كان  $n$  عدد زوجي فإن الجذر النوني ( $\sqrt[n]{a}$ ) معرف لأي عدد حقيقي  $a$  غير سالب أي أن  $a \geq 0$

(٣) في الجذر التربيعي  $\sqrt{a}$  يسمى جذر أصم إذا كان  $a > 0$  وليس مربع كامل

فمثلاً :  $\sqrt{9} = \sqrt{3^2} = 3$  جذر غير أصم ، بينما الأعداد التالية جذور صماء :  $\sqrt{2}, \sqrt{3}, \sqrt{5}, \sqrt{6}, \dots$

خواص الأسس :

إذا كان $a, b \in \mathbb{R}$ و $m, n, k$ أعداد صحيحة موجبة ، وفي حالة $m, n, k$ أعداد زوجية $a, b \geq 0$ فإن :	
$\sqrt[n]{a} = a^{\frac{1}{n}}$	$\sqrt[n]{7} = 7^{\frac{1}{n}}$
$\sqrt[n]{a \cdot b} = \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b}$ حيث $ab \geq 0$	$\sqrt[3]{3 \times 5} = \sqrt[3]{3} \times \sqrt[3]{5}$
$\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$ حيث $b \neq 0$	$\sqrt[5]{\frac{3}{7}} = \frac{\sqrt[5]{3}}{\sqrt[5]{7}}$
$\sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}}$	$\sqrt[5]{3^7} = 3^{\frac{7}{5}}$
$\sqrt[n]{\sqrt[m]{a}} = \sqrt[nm]{a}$	$\sqrt[3]{\sqrt[5]{13}} = \sqrt[3 \times 5]{13} = \sqrt[15]{13}$
$(\sqrt[n]{a^m})^k = \sqrt[n]{a^{mk}} = (\sqrt[n]{a})^{mk}$	$(\sqrt[7]{5^3})^2 = \sqrt[7]{5^{3 \times 2}} = (\sqrt[7]{5})^{3 \times 2}$



(١)  $\sqrt[n]{a+b} \neq \sqrt[n]{a} + \sqrt[n]{b}$

(٢)  $\sqrt{a^2} = |a|$  حيث  $|a| = \begin{cases} a & a > 0 \\ 0 & a = 0 \\ -a & a < 0 \end{cases}$

(٣)  $\sqrt{(a \pm b)^2} = |a \pm b|$



٤) إنطاق المقام ( تنسيب المقام ) ويقصد به تخليص المقام من الجذور الصماء

فعند إنطاق مقام العدد  $\frac{c}{\sqrt{a}-\sqrt{b}}$  نضرب بسطاً ومقاماً في مرافق المقام وهو :  $\sqrt{a}+\sqrt{b}$

وعند إنطاق مقام العدد  $\frac{c}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}$  نضرب بسطاً ومقاماً في مرافق المقام وهو :  $\sqrt{a}-\sqrt{b}$

$$\text{فمثلاً : } \frac{7}{\sqrt{5}-\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{5}+\sqrt{2}}{\sqrt{5}+\sqrt{2}} \times \frac{7}{\sqrt{5}-\sqrt{2}} = \frac{7(\sqrt{5}+\sqrt{2})}{5-2} = \frac{7\sqrt{5}+7\sqrt{2}}{3}$$

قانون أبو كامل المصري :

$$\sqrt{a} + \sqrt{b} = \sqrt{a+b+2\sqrt{ab}}$$

( جذر الأول + جذر الثاني ) = جذر [ ( الأول + الثاني ) + ٢ جذر ( الأول × الثاني ) ]

$$\sqrt{a} - \sqrt{b} = \sqrt{a+b-2\sqrt{ab}}$$

فمثلاً : بسط المقدار التالي :  $\sqrt{9+2\sqrt{20}}$  ( نبحث عن عددين مجموعها 9 وحاصل ضربهما 20 ) هما 5، 4  
 $\therefore \sqrt{9+2\sqrt{20}} = \sqrt{5} + \sqrt{4} = \sqrt{5} + 2$

#### أهم المتطابقات الأساسية

$$(a+b)^2 = a^2 + b^2 + 2ab \quad (١)$$

$$(a-b)^2 = a^2 + b^2 - 2ab \quad (٢)$$

$$a^2 + b^2 = (a+b)^2 - 2ab \quad (٣)$$

$$a^2 + b^2 = (a-b)^2 + 2ab$$

$$(a+b+c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2(ab+ac+bc) \quad (٤)$$

$$(a+b+c+d)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + 2(ab+ac+ad+bc+bd+cd) \quad (٥)$$

$$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3 = a^3 + b^3 + 3ab(a+b) \quad (٦)$$

$$(a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3 = a^3 - b^3 - 3ab(a-b) \quad (٧)$$

$$a^3 - b^3 = (a-b)(a^2 + ab + b^2) \quad (٨)$$

$$a^4 - b^4 = (a-b)(a^3 + a^2b + ab^2 + b^3) \quad (٩)$$

$$a^5 - b^5 = (a-b)(a^4 + a^3b + a^2b^2 + ab^3 + b^4) \quad (١٠)$$

(١١) وبصورة عامة لأي عدد صحيح  $n$  فإن :

$$a^n - b^n = (a-b)(a^{n-1} + a^{n-2}b + a^{n-3}b^2 + \dots + ab^{n-2} + b^{n-1})$$

$$a^3 + b^3 = (a+b)(a^2 - ab + b^2) \quad (١٢)$$

$$a^5 + b^5 = (a+b)(a^4 - a^3b + a^2b^2 - ab^3 + b^4) \quad (١٣)$$

(١٤) وبصورة عامة لأي عدد صحيح فردي  $n$  فإن :

$$a^n + b^n = (a+b)(a^{n-1} - a^{n-2}b + a^{n-3}b^2 - \dots + ab^{n-2} + (-1)^{n-1}b^{n-1})$$

## الأعداد المركبة

مثال تمهيدي :

أوجد حل ما يلي في  $\mathbb{R}$

$$x^2 - 1 = 0 \Rightarrow x^2 = 1 \Rightarrow x = \pm 1 \in \mathbb{R}$$

$$x^2 + 1 = 0 \Rightarrow x^2 = -1 \notin \mathbb{R}$$

نلاحظ في المعادلة الأخيرة ليس لها حل في حقل الأعداد الحقيقية لأنه لا يوجد عدد حقيقي  $x$  يكون مربعه  $(-1)$  وهذا يقودنا إلى أن نبحث عن نظام أوسع من  $\mathbb{R}$  يحقق حل المعادلة الأخيرة أي إننا نحتاج إلى توسيع نظام الأعداد الحقيقية إلى

حقل ما وليكن  $(\mathbb{C}, \odot, \oplus)$  حيث يمكن فرض أن  $\sqrt{-1} = i$

$$z = a + bi$$

تتكون مجموعة الأعداد المركبة ( ويرمز لها بالرمز  $\mathbb{C}$  ) من جميع التعبيرات التي على الشكل

حيث  $a$  و  $b$  عددا حقيقيان و  $i = \sqrt{-1}$ . أي أن  $\mathbb{C} = \{z = a + bi \mid a, b \in \mathbb{R}, i^2 = -1\}$

العدد  $a$  يسمى الجزء الحقيقي للعدد المركب  $z$  والعدد  $b$  يسمى الجزء التخيلي. لاحظ أن العدد المركب الذي جزؤه التخيلي صفري سيكون عدداً حقيقياً. يمكن كتابة العدد المركب بعدة طرق ولكن الشكل القياسي للعدد المركب هو  $i$  (جزء تخيلي) + جزء حقيقي

فمثلاً :  $2 + 3i$  الجزء الحقيقي 2 والتخيلي 3

### تساوي عددا مركبان

يتساوى العددا المركبان إذا وفقط إذا كان لهما نفس الجزء الحقيقي ونفس الجزء التخيلي ، أي أن

$$a + bi = c + di \text{ إذا وفقط إذا كان } a = c \text{ و } b = d$$

### حاصل جمع عددا مركبان

يعرف حاصل الجمع لعددين مركبين  $z = a + bi$  و  $w = c + di$  بالمعادلة  $z + w = (a + c) + (b + d)i$

أي نجمع الحقيقي مع الحقيقي والجزء التخيلي مع التخيلي

مثال :

$$\text{إذا كان } z = 2 + 3i, w = -5 + 7i \text{ أوجد } z + w, z - w$$

$$\text{الحل: } z + w = 2 + 3i + (-5 + 7i) = 2 - 5 + 3i + 7i = -3 + 10i$$

$$z - w = 2 + 3i - (-5 + 7i) = 2 + 5 + 3i - 7i = 7 - 4i$$

### حاصل ضرب عددا مركبان

يعرف حاصل الضرب لعددين مركبين  $z = a + bi$  و  $w = c + di$  بالمعادلة  $z \cdot w = (ac - bd) + (ad + bc)i$

$$z \cdot w = (ac - bd) + (ad + bc)i$$

(الأول  $\times$  الأول - الثاني  $\times$  الثاني) + (الأول  $\times$  الثاني + الثاني  $\times$  الأول)  $i$

مثال :

$$\text{إذا كان } z = 2 + 3i, w = -5 + 7i \text{ أوجد } w \cdot z$$

$$\text{الحل: } w \cdot z = (-5 + 7i) \cdot (2 + 3i) = (-5 \times 2) - (7 \times 3) + ((-5 \times 3) + (7 \times 2))i = -31 - i$$

## مرافق العدد

مرافق العدد المركب  $z = a + bi$  ، و يرمز له بالرمز  $\bar{z}$  ، هو العدد المركب  $\bar{z} = a - bi$ .

أي ان مرافق العدد  $2 - 3i$  هو  $2 + 3i$  ، مرافق العدد  $3 + 9i$  هو  $3 - 9i$  ، مرافق العدد  $-5i$  هو  $5i$  ، مرافق العدد  $2$  هو  $2$

## القيمة المطلقة للعدد

تعرف القيمة المطلقة أو مقياس العدد المركب  $z = a + bi$  بالمعادلة

$$|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$$

فمثلاً القيمة المطلقة للعدد

$$w = 3 + 4i$$

$$|w| = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{3^2 + 4^2} = \sqrt{9 + 16} = \sqrt{25} = 5$$

$$z = 2 - 5i$$

$$|z| = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{2^2 + (-5)^2} = \sqrt{4 + 25} = \sqrt{29}$$

ملاحظة

(١) حاصل ضرب عدد مركب في مرافقه هو عدد حقيقي

$$z = a + bi \Rightarrow \bar{z} = a - bi$$

(الأول) + (الثاني)

$$\bar{z}z = (a + bi)(a - bi) = a^2 + b^2$$

$$i = \sqrt{-1} \Rightarrow i^2 = -1 \quad (٢)$$

$i^5$	$i^4$	$i^3$	$i^2$	$i$
$i$	$1$	$-i$	$-1$	$\sqrt{-1}$

$$\left. \begin{array}{l} 1 \text{ إذا كان } n \text{ تقبل القسمة على } 4 \\ -1 \text{ إذا كان } n \text{ لا تقبل القسمة على } 4 \\ i \text{ إذا كان } n-1 \text{ تقبل القسمة على } 4 \\ -i \text{ إذا كان } n-1 \text{ لا تقبل القسمة على } 4 \end{array} \right\} \begin{array}{l} n \text{ عدد زوجي} \\ n \text{ عدد فردي} \end{array} \left. \begin{array}{l} i^{4n} = 1 \\ i^n \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{وبصورة عامة} \\ \text{أي أن :} \end{array}$$

## قسمة عددين مركبين :

عند قسمة عدد مركب على عدد مركب نضرب في مرافق المقام

$$\frac{2 + 5i}{7 - 3i} \quad \text{مثال : اوجد ناتج ما يلي}$$

$$\begin{aligned} \frac{2 + 5i}{7 - 3i} &= \frac{2 + 5i}{7 - 3i} \times \frac{7 + 3i}{7 + 3i} = \frac{(2 + 5i)(7 + 3i)}{(7)^2 + (3)^2} \\ &= \frac{(2 \times 7) - (5 \times 3) + (2 \times 3 + 5 \times 7)i}{49 + 9} \\ &= \frac{14 - 15 + (6 + 35)i}{58} = \frac{-1}{58} + \frac{41}{58}i \end{aligned}$$

## المجموع $\Sigma$ (سيجما)

الرمز  $\Sigma$  يستخدم لمجموع عدة حدود ويقرأ سيجما

$$\sum_{r=1}^n a_r = a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n$$

فمثلاً :

$$\sum_{k=1}^5 k = 1 + 2 + 3 + 4 + 5 \quad (١)$$

$$\sum_{r=1}^{12} (3r-1) = (3 \times 1 - 1) + (3 \times 2 - 1) + (3 \times 3 - 1) + \dots + (3 \times 12 - 1) = 2 + 5 + 8 + \dots + 35 \quad (٢)$$

$$\sum_{r=1}^{\infty} a_r = a_1 + a_2 + a_3 + \dots \quad (٣)$$

$$\sum_{r=0}^{\infty} 5^r = 5^0 + 5^1 + 5^2 + \dots \quad (٤)$$

وكذلك لكتابة مقدار ما على صورة مجاميع باستخدام الرمز  $\Sigma$

$$1 + 4 + 9 + 16 + 25 + 36 \quad (١)$$

$$1 + 4 + 9 + 16 + 25 + 36 = 1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + 5^2 + 6^2 = \sum_{r=1}^6 r^2$$

$$\frac{1}{3} + \frac{2}{5} + \frac{3}{7} + \dots \quad (٢)$$

$$\frac{1}{3} + \frac{2}{5} + \frac{3}{7} + \dots = \frac{1}{2 \times 1 + 1} + \frac{2}{2 \times 2 + 1} + \frac{3}{2 \times 3 + 1} + \dots = \sum_{r=1}^{\infty} \frac{r}{2r+1}$$

## خصائص المجموع $\Sigma$

$$\sum_{r=1}^n a = \underbrace{a + a + a + \dots + a}_n = na \quad (١)$$

$$\sum_{r=1}^n m \cdot a_r = m \sum_{r=1}^n a_r \quad (٢)$$

$$\sum_{r=1}^n (a_r + b_r) = \sum_{r=1}^n a_r + \sum_{r=1}^n b_r \quad (٣)$$

$$\sum_{r=1}^n a_r = \sum_{r=1}^k a_r + \sum_{r=k+1}^n a_r \quad (٤)$$

مثال :

$$\sum_{r=1}^7 (3a_r - 2b_r + 5) \quad \text{اوجد قيمة} \quad \sum_{r=1}^7 a_r = 15, \sum_{r=1}^7 b_r = 22 \quad \text{إذا كان}$$

$$\sum_{r=1}^7 (3a_r - 2b_r + 5) = \sum_{r=1}^7 3a_r - \sum_{r=1}^7 2b_r + \sum_{r=1}^7 5 \quad \text{الحل :}$$

$$= 3 \sum_{r=1}^7 a_r - 2 \sum_{r=1}^7 b_r + \sum_{r=1}^7 5 = 3 \times 15 - 2 \times 22 + 5 \times 7 = 36$$

# المتتابعات و المتسلسلات

## المتتابعات

المتتابعة هي دالة مجالها مجموعة الأعداد الموجبة أو مجموعة جزئية منها ، ومجالها المقابل مجموعة الأعداد الحقيقية أو مجموعة جزئية منها ، ومداها مجموعة الأعداد الحقيقية أو مجموعة جزئية منها وتسمى عناصر المدى حدود المتتابعة ، عادة ما نرمز للعدد المحدد بهذه المتتابعة للعدد

الصحيح الموجب  $n$  باستخدام  $a_n$  . وهي عبارة عن تتابع من الأعداد  $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n$  وكل عدد منها يسمى حداً حيث  $a_1$  يسمى الحد الأول ، ويسمى الحد الثاني  $a_2$  وهكذا .....

قد تكون المتتابعة منتهية متى عُلم حداها الأخير نرمز لها بالرمز  $\{a_r\}_{r=1}^n$  أو بالرمز  $(a_r)_{r=1}^n$  وتكتب على الصورة :

$$a_1, a_2, a_3, \dots, a_n$$

فمثلاً :

3, 6, 9, 12, 15, 18, 21 متتابعة منتهية ويمكن كتابة حداها النوني على الصورة  $a_n = 3n$  ويمكن كتابة المتتابعة على الصورة  $\{3n\}_{n=1}^7$

وقد تكون المتتابعة غير منتهية نرمز لها بالرمز  $\{a_r\}_{r=1}^{\infty}$  وتكتب على الصورة  $a_1, a_2, a_3, \dots$  فمثلاً :

$$1, \frac{1}{4}, \frac{1}{9}, \frac{1}{16}, \dots, a_n = \frac{1}{n^2}$$

$$\left\{ \frac{1}{n^2} \right\}_{n=1}^{\infty}$$

ويمكن التعبير عن المتتابعة إما بذكر حداها النوني  $a_n$  أو بكتابة بعض حدودها .

## المتسلسلات

إذا كانت المتتابعة  $\{a_r\}_{r=1}^n = a_1, a_2, a_3, \dots, a_n$  متتابعة منتهية مكونة من  $n$  حداً ( أي عدد حدودها  $n$  ) فإن مجموع حدودها :

$$a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n$$

ونستخدم المجموع  $\sum$  والحد العام ( الحد النوني )  $a_r$  للتعبير عن المتسلسلة المنتهية :

$$\sum_{r=1}^n a_r = a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n$$

وإذا كانت المتتابعة لانهائية  $\{a_r\}_{r=1}^{\infty} = a_1, a_2, a_3, \dots$  فيكون ناتج مجموع حدودها متسلسلة لا نهائية

قد يكون لها مجموع حقيقي وقد لا يكون لها مجموع حقيقي وتكتب على الصورة :

$$\sum_{r=1}^{\infty} a_r = a_1 + a_2 + a_3 + \dots$$

### المتتابة الحسابية

مثال تمهيدي :

ليكن لدينا المتتابعتان :

4, 9, 14, 19, .....

12, 8, 4, 0, .....

نلاحظ أن :

المتتابة الأولى يزيد كل حد عن الحد السابق له مباشرة بمقدار ثابت هو 5

المتتابة الثانية ينقص كل حد عن الحد السابق له مباشرة بمقدار ثابت هو 4

تسمى كلاً من المتتابعات متتابة حسابية ويسمى المقدار الثابت الذي يزيد أو ينقص عن الحد السابق له مباشرة أساس المتتابة أو الفرق العام أو الفرق الثابت

مما سبق تسمى المتتابة متتابة حسابية إذا كان الفرق بين حدين متتالين مقدار ثابت ويسمى الفرق بأساس المتتابة ويرمز بالرمز

$d$

$a_1, a_2, a_3, \dots, a_n, \dots$

ويكون حدود المتتابة الحسابية هي :  $a, a+d, a+2d, \dots, a+(n-1)d, \dots$

وعلى ذلك يمكن أن نستنتج الحد النوني  $a_n$  للمتتابة الحسابية  $\{a_n\}$  على الصورة :  $a_n = a + (n-1)d$  حيث :

(١) الحد الأول  $a$

(٢) الفرق الثابت أو الأساس  $d$  ويُعطى بالعلاقة  $d = a_n - a_{n-1}$

(٣) الحد النوني للمتتابة الحسابية  $a_n = a + (n-1)d$

فمثلاً الحد السابع  $a_7 = a + 6d$  ،  $a_{100} = a + 99d$

(٤) يمكن إيجاد الفرق الثابت بمعلومية حدين  $a_k, a_r$  بالعلاقة التالية :  $d = \frac{a_k - a_r}{k - r}$

(٥) إذا كانت المتتابة الحسابية منتهية فإن رتبة الحد الأخير فيه هو نفسه عدد حدود المتتابة ، والعكس صحيح ( أي عدد حدود المتتابة هو نفسه رتبة ترتيب الحد الأخير )

مثال :

متتابة حسابية حدها الخامس يساوي 30 وحدها العشرون 90 اوجد الفرق الثابت للمتتابة

$$\therefore a_5 = 30, a_{20} = 90$$

∴ لحساب الفرق الثابت

$$d = \frac{a_k - a_r}{k - r} \Rightarrow d = \frac{a_{20} - a_5}{20 - 5} = \frac{90 - 30}{20 - 5} = \frac{60}{15} = 4$$

### الوسط الحسابي:

إذا كانت  $a, c$  حدين من متتابعة حسابية و بينهما وسط حسابي واحد  $b$  فإننا نحصل على متتابعة  $a, b, c$  حيث  $b$  هو الوسط الحسابي بين الحدين  $a, c$  ويكون  $b = \frac{a+c}{2}$

### المتسلسلة الحسابية

يكون مجموع المتسلسلة الحسابية :

$$a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n$$

$$a + (a + d) + (a + 2d) + \dots + (a + (n - 1)d)$$

على الصورة :

$$s_n = \sum_{r=1}^n a_r = a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n = \frac{n}{2} (2a_1 + (n - 1)d)$$

أو على الصورة :

$$s_n = \sum_{r=1}^n a_r = a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n = \frac{n}{2} (a_1 + a_n)$$

أي أن مجموع المتسلسلة الحسابية

بدلالة عدد الحدود  $n$  الحد الأول  $a$  والحد الأخير  $a_n$

$$s_n = \frac{n}{2} (a + a_n)$$

بدلالة عدد الحدود  $n$  الحد الأول  $a$  وأساس المتتابعة  $d$

$$s_n = \frac{n}{2} (2a + (n - 1)d)$$

مثال :

متتابعة حسابية حدودها : 2, 5, 8, ..., 59 اوجد  $a_{13}$  ، عدد حدودها ، مجموعها

الحل :

في المتتابعة نجد أن  $a = 2$  ، أساس المتتابعة  $d = a_2 - a = 5 - 2 = 3$

$$\therefore a_{13} = a + 12d = 2 + 12 \times 3 = 38$$

لإيجاد عدد حدودها نستنتج من الحد الأخير  $a_n = 59$

$$\therefore a_n = a + (n - 1)d$$

$$\therefore 59 = 2 + (n - 1) \times 3 \Rightarrow 57 = 3n - 3 \Rightarrow 3n = 60 \Rightarrow n = 20$$

لإيجاد المجموع بدلالة عدد الحدود  $n = 20$  ، الحد الأول  $a = 2$  والحد الأخير  $a_n = 59$

$$s_n = \frac{n}{2} (a + a_n)$$

$$s_n = \frac{20}{2} (2 + 59) = 610$$

ليكن لدينا المتابعتان :

$$4, 8, 16, 32, \dots$$

$$81, 27, 9, 3, \dots$$

نلاحظ أن :

المتابعة الأولى : نسبة أي حد من حدود المتابعة الأولى والحد الذي يسبقه مباشرة بالترتيب يساوي مقدار ثابت يساوي 2

$$\text{أي أن : } \frac{8}{4} = \frac{16}{8} = \frac{32}{16} = 2$$

المتابعة الثانية : نسبة أي حد من حدود المتابعة الثانية والحد الذي يسبقه مباشرة بالترتيب يساوي مقدار ثابت يساوي  $\frac{1}{3}$

$$\text{أي أن : } \frac{27}{81} = \frac{9}{27} = \frac{3}{9} = \frac{1}{3}$$

تسمى كلاً من المتابعتان متابعة هندسية ويسمى المقدار الثابت أساس المتابعة أو النسبة المشتركة  $r$

$$a_1, a_2, a_3, a_4, \dots, a_n, \dots$$

ويكون حدود المتابعة الهندسية هي :  $a, ar, ar^2, ar^3, \dots, ar^{n-1}, \dots$

وعلى ذلك يمكن أن نستنتج الحد النوني  $a_n$  للمتابعة الهندسية  $\{a_n\}$  على الصورة :  $a_n = ar^{n-1}$  حيث :

(١) الحد الأول  $a$

(٢) النسبة المشتركة أو الأساس  $r$  ويُعطى بالعلاقة  $r = a_n \div a_{n-1}$

(٣) الحد النوني للمتابعة الهندسية  $a_n = ar^{n-1}$

$$\text{فمثلاً الحد السابع } a_7 = ar^6, \text{ } a_{100} = a + 99d$$

(٤) يمكن إيجاد النسبة الثابتة بمعلومية حدين  $a_n, a_m$  بالعلاقة التالية :  $r = \sqrt[n-m]{\frac{a_n}{a_m}}$

(٥) إذا كانت المتابعة الهندسية منتهية فإن رتبة الحد الأخير فيه هو نفسه عدد حدود المتابعة ، والعكس صحيح ( أي عدد حدود

المتابعة هو نفسه رتبة ترتيب الحد الأخير )

الوسط الهندسي :

إذا كانت  $a, c$  حدين من متابعة هندسية بحيث  $ac > 0$  و بينهما وسط هندسي واحد  $b$  فإننا نحصل على متابعة

$$a, b, c$$

حيث  $b$  هو الوسط الهندسي بين الحدين  $a, c$  ويكون

$$b = \pm \sqrt{ac}$$



## المتسلسلة الهندسية

يكون مجموع المتسلسلة الهندسية :

$$a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + \dots + a_n$$

$$a + ar + ar^2 + ar^3 + \dots + ar^{n-1}$$

على الصورة :

$$r \neq 1 \quad \text{حيث} \quad s_n = \sum_{r=1}^{\infty} a_r = a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n = a_1 \frac{r^n - 1}{r - 1}$$

أي أن مجموع المتسلسلة الهندسية :

حيث  $r \neq 1$

بدلالة عدد الحدود  $n$  الحد الأول  $a$  وأساس المتتابعة  $r$

$$s_n = a \frac{r^n - 1}{r - 1}$$

وفي حالة  $r = 1$  فإن  $s_n = n a$



المتسلسلة الهندسية اللانهائية هي التي لها الشكل :

$$s_n = \sum_{r=1}^{\infty} a_r = a_1 + a_2 + a_3 + \dots$$

إذا كان  $|r| < 1$  فإن للمتسلسلة الهندسية مجموع  $S$  كعدد حقيقي يُعطى بالعلاقة :

$$S = \frac{a}{1 - r}$$

مثال :

أوجد مجموع المتسلسلة الهندسية اللانهائية التالية :

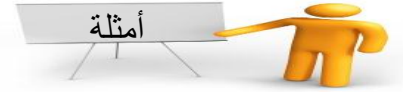
$$\sum_{r=0}^{\infty} \frac{1}{3^r} = 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{3^3} + \dots$$

الحل :

واضح أن الحد الأول  $a = 1$  ، أساس المتتابعة  $r = \frac{1}{3} < 1$

∴ يكون مجموع المتسلسلة الهندسية اللانهائية على الصورة  $S = \frac{a}{1 - r}$

$$S = \frac{1}{1 - \frac{1}{3}} = \frac{1}{\frac{3}{3} - \frac{1}{3}} = \frac{1}{\frac{2}{3}} = \frac{3}{2}$$



$$\sqrt{1+2+3+\dots+99+100+99+98+\dots+2+1}$$

(١) بسط المقدار التالي :

الحل :

واضح أن المقدار عبارة عن متسلسلة حسابية  $\sqrt{1+2+3+\dots+99+100+99+98+\dots+2+1}$

بجمع الحدود من 1 إلى 99  $\sqrt{(1+2+3+\dots+99)+100+(99+98+\dots+2+1)}$

عبارة عن متسلسلة حسابية مكونة من 99 حداً ، حدها الأول = 1 ، حدها الأخير = 99

بتطبيق القانون  $s_n = \frac{n}{2} (a + a_n)$  نجد أن :

$$\sqrt{1+2+3+\dots+99+100+99+98+\dots+2+1}$$

$$= \sqrt{\frac{99}{2} (1+99) + 100 + \frac{99}{2} (1+99)}$$

$$\sqrt{99 \times 50 + 100 + 99 \times 50} = \sqrt{99 \times 100 + 100} = \sqrt{9900 + 100} = \sqrt{10000} = 100$$

(٢) إذا كان  $a, b, c$  في تتابع حسابي اثبت أن  $a^2 - bc, b^2 - ac, c^2 - ab$  في تتابع حسابي

الحل :

$$b = \frac{a+c}{2} \Rightarrow b^2 = \frac{(a+c)^2}{4} \quad \text{بما أن } a, b, c \text{ في تتابع حسابي فإن}$$

المطلوب إثبات أن  $a^2 - bc, b^2 - ac, c^2 - ab$  في تتابع حسابي أي أن

$$b^2 - ac = \frac{a^2 - bc + c^2 - ab}{2}$$

$$b^2 = \frac{a^2 - bc + c^2 - ab}{2} + ac \Rightarrow b^2 = \frac{a^2 - bc + c^2 - ab}{2} + \frac{2ac}{2}$$

$$b^2 = \frac{a^2 + 2ac + c^2 - b(a+c)}{2} \Rightarrow b^2 = \frac{(a+c)^2 - b(a+c)}{2} = \frac{(a+c)^2}{2} - b \left( \frac{a+c}{2} \right) = \frac{(a+c)^2}{2} - b^2$$

$$2b^2 = \frac{(a+c)^2}{2} \Rightarrow b^2 = \frac{(a+c)^2}{4}$$

∴  $a^2 - bc, b^2 - ac, c^2 - ab$  في تتابع حسابي

( ٣ ) ليكن  $n$  عدد فردي احسب المجموع  $s = 1 - 2 + 3 - 4 + \dots + (-1)^{n+1}n$   
الحل :

بما أن  $n$  عدد فردي فإن  $n+1$  عدد زوجي وكذلك نجد أن  $(-1)^{n+1} = 1$   
∴ يصبح المجموع  $s = 1 - 2 + 3 - 4 + \dots + (-1)^{n+1}n$  كالتالي :

$$s = 1 - 2 + 3 - 4 + \dots + n \quad \text{لاحظ مجموع حدين متتاليين} = -1$$

$$s = 1 - 2 + 3 - 4 + \dots + \underbrace{(n-2) - (n-1)}_{-1} + n$$

$$s = \underbrace{-1 - 1 - 1 - \dots - 1}_{\frac{n-1}{2} \text{ times}} + n \Rightarrow s = (-1) \frac{n-1}{2} + n = \frac{-n+1+2n}{2} = \frac{n+1}{2}$$

( ٤ ) احسب المجموع التالي :  $1 + \frac{2008}{2009} + \left(\frac{2008}{2009}\right)^2 + \left(\frac{2008}{2009}\right)^3 + \left(\frac{2008}{2009}\right)^4 + \left(\frac{2008}{2009}\right)^5 + \dots$

الحل :

واضح أن المجموع السابق عبارة عن متسلسلة هندسية لانهاية فيها الحد الأول  $a=1$  ، أساس المتتابعة  $r = \frac{2008}{2009} < 1$

∴ مجموع متسلسلة هندسية لانهاية فيها  $r < 1$  على الصورة :  $s = \frac{a}{1-r}$

$$\therefore S_n = \frac{1}{1 - \frac{2008}{2009}} = \frac{1}{\frac{2009}{2009} - \frac{2008}{2009}} = \frac{1}{\frac{1}{2009}} = 2009$$

( ٥ ) احسب المجموع  $\frac{5}{4} + \frac{11}{4^2} + \frac{17}{4^3} + \frac{23}{4^4} + \dots$   
التالي :

$$T = \frac{5}{4} + \frac{11}{4^2} + \frac{17}{4^3} + \frac{23}{4^4} + \dots$$

نفرض أن المجموع  $T =$

$$4T = 5 + \frac{11}{4} + \frac{17}{4^2} + \frac{23}{4^3} + \dots$$

$$4T = 5 + \left(\frac{6}{4} + \frac{5}{4}\right) + \left(\frac{6}{4^2} + \frac{11}{4^2}\right) + \left(\frac{6}{4^3} + \frac{17}{4^3}\right) + \dots$$

$$4T = 5 + \left(\frac{5}{4} + \frac{11}{4^2} + \frac{17}{4^3} + \frac{23}{4^4} + \dots\right) + \left(\frac{6}{4} + \frac{6}{4^2} + \frac{6}{4^3} + \dots\right) \quad \text{لاحظ كل حد}$$

$$4T = 5 + T + 6\left(\frac{1}{4} + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{4^3} + \dots\right)$$

$$3T = 5 + 6\left(\frac{\frac{1}{4}}{1 - \frac{1}{4}}\right) = 7 \Rightarrow T = \frac{7}{3}$$

المقدار الأخير عبارة عن متسلسلة هندسية لانهاية

$$a = \frac{1}{4}, r = \frac{1}{4} < 1$$

مجموع متسلسلة هندسية لانهاية  $s = \frac{a}{1-r}$

$$\therefore \frac{5}{4} + \frac{11}{4^2} + \frac{17}{4^3} + \frac{23}{4^4} + \dots = \frac{7}{3}$$



(١) أوجد قيمة كل من  $(a, b)$  التي تحقق  $3, a, b$  في تتابع هندسي و  $a, b, 9$  في تتابع حسابي .

(٢) متتابعة حسابية فيها الحد  $a$  يساوي  $b$  والحد  $b$  يساوي  $a$ ، بحيث  $a \neq b$  أوجد قيمة الحد  $(a+b)$

(٣) إذا كانت الأعداد  $\frac{1}{z+y}, \frac{1}{x+z}, \frac{1}{x+y}$  في تتابع حسابي أثبت أن  $x^2, y^2, z^2$  في تتابع حسابي

(٤) إذا كانت  $a, b, c, d$  حدوداً متتالية في متتابعة هندسية ، فأثبت أن :  $(b-c)^2 + (c-a)^2 + (d-b)^2 = (a-d)^2$

(٥) أثبت أن  $1 + 3 + 5 + \dots + (2n-1) = n^2$

(٦) ما مجموع الأعداد بين 50 و 350 التي خانة الآحاد بها 1 ؟

(٧) لتكن  $a_1, a_2, \dots, a_{100}$  و  $b_1, b_2, \dots, b_{100}$  متتابعتين حسابيتين حيث  $b_1 = 75$  ،  $a_1 = 25$  ،

$a_{100} + b_{100} = 1000$  فما مجموع 100 حد من المتتابعة  $(a_n + b_n)$  ؟

(٨) في متتابعة هندسية حدودها موجبة كل حد يساوي مجموع الحدين التاليين ، ما لنسبة المشتركة ؟

(٩) إذا كانت المتتابعة  $(a_n)$  كالتالي  $a_1 = 1$  و  $a_n = a_{n-1} \left(1 - \frac{1}{n}\right)$  حيث  $n \geq 2$  أوجد قيمة  $a_{1000}$  ؟

(١٠) ليكن  $x \neq y$  ،  $x, a_1, a_2, y$  و  $x, b_1, b_2, b_3, y$  متتابعتين حسابيتين ، ما هي قيمة  $\frac{b_2 - b_1}{a_2 - a_1}$  ؟

(١١) احسب المجموع التالي :  $i - i^2 + i^3 + i^4 + i^5 - i^6 + i^7 + i^8 + \dots + i^{997} - i^{998} + i^{999} + i^{1000}$

(١٢) احسب مجموع المتسلسلة التالية :  $\frac{5}{4} + \frac{8}{4^2} + \frac{11}{4^3} + \frac{14}{4^4} + \dots$

(١٤) أوجد قيمة المقدار التالي :  $2^{\frac{1}{3}} \cdot 4^{\frac{1}{3^2}} \cdot 8^{\frac{1}{3^3}} \cdot 16^{\frac{1}{3^4}} \cdot \dots$

(١٥) اكتب العدد الدوري  $x = 0.\overline{321}$  على شكل كسر .

(١٦) إذا علمت أن  $\frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \dots = \frac{\pi^2}{6}$  حيث  $\pi$  هي نسبة محيط الدائرة إلى قطرها ،

فأوجد مجموع المتسلسلة  $\frac{1}{1^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \dots$

## كثيرات الحدود

### كثيرات الحدود

تُعبّر كثيرة الحدود من الدرجة  $n \geq 0$  على الصورة :  $f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$

حيث  $a_n \neq 0$  ، الأعداد الثابتة تسمى  $a_0, a_1, \dots, a_n$  المعاملات .

فمعامل  $x^n$  هو  $a_n$  ، ومعامل  $x^{n-1}$  هو  $a_{n-1}$  ، ..... ، ومعامل  $x$  هو  $a_1$  والحد الثابت أو المطلق هو  $a_0$

حيث  $a_n$  يسمى المعامل القائد ، وإذا كان  $a_n = 1$  تسمى  $f(x)$  كثيرة حدود واحدة  
فمثلاً :

$$f(x) = 3x^4 - 2x^3 + 5 \text{ كثيرة حدود غير واحدة من الدرجة الرابعة ،}$$

$$\text{بينما } p(x) = x^5 - 5x^4 + 3x^2 - 7 \text{ كثيرة حدود واحدة من الدرجة الخامسة}$$

### جمع كثيرات الحدود

إذا كانت  $f(x)_1, f(x)_2$  كثيرتي حدود فإن :  $f(x)_1 + f(x)_2$  هي كثيرة الحدود التي فيها معاملات القوى المشتركة بين  $f(x)_1, f(x)_2$  تساوي مجموع المعاملات المتناظرة في  $f(x)_1, f(x)_2$  أما معاملات القوى غير المشتركة بينهما فهي المعاملات نفسها في كل من  $f(x)_1, f(x)_2$

مثال :

$$\text{إذا كانت } p(x) = 3x^5 - 7x^3 + 4x^2 + 3x - 1 \text{ ، } f(x) = 2x^4 + 3x^3 - 2x^2 + 2 \text{ أوجد } p(x) + f(x)$$

الحل :

$$\begin{aligned} p(x) + f(x) &= (3x^5 - 7x^3 + 4x^2 + 3x - 1) + (2x^4 + 3x^3 - 2x^2 + 2) \\ &= 3x^5 + 2x^4 - 4x^3 + 2x^2 + 3x + 1 \end{aligned}$$

### ضرب كثيرات الحدود

$$\text{إذا كانت } f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0 \text{ ، } p(x) = b_m x^m + b_{m-1} x^{m-1} + \dots + b_1 x + b_0$$

$$\begin{aligned} f(x) \cdot p(x) &= (a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0)(b_m x^m + b_{m-1} x^{m-1} + \dots + b_1 x + b_0) \\ &= a_n x^n (b_m x^m + b_{m-1} x^{m-1} + \dots + b_1 x + b_0) + a_{n-1} x^{n-1} (b_m x^m + b_{m-1} x^{m-1} + \dots + b_1 x + b_0) + \dots + \\ &+ a_1 x (b_m x^m + b_{m-1} x^{m-1} + \dots + b_1 x + b_0) + a_0 (b_m x^m + b_{m-1} x^{m-1} + \dots + b_1 x + b_0) \end{aligned}$$

كثيرتي حدود من الدرجة  $n, m$  على الترتيب فإن

هي كثيرة حدود من الدرجة  $m + n$

مثال :

$$\text{إذا كانت } p(x) = 3x^5 - 7x^3 + 3x - 1 \text{ ، } f(x) = 2x^4 + 1 \text{ أوجد } p(x) \cdot f(x)$$

$$\begin{aligned} p(x) \cdot f(x) &= (3x^5 - 7x^3 + 3x - 1)(2x^4 + 1) \\ &= 6x^9 + 3x^5 - 14x^7 - 7x^3 + 6x^5 + 3x - 2x^4 - 1 \\ &= 6x^9 - 14x^7 + 9x^5 - 2x^4 - 7x^3 + 3x - 1 \end{aligned}$$

الحل :

إذا كانت  $f(x), g(x)$  كثيرتي حدود من الدرجة  $n, m$  على الترتيب حيث  $n \geq m$  ، فإنه عند قسمة

$f(x)$  على  $g(x)$  توجد كثيرتي حدود وحيدتين  $r(x), q(x)$  بحيث :  $f(x) = g(x) \cdot q(x) + r(x)$  ، حيث  $r(x) = 0$  أو درجة  $r(x)$  أقل من درجة  $g(x)$  ، تسمى كثيرة الحدود  $q(x)$  بخارج القسمة و  $r(x)$  بالباقي ، وإذا كان  $r(x) = 0$  فإننا نقول أن  $g(x)$  تقسم  $f(x)$  أو  $g(x)$  عامل من عوامل  $f(x)$  وتكتب على الصورة :

$$f(x) = g(x) \cdot q(x)$$

مثال : اوجد خارج القسمة والباقي عند قسمة  $f(x)$  على  $g(x)$  حيث :  $g(x) = x + 1$  ،  $f(x) = x^3 + 3x^2 + x - 4$  ، نلاحظ أن  $\deg(f) > \deg(g)$  بإجراء طريقة مشابهة للقسمة المطولة على حقل الأعداد الحقيقية :

$\begin{array}{r} x^2 \\ x+1 \overline{) x^3 + 3x^2 + x - 4} \end{array}$	<p>نقسم الحد الأول من المقسوم على الحد الأول من المقسوم عليه ( نطرح الأسس )  <math>x^3 \div x = x^2</math>  ونكتب الناتج في مكان خارج القسمة</p>
$\begin{array}{r} x^2 \\ x+1 \overline{) x^3 + 3x^2 + x - 4} \\ x^3 + x^2 \phantom{- 4} \end{array}$	<p>نضرب خارج القسمة <math>(x^2)</math> في المقسوم عليه <math>(x+1)</math>  <math>x^2(x+1) = x^3 + x^2</math> ونكتب حاصل الضرب تحت المقسوم</p>
$\begin{array}{r} x^2 \\ x+1 \overline{) x^3 + 3x^2 + x - 4} \\ x^3 + x^2 \phantom{- 4} \\ \hline 2x^2 + x - 4 \end{array}$	<p>نطرح حاصل الضرب السابق من المقسوم ونكتب الناتج</p>
$\begin{array}{r} x^2 + 2x - 1 \\ x+1 \overline{) x^3 + 3x^2 + x - 4} \\ x^3 + x^2 \phantom{- 4} \\ \hline 2x^2 + x - 4 \\ 2x^2 + 2x \phantom{- 4} \\ \hline -x - 4 \\ -x - 1 \\ \hline -3 \end{array}$ <p>خارج القسمة <math>q(x) \rightarrow x^2 + 2x - 1</math>  الباقي <math>r(x) \rightarrow -3</math></p>	<p>نقسم الحد الأول من ناتج الطرح على الحد الأول من المقسوم عليه  <math>2x^2 \div x = 2x</math>  ثم نضرب <math>(2x)</math> في المقسوم عليه  نطرح حاصل الضرب السابق من الذي قبله ونكتب الناتج  نقسم الحد الأول من ناتج الطرح على الحد الأول من المقسوم عليه  <math>-x \div x = -1</math>  ثم نضرب <math>(-1)</math> في المقسوم عليه  نطرح حاصل الضرب السابق من الذي قبله ونكتب الناتج حتى يكون ناتج درجة الباقي أقل من درجة المقسوم عليه</p>

من القسمة نجد أن:

خارج القسمة  $q(x) = x^2 + 2x - 1$  ، الباقي  $r(x) = -3$  ،



خطوات القسمة المطولة لكثيرات الحدود :

- ١) نرتب المقسوم والمقسوم عليه ترتيباً تنازلياً طبقاً للأسس
- ٢) نقسم الحد الأول من المقسوم على الحد الأول من المقسوم عليه ونكتب الناتج في مكان خارج القسمة
- ٣) نضرب خارج القسمة في المقسوم عليه ونكتب الناتج تحت المقسوم مع مراعاة ترتيب الحدود
- ٤) نطرح حاصل الضرب السابق من المقسوم ( نغير إشارته ونجمعها جمعاً جبرياً )
- ٥) نكرر الخطوات السابقة إلى أن تصبح درجة باقي القسمة اقل من درجة المقسوم عليه

مثال (٢)

أوجد خارج قسمة وباقي  
الحل :

$$g(x) = x^2 + 2 \quad \text{على} \quad f(x) = x^4 + 5x^3 + 3x^2 + 10x + 2$$

$$\begin{array}{r} \text{خارج القسمة} \quad q(x) \rightarrow x^2 + 5x + 1 \\ x^2 + 2 \overline{) x^4 + 5x^3 + 3x^2 + 10x + 2} \\ \underline{x^4 + 2x^2} \phantom{+ 10x + 2} \\ 5x^3 + x^2 + 10x + 2 \\ \underline{5x^3 + 10x} \phantom{+ 2} \\ x^2 + 2 \\ \underline{x^2 + 2} \\ 0 \end{array}$$

$r(x) \rightarrow 0$  الباقي

من القسمة نجد أن:

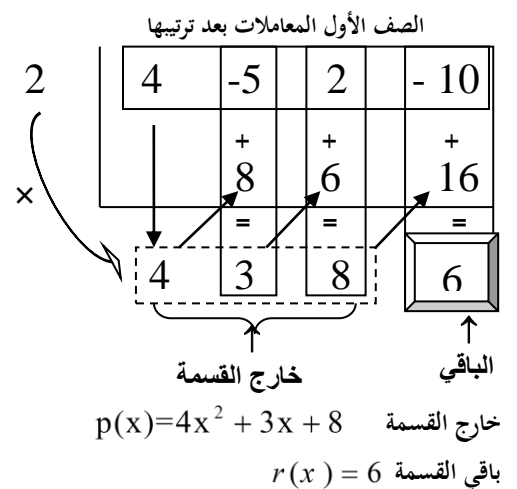
خارج القسمة  $q(x) = x^2 + 5x + 1$  ، الباقي  $r(x) = 0$  ،  $\therefore f(x)$  تقبل القسمة  $g(x)$   
يمكن كتابة  $f(x) = g(x) \cdot q(x) \Rightarrow f(x) = (x^2 + 2)(x^2 + 5x + 1)$  على الصورة :

قسمة كثيرات الحدود بالطريقة التركيبية طريقة ( هونر )

طريقة مبسطة لقسمة كثيرة  $f(x)$  حدود من الدرجة  $n$  على  $g(x) = x - a$  نوضحها بالمثال التالي :

مثال : أوجد خارج القسمة والباقي عند قسمة  $f(x) = 4x^3 - 5x^2 + 2x - 10$  على  $g(x) = x - 2$

(١) الصف الأول من قسمين الأول نضع جذر  $g(x) = x - 2$  وجذرها يساوي 2  
القسم الثاني من الصف الأول نرتب فيه المعاملات ابتداء من الدرجة الكبرى إلى الصغرى  
مع ملاحظة أي حد غير موجود معاملته يساوي صفر .  
(٢) أول معامل دائما لـ  $f(x)$  ننزله للصف الثالث ثم نضربه في جذر  $g(x)$  وهو 2  
فيكون الناتج 8 ونضعه أسفل المعامل الثاني وهو -5 ثم نجمع  $-5 + 8 = 3$   
ونضعه في الصف الثالث .  
ثم نكرر نفس العملية فنضرب  $2 \times 3 = 6$  ونضعه تحت المعامل الثالث وهو 2 فنجمع  
 $2 + 6 = 8$  ونضعه في الصف الثالث  
أيضا نفس العملية فنضرب  $2 \times 8 = 16$  ونضعه أسفل -10  
في الصف الثاني فنجمع  $-10 + 16 = 6$  ونضعه في الصف الثالث وبالتالي انتهت العملية  
الآن : الصف الثالث يتكون من قسمين القيمة الأخيرة 6 تمثل الباقي وبقية القيم تمثل  
معاملات خارج القسمة  
حيث خارج القسمة تقل درجته عن المقسوم بواحد ويتم توزيع المعاملات تنازلياً  
وهي : 4, 3, 8 أول قيمة معامل  $x^2$  وهي 4 ثاني قيمة معامل  $x$  وهي 3  
وثالث قيمة الحد الثابت



مثال (٢)

أوجد خارج القسمة والباقي عند قسمة  $f(x)$  على  $g(x)$ :

$$f(x) = x^4 - x^2 - x - 10, \quad g(x) = x - 2 \quad (٢) \quad , \quad f(x) = 3x^3 + 4x + 5, \quad g(x) = x + 3 \quad (١)$$

الحل :

$$f(x) = 3x^3 + 4x + 5, \quad g(x) = x + 3 \quad (١)$$

يمكن كتابة  $f(x)$  على الصورة :  $f(x) = 3x^3 + 0(x^2) + 4x + 5$

∴ معاملات  $f(x)$  : 3 , 0 , 4 , 5

$$g(x) = x + 3 \Rightarrow g(x) = 0 \Rightarrow x + 3 = 0 \Rightarrow x = -3$$

∴ جذر  $g(x)$  : -3

∴ خارج القسمة :  $p(x) = 3x^2 - 9x + 31$

∴ الباقي :  $r(x) = -88$

$$\begin{array}{r} -3 \overline{) 3 \phantom{0} 0 \phantom{4} 5} \\ \underline{3 \phantom{0} -9 \phantom{27} -93} \\ 31 \phantom{-88} \end{array}$$

↑                      ↑  
خارج القسمة           الباقي

$$f(x) = x^4 - x^2 - x - 10, \quad g(x) = x - 2 \quad (٢)$$

يمكن كتابة  $f(x)$  على الصورة :  $f(x) = x^4 + 0(x^3) - x^2 - x - 10$

∴ معاملات  $f(x)$  : 1 , 0 , -1 , -1 , -10

$$g(x) = x - 2 \Rightarrow g(x) = 0 \Rightarrow x - 2 = 0 \Rightarrow x = 2$$

∴ جذر  $g(x)$  : 2

∴ خارج القسمة :  $p(x) = x^3 + 2x^2 + 3x + 5$

∴ الباقي :  $r(x) = 0$

أي أن  $f(x)$  تقبل القسمة على  $g(x)$

$$\begin{array}{r} 2 \overline{) 1 \phantom{0} 0 \phantom{-1} -1 \phantom{-10}} \\ \underline{1 \phantom{0} 2 \phantom{4} 6 \phantom{10}} \\ 0 \end{array}$$

↑                      ↑  
خارج القسمة           الباقي

نظرية الباقي

عند قسمة كثيرة حدود  $f(x)$  على  $g(x) = x - a$  حيث  $a \in \mathbb{R}$  فإن باقي القسمة  $r(x)$  هو دالة ثابتة وقيمتها تساوي  $f(a)$

وهي قيمة  $f(x)$  عند  $x = a$

فمثلاً :

$$f(2) = (2)^3 - 5(2) + 8 = 6 \quad \text{هو} \quad g(x) = x - 2 \quad \text{على} \quad f(x) = x^3 - 5x + 8 \quad \text{باقي قسمة}$$

نظرية العوامل

تكون كثيرة الحدود  $f(x)$  تقبل القسمة على  $g(x) = x - a$  حيث  $a \in \mathbb{R}$  إذا كان باقي القسمة  $f(a) = 0$

فمثلاً :

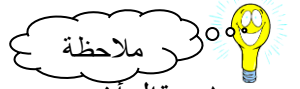
$$f(-3) = (-3)^3 + 4(-3)^2 - 9 = 0 \quad \text{لأن باقي القسمة} \quad g(x) = x + 3 \quad \text{تقبل القسمة على} \quad f(x) = x^3 + 4x^2 - 9$$

النظرية الأساسية في الجبر



تنص النظرية الأساسية للجبر على وجود جذر لكل كثيرة حدود ، ويمكن البرهنة على أن كثيرة حدود من الدرجة  $n$  لها على الأكثر  $n$  من الجذور المختلفة .

فمثلاً :  $f(x) = x^5 + 3x - 2$  لها 5 جذور ،  $f(x) = 7x^4 + 2x^2 - 3x + 6$  لها 4 جذور ،  $f(x) = -4x^3 + 3x^2 + 5$  لها 3 جذور



(١) يقال أن  $a$  هو (صفر أو جذر) لكثيرة الحدود  $f(x)$  إذا كان  $f(a)=0$  ، وتكون  $f(x)$  تقبل القسمة على  $(x - a)$  أي أن  $a$  لكثيرة الحدود  $f(x)$   $f(a)=0$   $f(x)$  تقبل القسمة على  $(x - a)$

فمثلاً : جذري كثيرة الحدود  $f(x) = x^2 - 5x + 6 = (x - 2)(x - 3)$  هما 2,3 وذلك لأن :

$$f(2) = 2^2 - 5(2) + 6 = 0 \quad \text{والدالة } f(x) \text{ تقبل القسمة على } (x - 2)$$

$$f(3) = 3^2 - 5(3) + 6 = 0 \quad \text{والدالة } f(x) \text{ تقبل القسمة على } (x - 3)$$

(٢) يسمى  $a$  جذر بسيطاً لكثيرة الحدود  $f(x)$  إذا كان  $f(x)$  تقبل القسمة على  $(x - a)$  ولا تقبل القسمة على  $(x - a)^2$

فمثلاً : في المثال السابق 2 جذر بسيطاً لكثيرة الحدود  $f(x)$  وكذلك 3 جذر بسيطاً لكثيرة الحدود  $f(x)$

(٣) يسمى  $a$  جذر مكرر مرتين لكثيرة الحدود  $f(x)$  إذا كان  $f(x)$  تقبل القسمة على  $(x - a)^2$  ولا تقبل القسمة على  $(x - a)^3$

$$f(x) = x^3 + 3x^2 - 4 = (x + 2)(x + 2)(x - 1) = (x + 2)^2(x - 1) \quad \text{فمثلاً :}$$

(-2) جذر مكرر مرتين للدالة  $f(x)$  بينما 1 جذر بسيط

(٤) يسمى  $a$  جذر مكرر  $n$  مرة إذا كانت  $f(x)$  تقبل القسمة على  $(x - a)^n$  ولا تقبل القسمة على  $(x - a)^{n+1}$

(٥) إذا كانت  $a, b, c, d, \dots, r$  جذور لكثيرة الحدود فإنه  $f(x)$  تقبل القسمة على  $(x - r)$  ..  $(x - a)(x - b)(x - c)(x - d) \dots (x - r)$

$$f(x) = a_n (x - a)(x - b)(x - c)(x - d) \dots (x - r)$$

فمثلاً :  $1, 2, -2$  جذور لكثيرة الحدود  $f(x)$  فإن  $f(x)$  تقبل القسمة على  $(x + 2)(x - 2)(x - 1)$

(٦) إذا كانت  $f(x)$  (دالة كثيرة الحدود الحقيقية) وكان  $(a + ib)$  جذر لكثيرة الحدود  $f(x)$  فإن مرافقه  $(a - ib)$  هو جذر

لكثيرة الحدود أي أن  $f(x)$  تقبل القسمة على  $(x - (a + ib))$  وكذلك  $(x - (a - ib))$

فمثلاً : في دالة كثيرة الحدود  $f(x) = x^3 - 5x^2 + 17x - 13$  نجد لها جذر حقيقي وهو (1) وجذرين مركبين مترافقين

$$2 + 3i \quad \text{و} \quad 2 - 3i$$

نظرية الجذر النسبي :

إذا كانت  $f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$  دالة كثيرة حدود معاملات حدودها أعداد صحيحة ،

فإن أي صفر نسبي للدالة  $f(x)$  سيكون على صورة العدد النسبي  $\frac{p}{q}$  في أبسط صورة حيث  $p$  أحد عوامل الحد الثابت ،

$q$  أحد عوامل المعامل الرئيسي

فمثلاً : العدد النسبي  $\frac{3}{2}$  جذر للدالة  $f(x) = 2x^3 + 3x^2 + 17x + 12$  حيث 3 أحد عوامل العدد 12 ، 2 أحد عوامل العدد 2

نظرية الجذر الصحيح :

إذا كانت  $f(x) = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \dots + a_1x + a_0$  دالة كثيرة حدود معاملات حدودها أعداد صحيحة ،  
والمعامل الرئيسي يساوي 1 ، وحدها الثابت لا يساوي صفراً ، فإن أي صفر للدالة  $f(x)$  يجب أن يكون أحد عوامل الحد الثابت .  
فمثلاً : العددين 3 ، -2 جذري الدالة  $f(x) = x^2 - x - 6$  وهما من عوامل الحد الثابت 6

#### قاعدة ديكرت للاشارات :

- إذا كانت  $P(x) = a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + \dots + a_1x + a_0$  كثيرة حدود ذات معاملات حقيقية فإن :
- عدد الأصفار الحقيقية الموجبة لـ  $P(x)$  سيكون إما مساوياً لعدد التغيرات في إشارة  $P(x)$  أو أقل من ذلك بعدد زوجي
  - عدد الأصفار الحقيقية السالبة لـ  $P(x)$  سيكون إما مساوياً لعدد التغيرات في إشارة  $P(-x)$  أو أقل من ذلك بعدد زوجي

فمثلاً : كثيرة الحدود  $P(x) = x^5 + 4x^4 - x^3 - 2x^2 + 3x - 1$  لها 3 أو 1 جذر حقيقي موجب  
وكذلك نجد أن  $P(-x) = -x^5 + 4x^4 + x^3 - 2x^2 - 3x - 1$  فان لها إما 2 أو 0 صفر حقيقي سالب.

من الحقائق الهامة عن كثيرة الحدود  $P(x)$  :

- $P(0) = a_n \cdot 0^n + \dots + a_1 \cdot 0 + a_0 = a_0$  :  $P(0)$  هو الحد الثابت في  $P(x)$
- $P(1) = a_n + \dots + a_1 + a_0$  :  $P(1)$  هو مجموع معاملات  $P(x)$

#### بعض طرق إيجاد جذور الدالة

أ ) كثيرة الحدود من الدرجة الأولى  $f(x) = ax + b$  نضع  $f(x) = 0$  ونبحث فيها نوجد قيمة  $x$  التي تمثل الجذر الوحيد للدالة  
ب ) كثيرة الحدود من الدرجة الثانية  $f(x) = ax^2 + bx + c$  يمكن الحصول على جذورها بالتحليل أو بالقانون العام  
ويمكن إيجاد قيمة  $x$  باستخدام القانون العام التالي :  $x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$  حيث  $a \neq 0$  فإذا كان :

المميز :  $\Delta = b^2 - 4ac > 0$  للمعادلة جذران حقيقيان مختلفان

المميز :  $\Delta = b^2 - 4ac = 0$  للمعادلة جذران حقيقيان متساويان

المميز :  $\Delta = b^2 - 4ac < 0$  للمعادلة جذران مركبان مترافقان

ج ) بعض كثيرات الحدود من الدرجة الثالثة يمكن حلها بالطريقة التالية :

نوجد قواسم ( عوامل ) الحد المطلق ( الحد الثابت ) للدالة  $f(x)$

❖ نعوض بكل من هذه القواسم في الدالة ، والقاسم الذي يجعل الدالة  $f(x)$  تساوي صفر هو جذر الدالة وليكن  $a$

❖ وبالتالي يكون  $(x - a)$  قاسم من قواسم الدالة  $f(x)$

❖ نقسم الدالة  $f(x)$  على ذلك القاسم باستخدام القسمة التركيبية فيكون خارج القسمة دالة من الدرجة الثانية وهو قاسماً

للدالة  $f(x)$

❖ نوجد قواسم خارج القسمة باستخدام التحليل أو القانون العام لإيجاد جذورها فيكون هما أيضاً جذور الدالة  $f(x)$

مثال :

$$f(x) = x^3 + x^2 - 10x + 8 \text{ اوجد جذور}$$

الحل :

الحد الثابت : 8

قواسم الحد الثابت (عوامل الحد الثابت) :  $\pm 1, \pm 2, \pm 4, \pm 8$

نحاول بالتجربة نوجد  $f(\pm 1), f(\pm 2), f(\pm 4), f(\pm 8)$  لإيجاد احد جذور الدالة

$$\text{نوجد } f(1) = 1^3 + 1^2 - 10(1) + 8 = 0$$

∴ العدد 1 جذر لكثيرة الحدود  $f(x)$  وبالتالي  $f(x)$  تقبل القسمة على  $x - 1$

نوجد القواسم الأخرى للدالة  $f(x)$  وذلك بقسمة  $f(x)$  على  $x - 1$  باستخدام القسمة التركيبية

$$\begin{array}{r|rrrr} 1 & 1 & 1 & -10 & 8 \\ & & 1 & 2 & -8 \\ \hline & 1 & 2 & -8 & 0 \end{array}$$

من القسمة نجد أن : خارج القسمة  $q(x) = x^2 + 2x - 8$

$$\therefore f(x) = (x - 1)(x^2 + 2x - 8) = (x - 1)(x - 2)(x + 4)$$

∴ جذور  $f(x)$  : 1, 2, -4



(١) عند قسمة كثيرة الحدود  $f(x)$  على  $(2x - 4)$  يكون الباقي 7 وعند قسمته على  $(3x - 7)$  يكون الباقي 11

أوجد باقي قسمة  $f(x)$  على  $(2x - 4)(3x - 7)$

الحل :

∴ باقي قسمة  $f(x)$  على  $(2x - 4)$  يكون الباقي 7 ∴ من نظرية الباقي  $f(2) = 7$  ..... (١)

∴ باقي قسمة  $f(x)$  على  $(3x - 7)$  يكون الباقي 11 ∴ من نظرية الباقي  $f(\frac{7}{3}) = 11$  ..... (٢)

المطلوب باقي قسمة  $f(x)$  على  $(2x - 4)(3x - 7)$  ؟؟؟

نلاحظ باقي القسمة لابد أن يكون أقل من درجة المقسوم عليه أي أن أقل من الدرجة الثانية

∴ لابد أن يكون من الدرجة الأولى أو عدد ثابت وليكن  $r(x) = ax + b$

ومن المعروف يمكن كتابة أي كثيرة حدود بدلالة المقسوم عليه  $g(x)$  وخارج القسمة  $q(x)$  والباقي  $r(x)$  على الصورة :

$$f(x) = g(x) \cdot q(x) + r(x) \text{ أي أن } f(x) = (2x - 4)(3x - 7)q(x) + ax + b$$

من المعادلتين (١) و (٢)

$$f(2) = (2(2) - 4)(3(2) - 7) \cdot q(2) + a(2) + b \Rightarrow f(2) = 2a + b \Rightarrow 2a + b = 7$$

$$f\left(\frac{7}{3}\right) = \left(2\left(\frac{7}{3}\right) - 4\right)\left(3\left(\frac{7}{3}\right) - 7\right) \cdot q\left(\frac{7}{3}\right) + a\left(\frac{7}{3}\right) + b \Rightarrow f\left(\frac{7}{3}\right) = \left(\frac{7}{3}\right)a + b \Rightarrow \frac{7}{3}a + b = 11 \Rightarrow 7a + 3b = 33$$

بحل النظام :  $2a+b=7$  ،  $7a+3b=33$

$$\begin{cases} -6a + -3b = -21 \\ 7a + 3b = 33 \end{cases} \Rightarrow a = 12 , 24 + b = 7 \Rightarrow b = -17$$

∴ الباقي  $r(x) = 12x - 17$

(٢) إذا كانت المتطابقة  $(1+x+x^2)^n = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_{2n}x^{2n}$  في  $x$  ،

أوجد المجموع  $a_0 + a_2 + a_4 + \dots + a_{2n}$  بدلالة  $n$

الحل :

من المعطيات :  $(1+x+x^2)^n = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_{2n}x^{2n}$

بوضع  $x = 1$  :

$$(1) \dots (1+1+1^2)^n = a_0 + a_1(1) + a_2(1)^2 + a_3(1)^3 + \dots + a_{2n}(1)^{2n} \Rightarrow 3^n = a_0 + a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_{2n}$$

بوضع  $x = -1$  :

$$(2) \dots (1-1+(-1)^2)^n = a_0 + a_1(-1) + a_2(-1)^2 + a_3(-1)^3 + \dots + a_{2n}(-1)^{2n} \Rightarrow 1 = a_0 - a_1 + a_2 - a_3 + \dots + a_{2n}$$

بجمع المعادلتين (١) و (٢)

$$3^n + 1 = 2(a_0 + a_2 + a_4 + \dots + a_{2n}) \Rightarrow a_0 + a_2 + a_4 + \dots + a_{2n} = \frac{3^n + 1}{2}$$

(٣) احسب  $(2-r)(2-s)(2-t)$  بحيث  $r, s, t$  جذور لكثيرة الحدود  $f(x) = 2x^3 - 4x^2 + 3x - 9$

الحل :

∴  $r, s, t$  جذور للدالة  $f(x) = 2x^3 - 4x^2 + 3x - 9$

∴ يمكن كتابة الدالة  $f(x)$  على الصورة :  $f(x) = 2(x-r)(x-s)(x-t)$

بوضع  $x = 2$  :

$$f(2) = 2(2)^3 - 4(2)^2 + 3(2) - 9 = -3 \text{ ولكن } f(2) = 2(2-r)(2-s)(2-t)$$

$$(2-r)(2-s)(2-t) = \frac{-3}{2} \text{ وبالتالي } -3 = 2(2-r)(2-s)(2-t) \text{ ∴}$$

(٤) أوجد قيمة  $a$  الصحيحة بحيث يكون لكثيرة الحدود  $8891x^2 + ax + 1988 = 0$  ،  $1988x^2 + ax + 8891 = 0$

جذر مشترك

$$1988x^2 + ax + 8891 = 0 \dots (1)$$

بطرح المعادلتين

$$8891x^2 + ax + 1988 = 0 \dots (2)$$

الحل :

$$(1988 - 8891)x^2 + (8891 - 1988) = 0 \Rightarrow -(8891 - 1988)x^2 = -(8891 - 1988)$$

$$\Rightarrow x^2 = \frac{-(8891 - 1988)}{-(8891 - 1988)} = 1 \Rightarrow x = \pm 1$$

بالتعويض  $x = 1$  في المعادلة (1)  $1988 + a + 8891 = 0 \Rightarrow a = -10879$



(١) حلل المقادير التالية :

أ)  $X^3 - 19X - 30$  ب)  $X^3 + 9X^2 + 26X + 24$  ج)  $X^4 - 10X^3 + 35X^2 - 50X + 24$

(٢) أوجد كثيرة الحدود  $P(x)$  ومن الدرجة الرابعة ولها الجذور  $\pm 3, \pm \sqrt{5}$  ومعاملها القائد 7 .

(٣) إذا كان  $P(x)$  كثيرة حدود في  $x$  حيث :

$$x^{23} + 23x^{17} - 18x^{16} - 24x^{15} + 108x^{14} = (x^4 - 3x^2 - 2x + 9) \cdot P(x)$$

أوجد مجموع معاملات  $p(x)$

(٤) إذا كانت  $(3x-1)^7 = a_7x^7 + a_6x^6 + \dots + a_1x + a_0$  أوجد قيمة  $a_7 + a_6 + \dots + a_1 + a_0$

(٥) إذا كان  $(x^2 + 2x - 8)(x - 3) - (x - 2)(x^2 + 5x + 4) = ax^3 + bx^2 + cx + d$  ، أوجد  $a + b + c + d$  .

(٦) أوجد مجموع المعاملات لكثيرة الحدود التالية :  $p(x) = (1 - 3x + 3x^2)^{10} (1 + 3x - 3x^2)^{11}$

(٧) عند قسمة كثيرة الحدود  $f(x)$  على  $(x-19)$  يكون الباقي 99 وعند قسمته على  $(x-99)$  يكون الباقي 19 أوجد باقي قسمة  $f(x)$  على  $(x-19)(x-99)$

(٨) إذا كانت  $x^4 + 4x^3 + 6px^2 + 4qx + r$  تقبل القسمة بدون باقي على  $x^3 + 3x^2 + 9x + 3$  فما قيمة  $(p+q)r$  ؟

(٩) حل المعادلة التالية :  $2^{6x} + 2^{3x} + 5 = 11$

(١٠) إذا كانت  $f(x) = ax^7 + bx^5 + cx^3 + dx - 5$  و  $f(2) = -2$  فأوجد  $f(-2)$

(١١) إذا كانت  $r$  حلاً للمعادلة  $x^6 - 2 = 0$  فأوجد قيمة  $(r-1)(r^{12} + r^{13} + \dots + r^{41})$

(١٢) أثبت أن العدد 1 جذر مكرر مرتين لكثيرة الحدود  $f(x) = x^n - n(x-1) - 1$

## علاقات فيتا

### علاقات فيتا

هي العلاقة التي تربط بين جذور كثيرة الحدود  $f(x)$  ومعاملاتها حيث يقابل المعامل مجموع متمائل لجذور كثيرة الحدود . وفي البداية سوف نناقش حالات خاصة لها ثم نستنتج منها الصورة العامة

(١) علاقة فيتا لكثيرة حدود من الدرجة الثانية :

إذا كانت  $r_1, r_2$  جذري كثيرة الحدود : (1) .....  $f(x) = ax^2 + bx + c$  فإنه يمكن كتابة  $f(x)$  على الصورة :

$$f(x) = a(x - r_1)(x - r_2) = ax^2 - axr_1 - axr_2 + ar_1r_2 = ax^2 - a(r_1 + r_2)x + ar_1r_2 \quad \dots\dots(2)$$

وبمقارنة المعاملات في المعادلتين (2) و (1) نجد أن :

$$-a(r_1 + r_2) = b \Rightarrow r_1 + r_2 = -\frac{b}{a} \quad \text{حاصل جمع الجذرين}$$

$$ar_1r_2 = c \Rightarrow r_1r_2 = \frac{c}{a} \quad \text{حاصل ضرب الجذرين}$$

فمثلاً :

2, 3 جذري كثيرة الحدود  $f(x) = (x-2)(x-3) = x^2 - 5x + 6$  نلاحظ :  
حاصل جمع الجذرين  $2 + 3 = -(-5) = 5$  ، حاصل ضرب الجذرين  $2 \cdot 3 = 6$

(٢) علاقة فيتا لكثيرة حدود من الدرجة الثالثة :

إذا كانت  $r_1, r_2, r_3$  جذور كثيرة الحدود : (1) .....  $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$  فإنه يمكن كتابة  $f(x)$  على الصورة :

$$f(x) = a(x - r_1)(x - r_2)(x - r_3) = ax^3 - a(r_1 + r_2 + r_3)x^2 + a(r_1r_2 + r_1r_3 + r_2r_3)x - ar_1r_2r_3 \quad \dots\dots(2)$$

وبمقارنة المعاملات في المعادلتين (2) و (1) نجد أن :

$$-a(r_1 + r_2 + r_3) = b \Rightarrow r_1 + r_2 + r_3 = -\frac{b}{a}$$

$$a(r_1r_2 + r_1r_3 + r_2r_3) = c \Rightarrow r_1r_2 + r_1r_3 + r_2r_3 = \frac{c}{a} \quad \text{حاصل جمع الجذور مشى مشى}$$

$$-ar_1r_2r_3 = d \Rightarrow r_1r_2r_3 = -\frac{d}{a} \quad \text{حاصل ضرب الجذور}$$

فمثلاً :

3, 2, 1 جذور كثيرة الحدود  $f(x) = (x-1)(x-2)(x-3) = x^3 - 6x^2 + 11x - 6$  نلاحظ :

حاصل جمع الجذور  $1+2+3 = -(-6) = 6$  ، حاصل جمع الجذور متى متى  $1 \cdot 2 + 1 \cdot 3 + 2 \cdot 3 = 6$

حاصل ضرب الجذرين  $1 \cdot 2 \cdot 3 = -(-6) = 6$

وبصورة عامة .....

(٣) علاقة فيتا لكثيرة حدود من الدرجة  $n$ :

لتكن  $r_1, r_2, r_3, \dots, r_n$  جذور كثيرة الحدود :  $f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$

فإنه يمكن كتابة  $f(x)$  على الصورة :

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0 = a_n (x - r_1)(x - r_2)(x - r_3) \dots (x - r_n)$$

$$= a_n x^n - a_n (r_1 + r_2 + r_3 + \dots + r_n) x^{n-1} + a_n (r_1 r_2 + r_1 r_3 + \dots + r_{n-1} r_n) x^{n-2} + \dots + (-1)^n a_n r_1 r_2 r_3 \dots r_n$$

وبمقارنة المعاملات نجد أن :

$$r_1 + r_2 + r_3 + \dots + r_n = -\frac{a_{n-1}}{a_n} \quad \text{حاصل جمع الجذور}$$

$$r_1 r_2 + r_1 r_3 + \dots + r_{n-1} r_n = \frac{a_{n-2}}{a_n} \quad \text{حاصل جمع الجذور متى متى}$$

$$r_1 r_2 r_3 + r_1 r_2 r_4 + \dots + r_{n-2} r_{n-1} r_n = -\frac{a_{n-3}}{a_n} \quad \text{حاصل جمع الجذور ثلاثة ثلاثة ثلاثة}$$

وهكذا .....

$$r_1 r_2 \dots r_{n-1} r_n = (-1)^n \frac{a_0}{a_n} \quad \text{حاصل ضرب الجذور}$$

$$\sum_{1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_k \leq n} r_{i_1} r_{i_2} \dots r_{i_k} = (-1)^k \frac{a_{n-k}}{a_n} : \text{ يمكن كتابة هذه العلاقات على الصورة :}$$

مجموع مقلوبات جذور كثيرة الحدود

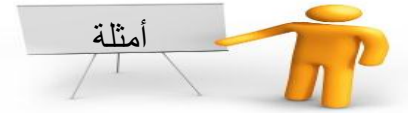
إذا كانت كثيرة الحدود  $f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$  من الدرجة  $n$  لها الجذور  $r_1, r_2, r_3, \dots, r_n$

فإن كثيرة الحدود  $f(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \dots + a_{n-1} x + a_n$  لها الجذور :  $\frac{1}{r_1}, \frac{1}{r_2}, \frac{1}{r_3}, \dots, \frac{1}{r_n}$

فمثلاً :

3, 2 جذري كثيرة الحدود  $f(x) = (x-2)(x-3) = x^2 - 5x + 6$

فإن  $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}$  جذري كثيرة الحدود  $f(x) = \left(x - \frac{1}{2}\right)\left(x - \frac{1}{3}\right) = 6x - 5x + 1$



(١) إذا كان  $a, b$  جذور لكثيرة الحدود  $2x^2 - 3x + m = 0$  وكان  $a = 2b$  أوجد قيمة  $m$

الحل :

$$2x^2 - 3x + m = 0 \xRightarrow{\text{بالقسمة على 2}} x^2 - \frac{3}{2}x + \frac{m}{2} = 0$$

$$\text{حاصل جمع الجذرين} \quad a + b = \frac{3}{2} \quad \xRightarrow{a=2b} \quad 2b + b = \frac{3}{2} \Rightarrow 3b = \frac{3}{2} \Rightarrow b = \frac{1}{2}$$

$$\therefore a = 2b \quad \xRightarrow{a=2b} \quad a = 2\left(\frac{1}{2}\right) = 1$$

$$\text{حاصل ضرب الجذرين} \quad \therefore ab = \frac{m}{2} \quad \xRightarrow{a=1, b=\frac{1}{2}} \quad 1\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{m}{2} \Rightarrow m = 1$$

(٢) إذا كان  $f(x) = x^3 - 5x^2 + 12x - 19$  بحيث  $a, b, c$  جذور  $f(x)$  أوجد قيمة :

$$\frac{1}{ab} + \frac{1}{bc} + \frac{1}{ca}, \quad a^2 + b^2 + c^2$$

الحل :

$$\therefore f(x) = x^3 - 5x^2 + 12x - 19 \Rightarrow \begin{cases} a + b + c = 5 & \dots(1) \\ ab + ac + cb = 12 & \dots(2) \\ abc = 19 & \dots(3) \end{cases}$$

$$\frac{1}{ab} + \frac{1}{bc} + \frac{1}{ca} = \frac{c}{abc} + \frac{a}{abc} + \frac{b}{abc} = \frac{a + b + c}{abc}$$

نوجد المقامات

$$\therefore \frac{1}{ab} + \frac{1}{bc} + \frac{1}{ca} = \frac{5}{19}$$

(٣) إذا كان حاصل ضرب ثلاثة جذور لكثيرة الحدود  $f(x) = x^4 - 9x^3 + 21x^2 + x - 30$  يساوي  $-10$  فما هو الجذر الرابع ؟

الحل :

لنفرض الجذور هي  $a, b, c, d$  حيث  $a \cdot b \cdot c = -10$  من علاقة فيتا

$$(a + b + c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2(ab + ac + bc)$$

$$\therefore (5)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2(12) \Rightarrow a^2 + b^2 + c^2 = 25 - 24 = 1$$



$$a \cdot b \cdot c \cdot d = -30 \quad a \cdot b \cdot c = -10 \quad \Rightarrow \quad -10d = -30 \Rightarrow d = 3$$

(٤) أوجد حل المعادلة  $27x^3 + 42x^2 - 28x - 8 = 0$  التي جذورها متتابعة هندسية  
الحل :

$$27x^3 + 42x^2 - 28x - 8 = 0 \Rightarrow x^3 + \frac{42}{27}x^2 - \frac{28}{27}x - \frac{8}{27} = 0$$

لنفرض أن جذور المعادلة الثلاثة على الصورة :  $\frac{a}{r}$  ,  $a$  ,  $ar$

$$\begin{aligned} \therefore x^3 + \frac{42}{27}x^2 - \frac{28}{27}x - \frac{8}{27} = 0 &\Rightarrow \begin{cases} \frac{a}{r} + a + ar = -\frac{42}{27} & \dots(1) \\ \frac{a}{r} \cdot a + \frac{a}{r} \cdot ar + a \cdot ar = \frac{a^2}{r} + a^2 + a^2r = -\frac{28}{27} & \dots(2) \\ \frac{a}{r} + a + ar = -\frac{42}{27} & \dots(3) \end{cases} \\ \text{المعادلة} &\Rightarrow \frac{a}{r} + a + ar = -\frac{42}{27} \Rightarrow \frac{2a}{3r} + a + \frac{2}{3}ar = -\frac{14}{9} \Rightarrow \frac{2}{3}r = -\frac{14}{9} \Rightarrow r = -\frac{7}{3} \end{aligned}$$

(1) نجد أن :

بالمضرب في  $\frac{9r}{2}$  والاختصار

$$\frac{9r}{2} \cdot \frac{2}{3r} + \frac{9r}{2} \cdot \frac{2}{3} + \frac{9r}{2} \cdot \frac{2}{3}r = -\frac{9r}{2} \cdot \frac{14}{9} \Rightarrow 3 + 3r + 3r^2 = -7r$$

$$3r^2 + 10r + 3 = 0 \Rightarrow (3r + 1)(r + 3) = 0$$

$$3r + 1 = 0 \Rightarrow r = -\frac{1}{3}$$

$$r + 3 = 0 \Rightarrow r = -3$$

أما  $3r + 1 = 0 \Rightarrow r = -\frac{1}{3}$  أو  
عندما  $a = \frac{2}{3}, r = -\frac{1}{3}$  جذور المعادلة  $\frac{a}{r}$  ,  $a$  ,  $ar$  على الصورة

$$-2, \frac{2}{3}, -\frac{2}{9}$$

عندما  $a = \frac{2}{3}, r = -3$  جذور المعادلة  $\frac{a}{r}$  ,  $a$  ,  $ar$  على الصورة :  $-\frac{2}{9}, \frac{2}{3}, -2$

أي أن جذور المعادلة هي :  $-\frac{2}{9}, \frac{2}{3}, -2$



(١) أوجد حاصل ضرب الجذور لكثيرة الحدود :  $50x^{50} + 49x^{49} + \dots + x + 1 = 0$

(٢) إذا كان  $a, b$  هما جذرا المعادلة  $x^2 - 5x + 9 = 0$  فما قيمة  $(a-1)(b-1)$  ؟

(٣) أوجد حل المعادلة  $x^3 - 6x^2 + 11x - 6 = 0$  التي جذورها متتالية حسابية

(٤) أوجد كثيرة الحدود من الدرجة الثالثة التي جذورها الأعداد  $a, b, c$  حيث :

$$abc = -64$$

$$a^2 + b^2 + c^2 = 84$$

$$\frac{1}{ab} + \frac{1}{bc} + \frac{1}{ca} = \frac{-3}{32}$$

(٥) إذا كانت الأعداد  $(\alpha, \beta, \gamma)$  جذور للمعادلة  $x^3 + 3x^2 - 24x + 1 = 0$  فأثبت أن :  $\sqrt[3]{\alpha} + \sqrt[3]{\beta} + \sqrt[3]{\gamma} = 0$

(٦) أوجد مجموع مقلوبات جذور المعادلة  $x^2 + 1 + \frac{1}{x} = 0$

(٧) إذا كان  $a, b$  هما جذرا المعادلة  $x^2 + 3x + 1 = 0$  احسب  $\left(\frac{a}{b+1}\right)^2 + \left(\frac{b}{a+1}\right)^2$

(٨) إذا كانت  $a, b, c$  جذور المعادلة  $x^3 - x - 1 = 0$  احسب :  $\frac{1-a}{1+a} + \frac{1-b}{1+b} + \frac{1-c}{1+c}$

(٩) إذا كانت  $p, q, r$  جذور  $f(x) = x^3 - x^2 + x - 2$  أوجد  $p^3 + q^3 + r^3$

(١٠) إذا كانت  $r, s, t$  جذور للمعادلة  $x^3 - 6x^2 + 5x - 7 = 0$  أوجد  $\frac{1}{r^2} + \frac{1}{s^2} + \frac{1}{t^2}$

(١١) أوجد مجموع جذور كثيرة الحدود  $(2x+3)(x+4) + (2x+5)(x-6)$

# المتباينات

## خصائص أساسية للمتباينات

إذا كانت  $a, b, c, d$  أعداداً حقيقية فإن

$$(1) \quad a > b, \quad b > c \Rightarrow a > c$$

$$(2) \quad a > b \Rightarrow a \pm c > b \pm c$$

$$(3) \quad a > b, \quad c > d \Rightarrow a + c > b + c$$

$$(4) \quad a > b, \quad c > 0 \Rightarrow ac > bc$$

$$(5) \quad a > b, \quad c < 0 \Rightarrow ac < bc$$

$$(6) \quad ab > 0, \quad a > b \Rightarrow \frac{1}{a} < \frac{1}{b}$$

$$(7) \quad ab < 0, \quad a > b \Rightarrow \frac{1}{a} > \frac{1}{b}$$

$$(8) \quad a > b \Rightarrow a - b > 0$$

## خصائص أخرى للمتباينات

(1) إذا  $a > b > 0$  فإن  $a^2 > b^2$  وبصورة عامة فإنه لأي عدد حقيقي  $n$  :  $a > b > 0 \Rightarrow a^n > b^n$

(2) إذا  $a > b > 0$  حيث  $n > 1$  فإن  $\sqrt[n]{a} > \sqrt[n]{b}$

(3) إذا كان  $a > 1$  ، فإن  $a^n > b^m$  حيث  $n > m$

ومنه نجد أن إذا كان  $a > 1$  فإن  $a > \sqrt{a}$

(4) إذا كان  $0 < a < 1$  ، فإن  $a^n < b^m$  حيث  $n > m$

ومنه نجد أن إذا كان  $0 < a < 1$  فإن  $\sqrt{a} > a$

## متباينات مجموع المربعات

لكل عدد حقيقي  $a$  فإنه  $a^2 \geq 0$  وبصورة عامة إذا كانت  $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n$  أعداد حقيقية فإن :

$$a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 + \dots + a_n^2 \geq 0$$

إذا كانت  $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n > 0$  أعداد حقيقية موجبة فإن:

(١) الوسط الحسابي:  $AM$  لهذه الأعداد هو حاصل جمعها مقسوماً على عددها  $n$  أي أن :

$$AM = \frac{a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n}{n}$$

(٢) الوسط الهندسي:  $GM$  لهذه الأعداد هو الجذر النوني لحاصل ضرب هذه الأعداد أي أن :

$$GM = \sqrt[n]{a_1 a_2 a_3 \dots a_n}$$

(٣) الوسط التوافقي:  $HM$  لهذه الأعداد هو مقلوب الوسط الحسابي لمقلوبات هذه القيم أي أن :

$$HM = \frac{n}{\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \frac{1}{a_3} + \dots + \frac{1}{a_n}}$$

(٤) الوسط التربيعي:  $QM$  لهذه الأعداد هو الجذر التربيعي للوسط الحسابي لمربعات هذه القيم أي أن :

$$QM = \sqrt{\frac{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 + \dots + a_n^2}{n}}$$

متباينة الوسط الحسابي - الوسط الهندسي **AM-GM**

إذا كانت  $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n > 0$  فإن :

$$\frac{a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n}{n} \geq \sqrt[n]{a_1 a_2 a_3 \dots a_n}$$

وتتحقق المساواة إذا وإذا فقط إذا كان  $a_1 = a_2 = a_3 = \dots = a_n$

متباينة الوسط الهندسي - الوسط التوافقي **GM-HM**

إذا كانت  $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n > 0$  فإن :

$$\sqrt[n]{a_1 a_2 a_3 \dots a_n} \geq \frac{n}{\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \frac{1}{a_3} + \dots + \frac{1}{a_n}}$$

وتتحقق المساواة إذا وإذا فقط إذا كان  $a_1 = a_2 = a_3 = \dots = a_n$

## متباينة الوسط التربيعي - الوسط الحسابي QM-AM

إذا كانت  $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n > 0$  فإن :

$$\sqrt{\frac{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 + \dots + a_n^2}{n}} \geq \frac{a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n}{n}$$

وتتحقق المساواة إذا وإذا فقط إذا كان  $a_1 = a_2 = a_3 = \dots = a_n$



العلاقة بين الأوساط :  $QM \geq AM \geq GM \geq HM$

$$\sqrt{\frac{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 + \dots + a_n^2}{n}} \geq \frac{a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n}{n} \geq \sqrt[n]{a_1 a_2 a_3 \dots a_n} \geq \frac{n}{\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \frac{1}{a_3} + \dots + \frac{1}{a_n}}$$



(١) إذا كانت  $a, b, c$  أعداد حقيقية أثبت أن :  $a^2 + b^2 + c^2 \geq ab + ac + bc$

الحل :

من متباينة الوسط الحسابي - الوسط الهندسي AM-GM

$$\frac{a^2 + b^2}{2} \geq \sqrt{a^2 \cdot b^2} \Rightarrow a^2 + b^2 \geq 2\sqrt{(ab)^2} = 2|ab| = 2ab$$

$$\text{بالجمع} \quad \begin{cases} a^2 + b^2 \geq 2ab \\ a^2 + c^2 \geq 2ac \\ b^2 + c^2 \geq 2bc \end{cases} \quad \begin{array}{l} \text{أي أن :} \\ \text{وكذلك بالمثل :} \end{array}$$

$$2a^2 + 2b^2 + 2c^2 \geq 2ab + 2ac + 2bc \Rightarrow 2(a^2 + b^2 + c^2) \geq 2(ab + ac + bc)$$

$$\Rightarrow a^2 + b^2 + c^2 \geq ab + ac + bc \quad \text{بالقسمة على 2}$$

(٢) إذا كانت  $a, b, c, d > 0$  اثبت أن :  $\frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{d} + \frac{d}{a} \geq 4$

الحل :

من متباينة الوسط الحسابي - الوسط الهندسي AM-GM

$$\frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{d} + \frac{d}{a} \geq 4 \sqrt[4]{\frac{a}{b} \cdot \frac{b}{c} \cdot \frac{c}{d} \cdot \frac{d}{a}} = 4 \sqrt[4]{1} = 4 \quad \text{كانت إذا} \quad (٣)$$

$$(a+b+c) \left( \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \right) \geq 9 \quad \text{اثبت أن : } a, b, c > 0$$

من متباينة الوسط الحسابي - الوسط الهندسي **AM-GM**

$$a+b+c \geq 3 \sqrt[3]{abc} \quad \dots\dots(1)$$

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \geq 3 \sqrt[3]{\frac{1}{a} \cdot \frac{1}{b} \cdot \frac{1}{c}} = \frac{3}{\sqrt[3]{abc}} \quad \dots\dots(2)$$

بضرب المعادلتين (1) و (2) :

$$(a+b+c) \left( \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \right) \geq 3 \sqrt[3]{abc} \cdot \frac{3}{\sqrt[3]{abc}} = 9$$

$$\frac{2ab}{a+b} + \frac{2bc}{b+c} + \frac{2ca}{c+a} \leq a+b+c \quad \text{اثبت أن : } a, b, c > 0 \quad (4)$$

من متباينة الوسط الحسابي - الوسط التوافقي **AM-HM**

$$\frac{a+b}{2} \geq \frac{2}{\frac{1}{a} + \frac{1}{b}} = \frac{2}{\frac{a+b}{ab}} = \frac{2ab}{a+b} \Rightarrow \frac{a+b}{2} \geq \frac{2ab}{a+b}$$

$$\text{بالجمع} \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{2ab}{a+b} \leq \frac{a+b}{2} \quad \text{أي أن :} \\ \text{وكذلك بالمثل :} \\ \frac{2ac}{a+c} \leq \frac{a+c}{2} \\ \frac{2bc}{b+c} \leq \frac{b+c}{2} \end{array} \right.$$

$$\frac{2ab}{a+b} + \frac{2bc}{b+c} + \frac{2ca}{c+a} \leq \frac{a+b}{2} + \frac{b+c}{2} + \frac{c+a}{2} = \frac{2(a+b+c)}{2} = a+b+c$$

$$(y-3)^2 + (y-5)^2 + (y+9)^2 + (y+11)^2 \geq 200 \quad (5) \quad \text{أثبت صحة المتباينة :}$$

الحل :

$$(y-3)^2 + (y-5)^2 + (y+9)^2 + (y+11)^2 \geq 200 \quad \text{بنشر المتباينة}$$

$$y^2 - 6y + 9 + y^2 - 10y + 25 + y^2 + 18y + 81 + y^2 + 22y + 121 - 200 \geq 0 \quad \text{بالتبسيط}$$

$$\Rightarrow 4y^2 + 24y + 36 \geq 0 \Rightarrow y^2 + 6y + 9 \geq 0 \Rightarrow (y+3)^2 \geq 0$$

وهذه المتباينة صحيحة لأن المقدار موجب .



(١) إذا كانت  $a, b, c > 0$  أثبت أن :  $\frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{a} \geq 3$

(٢) إذا كانت  $a, b, c > 0$  بحيث  $a + b + c = 1$  أثبت أن :  $\sqrt{a} + \sqrt{b} + \sqrt{c} < 2$

(٣) إذا كانت  $a, b, c > 0$  أثبت أن :  $(a+b)(b+c)(c+a) \geq 8abc$

(٤) إذا كانت  $x, y, z > 0$  أثبت أن :  $x^2(y+z) + y^2(x+z) + z^2(x+y) \geq 6xyz$

(٥) إذا كانت  $a, b, c$  أعداد حقيقية أثبت أن :  $(a^2 - b^2)(a^4 - b^4) \leq (a^3 - b^3)^2$

(٦) إذا كانت  $a, b, c$  أعداد حقيقية أثبت أن :  $a^4 + b^4 + c^4 \geq abc(a+b+c)$

(٧) إذا كانت  $a, b > 0$  أعداد حقيقية أثبت أن :  $a^3 + b^3 \geq ab(a+b)$

(٨) إذا كانت  $a_1, a_2, \dots, a_n > 0$  ، حيث  $a_1 \cdot a_2 \cdot \dots \cdot a_n = 1$  برهن أن :

$$(2 + a_1)(2 + a_2) \cdot \dots \cdot (2 + a_n) \geq 3^n$$

(٩) إذا كانت  $a, b > 0$  أعداد حقيقية أثبت أن :  $\frac{a^2 + b^2}{a+b} + \frac{a^2 + c^2}{a+c} + \frac{b^2 + c^2}{b+c} \geq a+b+c$

(١٠) ليكن  $n$  عدد صحيح موجب أثبت أن :  $1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \dots \cdot (2n-1) < n^n$

(١١)  $a, b, c, d$  أربع كميات موجبة في تتابع هندسي أثبت أن :  $a + 2d > 3c$

(١٢)  $a, b, c, d$  أربع كميات موجبة في تتابع حسابي أثبت أن :  $b^4 + c^4 > bc(ab + cd)$

# ثانيًا : الهندسة



# المفردات

- التوازي والتعامد
- المسافة بين المستقيمات
- خصائص المتوسطات والارتفاعات ومنصفات الزوايا والأعمدة المنصفة
- قانونا الجيب والموسع وجيب التمام والظل
- قوانين حساب المثلثات
- الدوائر الداخلية والخارجية
- التطابق والتشابه

## اولاً : التوازي والتعامد

### ❖ تعاريف :

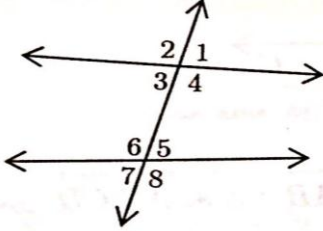
- المستقيمان المتوازيان : هما المستقيمين الغير متقاطعين أو متخالفين ويقعان في مستوى واحد .
- المستقيمان المتخالفان : هما المستقيمين الغير متقاطعين ولا يقعان في مستوى واحد .
- المستقيم القاطع : هو المستقيم الذي يقطع مستقيمين أو أكثر في مستوى واحد .

❖ إذا قطع المستقيم N المستقيمين L , M كما بالشكل فإنه ينتج ثماني زوايا يمكن تصنيفها إلى أزواج من الزوايا

• المتبادلة

• المتناظرة

• الداخلية وفي جهة واحدة من القاطع



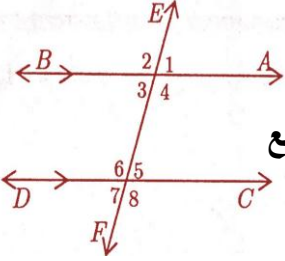
❖ العلاقة بين أزواج الزوايا الناتجة من قطع مستقيم لمستقيمين متوازيين

• إذا قطع مستقيم مستقيمين متوازيين فإن كل زاويتين متبادلتين متساويتان في القياس

• إذا قطع مستقيم مستقيمين متوازيين فإن كل زاويتين متناظرتان متساويتان في القياس

• إذا قطع مستقيم مستقيمين متوازيين فإن كل زاويتين داخليتين وفي جهة واحدة من القاطع

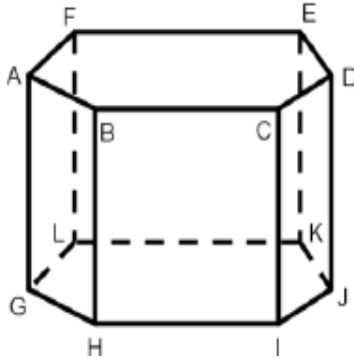
متكاملتان



### ملاحظات :

- المستقيم العمودي على أحد مستقيمين متوازيين في المستوى يكون عمودياً على الآخر والعكس صحيح
- إذا وازى مستقيمان ثالثاً كان هذان المستقيمان متوازيين
- إذا قطع مستقيم عدة مستقيمت متوازية ، وكانت أجزاء القاطع المحصورة بين هذه المستقيمت المتوازية متساوية في الطول ، فإن الأجزاء المحصورة بينها لأي قاطع آخر تكون متساوية في الطول

### تدريب ١ :



من الشكل المجاور أوجدي

- (١) خمسة قطع مستقيمة توازي -
- (٢) ثلاث قطع مستقيمة توازي  $\overline{AB}$
- (٣) أربعة قطع مستقيمة تخالف  $\overline{AB}$
- (٤) مستويين متوازيين -
- (٥) كم عدد المستويات المتوازية في الشكل

### الحل :

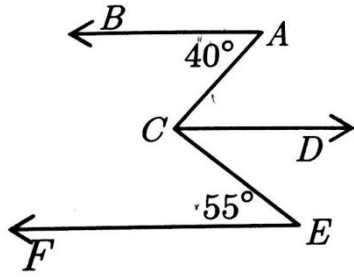
- (١) .....
- (٢) .....
- (٣) .....
- (٤) .....
- (٥) ..... (٤)

**تدريب ٢ :** في الشكل المقابل اذا كان

$$m(\angle E) = 55^\circ , m(\angle A) = 40^\circ$$

$$\overline{CD} \parallel \overline{AB} , \overline{EF} \parallel \overline{AB}$$

أوجد :  $m(\angle ACE)$



**الحل :**

.....

.....

.....

.....

.....

.....

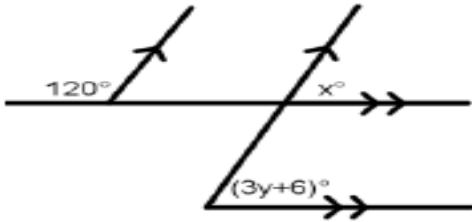
.....

.....

**تدريب ٣ :**

أوجد قيمة  $x$  ,  $y$  في الشكل المجاور

**الحل :**



.....

.....

.....

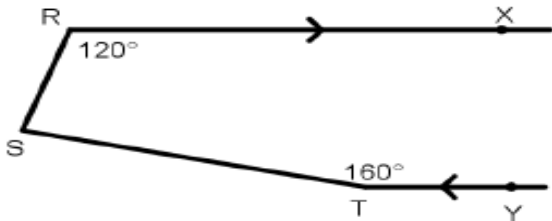
.....

.....

**تدريب ٤ :**

على الشكل المجاور أوجد قياس  $\angle RST$

**الحل :**



.....

.....

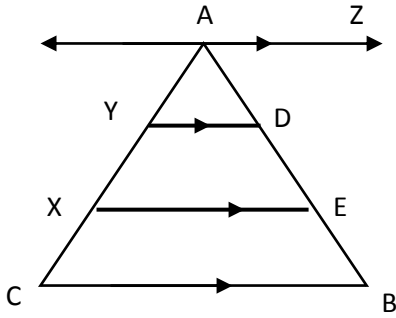
.....

.....

.....

## ثانياً : المسافة بين المستقيمتين

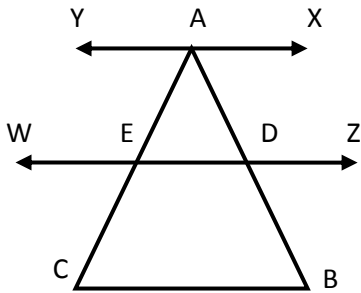
### تدريب ١ :



في الشكل المقابل : إذا كان  $\overline{CB} \parallel \overline{XE} \parallel \overline{YD} \parallel \overline{AZ}$  وكان  $AB = 15 \text{ cm}$  ,  $AY = YX = XC$  أوجد طول  $\overline{BD}$  مع بيان السبب

### الحل :

### تدريب ٢ :



في الشكل المجاور  $m(\angle XAD) = m(\angle B) = 60^\circ$   
 $AD = DB$  ,  $m(\angle EDB) = 120^\circ$  ,  $AC = 18 \text{ cm}$   
فاوجد طول  $\overline{AE}$  مع بيان السبب

### الحل :

## ثالثاً: خصائص المتوسطات والارتفاعات ومنصفات الزوايا والأعمدة المنصفة

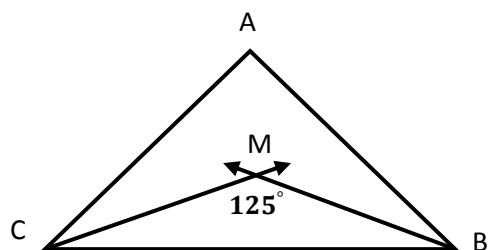
### ❖ تعاريف :

- المتوسط في المثلث هو القطعة المستقيمة الواصلة من رأس المثلث لمنتصف الضلع المقابل لهذا الرأس .
- المسافة من نقطة لمستقيم هي المسافة العمودية من هذه النقطة للمستقيم .
- العمود في المثلث هو القطعة المستقيمة العمودية النازلة من رأس المثلث للضلع المقابل له .
- منصف الزاوية هو الشعاع الذي ينصف زاوية المثلث لزاويتين متطابقتين .
- المنصف العمودي هو المستقيم العمودي على قطعة مستقيمة من منتصفها .
- المستقيم العمودي على قطعة مستقيمة من منتصفها محور تماثل لهذه القطع . وأي نقطة على محور تماثل قطعة مستقيمة تبعد البعد نفسه عن طرفيها .
- الضلعان المتطابقان في المثلث المتطابق الضلعين يسميان الساقين والضلع الثالث يسمى القاعدة ، أما الزاويتين على القاعدة فيسميان زاويتا القاعدة وتسمى الزاوية المقابلة للقاعدة بزاوية الرأس للمثلث المتطابق الساقين

### ❖ نظريات :

- مجموع قياسات الزوايا الداخلية للمثلث  $180^\circ$  .
- قياس الزاوية الخارجية للمثلث أكبر من قياس أي زاوية داخلية عدا المجاورة لها .
- قياس أي زاوية خارجية للمثلث يساوي مجموع قياسي الزاويتين الداخلتين البعیدتان عنها .
- إذا تطابقت زاويتان في مثلث فإن الضلعان المقابلين لهما متطابقان .
- المثلث المتطابق الأضلاع متطابق الزوايا .
- قياس زاوية المثلث المتطابق الأضلاع تساوي  $60^\circ$  .
- القطعة المستقيمة الواصلة بين منتصفي ضلعين في مثلث توازي الضلع الثالث وطولها يساوي نصف طول هذا الضلع .
- طول المتوسط الخارج من رأس القائمة في المثلث القائم الزاوية يساوي نصف طول الوتر .
- متوسط المثلث المتطابق الضلعين المرسوم من الرأس ينصف زاوية الرأس ويكون عمودياً على القاعدة .
- منصف زاوية الرأس في المثلث المتطابق الساقين عمودي على القاعدة ويقطعها في المنتصف .
- النقطة الواقعة على منصف زاوية تبعد البعد نفسه عن ضلعي الزاوية والعكس صحيح .

## تدريب ١ :



في الشكل المقابل :  $\overrightarrow{BM}$  ينصف  $\angle ABC$  ،  $\overrightarrow{CM}$  ينصف  $\angle ACB$

، أوجد  $m(\angle A)$  ،  $m(\angle BMC) = 125^\circ$

الحل :

## تدريب ٢ :

رسم مثلث متطابق متطابق الأضلاع طول ضلعة ( a cm ) . أنشئ مثلث متطابق الأضلاع رؤوسة منتصفات أضلاع المثلث الأول . ثم أنشئ مثلث متطابق الأضلاع رؤوسة منتصفات اضلاع المثلث الثاني وهلم جراً . أوجد مجموع جميع المحيطات

الحل :

### تدريب ٣ :

رسم مثلث متطابق متطابق الأضلاع طول ضلعة ( a cm ) . أنشئ مثلث متطابق الأضلاع رؤوسة منتصفات أضلاع المثلث الأول . ثم أنشئ مثلث متطابق الأضلاع رؤوسة منتصفات اضلاع المثلث الثاني وهلم جراً . أوجد مجموع جميع المحيطات

### الحل :

.....

.....

.....

.....

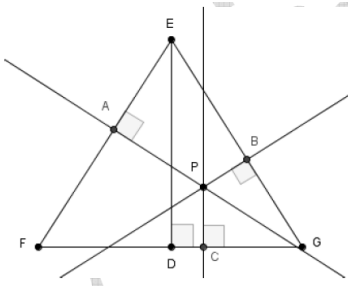
.....

.....

.....

.....

**تدريب ٤ :** EFG مثلث متساوي الأضلاع والنقطة P داخله . ارتفاع المثلث EFG المار من E يقطع ( FG ) في النقطة D . اثبتي أن  $PB + PC + PA = ED$



### الحل :

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

**تدريب ٥ :** AHB مثلث بحيث :  $\angle ABH = 120^\circ$  و BC [ هو منصف الزاوية  $\angle ABH$  )  $(c \in [HA])$  المستقيم المار من H والموازي للمستقيم (CB) يقطع المستقيم (AB) في النقطة D .

أثبتي أن  $\frac{1}{BH} + \frac{1}{AB} = \frac{1}{CB}$

**الحل :**

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....



## رابعاً: التطابق والتشابه

### اولاً : التطابق

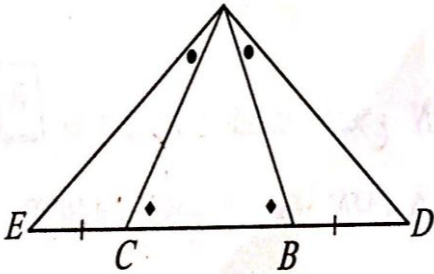
- المثلثات المتطابقة يجب أن تكتب بنفس ترتيب رؤوسهم المتناظرة .
- إذا تطابق مثلثان فإن كل عنصر من عناصر المثلثين تطابق العنصر المناظر له في المثلث الآخر .
- حالات تطابق مثلثين هي :
  - ❖ ضلعين وزاوية محصورة بينهما .
  - ❖ زاويتين وضلع .
  - ❖ الأضلاع الثلاثة .
  - ❖ وتر وضلع في المثلث القائم الزاوية .

### تدريب ١ :

في الشكل المقابل : إذا كان  $BD = CE$  ،  $m(\angle BAD) = m(\angle CAE)$  ،  $m(\angle ABC) = m(\angle ACB)$  ،

أثبتي أن :  $AD = AE$  .

الحل :



.....

.....

.....

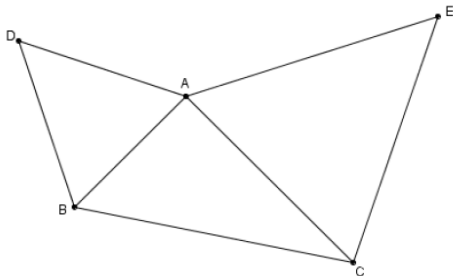
.....

.....

تدريب ٢ : في الشكل المجاور : المثلثان  $BAD$  ،  $ACE$  متساويا الأضلاع .

أثبتي أن :  $DC = BE$  .

الحل :



.....

.....

.....

.....

.....

## ثانياً : التشابه :

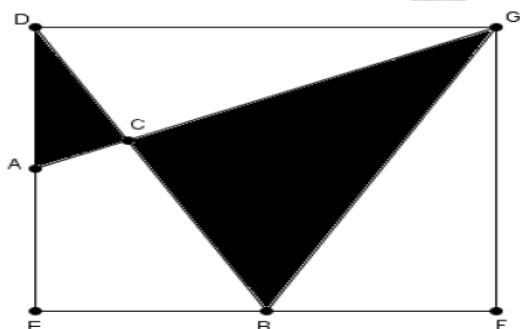
- يقال عن مضلعين لهما نفس العدد من الأضلاع أنهما متشابهين إذا تحقق الشرطان التاليين معاً:  
❖ زواياهما المتناظرة متساوية في القياس .  
❖ أضلاعهما المتناظرة متناسبة .

### • ملاحظات

- ❖ المربع والمستطيل غير متشابهين لأن أطوال أضلاعهما المتناظرة ليست بالضرورة متناسبة .
- ❖ المربع والمعين غير متشابهين لأن زواياهما المتناظرة غير متساوية في القياس .
- ❖ يتشابه المثلثان القائم الزاوية إذا ساوى قياس زاوية حادة في أحدهما قياس نظيرتها في الآخر.
- ❖ المثلثان المتطابقا الأضلاع متشابهان .
- ❖ المثلثان المتطابقا الساقين يكونان متشابهين إذا ساوى قياس إحدى الزوايا في إحدى الزوايا في أحدهما قياس نظيرتها في الآخر.

## تدريب ١ :

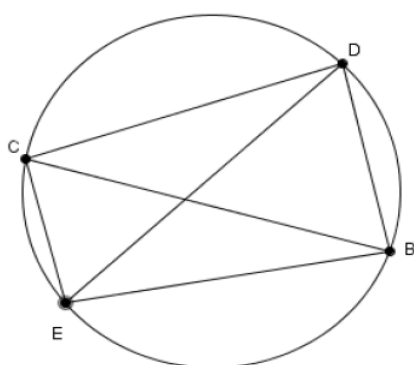
في الشكل المقابل :  $DGFE$  مربع بحيث ،  $DG = 8 \text{ cm}$  ، النقطتان  $A$  و  $B$  هما على التوالي منتصف  $[DE]$  و  $[EF]$



أحسب مساحة المنطقة المظللة

### الحل :

تدريب ٢ :  $ECDB$  رباعي محاط بدائرة ، بيني أن  $EB = BC \times ED$



### الحل :

لجميع قيم  $\theta$  فإن:

$$\sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1$$

وبقسمة هذه العلاقة على  $\cos^2 \theta$ ,  $\sin^2 \theta$  على الترتيب ينتج أن :

$$1 + \tan^2 \theta = \sec^2 \theta$$

$$1 + \cot^2 \theta = \operatorname{cosec}^2 \theta$$

$$\sin(A + B) = \sin A \times \cos B + \cos A \times \sin B$$

وبوضع (-B) بدلا من B ينتج أن :

$$\sin(A - B) = \sin A \times \cos B - \cos A \times \sin B$$

وذلك لأن:

$$\cos(-B) = \cos B, \quad \sin(-B) = -\sin B$$

كذلك بوضع B=A ينتج أن:

$$\sin 2A = 2 \sin A \cdot \cos A$$

$$\cos(A + B) = \cos A \cdot \cos B - \sin A \cdot \sin B$$

وبوضع (-B) بدلا من B ينتج أن:

$$\cos(A - B) = \cos A \cdot \cos B + \sin A \cdot \sin B$$

كذلك بوضع B=A ينتج أن:

$$\cos 2A = \cos^2 A - \sin^2 A$$

$$\cos 2A = 1 - 2 \sin^2 A = 2 \cos^2 A - 1$$

وينتج من ذلك أن :

$$\sin^2 A = \frac{1 - \cos 2A}{2}, \quad \cos^2 A = \frac{1 + \cos 2A}{2}$$

$$\tan(A + B) = \frac{\sin(A + B)}{\cos(A + B)} = \frac{\sin A \cdot \cos B + \cos A \cdot \sin B}{\cos A \cdot \cos B + \sin A \cdot \sin B}$$

وبقسمة كل من البسط والمقام على  $\cos A \cos B$  ينتج أن:

$$\tan(A + B) = \frac{\tan A + \tan B}{1 - \tan A \cdot \tan B}$$

وبوضع  $(-B)$  بدلا من  $B$  ينتج أن:

$$\tan(A - B) = \frac{\tan A - \tan B}{1 + \tan A \cdot \tan B}$$

وذلك لأن  $\tan(-B) = -\tan B$

وبوضع  $B=A$  ينتج أن :

$$\tan 2A = \frac{2 \tan A}{1 - \tan^2 A}$$

❖ بوضع  $3A=A+2A$  يمكن إثبات أن:

$$\sin 3A = 3 \sin A - 4 \sin^3 A$$

$$\cos 3A = 4 \cos^3 A - 3 \cos A$$

$$\tan 3A = \frac{3 \tan A - \tan^3 A}{1 - 3 \tan^2 A}$$

❖ إذا كانت  $A > B$  فإن:

$$\sin A + \sin B = 2 \sin \frac{A+B}{2} \cos \frac{A-B}{2}$$

وبوضع  $(-B)$  بدلا من  $B$  ينتج أن :

$$\sin A - \sin B = 2 \sin \frac{A-B}{2} \cos \frac{A+B}{2}$$

$$\cos A + \cos B = 2 \cos \frac{A+B}{2} \cos \frac{A-B}{2}$$

$$\cos A - \cos B = 2 \sin \frac{A+B}{2} \sin \frac{A-B}{2}$$

كذلك:

$$2 \sin A \cdot \cos B = \sin(A+B) + \sin(A-B)$$

$$2 \cos A \cdot \sin B = \sin(A+B) - \sin(A-B)$$

$$2 \cos A \cdot \cos B = \cos(A+B) + \cos(A-B)$$

$$2 \sin A \cdot \sin B = \cos(A-B) - \cos(A+B)$$

ويمكن كتابة القوانين الأخيرة بالصورة التالية أيضا :

علاقات بين أضلاع المثلث وزواياه:

إذا كانت أضلاع المثلث ABC المقابلة للزوايا A B C هي a , b , c على التوالي

$$(1) \frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$$

$$(2) a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos A$$

$$b^2 = c^2 + a^2 - 2ca \cdot \cos B$$

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cdot \cos C$$

$$(3) \Delta = \frac{1}{2}ab \cdot \sin C$$

$$\Delta = \frac{1}{2}bc \cdot \sin A$$

$$\Delta = \frac{1}{2}ca \cdot \sin B$$

وكانت مساحته  $\Delta$  فإن :

أي أن مساحة المثلث تساوي نصف حاصل ضرب أي ضلعين في جيب الزاوية المحصورة بينهما.

أمثلة

مثال ١ / احسبي

$$\cos \frac{5\pi}{7} \cos \frac{13\pi}{28} + \sin \frac{5\pi}{7} \sin \frac{13\pi}{28}$$

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

مثال ٢ / احسبي

$$\cos \left[ x + \frac{5\pi}{7} \right] \cos x + \sin \left[ x + \frac{5\pi}{7} \right] \sin x$$

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

مثال ٣ / إذا كانت

$$\tan a = \frac{1}{2}, \tan b = \frac{1}{5}, \tan c = \frac{1}{8}$$

فاحسبي

$$\tan a + b + c$$

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

مثال ٤ / إذا كانت

$$x = y + z$$

فأثبتي أن

$$\cos x + \cos y + \cos z + 1 = 4 \cos \frac{x}{2} \cos \frac{y}{2} \cos \frac{z}{2}$$

.....

.....

.....

.....

.....

.....

# الدائرة

## تعريف الدائرة :

هي المحل الهندسي لجميع النقاط التي تبعد بعد ثابت عن نقطة معينة .  
هذه النقطة تدعى مركز الدائرة . بكلمات اخرى، اذا حددنا نقطة معينة ثم بدأنا بوضع نقاط في المستوى بشرط إن تكون هذه النقاط جميعا على نفس البعد من النقطة المعنية ووصلنا هذه النقاط معا ، فان الشكل الهندسي الناتج يدعى دائرة

نصف القطر : هو بعد مركز الدائرة عن أي نقطة تقع على الدائرة .

الوتر : هو قطعة تصل بين نقطتين على الدائرة .

القطر:- هو وتر يمر بمركز الدائرة

القوس : هو جزء من محيط الدائرة ونرمز له بالرمز

زاوية محيطية : هي زاوية رأسها يقع على الدائرة وساقها اوتار في الدائرة .

زاوية مركزية : هي زاوية رأسها يقع في مركز الدائرة ،

وساقها انصاف اقطار في الدائرة .

## نظريات:

### نظرية ١ :-

الزوايا المركزية المتساوية في الدائرة تقابلها اقواس متساوية.

نظريه عكسيه:

الاقواس المتساوية في الدائرة تقابلها زوايا مركزية متساوية.

### نظريه ٢ :-

الزوايا المركزية المتساوية في الدائرة تقابلها اوتار متساوية.

نظريه عكسيه:

الاقواس المتساوية في الدائرة تقابلها زوايا مركزية متساوية.

### نظريه ٣ :-



الاقواس المتساوية في الدائرة تقابلها اوتار متساوية.

نظريه عكسيه:

الاقواس المتساوية في الدائرة تقابلها اقواس متساوية.

إن الزاوية المركزية تساوي القوس الذي يقابلها.

نظرية 4 :-

نصف قطر الدائرة المعامد للوتر ينصف الوتر وينصف القوس الملائم له .

تعريف:

بعد نقطة عن مستقيم ، هو الارتفاع النازل من النقطة على المستقيم .

نظرية ٥ :-

الاقواس المتساوية في الدائرة تبعد ابعاد متساوية عن المركز .

نظرية عكسية :

الاقواس التي تبعد ابعاداً متساوية عن المركز تكون متساوية .

الزوايا المركزية والزوايا المحيطية في الدائرة

نظرية ٦ :-

الزاوية المحيطية في الدائرة تساوي نصف الزاوية المركزية التي ترتكز على نفس القوس .

نظرية 7 :-

الزوايا المحيطية في الدائرة التي ترتكز على نفس القوس او ترتكز على اقواس متساوية تكون متساوية .

نظريه عكسية :

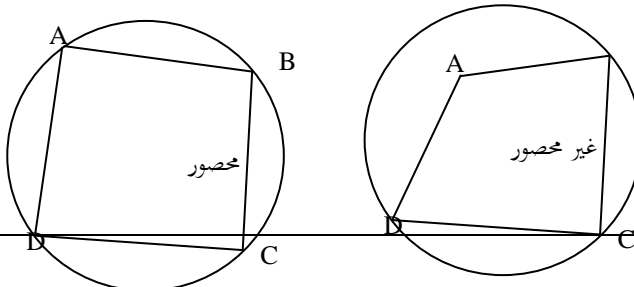
الزوايا المحيطية المتساوية في الدائرة تقابلها اقواس متساوية .

نظرية 8 :-

الزاوية المحيطية التي يقابلها قطر الدائرة تكون قائمة .

تعريف : شكل رباعي محصور داخل دائرة هو شكل رباعي جميع رؤوسه تقع

على الدائرة .



### نظرية 9 :-

إذا كان شكل رباعي محصور داخل دائرة فإن مجموع زاويتين متقابلتين يساوي  $180^\circ$ .

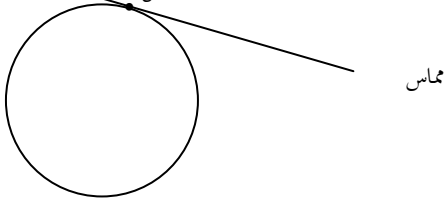
### نظرية عكسية :

إذا كان مجموع زاويتين متقابلتين في شكل رباعي يساوي  $180^\circ$  فإنه يمكن حصر الشكل داخل دائرة .

### الدائرة والمماس

#### تعريف :

المستقيم الذي يشترك مع الدائرة في نقطة واحدة يدعى مماس للدائرة .  
النقطة المشتركة تدعى نقطة التماس .

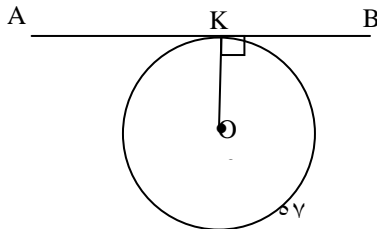


#### نظرية ١ .

المستقيم المعامد لنصف قطر الدائرة في طرفه ( ليس في الطرف الذي في المركز ) هو مماس للدائرة .

#### نظرية عكسية :

نصف قطر الدائرة يعامد المماس في نقطة التماس .



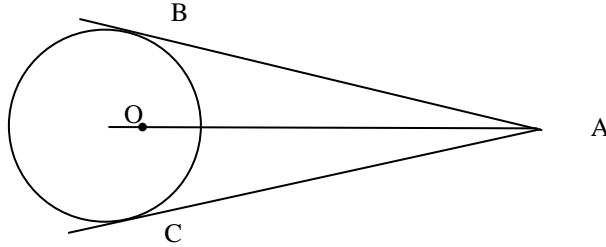
## نظرية ٢ .

إذا رسمنا مماسان لدائرة من نقطة  $A$  تقع خارج الدائرة فإن :

أ. المماسان متساويان .

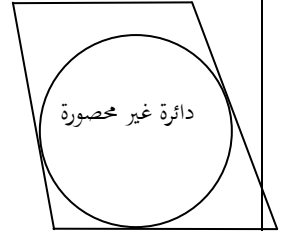
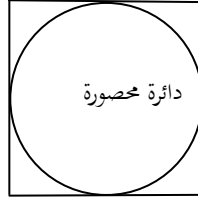
ب. القطعة التي تصل النقطة  $A$  مع مركز الدائرة تنصف الزاوية المحصورة بين

المماسين .



## تعريف :

شكل رباعي يحصر داخله دائرة هو شكل رباعي جميع اضلاعه مماسات للدائرة .



## نظرية ٣ .

إذا كان شكل رباعي يحصر بداخله دائرة فإن مجموع ضلعين متقابلين يساوي مجموع

الضلعين الآخرين .

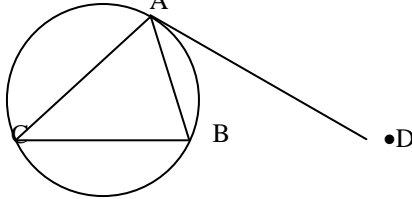
## نظرية عكسية :

إذا كان مجموع ضلعين متقابلين في شكل رباعي يساوي مجموع الضلعين الآخرين

فانه يمكن حصر دائرة داخل الشكل الرباعي .

#### نظرية ٤ .

الزاوية المحصورة بين وتر ومماس مرسومان لدائرة في نفس النقطة تساوي الزاوية المحيطية التي ترتكز على القوس المحصور بين الوتر والمماس .



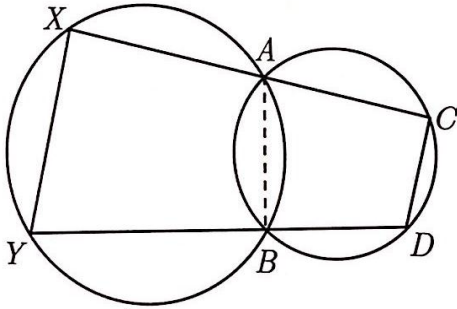
أمثلة

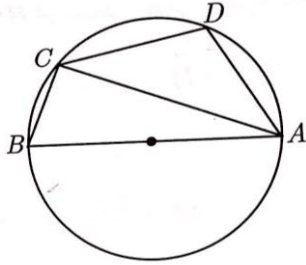
مثال ١ / دائرتان متقاطعتان في  $A, B$  رسم مستقيمان أحدهما يمر بالنقطة  $A$  والآخر يمر بالنقطة  $B$  ويقطعان إحدى الدائرتين في  $C, D$  ويقطعان الأخرى في  $X, Y$

$$\overline{XY} \parallel \overline{CD}$$

أثبت أن

الحل:





مثال ٢ / في الشكل المقابل:

ABCD شكل رباعي مرسوم داخل دائرة  
 $\overline{AB}$  قطر فيها  $AD = DC$  فإذا كان  
 $m(\angle CAB) = 35^\circ$  فأوجد :

1/  $m(\angle D)$

2/  $m(\angle BCD)$

الحل:



$CD = DB, DB = DA$  : فإذا كان  
 $m(\angle EBC)$  : أوجدني :

This image shows a full page of white paper with horizontal dotted lines. The lines are evenly spaced and run across the width of the page, providing a guide for handwriting practice. There are no margins, text, or other markings on the page.

ثالثاً

نظرية الأعداد

# المفردات

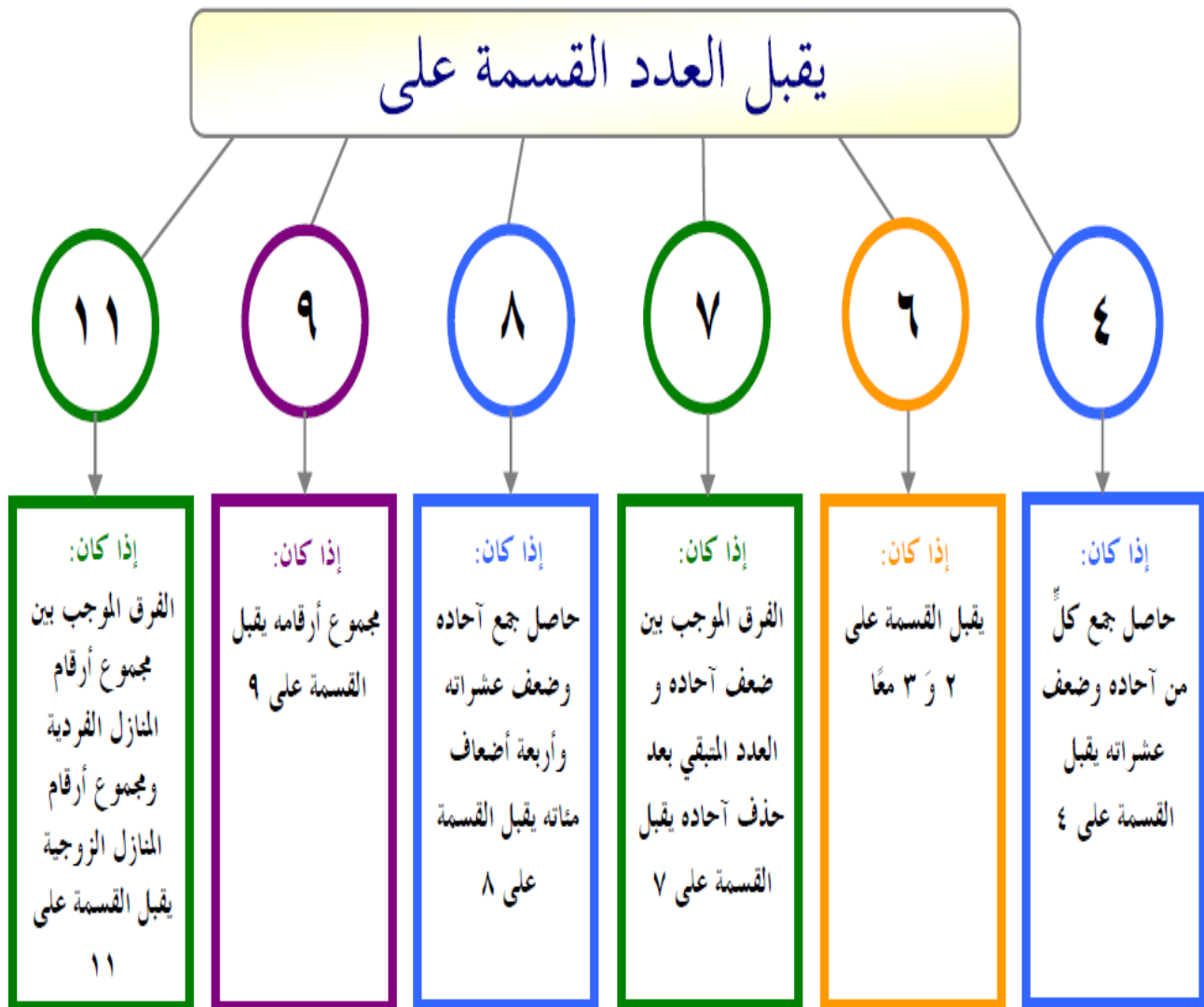
- قواسم العدد الصحيح وخصائصه
- الأعداد الأولية وخصائصها
- خوارزمية أقليدس
- القاسم المشترك الأكبر وخصائصه
- المضاعف المشترك الأصغر وخصائصه
- قابلية القسمة على ( ٧, ١١, ١٣ )
- النظرية الأساسية في الحساب
- عدد القواسم لعدد صحيح موجب ومجموعها



## أولاً : قواسم العدد الصحيح وخصائصه :

### ملاحظات :

- العدد يقبل القسمة على ٢ إذا كان أحاده عدد زوجي .
- العدد يقبل القسمة على ٣ إذا كان مجموع منازل العدد يقبل القسمة على ٣ .
- العدد يقبل القسمة على ٤ إذا كان آخر منزلتين من العدد ( الأحاد والعشرات ) تقبل القسمة على ٤ .
- العدد يقبل القسمة على ٥ إذا كان أحادة صفر أو ٥ .
- العدد يقبل القسمة على ٦ إذا كان يقبل القسمة على ٢ و ٣ .
- لا توجد قاعدة لبحث قابلية القسمة على ٧ فقط استخدام القسمة المطولة .
- العدد يقبل القسمة على ٨ إذا كان آخر ثلاث منازل من العدد تقبل القسمة على ٨ .
- العدد يقبل القسمة على ٩ إذا كان مجموع منازل العدد تقبل القسمة على ٩ .
- العدد يقبل القسمة على ١٠ إذا كانت منزلة الأحاد صفر .
- العدد يقبل القسمة على ١١ عند جمع منازل العدد بالتناوب ومن ثم طرح المجموعتين ، إذا كانت النتيجة صفر أو النتيجة تقبل القسمة على ١١ فإن العدد يقبل القسمة على ١١ .



## تدريب ١ :

تحقق من قابلية قسمة العدد ٣٤٣٥٨٦٤ على كل من ٢, ٣, ٤, ٥, ٦, ٨, ٩, ١٠ .

الحل :

## تدريب ٢ :

أي من الأعداد التالية تقبل القسمة على ١١ .

٩١٨٢٩١ (٤

١٤٨٠٦ (٣

٩٨٣٥ (٢

٤٩٥ (١

الحل :

### تدريب ٣ :

أوجد قيمة K بحيث يصبح المقدار  $45,2k8$  يقبل القسمة على كل من 8، 3،

الحل :

.....

.....

.....

.....

.....

.....

### تدريب ٤ :

ما هو أصغر عدد مكون من 4 منازل يقسمه كل من 1، 2، 3، 4، 5، 6، 8، 9، 10 ؟

الحل :

.....

.....

.....

.....

.....

.....

### تدريب ٥ :

باستخدام الأعداد 1، 2، 3، 4 مرة واحدة . كم عدد من أربعة منازل يمكن تكوينه يقبل القسمة على 11

الحل :

.....

.....

.....

.....

.....

.....

## ثانياً : الأعداد الأولية وخصائصها ونظرية إقليدس :

### تعريف:

- الأعداد الأولية : هي الأعداد الطبيعية  $p > 1$  بحيث أن العدد  $p$  لا يقبل القسمة إلا على نفسه أو الواحد .
- الأعداد المولفة : العدد المولف هو عدد طبيعي  $c$  بحيث يوجد قاسم بين العددين  $1$  ،  $c$  يقسم العدد  $c$  .

### ملاحظات:

- أي عدد صحيح  $n > 1$  إما أن يكون أولياً ، أو حاصل ضرب عدد منتهي من الأعداد الأولية .
- كل عدد صحيح  $n > 1$  له قاسم أولي .
- إذا كان  $n$  عدداً مولفاً فإن له قاسم أولي  $p$  بحيث  $p \leq \sqrt{n}$  .
- إذا كان  $a, b$  عددين صحيحين وكان  $p$  أولي بحيث  $p/ab$  فإن  $p/a$  أو  $p/b$  .

### نظرية إقليدس :

- يوجد عدد غير منتهي من الأعداد الأولية .
- لإختبار أن عدداً ما  $n$  أولي يكفي أن نختبر قابلية قسمته على الأعداد الأولية الأقل من  $\sqrt{n}$  .

### تدريب ١ :

هل العدد ١٨١ هو عدد أولي ؟

### الحل :

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

## تدريب ٢ :

ما هو أصغر قاسم أولي يقسم العدد  $7^{17} + 23$  ؟

الحل :

.....

.....

.....

.....

.....

## تدريب ٣ :

العدد ١٣ أولي ، إذا قمنا بتبديل المنازل نحصل على ٣١ أولي أيضاً . كم عدد الأعداد الأولية الأخرى المكونة من منزلتين تحقق ذلك .

الحل :

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

### ثالثاً: القاسم المشترك الأكبر والمضاعف المشترك الأصغر وخصائصهما :

❖ **القاسم المشترك الأكبر :** لأي زوج من الأعداد الصحيحة  $a, b$  ليس كليهما صفر ، نقول لأكبر قاسم يقسم العددين معاً وليكن  $d$  بالقاسم المشترك الأكبر ونكتب  $d = (a, b)$  أو  $d = \text{god}(a, b)$  وإذا كان  $\text{god}(a, b) = 1$  فإن العددين أوليان نسبياً فيما بينهما .

❖ **المضاعف المشترك الأصغر :** أصغر مضاعف مشترك لأي زوج من الأعداد الصحيحة  $a, b$  ليس كليهما صفر . يسمى المضاعف المشترك الأصغر ويرمز له بالرمز  $\text{lcm}(a, b)$

### ملاحظة :

من أفضل الطرق لإيجاد القاسم المشترك الأكبر والمضاعف المشترك الأصغر هي أشكال فن

### تدريب 1 :

إذا كان  $\text{lcm} [12, 15, 50, k] = 2100$  . ماهي أقل قيمة للمقدار  $k$

### الحل :

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

## تدريب ٢ :

أوجدني أقل عدد صحيح موجب أكبر من الواحد عند قسمته على كل من ٢, ٣, ٤, ٥, ٦, ٧, ٨, ٩ فإن الباقي يساوي واحداً .

الحل :

.....

.....

.....

.....

.....

.....

## تدريب ٣ :

إذا كان  $\text{god}(a,b) = 6$  ،  $\text{lcm}[a,b] = 72$  أوجدني قيمة  $a+b$  إذا كان  $a > b > 6$

الحل :

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

# رابعاً: التراكيبات



## المفردات

- مضروب العدد
- التباديل
- التوافيق
- نظرية ذات الحدين ومثلث باسكال
- مبدأ برج الحمام

## حقائق ومسابيل في التركيبات

### عد قائمة من الأعداد

إذا كان لدينا عددين  $a, b$  بحيث  $b > a$  فإن عدد حدود قائمة من الأعداد تبدأ من  $a$  وتنتهي بالعدد  $b$  يساوي :

$$b - a + 1$$

فمثلاً : عدد الأعداد في القائمة : 9,10,11,.....,60 هو  $60 - 9 + 1 = 52$

### مبادئ العدّ

#### (١) مبدأ الضرب:

إذا كان عدد طرق إنجاز المهمة الأولى هو  $n$  عنصر وعدد عناصر المهمة الثانية  $m$  عنصر

فإن عدد طرق إنجاز المهمتين هو  $n \cdot m$  ، أي أن :

إذا كان  $A, B$  مجموعتين بحيث عدد عناصر  $A$  يساوي  $n$  ، عدد عناصر  $B$  يساوي  $m$

فإن عدد عناصر المجموعة  $A \times B$  يساوي  $n \cdot m$

كما يمكن تعميم هذا المبدأ لحساب عدد طرق إنجاز أكثر من مهمتين .

فمثلاً :

مطعم يقدم 4 أصناف من اللحم ، 3 أصناف من السلطة ، 6 أصناف من الحلوى كم عدد الوجبات المختلفة التي يمكن تقديمها ، وتكون كل منها من لحم وسلطة وحلوى في هذا المطعم ؟

عدد الوجبات المختلفة التي يمكن تقديمها وتكون كل منها من لحم وسلطة وحلوى في هذا المطعم :  $4 \times 3 \times 6 = 72$

#### (٢) مبدأ الجمع :

إذا كان لا يمكن إنجاز مهمتين في الوقت نفسه وكان عدد طرق إنجاز المهمة الأولى هو  $n$  عنصر

وعدد عناصر المهمة الثانية  $m$  عنصر فإن عدد طرق إنجاز المهمتين هو  $n + m$  ، أي أن :

إذا كان  $A, B$  مجموعتين منفصلتين بحيث عدد عناصر  $A$  يساوي  $n$  ، عدد عناصر  $B$  يساوي  $m$

فإن عدد عناصر اتحادهما يساوي  $n + m$

فمثلاً :

خمس شركات نقل تقوم برحلات يومية من الرياض إلى جدة ، وثلاث شركات طيران تقوم برحلات يومية من الرياض إلى جدة

∴ عدد طرق الرحلات من الرياض إلى جدة تساوي  $(5 + 3 = 8)$



أحيانا تكون مسألة إيجاد عدد الطرق لإجراء معين مركبة من مبدأ الجمع ومبدأ الضرب

## مضروب العدد

مضروب العدد الصحيح الموجب  $n$  هو حاصل ضرب الأعداد الصحيحة الموجبة من 1 إلى  $n$  ويرمز لها بالرمز  $n!$

ويقرأ بمضروب  $n$  أي أن :

$$n! = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \dots \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$$

فمثلاً :

$$5! = 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 120, 4! = 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24, 3! = 3 \cdot 2 \cdot 1 = 6, 2! = 2 \cdot 1 = 2, 1! = 1$$



$$(n+1)! = (n+1) \cdot \overbrace{n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \dots \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}^{n!} = (n+1)n! \quad (١)$$

$$6! = 6 \cdot 5! = 720 \quad \text{فمثلاً :}$$

$$0! = 1 \quad (٢) \text{ مضروب الصفر } = 1 \text{ أي أن :}$$

## التباديل

التباديل هو الاختيار المرتب لمجموعة من العناصر سواء أخذت كلها أو بعضها أي أن :

إذا كانت لدينا مجموعة تحوي  $n$  من العناصر وأردنا اختيار  $r$  منها مع مراعاة الترتيب فإن عدد الاختيارات هو :

$${}_nP_r = p(n, r) = \frac{n!}{(n-r)!} = n \cdot (n-1) \cdot \dots \cdot (n-r+1)$$

عادة نرمز لها بالرمز :  $p(n, r)$  أو  $p_r^n$  أو  ${}_nP_r$

فمثلاً :

$${}_{11}P_6 = p(11, 6) = \frac{11!}{(11-6)!} = \frac{11 \cdot 10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot \cancel{5} \cdot \cancel{4} \cdot \cancel{3} \cdot \cancel{2} \cdot \cancel{1}}{\cancel{5} \cdot \cancel{4} \cdot \cancel{3} \cdot \cancel{2} \cdot \cancel{1}} = 332640$$

$${}_{11}P_6 = p(11, 6) = 11 \cdot 10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 = 332640 \quad \text{أو}$$

$${}_7P_3 = p(7, 3) = 7 \cdot 6 \cdot 5 = 210$$

$${}_{10}P_2 = p(10, 2) = 10 \cdot 9 = 90$$

$${}_5P_5 = p(5, 5) = 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 5! = 120$$



$${}_nP_1 = p(n, 1) = n \quad (٢)$$

$${}_nP_n = p(n, n) = n \cdot (n-1) \cdot \dots \cdot 2 \cdot 1 = n! \quad (١)$$

التوافيق هو اختيار مجموعة من العناصر من مجموعة ما يكون الترتيب فيها غير مهم أي أن :  
إذا كانت لدينا مجموعة تحوي  $n$  من العناصر وأردنا اختيار مجموعات جزئية منها تحوي  $r$  من العناصر فإن عدد الاختيارات هو :

$${}_nC_r = \binom{n}{r} = \frac{{}_nP_r}{r!} = \frac{n \cdot (n-1) \cdot \dots \cdot (n-r+1)}{r!} = \frac{n!}{r!(n-r)!}$$

عادة نرمز لها بالرمز :  ${}_nC_r$  أو  $\binom{n}{r}$  ويقرأ  $n$  توفيق  $r$  أو  $n$  فوق  $r$  .

فمثلاً :

$$\binom{8}{5} = \frac{8!}{5!(8-5)!} = \frac{8!}{5!3!} = \frac{8 \cdot 7 \cdot \cancel{6} \cdot \cancel{5} \cdot \cancel{4} \cdot \cancel{3} \cdot \cancel{2} \cdot \cancel{1}}{\cancel{5} \cdot \cancel{4} \cdot \cancel{3} \cdot \cancel{2} \cdot \cancel{1} \cdot \cancel{3} \cdot \cancel{2} \cdot 1} = 56 \quad (1)$$

أو :

$$\binom{8}{5} = \frac{{}_8P_5}{5!} = \frac{8 \cdot 7 \cdot \cancel{6} \cdot \cancel{5} \cdot \cancel{4}}{\cancel{5} \cdot \cancel{4} \cdot \cancel{3} \cdot \cancel{2} \cdot 1} = 56$$

$$\binom{8}{3} = \frac{{}_8P_3}{3!} = \frac{8 \cdot 7 \cdot \cancel{6}}{\cancel{3} \cdot \cancel{2} \cdot 1} = 56 \quad (2)$$

$$\binom{5}{5} = \frac{{}_5P_5}{5!} = \frac{\cancel{5} \cdot \cancel{4} \cdot \cancel{3} \cdot \cancel{2} \cdot \cancel{1}}{\cancel{5} \cdot \cancel{4} \cdot \cancel{3} \cdot \cancel{2} \cdot \cancel{1}} = 1 \quad (3)$$

$$\binom{3}{1} = \frac{{}_3P_1}{1!} = \frac{3}{1} = 3$$

(4)



$$\binom{n}{1} = n \quad (3) \quad \binom{n}{n} = \binom{n}{0} = 1 \quad (2) \quad \binom{n}{r} = \binom{n}{n-r} \quad (1)$$

$$\binom{n}{r} = \binom{n-1}{r} + \binom{n-1}{r-1} \quad (2) \text{ قاعدة باسكال}$$

$$\binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \dots + \binom{n}{n} = 2^n \quad (3)$$



(١) كم عدد الأعداد الفردية المربعة المحصورة بين 5 إلى 211 ؟  
الحل:

بما أن  $3^2 < 5 < 15^2$  ،  $13^2 < 211 < 15^2$  ، بالتالي يصبح لدينا القائمة :  $3^2, 5^2, 7^2, \dots, 13^2$   
بالتالي عدد الأعداد الصحيحة الفردية المربعة المحصورة بين 5 ، 211 هي :  $13 - 3 + 1 = 11$  عدد .

(٢) بكم طريقة يمكن ترتيب 5 كتب مختلفة على رف ؟  
الحل :

لاختيار الكتاب الأول 5 طرق ، وللكتاب الثاني 4 طرق ، وللكتاب الثالث 3 طرق ، وللكتاب الرابع طريقتان ، والكتاب الخامس له طريقة واحدة وعلى حسب مبدأ الضرب يكون لدينا  $5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 120$  طريقة

وبصورة عامة عدد التباديل الممكنة لـ  $n$  عنصر هو  $n!$

(٣) بكم طريقة ممكنه يمكن أن يجلس سبعة طلاب في الحالات التالية :

(أ) في صف من الكراسي بحيث ألا يجلس خالد ومحمد في كرسيين متتالين ؟  
(ب) على طاولة مستديرة ؟

الحل :

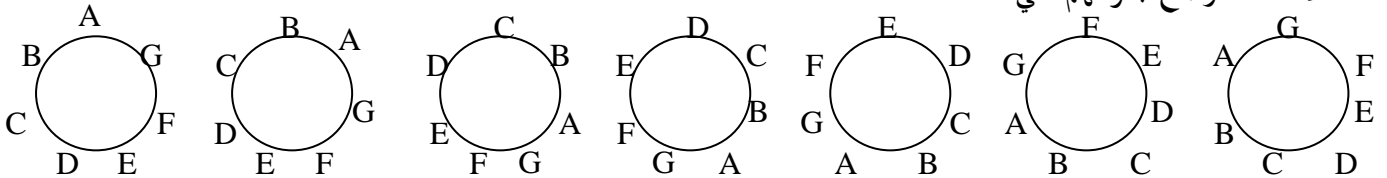
(أ) في صف من الكراسي بحيث ألا يجلس خالد ومحمد في كرسيين متتالين ؟  
عدد طرق جلوس كل الطلاب بدون شروط هو  $7!$  .

عدد طرق جلوس الطلاب بشرط أن يجلس خالد ومحمد بجوار بعضهما هو  $6! \times 2!$  . حيث نستطيع أن نجعل خالد ومحمد شخص واحد وبذلك نستطيع ترتيبهم بعدد طرق  $6!$  ، ثم نرتب جلوس خالد ومحمد بعدد طرق  $2!$  . بالتالي عدد طرق سبعة طلاب في صف من الكراسي بحيث ألا يجلس خالد ومحمد في كرسيين متتالين هو  $7! - 6! \times 2! = 3600$  .

(ب) على طاولة مستديرة ؟

يمكن للطلاب جلوسهم في صف واحد هو  $7!$  ، ولنفرض أن الطلاب هم :  $A, B, C, D, E, F, G$

نلاحظ أن أوضاع جلوسهم هي :

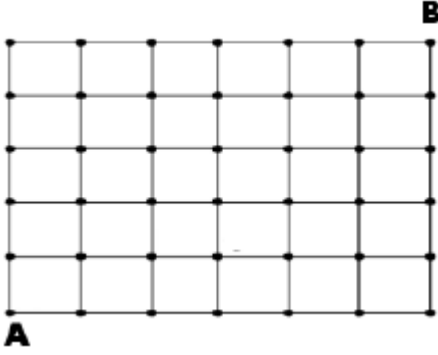


وكلها تمثل نفس الوضع وبالتالي كل وضع جلوس سيتكرر 7 مرات وبالتالي سوف نقسم  $7!$  على 7

أي أن عدد طرق جلوس الطلاب على طاولة مستديرة :  $\frac{7!}{7} = 6! = 720$

وبصورة عامة عدد التباديل الدائرية الممكنة لـ  $n$  عنصر هو  $(n-1)!$

٤) إذا لدينا شبكة من نوع  $6 \times 5$  كم مساراً من  $A$  إلى  $B$  يسير على خطوط الشبكة بحيث يكون السير لليمين أو للأعلى فقط



الحل :

عند رسم عدة مسارات مختلفة نجد أن كل مسار من  $A$  إلى  $B$  :

$11 = 6 + 5$  خطوة ، خمسة منها رأسية و ستة خطوات أفقية

عدد طرق المسارات يساوي عدد طرق اختيار 6 مواضع (الخطوات الأفقية)

$$\text{من } 11 \text{ أي أن عدد المسارات هي : } \binom{11}{6} = \binom{6+5}{6}$$

وبصورة عامة عدد المسارات الممكنة للوصول من النقطة  $A$  إلى  $B$  على الشبكة  $m \times n$  هو  $\binom{m+n}{m}$

٥) كم عدداً صحيحاً زوجياً يمكن تكوينه من 4 خانات ؟

الحل :

لاحظ يمكن تكوين أي عدد بدون شروط من الأرقام التالية : (0,1,2,3,4,5,6,7,8,9)

ولكن يكون العدد زوجي إذا كانت خانة الآحاد تحتوي على احد الأرقام التالية : (0,2,4,6,8) ويمكن اختيار ذلك بـ 5 طرق

وحيث أن العدد مكون من 4 خانات فلا يمكن أن يكون في خانة الآلاف العدد 0 ويمكن اختيار خانة الآلاف بـ 9 طرق

أما خانة العشرات فلها 10 طرق ، وكذلك خانة المئات لها 10 طرق ومن مبدأ العد :

$$\text{عدد الأعداد الزوجية والمكونة من 4 خانات} = 4500 = 5 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 9 \text{ عدد}$$

٦) في أحد نوادي الرياضيات عدد الأعضاء 10 تتكون من 4 رجال و 6 نساء يراد تكوين لجنة تحكيم للمسابقات مكونة من 4

أعضاء :

أ) بكم طريقة يمكن تكوين اللجنة وتعين رئيساً لها ومساعداً له ؟

ب) بكم طريقة يمكن تكوين اللجنة شريطة أن تتضمن رجل على الأقل ؟

الحل :

أ) بكم طريقة يمكن تكوين اللجنة وتعين رئيساً لها ومساعداً له ؟

$$\binom{10}{4} = \frac{{}_{10}P_4}{4!} = \frac{10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7}{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = 210 = \text{عدد طرق اختيار اللجنة (4 أعضاء من 10)}$$

$${}_4P_2 = 4 \cdot 3 = 12 = \text{عدد طرق اختيار رئيس ومساعد من اللجنة (4 أعضاء)}$$

$$\therefore \text{عدد طرق تكوين اللجنة وتعين رئيساً لها ومساعداً له} = 210 \cdot 12 = 2520$$

ب) بكم طريقة يمكن تكوين اللجنة شريطة أن تتضمن رجل على الأقل ؟

$$\text{عدد طرق تكوين اللجنة شريطة أن تتضمن رجل على الأقل} = \text{عدد طرق اختيار اللجنة من الأعضاء} - \text{عدد طرق اختيار اللجنة من النساء}$$

$$\binom{10}{4} - \binom{6}{4} = 210 - 15 = 195$$



(١) كم عدد المضارب المحصورة بين  $1!$  إلى  $100!$  و تقبل القسمة على 9 ؟

(٢) أوجد خانة الآحاد للمجموع :  $1! + 2! + 3! + \dots + 100!$

(٣) كم عدد الأعداد المكونة من ثلاثة خانات التي ليست من مضاعفات العدد 7 ؟

(٤) في مكتبة يوجد أربع أنواع من الدفاتر في كل نوع من الدفاتر يوجد 7 ألوان ومن كل منهما يوجد نوعين الأول مجلد والآخر أبو سلك فكم نوع من الدفاتر تحوي المكتبة ؟

(٥) بكم طريقة مختلفة يمكن لـ 9 طلاب الجلوس على طاولة مستديرة ؟ إذا لم يقبل أثنين منهم بالجلوس بجانب بعض فبكم طريقة يمكنهم الجلوس ؟

(٦) إذا كان خالد يمتلك ستة قمصان و ستة بنطلونات و ستة قبعات ، بحيث كل منها لها ستة ألوان ، إذا رفض خالد أن يلبس الطقم الذي يكون فيه الثلاثة أجزاء لها اللون نفسه . بكم طريقة يمكنه ذلك ؟

(٧) إذا أردنا تكوين مجلس مكون سبعة أعضاء : ثلاثة طلاب و أربعة معلمين .

بكم طريقة يمكن أن يجلس الأعضاء في صف من الكراسي بحيث:

(أ) المعلمين في بداية الصف ؟ (ب) المعلمين بجوار بعضها البعض ؟

(٨) كم عدد مكون من ثلاث خانات بحيث :

(أ) له خانة زوجية فقط (ب) له خانات زوجية فقط وبدون تكرار

(ج) له خانات زوجية فقط وفيه خانتين فقط متكررة (د) له خانة زوجية واحدة

(٩) عائلة مكونة من أب وأم و 4 بنات و 3 أولاد بكم طريقة يمكن للعائلة الوقوف في صف واحد لأخذ صورة تذكارية :

(أ) إذا كان الأب والأم متجاوران ويفصلان البنين والبنات

(ب) إذا توسط الأب والأم الصف أبنائهما وبقي متجاوران

(١٠) إذا كان  $P_{m-n} = 72$  ,  $P_{m+n} = 210$  فما قيمة كل من  $m, n$  ؟

(١١) إذا كان  $P_r = 2520$  فما قيمة كل من  $r$  ؟

(١٢) أوجد المعادلة التالية حيث  $n$  عدد طبيعي  $\frac{n! - (n-1)!}{(n+1)!} = \frac{1}{6}$

## نظرية ذات الحدين ومثلث باسكال

مقدمة :

لقد درسنا سابقاً كيفية إيجاد مفكوك المتطابقات الآتية والمكونة من حدين أحدها الأول  $a$  وحدها الثاني  $b$

$$(a + b)^1 = a + b$$

$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

$$(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$

$$(a + b)^4 = a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4$$

الأطراف اليمنى فيما سبق هي نماذج لمفكوك ذات الحدين عندما يكون  $n = 1, 2, 3, 4$  حيث أننا نلاحظ في هذه المفكوكات ما يأتي :

عدد الحدود في كل مفكوك يزيد واحداً عن الأس في الطرف الأيسر .

الحد الأول في المفكوك للعدد  $a$  مرفوعاً لنفس الأس في الطرف الأيسر ثم ينقص الأس للعدد  $a$  في الحدود التالية بمقدار الواحد على التوالي

العدد  $b$  يبدأ ظهوره في الحد الثاني ثم يزيد أس العدد  $b$  بمقدار واحد على التوالي

مجموع الأس للعددين  $a$  ،  $b$  في أي حد من حدود المفكوك ثابت ويساوي الأس في الطرف الأيسر

معامل الحد الأول في المفكوك يساوي معامل الحد الأخير يساوي واحد ، ومعامل الحد الثاني يساوي معامل الحد ما قبل الأخير ، وهكذا .....

وبصورة عامة مفكوك  $(a + b)^n$  يتمتع بنفس الخواص السابقة

نظرية ذات الحدين

تنص نظرية ذات الحدين

$$(a + b)^n = \sum_{r=0}^n \binom{n}{r} a^{n-r} b^r = \binom{n}{0} a^n + \binom{n}{1} a^{n-1} b + \binom{n}{2} a^{n-2} b^2 + \dots + \binom{n}{n-1} a b^{n-1} + \binom{n}{n} b^n$$

مثال :

(٣)  $(x - 1)^5$

(٢)  $(x + 1)^5$

اوجد مفكوك ما يلي : (١)  $(x + 2)^4$

$$\begin{aligned} (x + 2)^4 &= \sum_{r=0}^4 \binom{4}{r} x^{4-r} \cdot 2^r = \binom{4}{0} x^{4-0} \cdot 2^0 + \binom{4}{1} x^{4-1} \cdot 2^1 + \binom{4}{2} x^{4-2} \cdot 2^2 + \binom{4}{3} x^{4-3} \cdot 2^3 + \binom{4}{4} x^{4-4} \cdot 2^4 \\ &= x^4 + 4 \cdot x^3 \cdot 2 + \frac{4 \cdot 3}{2 \cdot 1} x^2 \cdot 4 + \frac{4 \cdot 3 \cdot 2}{3 \cdot 2 \cdot 1} x \cdot 8 + 16 = x^4 + 8x^3 + 24x^2 + 32x + 16 \end{aligned} \quad (١)$$



(

$$= x^5 - 5x^4 + 10x^3 - 10x^2 + 5x - 1$$

مثال :

ما هو معامل الحد  $x^6y^2$  في مفكوك  $(2x^2-3y)^5$

لاحظ الحد  $x^6 y^2 = (x^2)^3 \cdot y^2$  ينتج عندما  $r=2$  في الحد  $a^{n-r} b^r$  أي أن :

720

∴ معامل الحد  $x^6 y^2$  هو

## مثلت باسکال

$$(a+b)^0$$

$$(a+b)^1$$

$$(a+b)^2$$

$$(a+b)^3$$

$$(a+b)^4$$

$$(a+b)^5$$

$$(a+b)^6$$

$$(a+b)^7$$

العدد الثالث      العدد الثاني      العدد الأول      العدد الصفري

عبارة عن مثلث من الأعداد له نمط محدد و مكون من صفوف متتابة من الأعداد الصحيحة الموجبة ويبدأ المثلث بالعدد 1 في أول صف

ثم تتزايد الأعداد بمعدل عدد في كل صف ، كل عدد في صف معين ينتج من العددين اللذين على يمينه ويساره من الصف الأعلى منه مباشرة ماعدا أعداد ساقى المثلث فجميعها 1

لاحظ أعداد مثلث باسكال هي معاملات المفكوك في نظرية ذات الحدين

$$(a+b)^0 = 1$$

$$(a+b)^1 = a+b$$

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

$$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$

$$(a+b)^4 = a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4$$



وهكذا .....

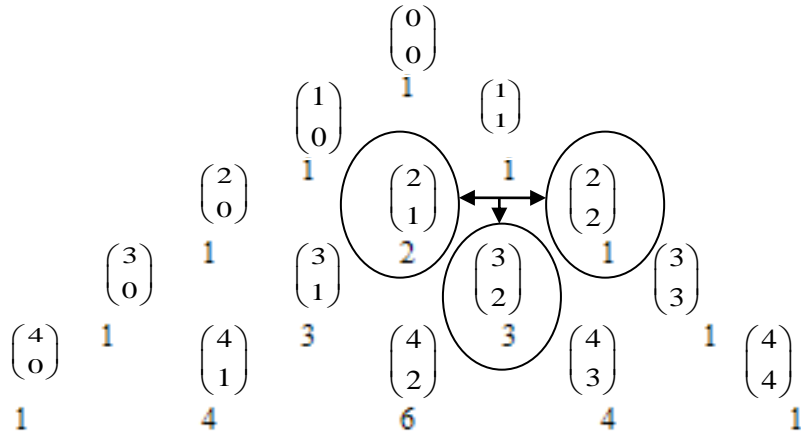


(١) لاحظ أن العدد ذو الترتيب  $k$  في الصف  $n$  هو  $\binom{n}{k}$

$$\binom{6}{3} = \frac{{}_6P_3}{3!} = \frac{6 \cdot 5 \cdot 4}{3 \cdot 2 \cdot 1} = 20$$

فمثلاً : العدد الثالث في الصف السادس هو 20

(٢) من أهم ما يمكن استنتاجه من مثلث باسكال هو قاعدة باسكال :



$$\dots\dots\dots \text{ لاحظ : } \binom{3}{2} = \binom{2}{2} + \binom{2}{1}$$

$$\text{فمثلاً : } \binom{60}{11} = \binom{59}{11} + \binom{59}{10}$$

وبصورة عامة تنص قاعدة باسكال :

$$\boxed{\binom{n}{r} = \binom{n-1}{r} + \binom{n-1}{r-1}}$$



(١) ما هو معامل الحد  $x^7y^3$  في مفكوك  $(x + 2xy)^7$

### الحل :

لاحظ الحد  $x^7 y^3 = x^4 \cdot (xy)^3$  ينتج عندما  $r = 3$  في الحد  $a^{n-r} b^r \binom{n}{r}$  أي أن :

$$\binom{7}{3} (x)^{7-3} (2xy)^3 = \frac{7 \cdot 6 \cdot 5}{3 \cdot 2 \cdot 1} \cdot x^4 \cdot 8 \cdot x^3 y^3 = 280 x^7 y^3$$

280  $x^7 y^3$  الحد  $x^7 y^3$  هو  $\therefore$  معامل

(٢) اوجد قيمة  $(11)^5$  باستخدام نظرية ذات الحدين

**الحل :**

$$\begin{aligned}
 (11)^5 &= (10+1)^5 = \sum_{r=0}^5 \binom{5}{r} 10^{5-r} \cdot 1^r = \sum_{r=0}^5 \binom{5}{r} 10^{5-r} \\
 &= \binom{5}{0} 10^{5-0} + \binom{5}{1} 10^{5-1} + \binom{5}{2} 10^{5-2} + \binom{5}{3} 10^{5-3} + \binom{5}{4} 10^{5-4} + \binom{5}{5} 10^{5-5} \\
 &= 100000 + 5 \cdot 10000 + \frac{5 \cdot 4}{2 \cdot 1} \cdot 1000 + \frac{5 \cdot 4}{2 \cdot 1} \cdot 100 + 5 \cdot 10 + 1 \\
 &= 100000 + 50000 + 10000 + 1000 + 50 + 1 = 161050
 \end{aligned}$$

$$\sum_{r=0}^n \binom{n}{r} = \binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \dots + \binom{n}{n-1} + \binom{n}{n} \quad \text{٣) أحسب قيمة :}$$

**الحل :**

### من نظرية ذات الحدين

$$(a+b)^n = \sum_{r=0}^n \binom{n}{r} a^{n-r} b^r = \binom{n}{0} a^n + \binom{n}{1} a^{n-1} b + \binom{n}{2} a^{n-2} b^2 + \dots + \binom{n}{n-1} a b^{n-1} + \binom{n}{n} b^n$$

بوضع  $a=1, b=1$  نجد أن :

$$(1+1)^n = 2^n = \sum_{r=0}^n \binom{n}{r} 1^{n-r} 1^r = \binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \dots + \binom{n}{n-1} + \binom{n}{n}$$



(١) اكتب مفكوك كل مما يلي :  $(x + \frac{1}{x})^4$  ،  $(x\sqrt{y} - y\sqrt{x})^4$

(٢) ما هو معامل الحد  $a^{16}$  في مفكوك  $(a + \frac{2}{a})^{30}$

(٣) اثبت (باستخدام نظرية ذات الحدين) أن العدد  $3^{2n} - 8n - 1$  يقبل القسمة على 64 حيث  $n$  عدد صحيح موجب

(٤) اكتب مفكوك ذات الحدين قبل الفك :

$$\binom{8}{0} + \binom{8}{1}x^2 + \binom{8}{2}x^4 + \binom{8}{3}x^6 + \dots + \binom{8}{7}x^{14} + \binom{8}{8}x^{16}$$

(٥) اكتب ما يلي كتوافيق :

$$\binom{19}{18} + \binom{19}{17} \quad (\text{أ})$$

$$\binom{101}{50} - \binom{100}{50} \quad (\text{ب})$$

$$\binom{n}{0} - \binom{n}{1} + \binom{n}{2} - \binom{n}{3} + \dots + (-1)^n \binom{n}{n} = 0 \quad (\text{٦}) \text{ أثبت أن}$$

$$\binom{n}{0} + \binom{n}{2} + \binom{n}{4} + \dots + \binom{n}{m} = 2^{n-1} \quad (\text{٧}) \text{ أثبت أن حيث } m \text{ هو أكبر عدد زوجي بحيث } m \leq n$$

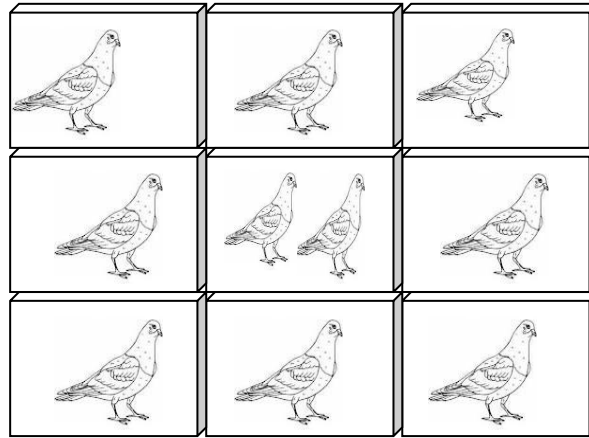
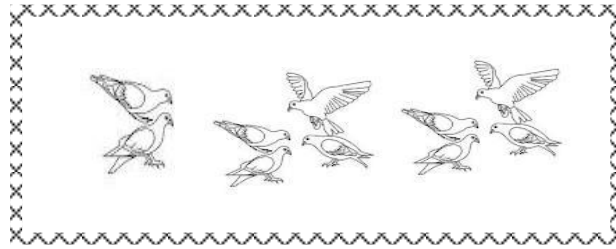
$$\binom{11}{0} + \binom{11}{2} + \dots + \binom{11}{10} = \binom{11}{1} + \binom{11}{3} + \dots + \binom{11}{11} \quad (\text{٨}) \text{ اثبت أن :}$$

## مبدأ برج الحمام

يعتبر مبدأ برج الحمام من المبادئ الحسابية التي قد ترد في الحياة اليومية وقد تتعرض لموقف أو تجربة وتستخلص منها النتيجة باستخدام هذا المبدأ

ينص مبدأ برج الحمام ( مبدأ درشليه ) على أنه :

إذا كان لدينا  $n + 1$  حمامة ونريد وضعها في  $n$  صندوق فيوجد على الأقل صندوق به أكثر من حمامة



وبصورة عامة :

إذا كان لدينا  $nk + 1$  حمامة ونريد وضعها في  $n$  صندوق فيوجد على الأقل صندوق به أكثر من  $k + 1$  حمامة

ويكون النص الرياضي لمبدأ برج الحمام :

على أنه إذا كان لديك  $n + 1$  شيئاً ونريد وضعها في  $n$  موضعاً فإن أحد هذه المواضع على الأقل يحتوي على شيئين أو أكثر.

صيغة أخرى لمبدأ برج الحمام: إذا كان لدينا  $nk + 1$  شيئاً ونريد وضعها في  $n$  موضعاً فإن أحد هذه المواضع على الأقل يحتوي على  $k + 1$  شيئاً أو أكثر.



مثال (١) :

اثبت انه إذا كان عدد طلاب فصلك 25 طالباً فإن ثلاثة منهم على الأقل ولدوا في الشهر نفسه .

الحل :

نفرض انه لدينا 12 موضعاً ، كل موضع يخص شهر من السنة بحيث يقف كل طالب في الموضع الخاص بشهر ميلاده  
إذاً أحد هذه المواضع يوجد به على الأقل ثلاثة طلاب أو أكثر

مثال (٢)

اثبت أن كل تجمع فيه  $n$  من الأشخاص يوجد بينهما اثنان على الأقل لهما نفس العدد من المعارف (الأصدقاء) داخل هذا التجمع ،  
هنا خذ في الاعتبار أن الشخص  $x$  صديق للشخص  $y$  ، وهذا يعني أن  $y$  صديق  $x$  .

الحل :

لننشئ  $n$  موضعاً :  $0, 1, 2, \dots, k, \dots, (n-2), (n-1)$

وكل موضع نحدد له رقم وحيد  $k$  من بين الأرقام ليتجمع في ذلك الموضع الأشخاص الذين لهم  $k$  من الأصدقاء  
فمثلاً : الموضع ذو الرقم (0) سيجمع فيه أولئك الذين لا يعرفون احد .

الموضع ذو الرقم (1) سيجمع فيه أولئك الذين لكل فرد منهم صديق واحد فقط .

الموضع ذو الرقم (2) سيجمع فيه أولئك الذين لكل فرد منهم صديقين .

الآن لننظر أولاً للموضع رقم صفر : إذا كان هناك شخص على الأقل في هذا الموضع فهذا يعني أنه لا يعرف أحداً وبالتالي لا يعرفه

أحد وبالتالي الموضع رقم  $(n-1)$  ليس فيه أحد لأنه خاص بمن يعرف الكل وبذلك يتوزع  $n$  شخصاً على  $(n-1)$  موضعاً .

أما إذا كان الموضع رقم صفر خالياً فإن  $n$  شخصاً سيوزعون على بقية المواضع وعددها  $(n-1)$  .

إذا في كلتا الحالتين سيتوزع  $n$  شخصاً على  $(n-1)$  موضعاً ومن مبدأ برج الحمام أحد هذه المواضع فيه شخصين أو أكثر ،

وهذا يبين أن شخصين على الأقل لهما نفس العدد من الأصدقاء .

مثال (٣)

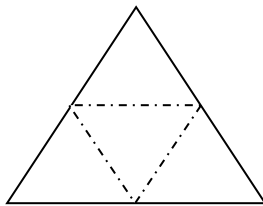
لدينا 5 نقط داخل مثلث متساوي الأضلاع طول ضلعه 2 سنتمراً ، أثبت وجود نقطتين على الأقل المسافة بينهما أقل من 1 سنتمتر .

الحل :

نقسم المثلث إلى أربع مثلثات كل منها طول ضلعه 1

من مبدأ برج الحمام عند توزيع النقاط الخمس على هذه الأجزاء

لا بد من وجود نقطتين في نفس المثلث وبالتالي المسافة بينهما أقل من 1





- (١) حقيبة فيها 6 أقلام زرقاء و 8 حمراء و 11 سوداء ، ما هو أقل عدد من الأقلام التي يجب سحبها عشوائياً من الحقيبة حتى نضمن أن من بينها 5 أقلام على الأقل لون واحد ؟
- (٢) لنفرض أن مطار الملك فهد الدولي يستقبل 1500 طائرة يومياً . أثبت أنه يوجد طائرتان على الأقل تهبطان في غضون دقيقة في المطار .
- (٣) اختيرت 17 نقطة داخل مربع طول ضلعه 8 أثبت أنه يوجد نقطتان على الأقل المسافة بينهما أقل من أو تساوي  $2\sqrt{2}$
- (٤) يعمل في شركة توزيع جرائد ما 505 عامل توزيع . كل عامل يوزع على الأقل 10 جرائد وعلى الأكثر 30 جريدة يومياً . اثبت أن هناك على الأقل 25 من العمال سيوزع نفس عدد الجرائد يومياً .
- (٥) 100 نقطة مرسومة داخل مكعب طول ضلعه 1 سم . أثبت أنه توجد أربع نقط على الأقل محتواه داخل مكعب حجمه  $\frac{1}{27}$
- (٦) لتكن  $A$  مجموعة من الأعداد الصحيحة فيها 21 عدد . أثبت وجود عددين  $x, y \in A$  بحيث أن  $x - y$  يقبل القسمة على 20
- (٧) تم تلوين جميع نقاط المستوى باستخدام لونين فقط الأحمر والأزرق . أثبت أن هناك نقطتان لهما نفس اللون المسافة بينهما 99 .

## المراجع

[١] الجوعي، عبدالله محمد ، مسائل تحضيرية لأولمبياد الرياضيات ، مطابع الحميضي ،

١٤٣١ هـ / ٢٠١٠ م

[٢] فوزي الذكير ، أندريكا دورين ، رياضيات الأولمبياد – الجبر ، دار الخريجي للنشر والتوزيع

، ١٤٣٢ هـ / ٢٠١١ م

[٣] د. صالح عبدالله ، د. معروف عبدالرحمن سمحان والسنوسي ، استراتيجيات المسائل ، دار

الخريجي ، ٢٠١٥ م

[٤] د. معروف سمحان ، نظرية الاعداد وتطبيقاتها ، دار الخريجي للنشر والتوزيع ، ٢٠١٠

م

[٥] احمد حميد شراري والدكتور محمد الزهيري ، مقدمة في نظرية الاعداد ، جامعة الملك

عبدالعزيز – دار الحميضي – ٢٠١٢ م

[6] Richard Rusczyk, Introduction to Algebra , Aops  
Incorporated.2008

[٦] طارق الصيعري – فوزية المغامسي ، اولمبياد الرياضيات للمبتدئين ٢٠١٤

[٧] سلطان البركاتي – مبادئ اسلسية لاولمبياد الرياضيات