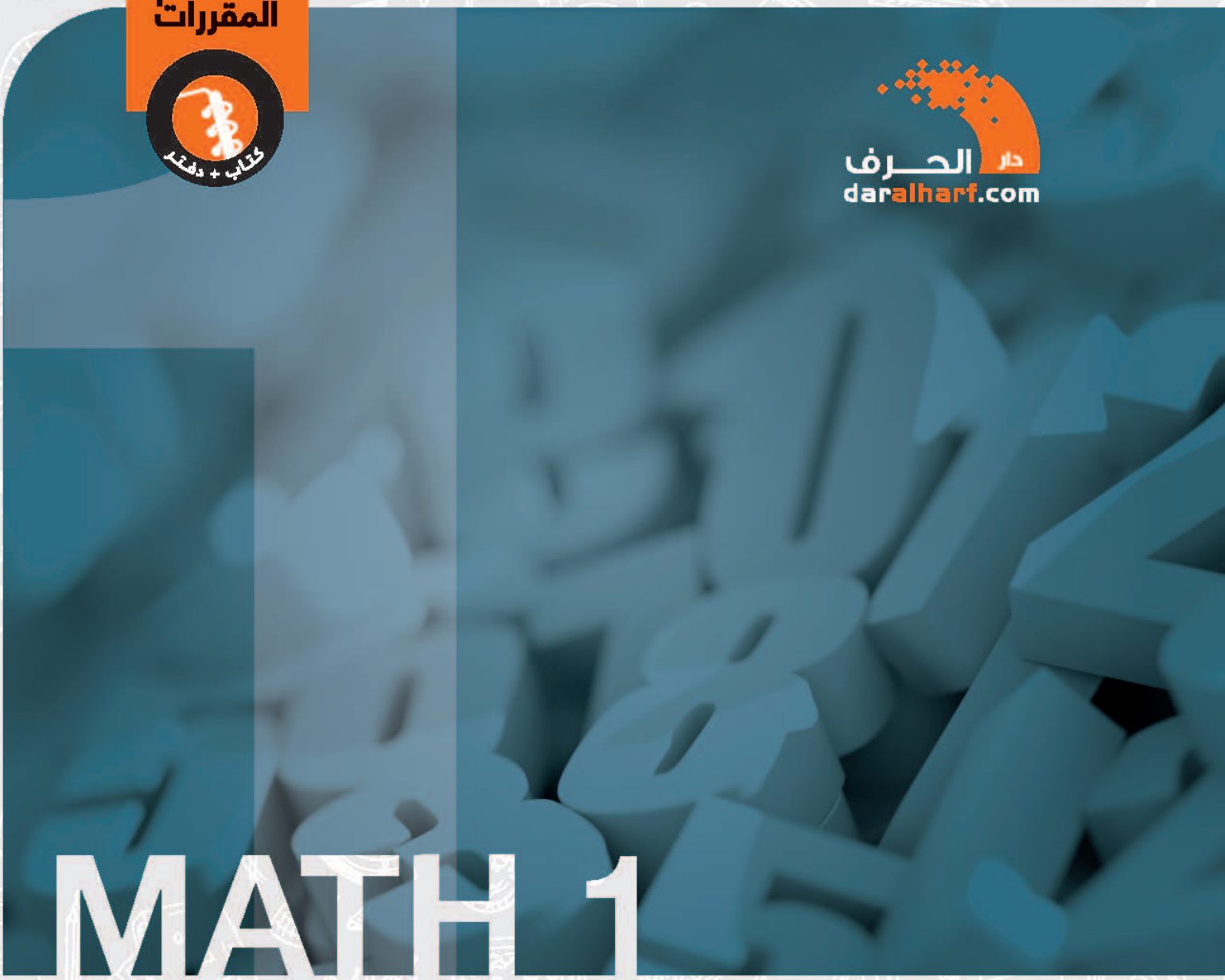
متوافق مع
نظام
المقررات

كتاب + دفتر



دار الحرف
daralharf.com

MATH 1

التبسيط و دفتر تدريبات

الرياضيات 1

تأليف
ناصر بن عبدالعزيز آل عبدالكريم
والفريق العلمي في دار الحرف

دورات الحرف

- اختبار القدرات
- الاختبار التحصيلي
- كفايات المعلمين

زيادة في درجتك تصل إلى **23** درجة

معدل درجات المشتركين أعلى من المعدل العام بـ **11** درجة

حقق بعض المشتركين الدرجة الكاملة **%100**

الدورات الحضورية
في المدن التالية

الدورات الإلكترونية المباشرة (online)
في جميع المدن (تدرب وأنت في بيتك)

دار الحرف
daralharf.com

للاطلاع على التجارب الموثقة للمشتركين والتسجيل
daralharf.com

للاستفسار
050 154 2222
050 154 9000

متوافق مع نظام المقررات

دار الحرف
daralharf.com

دفتر تبسيط وتدريبات

الرياضيات 1

دفتر تبسيط وتدريبات

الرياضيات 1

© ناصر بن عبدالعزيز آل عبدالكريم ، ١٤٣٩هـ

فهرسة مكتبة الملك فهد أثناء النشر

آل عبدالكريم ، ناصر بن عبدالعزيز بن ناصر
دفتر تبسيط وتدريبات الرياضيات ١. / ناصر بن عبدالعزيز آل عبدالكريم ـ الرياض ، ١٤٣٩ هـ

١٦٢ صفحة ؛ ٢٢×٢٤ سم

ردمك: ٣-٧٣٤٢-٠٢-٦٠٣-٩٧٨

١- الرياضيات ـ كتب إرشادية أ العنوان

ديوي ٥١٠,٧١٢ ١٤٣٩/٨٩٤٨

رقم الإيداع: ١٤٣٩/٨٩٤٨
ردمك: ٣-٧٣٤٢-٠٢-٦٠٣-٩٧٨

حقوق الطبع محفوظة كلها . لا يُسمح بطبع أيّ جزء من أجزاء هذا الكتاب، أو خزنه في أيّ نظام لخزن المعلومات واسترجاعها، أو نقله على أيّة هيئة أو بأيّة وسيلة سواءً كانت إلكترونية أو شرائط ممغنطة أو ميكانيكية، أو استنساخًا، أو تسجيلاً، أو غيرها إلا بإذن كتابيّ من مالك حق الطبع.

المقدمة

الحمد لله رب العالمين وصلى الله وسلم على نبينا محمد وعلى آله وصحبه أجمعين وبعد:

فقد حرصنا أن يكون أسلوب عرض هذا الكتاب ـ وإصدارات دار الحرف بشكل عام ـ مبسطاً قدر المستطاع ليتمكن الطلاب والطالبات من الاستفادة منه بأقل جهد.

كما بذلنا ما استطعنا من جهد أن تجمع إصدارات الدار بين الاختصار والشمولية.

نسأل الله تعالى أن يوفق الجميع لكل خير إنه على كل شيءٍ قدير.

ناصر بن عبد العزيز آل عبد الكريم

الرياض

المحتويات

الفصل الأول: التبرير والبرهان	٥
الفصل الثاني: التوازي والتعامد	٦١
الفصل الثالث: المثلثات المتطابقة	٩٩
الفصل الرابع: العلاقات في المثلث	١٣١

الفصل الأول

التبرير والبرهان

▼ التهيئة للفصل الأول ▼

التهيئة للفصل 1

◄ **اختبار سريع ص11:** أوجد قيمة كل عبارة مما يلي عند قيمة x المعطاة:

(1) $4x+7\ ;\ x=6$. **(4)** $\frac{x(x-3)}{2}\ ;\ x=6$.

◄ الحل:

(1) نعوض 6 بدل x ..

$$4(6)+7=24+7=31$$

(4) نعوض 6 بدل x ..

$$\frac{6(6-3)}{2}=\frac{6(3)}{2}=\frac{18}{2}=9$$

◄ **اختبار سريع ص11(6):** اكتب التعبير اللفظي «أقل من خمسة أمثال عدد بثمانية» على صورة عبارة جبرية.

◄ **الحل:** التعبير «أقل من خمسة أمثال عدد بثمانية» يُكتب بالصورة الجبرية $5x-8$.

◄ **اختبار سريع ص11:** أوجد حل المعادلات التالية:

(8) $8x-10=6x$. **(9)** $18+7x=10x+39$.

◄ الحل:

(8) حل المعادلة $8x-10=6x$ ..

$$8x-10=6x$$

$$2x-10=0 \quad \text{(طرحنا } 6x \text{ من الطرفين)}$$

$$2x=10 \quad \text{(أضفنا 10 للطرفين)}$$

$$x=5 \quad \text{(قسمنا الطرفين على 2)}$$

(9) حل المعادلة $18+7x=10x+39$ ..

$$18+7x=10x+39$$

$$18-3x=39 \quad \text{(طرحنا } 10x \text{ من الطرفين)}$$

$$-3x=21 \quad \text{(طرحنا 18 من الطرفين)}$$

$$x=-7 \quad \text{(قسمنا الطرفين على } -3 \text{)}$$

▼ 1-1 التبرير الاستقرائي والتخمين ▼

التخمين

- **المقصود به:** العبارة النهائية التي يتم التوصل إليها باستعمال التبرير الاستقرائي.
- **التبرير الاستقرائي:** تبرير تستعمل فيه أمثلة محددة للوصول إلى نتيجة.
- **المثال المضاد ..**
  - لنفي تخمين يكفي إعطاء مثال واحد معاكس للتخمين.
  - المثال الذي يكون فيه التخمين غير صحيح يسمى **مثالاً مضاداً**.

- تحقق من فهمك(1A) ص13: اكتب تخميناً يصف النمط لمتتابعة أشهر: صفر، رجب، ذو الحجة، جمادى الأولى، .. ، ثم استعمله لإيجاد الحد التالي.
  - الحل:

	المحرم	صفر	ربيع ١	ربيع ٢	جمادى ١	جمادى ٢	رجب	شعبان	رمضان	شوال	ذو القعدة	ذو الحجة
السنة١	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
السنة٢	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12

نلاحظ أن الشهر الثاني في المتتابعة يأتي بعد خمسة أشهر من الشهر السابق ..

∴ الشهر التالي في المتتابعة شوال

- تحقق من فهمك(1B) ص13: اكتب تخميناً يصف النمط $(\ldots, -8, -2, 4, 10)$، ثم استعمله لإيجاد الحد التالي، (إبدأ من اليسار).
  - الحل:

−14	للتوضيح: أي حد ينقص عن الحد السابق بمقدار 6

- تحقق من فهمك ص13: ضع تخميناً وأعط أمثلة أو ارسم شكلاً يوضح تخمينك:

(2A) ناتج جمع عددين زوجيين.

(2B) العلاقة بين AB و EF إذا كانت: $AB = CD$ و $CD = EF$.

(2C) مجموع مربعي عددين كليين متتاليين.

01/1 ◄ ضع ✓ أو × : لنفي تخمين يكفي إعطاء مثال واحد معاكس للتخمين.

02/1 ◄ **املأ الفراغ:** المثال الذي يكون فيه التخمين غير صحيح يسمى مثالاً .....

03/1 ◄ اختر: إذا كان النقط تقع في مستوى واحد و $LM = 20,\ LN = 14, NM = 6$ ، مما التخمين الذي يوضح العلاقة بين النقط L, M, N ؟

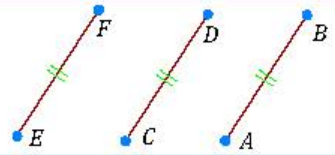
A L, M, N تقع على استقامة واحدة

B L, M, N لا تقع على استقامة واحدة

C M هي المنتصف بين L, N

D $LM = LN - NM$

◄ الحل:

التخمين	الأمثلة
(2A) عدد زوجي	$2+4=6\ ,\ 6+8=14\ ,\ 8+12=20$
$EF = AB$ **(2B)**	
(2A) عدد فردي	$2^2+3^2=4+9=13\ ,\ 4^2+5^2=16+25=41$

◄ **تحقق من فهمك ص15:** أعط مثالاً مضاداً يبين أن كلاً من التخمينات التالية خاطئة.

(4A) إذا كان n عدداً حقيقيًا، فإن $-n$ يكون سالبًا.

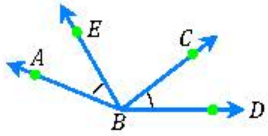
(4B) إذا كان: $\angle DBC \cong \angle ABE$ فإن $\angle ABE$ ، $\angle DBC$ متقابلتان بالرأس.

◄ الحل:

(4A) المثال المضاد: نختار العدد الحقيقي (-2) ..

$$n=-2 \implies -n=-(-2)=2$$ عدد موجب

(4B) المثال المضاد كما بالرسم ..



$\angle DBC \cong \angle ABE$ ولكنهما غير متقابلتين بالرأس

1-2 المنطق

العبارة

- **المقصود بها:** جملة خبرية لها حالتان فقط إما تكون صائبة **(T)** أو تكون خاطئة **(F)** .
- **رمزها:** يُرمز لها بأحد الرموز مثل p أو q .
- **نفي العبارة ..**
  - نفي العبارة الصائبة عبارة خاطئة، ونفي العبارة الخاطئة عبارة صائبة.
  - إذا كان رمز عبارة ما p فإن رمز نفيها $\sim p$ تُقرأ «نفي p» أو «ليس p».
- **نوعا العبارة ..**

بسيطة	مركبة
تحوي خبراً واحداً فقط	تحوي أكثر من خبر
قياس الزاوية المستقيمة $180°$	للمربع أربعة أضلاع ومجموع قياس زواياه الداخلية $360°$

- **قيمة الصواب وجداول الصواب ..**

قيمة الصواب لعبارة	جدول الصواب لعبارتين	جدول الصواب لعبارة ونفيها
قيم الصواب الممكنة لأيّ عبارة هي صحة العبارة (T) أو خطأ العبارة (F)	p | q T | T T | F F | T	p | $\sim p$ T | F F | T

04 املأ الفراغ: إذا كانت A عبارة صائبة فإن $\sim A$ عبارة .....

05 املأ الفراغ: العبارة التي تحوي خبراً واحداً تسمى عبارة .....

06 ضع ✓ أو × : العبارة «الزاوية التي قياسها $90°$ زاوية قائمة» عبارة بسيطة خاطئة.

07 ضع ✓ أو × : العبارة «للمثلث ثلاثة أضلاع ومجموع قياسات زواياه الداخلية $180°$» عبارة مركبة.

08 اختر: أي العبارات التالية صائبة؟

A أبها مدينة سعودية

B شهر رمضان 31 يوماً

C قياس الزاوية الحادة $90°$

D $\frac{1}{2}+\frac{3}{2}=1$

09 ضع ✓ أو × : العبارة المركبة $p \wedge q$ صائبة في حالة واحدة فقط عندما p و q صائبتان معًا.

10 ضع ✓ أو × : العبارة المركبة $p \vee q$ خاطئة في حالة واحدة فقط عندما p و q صائبتان معًا.

عبارتا الوصل والفصل

المقصود بعبارتي الوصل والفصل ..

العبارة	أداة الربط	المثال	بالرموز
عبارة الوصل	و	الشمس غائبة والوقت ليل	$p \wedge q$
عبارة الفصل	أو	الشمس غائبة أو الوقت ليل	$q \vee p$

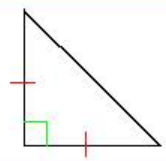
جدول الصواب لعبارة الوصل: عبارة الوصل تكون صائبة في حالة واحدة فقط عندما p و q صائبتان معًا.

p	q	$p \wedge q$
T	T	T
T	F	F
F	T	F
F	F	F

جدول الصواب لعبارة الفصل: عبارة الفصل تكون خاطئة في حالة واحدة فقط عندما p و q خاطئتان معًا.

p	q	$p \vee q$
T	T	T
T	F	T
F	T	T
F	F	F

تحقق من فهمك ص19: استعمل العبارات p, q, r والشكل المجاور لكتابة عبارة الوصل المنطقي في كل مما يلي، ثم أوجد قيمة الصواب لها.



p : الشكل مثلث

q : في الشكل ضلعان متطابقان

r : جميع زوايا الشكل حادة

(1A) $p \wedge q$.

(1B) ليس p وليس r .

الحل: قبل البدء في الحل نُعين قيم الصواب للعبارات البسيطة المعطاة ..

	العبارة	قيمة الصواب
العبارة p	الشكل مثلث	T
العبارة q	في الشكل ضلعان متطابقان	T
العبارة r	جميع زوايا الشكل حادة	F

وبناءً عليه ..

(1A) العبارة $p \wedge q$: الشكل مثلث وفيه ضلعان متطابقان وقيمة الصواب لها T .

(1B) العبارة ليس p وليس r $(\sim p \wedge \sim r)$: الشكل ليس مثلثًا وليست جميع زواياه حادة وقيمة الصواب لها F .

◄ **تحقق من فهمك ص20:** استعمل العبارات p, q, r لكتابة عبارة الفصل في كل مما يأتي، ثم أوجد قيمة الصواب لها مبررًا اجابتك.

p	يناير من أشهر فصل الربيع
q	عدد أيام شهر يناير 30 يومًا فقط
r	يناير هو أول أشهر السنة الميلادية

(2A) p أو r **(2B)** $q \vee \sim r$ **(2C)** $p \vee \sim q$

◄ **الحل:** قبل البدء في الحل نُعين قيم الصواب للعبارات البسيطة المعطاة ..

◁ فائدة: فصل الربيع يبدأ في شهر مارس، وهو شهر 3 الميلادي بينما يناير هو شهر 1 الميلادي، أي أن يناير يأتي في الشتاء قبل فصل الربيع.

	العبارة	قيمة الصواب
العبارة p	يناير من أشهر الربيع	F
العبارة q	عدد أيام شهر يناير 30 يومًا فقط	F
العبارة r	يناير هو أول أشهر السنة الميلادية	T

وبناءً عليه ..

(2A) p أو r : يناير هو أول أشهر السنة الميلادية أو يناير من أشهر فصل الربيع وقيمة الصواب لها T .

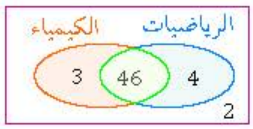
(2B) $q \vee \sim r$: عدد أيام شهر يناير 30 يومًا فقط أو يناير ليس أول شهر في السنة الميلادية وقيمة الصواب لها F .

(2C) $p \vee \sim q$: يناير من أشهر الربيع أو عدد أيام شهر يناير ليس 30 يومًا فقط وقيمة الصواب لها T .

◄ **تحقق من فهمك ص21 (3):** أنشئ جدول الصواب للعبارة $\sim p \wedge \sim q$.

◄ **الحل:** جدول الصواب للعبارة $\sim p \wedge \sim q$ ..

p	q	$\sim p$	$\sim q$	$\sim p \wedge \sim q$
T	T	F	F	F
T	F	F	T	F
F	T	T	F	F
F	F	T	T	T



◄ **تحقق من فهمك ص22 (4):** يبين شكل فن المجاور عدد طلاب الصف الأول الثانوي الذين نجحوا والذين لم ينجحوا في اختباري الرياضيات أوالكيمياء.

(A) ما عدد الطلاب الذين نجحوا في اختبار الرياضيات ولم ينجحوا في اختبار الكيمياء؟

(B) ما عدد الطلاب الذين نجحوا في اختبار الرياضيات واختبار الكيمياء؟

(C) ما عدد الطلاب الذين لم ينجحوا في أيٍّ من الاختبارين؟

(D) ما عدد طلاب الصف الأول الثانوي؟

◄ الحل:

(A) عدد الطلاب الذين نجحوا في اختبار الرياضيات ولم ينجحوا في اختبار الكيمياء يساوي 4 .

(B) عدد الطلاب الذين نجحوا في اختبار الرياضيات واختبار الكيمياء يساوي 46 .

(C) عدد الطلاب الذين لم ينجحوا في أيٍّ من الاختبارين يساوي 2 .

(D) عدد طلاب الصف الأول الثانوي يساوي ..

عدد الطلاب = $3 + 46 + 4 + 2 = 55$ طالبًا

11 املأ الفراغ: في الجملة الشرطية «إذا كان المضلع منتظمًا فإن أضلاعه متطابقة» جملة «المضلع منتظمًا» تسمى ..... .

12 املأ الفراغ: في الجملة الشرطية «إذا كان المضلع منتظمًا فإن أضلاعه متطابقة» جملة «أضلاعه متطابقة» تسمى ..... .

13 ضع ✓ أو × : العبارة «إذا كان الشكل مربعًا فإن زواياه قوائم» عبارة صائبة.

14 ضع ✓ أو × : العبارة «إذا كان $3 + 9 = 5$ فإن $2 > 4$» عبارة صائبة.

1-3 العبارات الشرطية

العبارة الشرطية

المقصود بها: العبارة «إذا كان ... فإن ...» تُسمى عبارة شرطية.

رمزها: $p \rightarrow q$ (ونقرأها إذا كان p فإن q).

الفرض والنتيجة: الجملة التي بعد «إذا كان» تسمى الفرض، والجملة التي بعد «فإن» تسمى النتيجة.

مثال توضيحي: إذا كان المثلث متطابق الأضلاع فإن زواياه متطابقة.

جدول الصواب للعبارة الشرطية: تكون خاطئة في حالة واحدة فقط إذا كان الفرض صحيحًا والنتيجة خاطئة.

p	q	$p \rightarrow q$
T	T	T
T	F	F
F	T	T
F	F	T

تحقق من فهمك ص26: حدد الفرض والنتيجة في كلٍّ من العبارات الشرطية التالية:

(1A) إذا كان لمضلع ستة أضلاع فإنه سداسي.

(1B) سيتم انجاز طبعة ثانية من الكتاب إذا بيعت نسخ الطبعة الأولى كلها.

الحل:

(1A) **الفرض:** للمضلع ستة أضلاع، **النتيجة:** المضلع سداسي.

(1B) **الفرض:** بيعت الطبعة الأولى كلها ، **النتيجة:** سننجز طبعة ثانية من الكتاب.

تحقق من فهمك ص27: حدد الفرض والنتيجة في كل عبارة شرطية، ثم اكتبها على صورة (إذا ... فإن ...):

(2A) يمكن تبديل 5 أوراق نقدية من فئة الريال بورقة نقدية واحدة من فئة 5 ريالات.

(2B) مجموع قياس الزاويتين المتتامتين يساوي $90°$.

الحل:

(2A) **الفرض:** لديك 5 أوراق نقدية من فئة الريال، **النتيجة:** يمكن أن تبدلها بورقة واحدة من فئة 5 ريالات.

العبارة الشرطية: إذا كان لديك 5 أوراق نقدية من فئة الريال فإنه يمكنك أن تبدلها بورقة واحدة من فئة 5 ريالات.

(2B) **الفرض:** الزاويتان متتامتان، **النتيجة:** مجموع قياسيهما $90°$.

العبارة الشرطية: إذا كانتا الزاويتان متتامتين فإن مجموع قياسيهما $90°$.

◄ **تحقق من فهمك ص28:** حدد قيمة الصواب لكل عبارة شرطية فيما يلي وإذا كانت خاطئة فأعط مثالاً مضاداً.

(3A) إذا كانت $\angle A$ حادة فإن $m\angle A = 35°$.

(3B) إذا كانت $\sqrt{x} = -1$ فإن $(-1)^2 = -1$.

◄ **الحل:**

(3A) العبارة خاطئة.

المثال المضاد: إذا كانت $m\angle A = 70°$ فإن $\angle A$ حادة ولكن قياسها ليس $35°$.

(3A) بما أن $\sqrt{x}$ دائماً موجب فإن الفرض $(\sqrt{x} = -1)$ خاطئ ⇐ العبارة الشرطية صائبة.

15 ◄ ضع ✓ أو × : في العبارة الشرطية «إذا تجاورت زاويتان فإن لهما الرأس نفسه» عكس العبارة هو «إذا كان لزاويتين الرأس نفسه فهما متجاورتان».

16 ◄ ضع ✓ أو × : في العبارة الشرطية «إذا تجاورت زاويتان فإن لهما الرأس نفسه» معكوس العبارة هو «إذا كان لزاويتين الرأس نفسه فهما متجاورتان».

17 ◄ املأ الفراغ: المعاكس الإيجابي للعبارة الشرطية «إذا كان مجموع قياسات زوايا مضلع $180°$ فإنه مثلث» هو «.....».

18 ◄ اختر: العبارة $\sim(p \wedge q)$ تكافئ منطقيًا ..

A $p \vee \sim q$

B $\sim p \vee \sim q$

C $\sim p \wedge \sim q$

D $\sim p \vee q$

العبارات الشرطية المرتبطة

العبارة	مكوناتها	الرمز	مثال
الشرطية	فرض معطى ونتيجة	$p \to q$	إذا كان $m\angle A = 35°$ فإن $\angle A$ حادة
العكس	تبديل الفرض والنتيجة	$q \to p$	إذا كان $\angle A$ حادة فإن $m\angle A = 35°$
المعكوس	نفي كل من الفرض والنتيجة	$\sim p \to \sim q$	إذا كان $m\angle A \neq 35°$ فإن $\angle A$ ليست حادة
المعاكس الإيجابي	نفي كل من الفرض والنتيجة في عكس العبارة الشرطية	$\sim q \to \sim p$	إذا لم تكن $\angle A$ حادة فإن $m\angle A \neq 35°$

العبارات المتكافئة منطقيًا

◄ **المقصود بها:** عبارات لها نفس قيم الصواب.

◄ العبارة الشرطية ومعاكسها الإيجابي متكافئان منطقيًا.

◄ عكس العبارة الشرطية ومعكوسها متكافئان منطقيًا.

◄ $\sim(p \wedge q)$ تكافئ منطقيًا $\sim p \vee \sim q$ ، $\sim(p \vee q)$ تكافئ منطقيًا $\sim p \wedge \sim q$.

19 ◄ اختر: العبارة $(p \vee q) \sim$ تكافئ منطقيًا ..

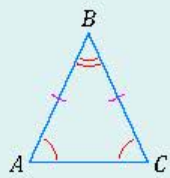
A $p \vee \sim q$

B $\sim p \vee \sim q$

C $\sim p \wedge \sim q$

D $\sim p \vee q$

20 ◄ اختر: في الشكل: أي العبارات التالية لها نفس لها نفس قيمة صواب العبارة $AB = BC$ ؟



A $m\angle A = m\angle C$

B $m\angle A = m\angle B$

C $AC = BC$

D $AB = AC$

◄ تحقق من فهمك(5A) ص30: اكتب العكس والمعكوس والمعاكس الإيجابي للعبارة الشرطية «الزاويتان اللتان لهما القياس نفسه متطابقتان»، ثم حدد ما إذا كان أيٌّ منها صائبًا أو خاطئًا، وإذا كان خاطئًا فأعط مثالاً مضادًا.

◄ الحل:

العبارة	الصيغة	قيمة الصواب
العكس	إذا كانت الزاويتان متطابقتين، فإن لهما القياس نفسه	T
المعكوس	إذا لم يكن لزاويتين القياس نفسه، فإنهما غير متطابقتين	T
المعاكس الإيجابي	إذا لم تكن الزاويتان متطابقتين، فإنه لا يكون لهماالقياس نفسه	T

◄ تحقق من فهمك(5B) ص30: اكتب العكس والمعكوس والمعاكس الإيجابي للعبارة الشرطية «الفأر من القوارض»، ثم حدد ما إذا كان أيٌّ منها صائبًا أو خاطئًا، وإذا كان خاطئًا فأعط مثالاً مضادًا.

◄ الحل:

العبارة	الصيغة	قيمة الصواب
العكس	إذا كان الحيوان من القوارض فإنه فأر	F
المثال المضاد: «السنجاب من القوارض، لكنة ليس فأرًا»		
المعكوس	إذا لم يكن الحيوان فأرًا، فإنه لا يكون من القوارض	F
المثال المضاد: «السنجاب ليس فأرًا، ولكنه من القوارض»		
المعاكس الإيجابي	إذا لم يكن الحيوان من القوارض، فإنه ليس فأرًا	T

▼ 1-4 التبرير الاستنتاجي ▼

21/1 ◄ **املأ الفراغ:** قانون الفصـــل المنطقي و قانون القياس المنطقي من أنواع التبرير ..... .

22/1 ◄ **املأ الفراغ:** من أنواع التبرير الاســـتنتـاجي قانون ..... المنطقي وقانون ..... المنطقي.

التبرير الاستنتاجي والتبرير الاستقرائي

◄ **التبرير الاستنتاجي:** استعمال حقائق وقواعد وتعريفات وخصائص للوصول إلى نتائج منطقية.

◄ **مثال توضيحي:** الطريقة التي يستعملها المحققون من أجل تحديد الجاني.

◄ **من أنواع التبرير الاستنتاجي:** قانون الفصل المنطقي، قانون القياس المنطقي.

◄ **التبرير الاستقرائي:** استعمال أنماط من الأمثلة أو المشاهدات لعمل تخمين.

◄ **مثال توضـــيحي:** قيام طالب بثلاث محاولات لقياس زوايا المثلث الداخلية وإيجاد مجموعهم، فاكتشف أن مجموع قياسات الزوايا الداخلية للمثلث 180° .

◄ **تحقق من فهمك ص37:** حدِّد ما إذا كانت النتيجة قائمة على التبرير الاســـتنتاجي أم التبرير الاستقرائي في كلٍّ مما يلي:

(1A) يجْري طالب مرحلة ابتدائية تجربة دمج الألوان في المختبر، فقام بثلاث محاولات للحصـــول على درجة معينة من اللون الرمادي، فاكتشـــف أنه كلما زادت كمية اللون الأسود كانت درجة اللون الرمادي أغمق.

(1B) دُعي خالد إلى حفل عشـــاء، وقد حضـــر جميع المدعوين الحفل؛ إذن فقد حضـــر خالد الحفل.

◄ **الحل:**

(1A) بما أن الطالب اســـتعمل عدة مشـــاهدات لعمل تخمين فإن النتيجة قائمة على التبرير الاستقرائي.

(1B) بما أنه تم اســـتعمال حقائق وقواعد وتعريفات وخصـــائص للوصـــول إلى نتائج منطقية فإن النتيجة قائمة على التبرير الاستنتاجي.

23 ◄ ضـــع ✓ أو × : إذا كانت العبارة الشـــرطية $p \to q$ صائبة والفرض p صائبًا فإن q خاطئة.

24 ◄ اختر: استعمل قانون الفصل المنطقي للحصول على نتيجة صحيحة بناءً على ..

المعطيات: • إذا تغيب أكثر من 10 أعضاء فلن يعقد الاجتماع.

• تغيب 12 عضواً.

A يعقد الاجتماع

B لن يعقد الاجتماع

C الانتظار حتى حضور جميع الأعضاء

D لا يوجد نتيجة صحيحة

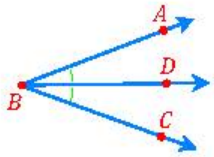
قانون الفصل المنطقي

◄ **استعماله:** يُستعمل للحصول على النتائج من عبارات شرطية صائبة.

◄ **نصه:** إذا كانت العبارة الشرطية $p \to q$ صائبة والفرض p صائبًا فإن النتيجة q صائبة أيضًا.

◄ **مثال توضيحي:** لتكن العبارة الشـرطية «إذا كان نصـف المسـتقيم منصـفًا لزاوية فإنه يقسـمها إلى زاويتين متطابقتين» صـائبة؛ حدد ما إذا كانت النتيجة صـائبة أو خاطئة بناءً على المعطيات ..

المعطيات: $\overrightarrow{BD}$ ينصف $\angle ABC$ ، النتيجة: $\angle ABD \cong \angle CBD$.



◄ **الحل:** النتيجة صائبة؛ لأن العبارة الشرطية المعطاة صائبة والفرض صائب.

◄ **تحقق من فهمك(2A) ص38:** حدد ما إذا كان الاسـتنتاج صـائبًا أم لا اعتمادًا على المعطيات، فسّر تبريرك.

المعطيات: • إذا كانت ثلاث نقاط لا تقع على استقامة واحدة، فإنها تحدد مستوى.

• النقاط A, B, C تقع في المستوى G .

الاستنتاج: النقاط A, B, C لا تقع على استقامة واحدة.

◄ **الحل:** الاسـتنتاج خاطئ، قد تقع النقاط A, B, C في المسـتوى G وتكون على استقامة واحدة.

◄ **تحقق من فهمك(2B) ص38:** حدد ما إذا كان الاسـتنتاج صـائبًا في كلٍّ مما يأتي أم لا اعتمادًا على المعطيات، فسّر تبريرك.

المعطيات: • إذا أحضر الطالب موافقة من ولي أمره، فإنه يمكنه الذهاب في الرحلة المدرسية.

• أحضر سلمان موافقة من ولي أمره.

الاستنتاج: يمكن أن يذهب سلمان في الرحلة المدرسية.

◄ **الحل:** الاستنتاج صائب، بحسب قانون الفصل المنطقي.

◄ **تحقق من فهمك(3) ص39:** حدد ما إذا كان الاستنتاج صائبًا أم لا اعتمادًا على المعطيات.

المعطيات: • إذا كان الشكل مربعًا فإنه مضلع.

• الشكل A مربع.

الاستنتاج: الشكل A مضلع.

◄ **الحل:** الاستنتاج صائب، لأن كل مربع هو مضلع.

25 ◄ ضع ✓ أو × : إذا كانت العبارتان الشرطيتان $q \to r$ و $p \to q$ صائبتين فإن العبارة الشرطية $p \to r$ صائبة.

26 ◄ اختر: أيُّ العبارات التالية تنتج منطقيًا عن العبارتين التاليتين؟

(1) إذا أنهى جمال واجبه المنزلي، فإنه سيذهب مع زملائه.

(2) إذا ذهب جمال مع زملائه، فإنه سيذهب إلى المنتزه.

A إذا ذهب جمال مع زملائه، فإنه يكون قد أنهى واجبه المنزلي.

B إذا أنهى جمال واجبه المنزلي، فسيذهب إلى المنتزه.

C إذا لم يذهب جمال إلى المنتزه، فإنه لم يذهب مع زملائه

D إذا لم يُنه جمال واجبه المنزلي، فإنه لن يذهب إلى المنتزه.

قانون القياس المنطقي

◄ **استعماله:** يُستعمل للحصول على نتائج من عبارتين شرطيتين صائبتين عندما تكون نتيجة العبارة الشرطية الأولى هي الفرض في العبارة الشرطية الثانية.

◄ **نصه:** إذا كانت العبارتان الشرطيتان $q \to r$ و $p \to q$ صائبتين فإن العبارة الشرطية $p \to r$ صائبة أيضًا.

◄ **مثال توضيحي:** إذا كان $2x = 14$ فإن $x = 7$ وإذا كان $x = 7$ فإن $\frac{1}{x} = \frac{1}{7}$ ؛ ومنه فإنه ..

إذا كان $2x = 14$ فإن $\frac{1}{x} = \frac{1}{7}$

◄ **تحقق من فهمك(4) ص40:** أيُّ العبارات التالية تنتج منطقيًا عن العبارتين التاليتين؟

(1) إذا لم تأخذ قسطًا كافيًا من النوم، فسوف تكون مرهقًا.

(2) إذا كنت مرهقًا فلن يكون أداؤك في الاختبار جيدًا.

(A) إذا كنت مرهقًا إذن أنت لم تأخذ قسطًا كافيًا من النوم.

(B) إذا لم تأخذ قسطًا كافيًا من النوم فلن يكون أداؤك في الاختبار جيدًا.

(C) إذا لم يكن أداؤك في الاختبار جيدًا فإنك لم تأخذ قسطًا كافيًا من النوم.

(D) لا توجد نتيجة صائبة.

◄ **الحل:** نفرض أن ..

p : لم تأخذ قسطًا كافيًا من النوم ، q : سوف تكون مرهقًا ،

r : لن يكون أداؤك في الاختبار جيدًا

العبارتان الشرطيتان $p \to q$ و $q \to r$ صائبتان

وباستعمال قانون القياس المنطقي نستنتج أن العبارة الشرطية $p \to r$ صائبة ؛ ومنه فإن ..

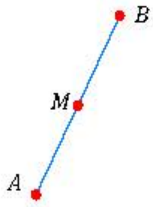
العبارة «إذا لم تأخذ قسطًا كافيًا من النوم فلن يكون أداؤك في الاختبار جيدًا» صائبة

∴ العبارة (B) تنتج منطقيًا للعبارتين (1) ، (2)

◄ **تحقق من فهمك(5) ص40:** استعمل قانون الفصل المنطقي أو قانون القياس المنطقي؛ لتحصـــل على نتيجة صـــائبة إن أمكن من العبارتين التاليتين، واذكر القانون الذي استعملته، إذا تعذر الحصول على نتيجة صائبة فاكتب «لا نتيجة صائبة»، وفسِّر تبريرك.

المعطيات: • إذا كانت القطعتان المســـتقيمتان متطابقتين فإن طوليهما متساويان.

• M منتصف $\overline{AB}$.



◄ **الحل:** نفرض أن ..

p : القطعتان المستقيمتان متطابقتين ، q : القطعتان المستقيمتان طوليهما متساوي

بما أن M نقطة منتصف $\overline{AB}$ فإن $\overline{AM} \cong \overline{MB}$ فإن ..

$AM = MB$ بحسب قانون الفصل المنطقي

▼ 1-5 المُسلّمات والبراهين الحرة ▼

المُسلّمات

◄ **المسلمة:** عبارة تُقبل على أنها صحيحة دون برهان.

◄ **مسلمات النقاط والمستقيمات والمستويات ..**

١ ◄ أي نقطتين يمر بهما مستقيم واحد فقط.

٢ ◄ أي ثلاث نقاط لا تقع على استقامة واحدة يمر بها مستوى واحد فقط.

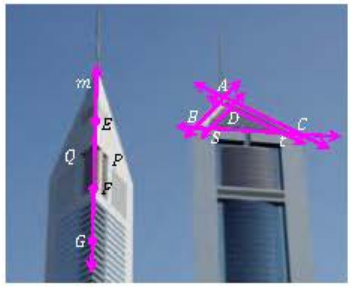
٣ ◄ كل مستقيم يحوي نقطتين على الأقل.

٤ ◄ كل مستوى يحوي ثلاث نقاط على الأقل ليست على استقامة واحدة.

٥ ◄ إذا وقعت نقطتان في مستوى فإن المستقيم الوحيد المار بهاتين النقطتين يقع كُلّيًا في ذلك المستوى.

٦ ◄ إذا تقاطع مستقيمان فإن تقاطعهما نقطة واحدة فقط.

٧ ◄ إذا تقاطع مستويان مختلفان فإن تقاطعهما مستقيمًا.



◄ **تحقق من فهمك ص46:** اذكر المسلمة التي تبرر صحة كل عبارة مما يلي:

(1A) النقاط A, B, C تحدد مستوى.

(1B) يتقاطع المستويان $\mathcal{P}$ و Q في المستقيم m .

◄ **الحل:**

(1A) المسلمة الثانية: «كل ثلاث نقاط مختلفة ولا تقع على استقامة واحدة يمر بها مستوى واحد».

(1B) المسلمة السابعة: «إذا تقاطع مستويان فإن تقاطعهما مستقيمًا».

◄ **تحقق من فهمك ص46:** حدد ما إذا كانت كل جملة مما يلي صائبة دائمًا أو صائبة أحيانًا أو غير صائبة أبدًا، فسر تبريرك.

(2A) المستقيمان المتقاطعان يحددان مستوى.

(2B) تتقاطع ثلاثة مستقيمات في نقطتين.

---

27 ◄ ضع ✓ أو × : كل نقطتين يمر بهما معًا مستقيمان.

28 ◄ اختر: كل ..... لا تقع على مستقيم واحد يمر بها مستوى واحد.

A نقطة واحدة　　B نقطتين مختلفتين

C 3 نقاط مختلفة　　D 4 نقاط مختلفة

29 ◄ اختر: كل مستقيم يحوي على الأقل ..

A نقطة واحدة　　B نقطتين

C 3 نقاط　　D 4 نقاط

30 ◄ اختر: كل مستوى يحوي نقاطًا ليست على استقامة واحدة عددها على الأقل ..

A 2　　B 3

C 4　　D 5

31 ◄ ضع ✓ أو × : إذا وقعت نقطتان في مستوى فإن المستقيم الوحيد المار بهاتين النقطتين يقع كليًا في ذلك المستوى.

32 ◄ اختر: إذا تقاطع مستويان فإن تقاطعهما ..

A نقطة　　B نقطتين

C مستوى　　D مستقيم

33 ◄ ضع ✓ أو × : تقاطع مستقيمين هو مستقيم.

34 ◄ اختر: أيٌّ من العبارات التالية صائبة أحيانًا؟

A أيّ ثلاث نقاط تحدد مستوى

B يمكن أن يتقاطع مستويان في نقطة

C المستقيمان المتقاطعان يحددان مستوى

D المستقيمان يتقاطعان في نقطة.

35 ◄ اختر: لإثبات صحة عبارة أو تخمين باستعمال المفردات المعرفة والمسلمات والخصائص الجبرية للمساواة؛ نستخدم..

A البرهان B البرهان الحر

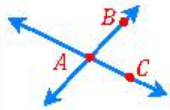
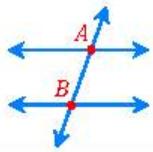
C النظرية D المسلمة

36 ◄ اختر: دليل منطقي تُكتب فيه كل عبارة مُبررة بعبارة سبق إثبات صحتها ..

A البرهان B البرهان الحر

C النظرية D المسلمة

◄ الحل:

م	الجواب	التوضيح	
(2A)	صائبة دائمًا	للمستقيمين المتقاطعين هناك على الأقل ثلاث نقاط لا تقع على استقامة واحدة تحدد مستوى	
(2B)	صائبة أحيانًا	يمكن أن يكون لثلاث مستقيمات تقع في المستوى نفسه عدد من نقاط التقاطع يساوي 2 كما يظهر في الشكل المجاور	

البرهان الحر

◄ **النظرية:** تُستخدم لإثبات صحة عبارة أو تخمين باستعمال المفردات المعرفة والمسلمات والخصائص الجبرية للمساواة.

◄ **البرهان:** دليل منطقي تُكتب فيه كل عبارة مُبررة بعبارة سبق إثبات صحتها.

◄ **البرهان الحر:** كتابة فقرة تُفسر أسباب صحة التخمين في موقف مُعطى.

◄ **خطوات كتابة البرهان ..**

١ ◄ نكتب المعطيات ونرسم شكلاً يوضحها إن أمكن.

٢ ◄ نكتب العبارة أو التخمين المطلوب إثباته.

٣ ◄ نستعمل التبرير الاستنتاجي لتكوين سلسلة منطقية من العبارات التي تربط المعطيات بالمطلوب.

٤ ◄ نُبرر كل عبارة باستعمال تعريفات أو خصائص جبرية أو مسلمات أو نظريات.

٥ ◄ نكتب العبارة أو التخمين الذي قمنا بإثباته.

37 اختر: في الشكل: إذا كان $\overline{AM} \cong \overline{MB}$ وكان $AM = 5$ فإن ..... $= AB$.

A) 2.5 B) 5 C) 7.5 D) 10

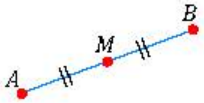
38 ضع ✓ أو × : في الشكل:

إذا كان $\overline{AM} \cong \overline{MB}$ وكان $AM = 5$ فإن $MB = 5$.

نظرية نقطة المتصف

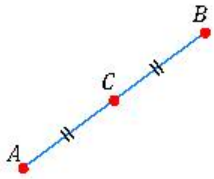
إذا كانت M نقطة متصف $\overline{AB}$ فإن ..

$\overline{AM} \cong \overline{MB}$



تحقق من فهمك(3) ص47: إذا كانت النقطة C تقع على $\overline{AB}$ حيث $\overline{AC} \cong \overline{CB}$ ، فاكتب برهانًا حرًا لاثبات أن C هي نقطة متصف $\overline{AB}$.

الحل:



المعطيات: النقطة C تقع على $\overline{AB}$ حيث $\overline{AC} \cong \overline{CB}$.

المطلوب: إثبات أن C هي نقطة متصف $\overline{AB}$.

البرهان: بما أن $\overline{AC} \cong \overline{CB}$ فإن ..

$AC = CB$ من تعريف تطابق القطع المستقيمة

$\therefore$ C هي نقطة متصف $\overline{AB}$ بحسب نظرية نقطة متصف قطعة مستقيمة

▼ 1-6 البرهان الجبري ▼

البرهان الجبري

◄ **المقصود به:** برهان يتكون من سلسلة عبارات جبرية باستخدام خصائص الأعداد الحقيقية.

◄ **من أنواعه:** البرهان ذو العمودين والبرهان الحر.

بعض خصائص الأعداد الحقيقية

خاصية الجمع	إذا كان $a=b$ فإن $a+c=b+c$
خاصية الطرح	إذا كان $a=b$ فإن $a-c=b-c$
خاصية الضرب	إذا كان $a=b$ فإن $a\cdot c=b\cdot c$
خاصية القسمة	إذا كان $a=b$ و $c\neq 0$ فإن $\frac{a}{c}=\frac{b}{c}$
خاصية الانعكاس	$a=a$
خاصية التماثل	إذا كان $a=b$ فإن $b=a$
خاصية التعدي	إذا كان $a=b$ و $b=c$ فإن $a=c$
خاصية التعويض	إذا كان $a=b$ فإن a تحل مكان b في أي معادلة أو أي مقدار جبري
خاصية التوزيع	$a(b+c)=ab+ac$
تنبيه	الخصائص السابقة صحيحة لأي ثلاثة أعداد حقيقية a,b,c

◄ **تحقق من فهمك ص54:** اذكر الخاصية التي تبرر كلاً من العبارتين التاليتين:

(1A) إذا كان $4+(-5)=-1$ فإن $x+4+(-5)=x-1$.

(1B) إذا كان $y=5$ فإن $5=y$.

◄ **الحل:**

(1A)	(1B)
خاصية الجمع	خاصية التماثل

39/1 ◄ **املأ الفراغ:** البرهان الذي يتكون من سلسلة عبارات جبرية باستخدام خصائص الأعداد الحقيقية يسمى البرهان ..... .

40/1 ◄ **املأ الفراغ:** بحسب خاصية التعدي للأعداد الحقيقية فإنه إذا كان $a=b$ و $b=c$ فإن ..... .

41/1 ◄ **املأ الفراغ:** بحسب خاصية التماثل للأعداد الحقيقية فإنه إذا كان $a=b$ فإن ..... .

42/1 ◄ **املأ الفراغ:** بحسب خاصية التوزيع للأعداد الحقيقية فإن ..... $=a(b+c)$.

43 ◄ املأ الفراغ: البرهان الذي يحوي العبارات مُرتَّبة في عمود والتبريرات مُرتَّبة في عمود موازٍ له يسمى البرهان .....

البرهان ذو العمودين

◄ **المقصود به:** برهان يحوي العبارات مُرتَّبة في عمود والتبريرات مُرتَّبة في عمود موازٍ له.

◄ **تحقق من فهمك(1C) ص54:** أثبت أنه إذا كان $2x - 13 = -5$ فإن $x = 4$ ، اكتب تبريراً لكل خطوة.

◄ الحل:

العبارات	المبررات
$2x - 13 = -5$	معطى
$2x - 13 + 13 = -5 + 13$	خاصية الجمع
$2x = 8$	بالتبسيط
$\frac{2x}{2} = \frac{8}{2}$	خاصية القسمة
$x = 4$	بالتبسيط

◄ **تحقق من فهمك(2A) ص54:** اكتب برهاناً ذا عمودين لإثبات صحة التخمين ..

إذا كان $\frac{5x+1}{2} - 8 = 0$ فإن $x = 3$.

◄ الحل:

العبارات	المبررات
$\frac{5x+1}{2} - 8 = 0$	معطى
$\frac{5x+1}{2} - 8 + 8 = 0 + 8$	خاصية الجمع
$\frac{5x+1}{2} = 8$	بالتبسيط
$2\left(\frac{5x+1}{2}\right) = 2(8)$	خاصية الضرب
$5x + 1 = 16$	بالتبسيط
$5x + 1 - 1 = 16 - 1$	خاصية الطرح
$5x = 15$	بالتبسيط
$\frac{5x}{5} = \frac{15}{5}$	خاصية القسمة
$x = 3$	بالتبسيط

44 املأ الفراغ: البرهان ..... يستخدم خصائص الجبر في إثبات العلاقات بين قياسات الزوايا وأطوال القطع المستقيمة.

45 املأ الفراغ: بحسب خاصية التماثل فإنه إذا كان $AB = CD$ فإن ..... .

46 املأ الفراغ: إذا كان $m\angle 1 = m\angle 2$ و $m\angle 2 = m\angle 3$ فإن ..... $= m\angle 1$.

47 اختر: إذا كان $m\angle 1 = m\angle 2$ و $m\angle 2 = 90°$ فأي العبارات التالية صحيحة؟

A $m\angle 1 = 45°$

B $m\angle 2 = 180°$

C $m\angle 1 = 90°$

D $m\angle 1 + m\angle 2 = 90°$

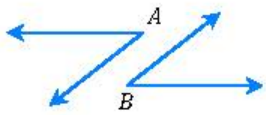
البرهان الهندسي

المقصود به: برهان يستخدم خصائص الجبر في إثبات العلاقات بين قياسات الزوايا وأطوال القطع المستقيمة.

بعض خصائص أطوال القطع المستقيمة وقياسات الزوايا

الخاصية	أطوال القطع المستقيمة	قياسات الزوايا
الانعكاس	$AB = AB$	$m\angle 1 = m\angle 1$
التماثل	إذا كان $AB = CD$ فإن $CD = AB$	إذا كان $m\angle 1 = m\angle 2$ فإن $m\angle 2 = m\angle 1$
التعدي	إذا كان $AB = CD$ و $CD = EF$ فإن $AB = EF$	إذا كان $m\angle 1 = m\angle 2$ و $m\angle 2 = m\angle 3$ فإن $m\angle 3 = m\angle 1$

تحقق من فهمك(3A) ص55: في الشكل المجاور:



اكتب برهانًا ذا عمودين لإثبات التخمين التالي ..

إذا كان $m\angle A = 37°$, $\angle A \cong \angle B$ فإن $m\angle B = 37°$

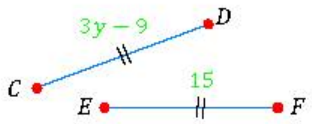
الحل:

العبارات	المبررات
$\angle A \cong \angle B , m\angle A = 37°$	معطى
$m\angle A = m\angle B$	تعريف تطابق الزوايا
$37° = m\angle B$	خاصية التعويض
$m\angle B = 37°$	خاصية التماثل

◄ تحقق من فهمك(3B) ص55: في الشـــكل المجاور:

اكتب برهانًا ذا عمودين لإثبات التخمين التالي ..

إذا كان $\overline{CD} \cong \overline{EF}$ فإن $y = 8$



◄ الحل:

العبارات	المبررات
$\overline{CD} \cong \overline{EF}$	معطى
$CD = EF$	تعريف تطابق القطع المستقيمة
$3y - 9 = 15$	خاصية التعويض
$3y - 9 + 9 = 15 + 9$	خاصية الجمع
$3y = 24$	بالتبسيط
$\frac{3y}{3} = \frac{24}{3}$	خاصية القسمة
$y = 8$	بالتبسيط

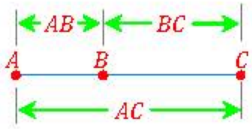
1-7 إثبات علاقات بين القطع المستقيمة

مسلمة أطوال القطع المستقيمة ومسلمة جمع أطوال القطع المستقيمة

◄ **مسلمة أطوال القطع المستقيمة ..**

النقاط التي تقع على مستقيم أو قطعة مستقيمة يمكن ربطها بأعداد حقيقية، بحيث تقابل النقطة A ـ مثلاً ـ الصفر، بينما تقابل النقطة الثانية B عدداً حقيقياً موجباً

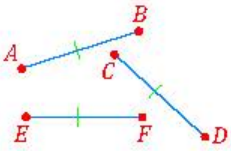
◄ **مسلمة جمع أطوال القطع المستقيمة ..**



إذا علمت أن النقاط A, B, C على استقامة واحدة فإن النقطة B تقع بين A, C إذا كان $AB + BC = AC$ والعكس صحيح

نظرية خواص تطابق القطع المستقيمة

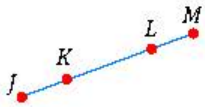
◄ **خاصية الانعكاس:** $\overline{AB} \cong \overline{AB}$.



◄ **خاصية التماثل:** إذا كان $\overline{AB} \cong \overline{CD}$ فإن $\overline{CD} \cong \overline{AB}$.

◄ **خاصـــية التعدي:** إذا كان $\overline{AB} \cong \overline{CD}$ و $\overline{CD} \cong \overline{EF}$ فإن $\overline{AB} \cong \overline{EF}$.

◄ **تحقق من فهمك(1) ص61:** أكمل البرهان التالي باســـتخدام الشكل المجاور ..



المعطيات: $\overline{JL} \cong \overline{KM}$.

المطلوب: إثبات أن $\overline{JK} \cong \overline{LM}$.

العبارات	المبررات
$\overline{JL} \cong \overline{KM}$	معطى
$JL \cong KM$	.....
$JK + KL =$	مسلمة جمع أطوال القطع المستقيمة
$KL + LM =$	مسلمة جمع أطوال القطع المستقيمة
$JK + KL = KL + LM$	.....
$JK + KL - KL = KL + LM - KL$	بالطرح
.....	بالتبسيط
$\overline{JK} \cong \overline{LM}$	تعريف تطابق القطع المستقيمة

48 اختر: أي العبارات الآتية يعطي وصـفًا أفضـل للمسلمة؟

A تخمين ينشأ عن أمثلة

B تخمين ينشأ عن حقائق وقواعد وتعريفات

C عبارة تقبل على أنها صحيحة

D عبارة تم إثبات صحتها

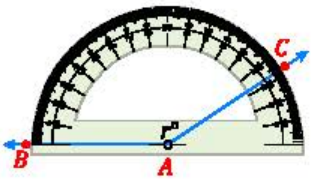
الحل:

العبارات	المبررات
$\overline{JL} \cong \overline{KM}$	معطى
$JL \cong KM$	تعريف تطابق القطع المستقيمة
$JK + KL = JL$	مسلمة جمع أطوال القطع المستقيمة
$KL + LM = KM$	مسلمة جمع أطوال القطع المستقيمة
$JK + KL = KL + LM$	بالتعويض
$JK + KL - KL = KL + LM - KL$	بالطرح
$JK = LM$	بالتبسيط
$\overline{JK} \cong \overline{LM}$	تعريف تطابق القطع المستقيمة

▼ 1-8 إثبات علاقات بين الزوايا ▼

مسلمتا المنقلة وجمع الزوايا

◄ **مسلمة المنقلة:** تُستعمل المنقلة للربط بين قياس زاوية وعدد حقيقي يقع بين 0° و 180° .

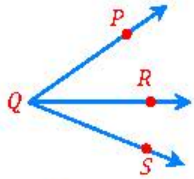


◄ **مثال:** في $\angle ABC$ إذا انطبق صفر المنقلة على $\overrightarrow{AB}$ فإن العدد الذي ينطبق على $\overrightarrow{BC}$ يُمثل قياس الزاوية $\angle ABC$.

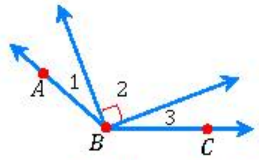
◄ **مسلمة جمع الزوايا:** إذا وقعت النقطة R داخل $\angle PQS$ فإن ..

$$m\angle PQR + m\angle RQS = m\angle PQS$$

والعكس صحيح.



◄ **تحقق من فهمك(1) ص66:** في الشكل المجاور: إذا كان $m\angle 1 = 23°, m\angle ABC = 131°$ فأوجد $m\angle 3$.



◄ **الحل:**

$m\angle 1 + m\angle 2 + m\angle 3 = 131°$ (مسلمة جمع الزوايا)

$23° + 90° + m\angle 3 = 131°$ (عوضنا)

$113° + m\angle 3 = 131°$ (بسطنا)

$113° - 113° + m\angle 3 = 131° - 113°$ (طرحنا 113° من الطرفين)

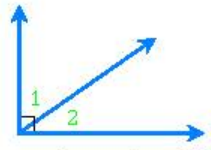
$m\angle 3 = 18°$ (بسطنا)

نظريات الزوايا المتكاملة والزوايا المتتامة

◄ **تكامل الزوايا:** إذا كانت زاويتان متجاورتين على مستقيم فإنهما متكاملتان.

$m\angle 1 + m\angle 2 = 180°$

◄ **تتام الزوايا:** إذا شكّل الضلعان غير المشتركين لزاويتين متجاورتين زاوية قائمة فإن الزاويتين متتامتان.



$m\angle 1 + m\angle 2 = 90°$

---

49 ◄ **املأ الفراغ:** إذا كانت $\angle 1$ و $\angle 2$ متجاورتين على مستقيم واحد وكان $m\angle 1 = 70°$ فإن $m\angle 2 =$ ..... .

50 ◄ **املأ الفراغ:** إذا كان $\angle A$ و $\angle B$ متتامتين وكان $m\angle A = 40°$ فإن $m\angle B =$ ..... .

51 ◄ **اختر:** إذا كانت النسبة بين قياسي زاويتين متتامتين هي 5 : 1 فإن قياس الزاوية الصغرى يساوي ..

A 15°

B 18°

C 24°

D 75°

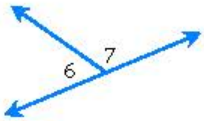
52 ◄ **اختر:** إذا كانت $m\angle A = 60$ فإن مكملتها زاوية قياسها ..

A 30°

B 90°

C 120°

D 180°



◄ **تحقق من فهمك(2) ص67:** في الشكل المجاور: إذا كان $m\angle 6, m\angle 7$ متجاورتان على مستقيم، $m\angle 6 = (3x + 32)°$ و $m\angle 7 = (5x + 12)°$ فأوجد $x, m\angle 6, m\angle 7$.

◄ **الحل:**

أولاً: نوجد قيمة x ..

$m\angle 6 + m\angle 7 = 180°$	(زاويتان متجاورتان على مستقيم)
$(3x + 32) + (5x + 12) = 180$	(عوضنا)
$8x + 44 = 180$	(بسطنا)
$8x + 44 - 44 = 180 - 44$	(طرحنا 44 من الطرفين)
$8x = 136$	(بسطنا)
$x = \frac{136}{8} = 17$	(قسمنا الطرفين على 8 ثم بسطنا)

ثانياً: نوجد قيمة $m\angle 6$ ..

$$m\angle 6 = (3x + 32)° = [3(17) + 32]° = [51 + 32]° = 83°$$

ثالثاً: نوجد قيمة $m\angle 7$ ..

$$m\angle 7 = (5x + 12)° = [5(17) + 12]° = [85 + 12]° = 97°$$

خصائص تطابق الزوايا

◄ **خاصية الانعكاس:** $\angle 1 \cong \angle 1$.

◄ **خاصية التماثل:** إذا كان $\angle 2 \cong \angle 1$ فإن $\angle 1 \cong \angle 2$.

◄ **خاصية التعدي:** إذا كان $\angle 2 \cong \angle 1$ و $\angle 3 \cong \angle 2$ فإن $\angle 3 \cong \angle 1$.

53 اختر: في الشكل المجاور:

قيمة x تساوي ..

A $15°$

B $30°$

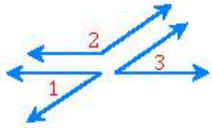
C $60°$

D $120°$

نظريات تطابق الزوايا

نظرية تطابق المكملات: الزاويتان المكملتان للزاوية نفسها أو لزاويتين متطابقتين تكونان متطابقتين.

مثال توضيحي: في الشكل المجاور: إذا كان ..

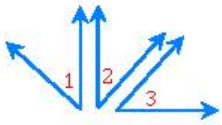


$m\angle 1 + m\angle 2 = 180°$ و $m\angle 3 + m\angle 2 = 180°$ فإن ..

$\angle 1 \cong \angle 3$

نظرية تطابق المتممات: الزاويتان المتممتان للزاوية نفسها أو لزاويتين متطابقتين تكونان متطابقتين.

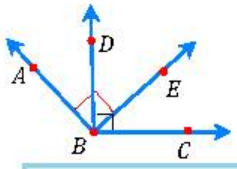
مثال توضيحي: في الشكل المجاور: إذا كان ..



$m\angle 1 + m\angle 2 = 90°$ و $m\angle 2 + m\angle 3 = 90°$ فإن ..

$\angle 1 \cong \angle 3$

تحقق من فهمك(3) ص69: في الشكل المجاور: إذا كان $\angle DBC, \angle ABE$ قائمتان، أثبت أن $\angle ABD \cong \angle EBC$.

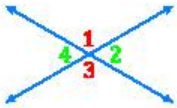


الحل:

العبارات	المبررات
$\angle DBC, \angle ABE$ قائمتان	معطى
$\angle DBC \cong \angle ABE$	تعريف تطابق زاويتان
$\angle EBC$ تُتمم $\angle ABE$ و $\angle EBC$ تُتمم $\angle CBD$	تعريف الزاويتان المتتامتان
$m\angle ABD \cong \angle EBC$	نظرية تطابق المتممات

نظرية الزاويتين المتقابلتين بالرأس: الزاويتان المتقابلتان بالرأس متطابقتان.

مثال توضيحي: في الشكل المجاور ..



$\angle 3 \cong \angle 1$ و $\angle 4 \cong \angle 2$

◄ **تحقق من فهمك(4) ص70:** إذا كان $\angle 3$ و $\angle 4$ متقابلتين بالرأس، $m\angle 3 = (6x + 2)°$ و $m\angle 4 = (8x - 14)°$ فأوجد $m\angle 3, m\angle 4$ ، مبرراً خطوات حلك.

◄ **الحل:**

أولاً: نوجد قيمة x ..

$m\angle 4 = m\angle 3$	(زاويتان متقابلتان بالرأس)
$8x - 14 = 6x + 2$	(عوضنا)
$8x - 6x = 2 + 14$	(بسطنا)
$2x = 16$	(بسطنا)
$x = \frac{16}{2} = 8$	(قسمنا الطرفين على 8 ثم بسطنا)

ثانياً: نوجد قيمة $m\angle 3$ ..

$$m\angle 3 = (6x + 2)° = [6(8) + 2]° = [48 + 2]° = 50°$$

ثالثاً: نوجد قيمة $m\angle 4$ ..

$m\angle 4 = m\angle 3 = 50°$ لأنهما متقابلتان بالرأس فهما لهما القياس نفسه

نظريات الزاوية القائمة

◄ **نظريات الزاوية القائمة ..**

- يتقاطع المستقيمان المتعامدان ويُكوِّنان أربع زوايا قائمة.
- جميع الزوايا القائمة متطابقة.
- المستقيمان المتعامدان يُكوِّنان زوايا متجاورة متطابقة.
- إذا كانت الزاويتان متكاملتين ومتطابقتين فإنهما قائمتان.
- إذا تجاورت زاويتان على مستقيم وكانتا متطابقتين فإنهما قائمتان.

▼ حلول الفصل الأول ▼

1-1 التبرير الاستقرائي والتخمين

01	02	03
✓	مضاداً	A

1-2 المنطق

04	05	06	07	08	09	10
خاطئة	بسيطة	×	✓	A	✓	×

1-3 العبارات الشرطية

11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
الفرض	النتيجة	✓	✓	✓	×	إذا كان المضلع ليس مثلثاً فإن مجموع زواياه ≠ 180°	B	C	A

1-4 التبرير الاستنتاجي

21	22	23	24	25	26
الاستنتاجي	الفصل ـ القياس	×	B	✓	B

1-5 المُسلّمات والبراهين الحرة

27	28	29	30	31	32	33	34	35	36	37	38
×	C	B	B	✓	D	×	A	C	A	D	✓

1-6 البرهان الجبري

39	40	41	42	43	44	45	46	47	48
الجبري	$a = c$	$b = a$	$ab + ac$	ذو العمودين	الهندسي	$CD = AB$	$m\angle 3$	Ⓒ	Ⓒ

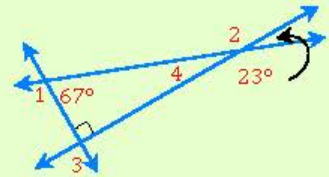
1-8 إثبات علاقات بين الزوايا

49	50	51	52	53
110°	50°	A	C	B

الفصل الثاني

التوازي والتعامد

01/2 اختر: في الشكل المجاور $m\angle 2$ يساوي ..



A) $23°$ B) $67°$

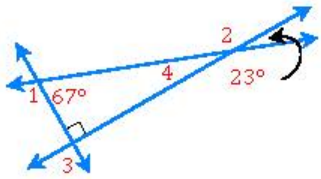
C) $90°$ D) $157°$

02/2 اختر: إذا كانت $x = 3b + 4a$ فأوجد قيمة x عندما $a = -2, b = 1$.

A) -7 B) -5

C) 7 D) 13

التهيئة للفصل 2



اختبار سريع ص85: في الشكل المجاور أوجد قياس كل زاوية مما يلي ..

(5) $\angle 1$. (8) $\angle 4$.

الحل:

$m\angle 1 = 180° - 67°$ (زاويتان متجاورتان على مستقيم)

$m\angle 4 = 23°$ (زاويتان متقابلتان بالرأس)

اختبار سريع(9) ص85: إذا كانت $a + 8 = -4(x - b)$ فأوجد قيمة x عندما $a = 8,\ b = 3$.

الحل:

$$a + 8 = -4(x - b)$$

$8 + 8 = -4(x - 3)$ (عوضنا عن a بـ 8 ، b بـ 3)

$16 = -4x + 12$ (بسطنا)

$-4x = 4$ (طرحنا 12 من الطرفين)

$\frac{-4x}{-4} = \frac{4}{-4}$ (قسمنا الطرفين على -4)

$x = -1$ (بسطنا)

اختبار سريع(12) ص85: يقدم معرض هدية بسعر تشجيعي قدره 15 ريالاً عند شراء بطاقتي دخول، إذا دفع أحمد وأخوه 95 ريالاً، فاكتب معادلة تمثل ما دفعه أحمد وأخوه، ثمَّ حلّها لإيجاد ثمن بطاقة الدخول الواحدة..

الحل: المعادلة التي تمثل ما دفعه أحمد وأخوه ..

$2x + 15 = 95$ ، حيث x عدد التذاكر

نُوجد ـ الآن ـ قيمة x ..

$$2x + 15 = 95$$

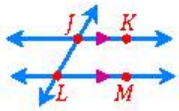
$2x + 15 - 15 = 95 - 15$ (طرحنا 15 من الطرفين)

$2x = 80$ (بسطنا)

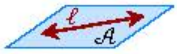
$x = \frac{80}{2} = 40$ (قسمنا الطرفين على 2 ثم بسطنا)

2-1 المستقيمان والقاطع

مفاهيم أساسية

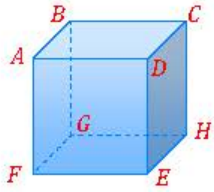


- **المستقيمان المتوازيان:** مستقيمان في مستوى واحد لا يتقاطعان أبداً؛ ففي الشكل المجاور $\overleftrightarrow{JK}$ و $\overleftrightarrow{LM}$ متوازيان؛ وبالرموز $\overleftrightarrow{JK} \parallel \overleftrightarrow{LM}$.
- تُستعمل رؤوس الأسهم في الرسم لتدل على توازي مستقيمين.
- **المستقيمان المتخالفان:** لا يقعان في مستوى واحد وغير متقاطعين.
- **المستقيم القاطع:** مستقيم يقطع مستقيمين (متوازيين أو غير متوازيين) أو أكثر في مستوى واحد؛ وبالرموز $\overleftrightarrow{JL}$ مستقيم قاطع للمستقيمين $\overleftrightarrow{LM}$ و $\overleftrightarrow{JK}$.

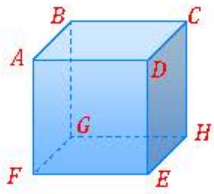


- **المستويان المتوازيان:** هما مستويان لا يتقاطعان، ففي الشكل المجاور المستوى $\mathcal{A}$ يوازي $\mathcal{B}$.

- **المستقيمان المتخالفان:** لا يقعان في مستوى واحد وغير متقاطعين.



- أمثلة توضيحية: في الشكل المجاور ..
  - ١ المستوى $ABCD$ يوازي المستوى $EFGH$.
  - ٢ $\overleftrightarrow{AF}$ و $\overleftrightarrow{ED}$ مستقيمان متوازيان.
  - ٣ $\overleftrightarrow{AF}$ و $\overleftrightarrow{GH}$ مستقيمان متخالفان.



- تحقق من فهمك ص87: في الشكل المجاور ..

(1A) حدد جميع القطع المستقيمة التي تخالف $\overleftrightarrow{BC}$.

(1B) حدد قطعة مستقيمة توازي $\overline{EH}$.

(1C) حدد جميع المستويات التي توازي المستوى DCH .

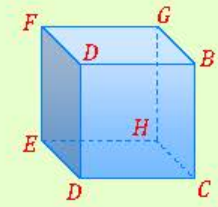
- الحل:

(1A) القطع المستقيمة التي تخالف $\overleftrightarrow{BC}$ هي $\overline{FA}$ و $\overline{ED}$ و $\overline{GF}$ و $\overline{EH}$.

(1B) إحدى القطع المستقيمة التي توازي $\overline{EH}$ هي $\overline{DC}$.

(1C) المستوى DCH يوازيه مستوى واحد فقط هو المستوى ABG .

استعمل الشكل التالي للإجابة عن الأسئلة التي تليه ..



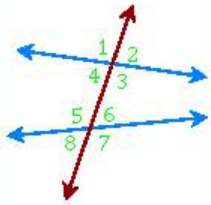
03/2 املأ الفراغ: المستقيمان ..... ، ..... متوازيان مع $\overleftrightarrow{DA}$.

04/2 املأ الفراغ: المستقيمان ..... ، ..... متخالفان مع $\overleftrightarrow{DA}$.

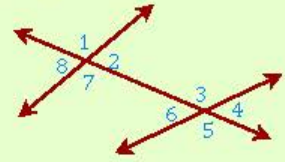
05/2 املأ الفراغ: المستوى ABG يوازي المستوى ..... .

06/2 املأ الفراغ: المستقيم $\overleftrightarrow{AB}$ قاطع للمستقيمين ..... ، ..... .

علاقات أزواج الزوايا الناتجة عن القاطع

الاسم	الزوايا	الرسم
الزوايا الداخلية	∠6 و ∠5 و ∠4 و ∠3	
الزوايا الخارجية	∠8 و ∠7 و ∠2 و ∠1	
الزاويتان المتحالفتان	∠4 و ∠5 أو ∠3 و ∠6	
الزاويتان المتبادلتان داخليًا	∠4 و ∠6 أو ∠3 و ∠5	
الزاويتان المتبادلتان خارجيًا	∠2 و ∠8 أو ∠1 و ∠7	
الزاويتان المتناظرتان	∠5 و ∠1 أو ∠6 و ∠2	

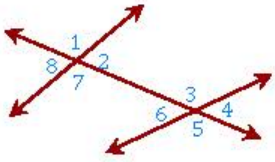
07 اختر: الزاويتان ∠5 ,∠1 في الشكل التالي ..



A متناظرتان B متبادلتان داخليًا

C متحالفتان D متبادلتان خارجيًا

◄ **تحقق من فهمك ص87:** مستعملاً الشكل المجاور صنف كل زوج من الزوايا التالية إلى (متبادلتان داخليًا أو متبادلتان خارجيًا أو متناظرتين أو متحالفتين):



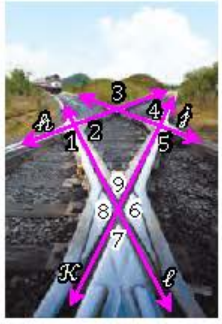
(2A) ∠7 ,∠3 . **(2B)** ∠7 ,∠5 .

(2C) ∠8 ,∠4 . **(2D)** ∠3 ,∠2 .

◄ الحل:

(2A)	(2B)	(2C)	(2D)
متبادلتان داخليًا	متناظرتان	متبادلتان خارجيًا	متحالفتان

◄ **تحقق من فهمك ص88:** استعمل صورة تقاطع سكك القطار المجاورة؛ لتحدد القاطع الذي يصل بين كل زوج من الزوايا فيما يلي، ثم صنِّف الأزواج إلى زاويتين متبادلتين داخليًا، أو متبادلتين خارجيًا، أو متناظرتين، أو متحالفتين.



(3A) ∠5 ,∠3 . **(3B)** ∠8 ,∠2 .

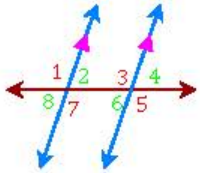
(3C) ∠7 ,∠5 . **(3D)** ∠9 ,∠2 .

◄ الحل:

(3A)	(3B)	(3C)	(3D)
• القاطع $\mathcal{J}$.	• القاطع ℓ .	• القاطع $\mathcal{K}$.	• القاطع ℓ .
• متبادلتان خارجيًا.	• متبادلتان داخليًا.	• متناظرتان.	• متحالفتان.

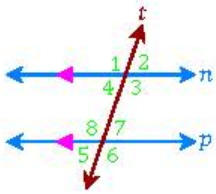
2-2 الزوايا والمستقيمات المتوازية

مسلمة الزاويتين المتناظرتين



◄ **المسلمة 1:** إذا قطع قاطع مستقيمين متوازيين فإن كل زاويتين متناظرتين متطابقتان.

◄ **أمثلة:** $\angle 8 \cong \angle 6$ و $\angle 7 \cong \angle 5$ و $\angle 4 \cong \angle 2$ و $\angle 3 \cong \angle 1$



◄ **تحقق من فهمك ص94:** في الشكل المجاور: $m\angle 8 = 105°$ ، أوجد قياس كل من الزوايا التالية، واذكر المسلمات أو النظريات التي استعملتها.

(1A) $m\angle 1$. **(1B)** $m\angle 2$. **(1C)** $m\angle 3$.

◄ **الحل:**

(1A) إيجاد $m\angle 1$ ..

$p \parallel n$ و t قاطع لهما و $m\angle 8 = 105°$	(معطى)
$\angle 1 \cong \angle 8$	(مسلمة الزاويتان المتناظرتان)
$m\angle 1 = 105°$	(عوضنا)

(1B) إيجاد $m\angle 2$ ..

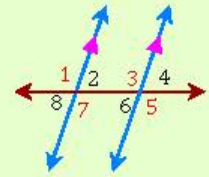
$\angle 1$ و $\angle 2$ متجاورتان على مستقيم	(معطى)
$m\angle 2 + m\angle 1 = 180°$	(نظرية الزاويتان المتكاملتان)
$m\angle 2 = 180° - m\angle 1 = 180° - 105° = 75°$	(عوضنا ثم بسطنا)

(1C) إيجاد $m\angle 3$ ..

$\angle 1$ و $\angle 3$ متقابلتين بالرأس	(معطى)
$m\angle 3 = m\angle 1$	(نظرية الزاويتان المتقابلتان بالرأس)
$m\angle 3 = 105°$	(عوضنا)

08/2 ◄ **املأ الفراغ:** إذا قطع قاطع مستقيمين متوازيين فإن كل زاويتين متناظرتين ..... .

09/2 ◄ **اختر:** في الشكل المجاور:



إذا كان $m\angle 5 = 80°$ ، فإن $m\angle 7$ يساوي ..

A $40°$

B $80°$

C $160°$

D $180°$

10/2 ضع ✓ أو × : لمستقيم يقطع مستقيمين متوازيين: كل زاويتين متبادلتين داخليًا متكاملتان.

11/2 ضع ✓ أو × : إذا قطع قاطع مستقيمين متوازين فإن كل زاويتين متحالفتين متكاملتان.

12/2 **املأ الفراغ**: إذا قطع قاطع مستقيمين متوازيين فإن كل زاويتين متبادلتين خارجيًا ..... .

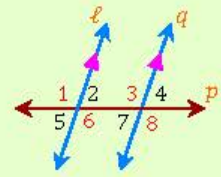
13/2 **اختر**: في الشكل المجاور: $\ell \parallel q$ و $m\angle 1 = 100°$ ؛ إن $m\angle 7$ ..

A $150°$

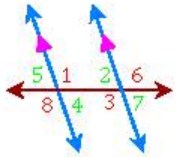
B $100°$

C $80°$

D $60°$



نظريات المستقيمين المتوازين وأزواج الزوايا



إذا قطع قاطع مستقيمين متوازيين فإن كل زاويتين متبادلتين داخليًا متطابقتان ..

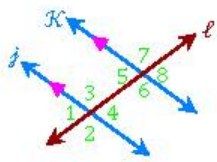
$\angle 3 \cong \angle 1$ ، $\angle 2 \cong \angle 4$

إذا قطع قاطع مستقيمين متوازيين فإن كل زاويتين متحالفتين متكاملتان ..

$\angle 2$ و $\angle 1$ متكاملتان ، $\angle 3$ و $\angle 4$ متكاملتان

إذا قطع قاطع مستقيمين متوازيين فإن كل زاويتين متبادلتين خارجيًا متطابقتان ..

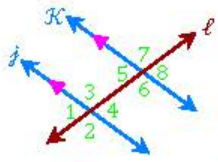
$\angle 5 \cong \angle 7$ ، $\angle 6 \cong \angle 8$



تحقق من فهمك(3A) ص96: في الشكل المجاور: إذا كان $m\angle 2 = (4x+7)°, m\angle 7 = (5x-13)°$ فاوجد قيمة x .

الحل:

$\mathcal{K} \parallel j$ و ℓ قاطع لهما	(معطى)
$m\angle 7 = m\angle 2$	(زاويتان متبادلتان خارجيًا متطابقتان)
$5x - 13 = 4x + 7$	(عوضنا)
$5x - 4x = 7 + 13$	(بسطنا)
$x = 20$	(بسطنا)

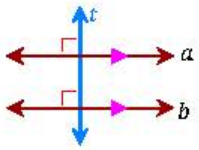


تحقق من فهمك ص96(3B): في الشكل المجاور: إذا كان $m\angle 5 = 68°, m\angle 7 = (3y-2)°$ فاوجد قيمة y .

الحل:

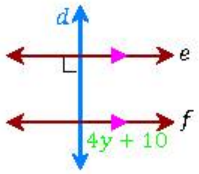
$m\angle 5 + m\angle 7 = 180°$	(زاويتان متجاورتان على مستقيم متكاملتان)
$68 + 3y - 2 = 180$	(عوضنا)
$66 + 3y = 180$	(بسطنا)
$3y = 180 - 66 = 114$	(طرحنا 66 من الطرفين ثم بسطنا)
$y = \frac{114}{3} = 38$	(قسمنا الطرفين على 3 ثم بسطنا)

نظريات المستقيمين المتوازيين وأزواج الزوايا



◄ **النظرية:** إذا كان مستقيم عموديًا على أحد مستقيمين متوازيين في مستوى فإنه يكون عموديًا على المستقيم الآخر.

◄ **مثال:** إذا كان $a \parallel b$ و $t \perp a$ فإن $t \perp b$.



◄ **تحقق من فهمك ص97(4):** في الشـــكل المجاور: إذا كان $e \parallel f$ فاوجد قيمة y مبينًا خطوات الحل.

◄ **الحل:** بما أن القاطع d عمودي على المستقيم e ، المستقيم e يوازي المســـتقيم f ، فـإن القـاطع d عموديًا على المستقيم f .

$$\therefore \quad 4y + 10 = 90$$

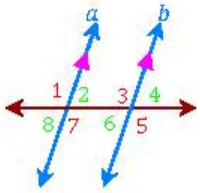
$$4y = 90 - 10 = 80$$

$$y = \frac{80}{4} = 20$$

▼ 2-3 إثبات توازي مستقيمين ▼

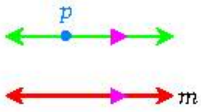
توازي المستقيمات

◄ **مسلمة 2 (عكس مسلمة الزاويتين المتناظرتين):** إذا قطع قاطع مستقيمين في مستوى ونتج عن التقاطع زاويتان متناظرتان متطابقتان فإن المستقيمين متوازيان.

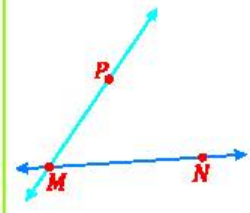
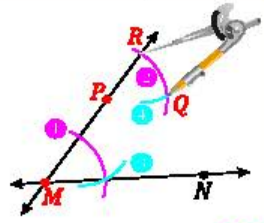
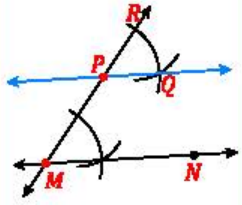


◄ **مثال توضيحي:** في الشكل المجاور: إذا كان $m\angle 1 \cong m\angle 3$ أو $m\angle 2 \cong m\angle 4$ أو $m\angle 5 \cong m\angle 7$ أو $m\angle 8 \cong m\angle 6$ فإن $a \parallel b$.

◄ **مسلمة 3 (مسلمة التوازي):** إذا عُلم مستقيم ونقطة لا تقع عليه فإنه يوجد مستقيم واحد فقط يمر بتلك النقطة ويوازي المستقيم المعلوم.



رسم مستقيم موازٍ لمستقيم معلوم ويمر بنقطة لا تقع عليه

الخطوة 1	الخطوة 2	الخطوة 3
نرسم $\overleftrightarrow{MN}$ بالمسطرة ثم نعين نقطة P لا تقع عليه ونرسم $\overleftrightarrow{PM}$	ننقل $\angle PMN$ بحيث تكون النقطة P رأس الزاوية الجديدة، ثم نسمي نقطتي التقاطع Q و R	نرسم $\overleftrightarrow{PQ}$ ، وبما أن $\angle RPQ \cong \angle PMN$ وهما متناظرتان فإن $\overleftrightarrow{PQ} \parallel \overleftrightarrow{MN}$
	 ❶❷ قياس الفرجار نفسه. ❸❹ قياس الفرجار نفسه.	

14/2 ◄ اختر: إذا قطع قاطع مستقيمين في مستوى وكان المستقيمان متوازيين فإن كل زاويتين متناظرتين ..

A متتامتين

B متكاملتين

C متطابقتين

D متجاورتين

15/2 ◄ اختر: إذا وجد مستقيم ونقطة خارج المستقيم؛ فكم عدد المستقيمات التي يمكن رسمها بحيث تمر بتلك النقطة وتوازي ذلك المستقيم؟

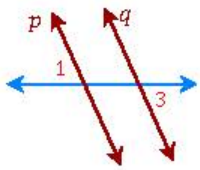
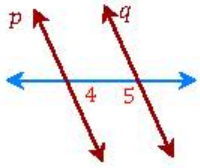
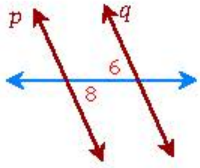
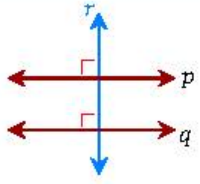
A 0

B 1

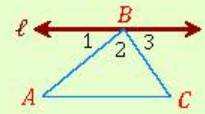
C 2

D عدد لا نهائي

نظريات إثبات توازي المستقيمات

النظرية	أمثلة	شكل توضيحي
إذا قطع قاطع مستقيمين في مستوى، وكانت **الزاويتان المتبادلتان خارجيًا** الناتجتان عن التقاطع متطابقتين فإن المستقيمين متوازيان	إذا كان $\angle 1 \cong \angle 3$ فإن $p \parallel q$	
إذا قطع قاطع مستقيمين في مستوى، وكانت **الزاويتان المتحالفتان** الناتجتان عن التقاطع متكاملتين فإن المستقيمين متوازيان	إذا كانت $\angle 5$ و $\angle 4$ متكاملتين $(m\angle 4 + m\angle 5 = 180°)$ فإن $p \parallel q$	
إذا قطع قاطع مستقيمين في مستوى، وكانت **الزاويتان المتبادلتان داخليًا** الناتجتان عن التقاطع متطابقتين فإن المستقيمين متوازيان	إذا كان $\angle 6 \cong \angle 8$ فإن $p \parallel q$	
إذا قطع قاطع مستقيمين في مستوى، وكان عموديًا على كل منهما فإن المستقيمين متوازيان	إذا كان $p \perp r$ و $q \perp r$ فإن $p \parallel q$	

16/2 ◄ **اختر:** في الشكل المجاور: لإثبات أن المستقيم $\overline{AC} \parallel \ell$ يكفي أن نتأكد أن ..



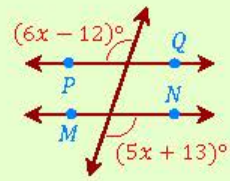
(A) $\angle 1 \cong \angle 3$

(B) $\angle 1 \cong \angle C$

(C) $\angle 3 \cong \angle C$

(D) $\angle 2 \cong \angle A$

17/2 ◄ **اختر:** قيمة x التي تجعل المستقيم $PQ \parallel MN$ ..



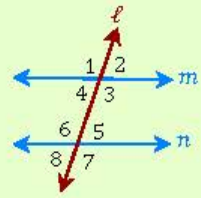
(A) 94

(B) 70

(C) 30

(D) 25

18/2 ◄ اختر: في الشكل المجاور: أيٌّ الحقائق التالية كافٍ لإثبات أن $m \parallel n$ ؟



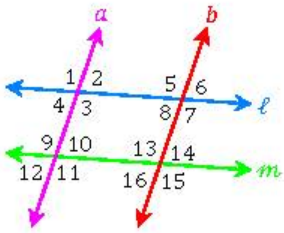
Ⓐ $\angle 1 \cong \angle 4$

Ⓑ $\angle 1 \cong \angle 6$

Ⓒ $\angle 3 \cong \angle 4$

Ⓓ $\angle 1 \cong \angle 3$

◄ **تحقق من فهمك ص104:** هل يمكن إثبات أن أيًّا من مستقيمات الشكل متوازية، اعتمادًا على المعطيات في كلٍّ مما يأتي؟ وإذا كان أيٌّ منها متوازيًا فاذكر المسلمة أو النظرية التي تبرّر إجابتك.



(1A) $\angle 2 \cong \angle 8$.

(1B) $\angle 3 \cong \angle 11$.

(1E) $m\angle 8 + m\angle 13 = 180°$.

(1F) $\angle 6 \cong \angle 8$.

◄ الحل:

(1A) بما أن المستقيم ℓ قاطع للمستقيمين a, b ، و $\angle 2$ ، $\angle 8$ متبادلتين داخليًا ومتطابقتين، فإن $a \parallel b$ بحسب عكس نظرية الزاويتين المتبادلتين داخليًا.

(1B) بما أن المستقيم a قاطع للمستقيمين ℓ, m ، و $\angle 3$ ، $\angle 11$ زاويتين متناظرتين ومتطابقتين؛ فإن $\ell \parallel m$ بحسب عكس مسلمة الزاويتين المتناظرتين.

(1E) بما أن المستقيم b قاطع للمستقيمين ℓ, m ، و $\angle 13$ ، $\angle 8$ متحالفتين ومتكاملتين؛ فإن $\ell \parallel m$ بحسب عكس نظرية الزاويتين المتحالفتين.

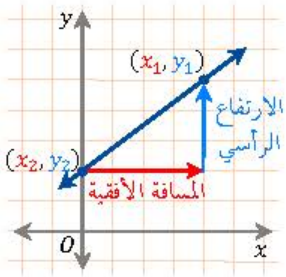
(1F) $\angle 8$ ، $\angle 6$ زاويتان متقابلتان بالرأس متطابقتان، ولا يمكن إثبات التوازي بناء على هذا المعطى.

▼ 2-4 ميل المستقيم ▼

ميل المستقيم

◄ **المقصود به:** نسبة التغير الرأسي إلى التغير الأفقي.

◄ **إيجاده بمعلومية نقطتين عليه ..**



$$m = \frac{\text{التغير الرأسي}}{\text{التغير الأفقي}}$$

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \quad , \quad x_2 \neq x_1$$

◄ ميل المستقيم الرأسي غير مُعرَّف.

◄ ميل المستقيم الأفقي يساوي 0 .

◄ **تحقق من فهمك(1A) ص110:** أوجد ميل المستقيم الذي يحوي النقطتين $(-3,-5)$ و $(6,-2)$.

◄ **الحل:** نوجد ميل المستقيم المعطى ..

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{-2-(-5)}{6-(-3)} = \frac{-2+5}{6+3} = \frac{3}{9} = \frac{1}{3}$$

◄ **تحقق من فهمك(1C) ص110:** أوجد ميل المستقيم الذي يحوي النقطتين $(4,-3)$ و $(4,2)$.

◄ **الحل:** نوجد ميل المستقيم المعطى ..

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{2-(-3)}{4-4} = \frac{2+3}{0} = \frac{5}{0}$$

∴ ميل المستقيم غير معروف

◄ **تحقق من فهمك(1D) ص110:** أوجد ميل المستقيم الذي يحوي النقطتين $(4,3)$ و $(-3,3)$.

◄ **الحل:** نوجد ميل المستقيم المطلوب ..

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{3-3}{-3-4} = \frac{0}{-7} = 0$$

---

19 ◄ اختر: إذا كان ميل مستقيم $\frac{2}{5}$ ، والارتفاع الرأسي 4 وحدات فإن المسافة الأفقية المناظرة ..

A وحدتان B 5 وحدات

C 4 وحدات D 10 وحدات

20 ◄ اختر: أي القيم التالية تمثل ميل المستقيم المار بالنقطتين $(0,-2)$ و $(2,4)$ ..

A $\frac{-1}{3}$ B -3

C $\frac{1}{3}$ D 3

21 ◄ اختر: ميل المستقيم الرأسي ..

A 1 B 0

C -1 D غير معرف

22 ◄ اختر: ميل المستقيم الأفقي ..

A 1 B 0

C -1 D غير معرف

23/2 ◄ اختر: مستقيمان متوازيان ميل أحدهما $\frac{2}{3}$ ؛ إن ميل الآخر يساوي ..

A $\frac{3}{2}$

B $\frac{2}{3}$

C $\frac{-3}{2}$

D $\frac{-2}{3}$

24/2 ◄ اختر: مستقيمان متعامدان ميل أحدهما $\frac{3}{4}$ ؛ إن ميل الآخر يساوي ..

A $\frac{3}{4}$

B $\frac{-3}{4}$

C $\frac{-4}{3}$

D غير معرف

25/2 ◄ اختر: مستقيمان في المستوى نفسه، وميل أحدهما (-2) وميل الآخر $\frac{1}{2}$ ؛ إن المستقيمين ..

A متوازيان

B متعامدان

C متخالفان

D ليس مما سبق

◄ **تحقق من فهمك(2) ص111:** كانت مبيعات مصنع معلبات غذائية 20 مليون علبة عام 2011م، و200 مليون علبة عام 2016م، إذا حافظ المصنع على المعدل نفسه من الزيادة، فكم تكون مبيعاته من العلب عام 2020م؟

◄ **الحل:** نضع البيانات المعطاة على هيئة الأزواج المرتبة $(200, 2016)$ و $(20, 2011)$ ثم نوجد الميل ..

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{2016 - 2011}{200 - 20} = \frac{5}{180}$$

وبما أن المصنع حافظ على المعدل نفسه من الزيادة فإن الميل بين $(20, 2011)$ و $(x, 2016)$ يساوي الميل بين $(200, 2016)$ و $(20, 2011)$ ، حيث x تمثل المبيعات سنة 2020 ..

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \Rightarrow \frac{5}{180} = \frac{2020 - 2011}{x - 20} = \frac{9}{x - 20}$$

$$\Rightarrow 5(x - 20) = 180(9) \Rightarrow 5x - 100 = 1620$$

$$5x = 1720 \Rightarrow x = \frac{1720}{5} = 344$$

∴ المبيعات سنة 2020 تساوي 344 مليون علبة

مسلمتا المستقيمات المتوازية والمتعامدة

◄ **مسلمة 4:** يكون للمستقيمين غير الرأسيين **الميل نفسه** إذا وفقط إذا كانا **متوازيين**.

◄ **مسلمة 5:** يكون المستقيمان غير الرأسيين **متعامدين** إذا وفقط إذا كان حاصل ضرب ميليهما $= -1$.

◄ **تحقق من فهمك ص112(3A):** حدد ما إذا كان $\overleftrightarrow{CD}$ ، $\overleftrightarrow{AB}$ متوازيين أو متعامدين أو غير ذلك إذا علمت أن $D(-4, -5)$ ، $C(-3, 7)$ ، $B(-11, 0)$ ، $A(14, 13)$.

◄ **الحل:** نحسب ميل $\overleftrightarrow{AB}$ ثم ميل $\overleftrightarrow{CD}$ ..

$$m_{\overleftrightarrow{AB}} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{13 - 0}{14 - (-11)} = \frac{13}{14 + 11} = \frac{13}{25}$$

$$m_{\overleftrightarrow{CD}} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{7 - (-5)}{-3 - (-4)} = \frac{7 + 5}{-3 + 4} = \frac{12}{1}$$

وبما أن ..

$m_{\overleftrightarrow{AB}} \neq m_{\overleftrightarrow{CD}}$ ⇒ المستقيمان غير متوازيان

, $m_{\overleftrightarrow{AB}} \times m_{\overleftrightarrow{CD}} = \frac{13}{25} \times \frac{12}{1} \neq -1$ ⇒ المستقيمان غير متعامدان

∴ الإجابة الصحيحة غير ذلك

◄ **تحقق من فهمك ص112(3B):** حدد ما إذا كان $\overleftrightarrow{CD}$ ، $\overleftrightarrow{AB}$ متوازيين أو متعامدين أو غير ذلك إذا علمت أن $D(2,3)$ ، $C(5,4)$ ، $B(-9,2)$ ، $A(3,6)$.

◄ **الحل:** نحسب ميل $\overleftrightarrow{AB}$ ثم ميل $\overleftrightarrow{CD}$ ..

$$m_{\overleftrightarrow{AB}} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{2-6}{9-3} = \frac{-4}{-12} = \frac{1}{3}$$

$$, \; m_{\overleftrightarrow{CD}} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{3-4}{2-5} = \frac{-1}{-3} = \frac{1}{3}$$

وبما أن ..

$m_{\overleftrightarrow{AB}} = m_{\overleftrightarrow{CD}}$ ⇒ المستقيمان متوازيان

▼ 2-5 صيغ معادلة المستقيم ▼

معادلة المستقيم

◄ صيغة الميل والمقطع ..

$$y = mx + b$$

ميل المستقيم ، مقطع المحور y

◄ صيغة الميل ونقطة عليه ..

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

ميل المستقيم ، (x_1, y_1) نقطة يمر بها المستقيم

◄ تحقق من فهمك(1) ص117: اكتب بصيغة الميل والمقطع معادلة المستقيم الذي ميله $\frac{1}{2}$ ، ومقطع المحور y له 8 .

◄ الحل:

$y = mx + b$	(صيغة الميل والمقطع)
$y = \frac{1}{2}x + 8$	(عوضنا $m = \frac{1}{2}$ و $b = 8$)

◄ تحقق من فهمك(2) ص118: اكتب بصيغة الميل ونقطة معادلة المستقيم الذي ميله 4 ويمر بالنقطة $(-3, -6)$.

◄ الحل:

$y - y_1 = m(x - x_1)$	(صيغة الميل ونقطة)
$y - (-6) = 4(x - (-3))$	(عوضنا $m = 4$ و $x_1 = -3$ و $y_1 = -6$)
$y + 6 = 4(x + 3)$	(بسطنا)
$y + 6 = 4x + 12$	(استخدمنا خاصية التوزيع)
$y = 4x + 6$	(طرحنا 6 من الطرفين)

◄ تحقق من فهمك(3A) ص118: اكتب بصيغة الميل والمقطع معادلة المستقيم الذي يمر بالنقطتين $(8,10), (-2,4)$.

◄ الحل:

الخطوة1: نُوجد ميل المستقيم المار بالنقطتين $(8,10), (-2,4)$ ..

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{10 - 4}{8 - (-2)} = \frac{6}{10} = \frac{3}{5}$$

◄ $\frac{26}{2}$ اختر: ميل المستقيم $y = 2x + 3$ يساوي ..

A 2	B 3
C -3	D -2

◄ $\frac{27}{2}$ ضع ✓ أو × : المستقيم $y = -3x + 4$ يقطع 4 وحدات من المحور y .

الخطوة2: نُوجد معادلة المستقيم بصيغة الميل والمقطع باستخدام النقطة $(8,10)$ ..

$y - y_1 = m(x - x_1)$	(صيغة الميل ونقطة)
$y - 10 = \frac{3}{5}(x - 8)$	(عوضنا عن $m = \frac{3}{5}$ و $x_1 = 8$ و $y_1 = 10$)
$5y - 50 = 3(x - 8)$	(ضربنا الطرفين في 5)
$5y - 50 = 3x - 24$	(استخدمنا خاصية التوزيع)
$5y = 3x + 26$	(أضفنا 50 للطرفين)
$y = \frac{3}{5}x + \frac{26}{5}$	(قسمنا الطرفين على 5)

◄ **تحقق من فهمك(4) ص119:** اكتب بصيغة الميل والمقطع معادلة المستقيم الذي يمر بالنقطتين $(3,0)$ ، $(5,0)$.

◄ **الحل:**

الخطوة 1: نوجد ميل المستقيم ..

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{0 - 0}{5 - 3} = \frac{0}{2} = 0$$

الخطوة 2: نوجد معادلة المستقيم بصيغة الميل والنقطة $(5,0)$ ..

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$
$$y - 0 = 0(x - 5)$$
$$y = 0$$

معادلات المستقيمات الأفقية والرأسية

◄ **معادلة المستقيم الأفقي ..**

$$y = b$$

مقطع المحور y له

◄ **مثال توضيحي:** $y = 2$ هي معادلة مستقيم أفقي المقطع y له 2 .

◄ **معادلة المستقيم الرأسي ..**

$$x = a$$

مقطع المحور x له

◄ **مثال توضيحي:** $x = -3$ هي معادلة مستقيم رأسي المقطع x له -3 .

28/2 ◄ اختر: مستقيم أفقي المقطع y له يساوي 6 ؛ إن معادلة هذا المستقيم ..

A $y = -6$ B $y = 6$

C $x = -6$ D $x = 6$

29/2 ◄ ضع ✓ أو × : معادلة المستقيم الرأسي الذي له المقطع x يساوي 2 هي $x = 2$.

◄ **تحقق من فهمك(5) ص119:** اكتب بصيغة الميل والمقطع معادلة المستقيم الذي يوازي المستقيم $y = -\frac{3}{4}x + 3$ ، ويمر بالنقطة $(-3, 6)$.

◄ **الحل:**

الخطوة 1: نوجد ميل المستقيم المطلوب ..

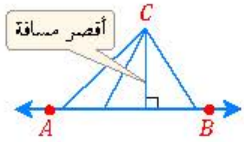
بما أن المستقيم المطلوب يوازي المستقيم $y = -\frac{3}{4}x + 3$ فإن له الميل نفسه $-\frac{3}{4}$.

الخطوة 2: نوجد معادلة المستقيم بصيغة الميل والنقطة $(-3, 6)$ ..

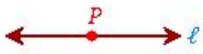
$y - y_1 = m(x - x_1)$	(صيغة الميل ونقطة)
$y - 6 = -\frac{3}{4}[(x - (-3))]$	(عوضنا)
$4y - 24 = -3(x + 3)$	(ضربنا الطرفين في 4)
$4y - 24 = -3x - 9$	(استخدمنا خاصية التوزيع)
$4y = -3x - 9 + 24$	(أضفنا 24 للطرفين)
$4y = -3x + 15$	(بسطنا)
$y = \frac{-3}{4}x + \frac{15}{4}$	(قسمنا الطرفين على 4)

2-6 الأعمدة والمسافة

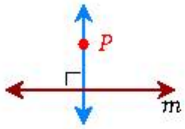
مفاهيم أساسية



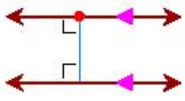
◄ **البُعد بين مستقيم ونقطة لا تقع عليه:** طول القطعة المستقيمة العمودية على المستقيم من تلك النقطة.



◄ إذا كانت النقطة P تقع على المستقيم ℓ فإن البُعد بين النقطة P والمستقيم ℓ يساوي الصفر.



◄ **مسلمة التعامد:** لأي مستقيم ونقطة لا تقع عليه يوجد مستقيم واحد فقط يمر بالنقطة ويكون عمودياً على المستقيم المعلوم.



◄ **البُعد بين مستقيمين متوازيين:** المسافة العمودية بين أحد المستقيمين وأي نقطة على المستقيم الآخر.

◄ **تحقق من فهمك(2) ص129:** المستقيم ℓ يمر بالنقطتين $(5,4),(1,2)$ ، أنشئ مستقيماً عمودياً على ℓ من النقطة $P(1,7)$ ، ثم أوجد البعد بين P و ℓ .

◄ **الحل:** نوجد ميل المستقيم ℓ الذي يمر بالنقطتين $(5,4),(1,2)$ ..

$$m=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}=\frac{4-2}{5-1}=\frac{2}{4}=\frac{1}{2}$$

نوجد معادلة المستقيم ℓ بدلالة الميل $\frac{1}{2}$ والنقطة $(1,2)$ ..

$$y=mx+b \quad \Rightarrow \quad y=\frac{1}{2}x+b$$

وبالتعويض بالنقطة $(1,2)$ ..

$$2=\frac{1}{2}(1)+b \quad \Rightarrow \quad b=2-\frac{1}{2}=\frac{3}{2}$$

∴ معادلة المستقيم ℓ هي ..

$$y=\frac{1}{2}x+\frac{3}{2} \quad \bullet$$

نكتب معادلة المستقيم W العمودي على المستقيم ℓ والمار بالنقطة $(1,7)$ ..

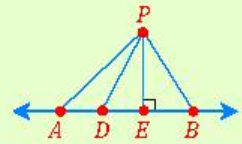
بما أن حاصل ضرب ميلي المستقيمان المتعامدان يساوي -1 ، وميل المستقيم ℓ يساوي $\frac{1}{2}$ فإن ميل المستقيم W يساوي -2 .

نوجد ـ الآن ـ معادلة المستقيم W بدلالة الميل $m=-2$ والنقطة $(1,7)$ ..

$$y=mx+b \quad \Rightarrow \quad 7=-2(1)+b \quad \Rightarrow \quad b=7+2=9$$

$$y=-2x+9 \quad \bullet\bullet$$

◄ $\frac{30}{2}$ اختر: في الشكل المجاور: بُعد النقطة P عن المستقيم $\overleftrightarrow{AB}$ يمثله طول ..



A $\overline{PA}$

B $\overline{PD}$

C $\overline{PE}$

D $\overline{EB}$

وبحل المعادلتين • ، •• لإيجاد نقطة التقاطع ..

$$-2x+9=\frac{1}{2}x+\frac{3}{2} \quad \Rightarrow \quad -4x+18=x+3$$

$$18-3=4x+x \quad \Rightarrow \quad 5x=15 \quad \Rightarrow \quad x=3$$

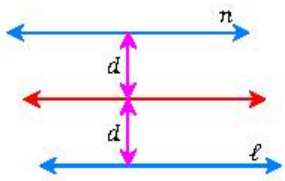
وبالتعويض في •• نحصل على ..

$$y=-2(3)+9=-6+9=3$$

نوجد المسافة d بين النقطتين $(3,3)$ ، $(1,7)$ ..

$$d=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}=\sqrt{(3-1)^2+(3-7)^2}=\sqrt{20}$$

نظرية المستقيمين متساويي البعد عن مستقيم ثالث



◄ **النظرية:** إذا كان المستقيمان في المستوى متساويي البعد عن مستقيم ثالث فإنهما متوازيان.

◄ **التوضيح بالرموز:** إذا كان بُعد كل من المستقيمين n و ℓ عن المستقيم m يساوي d فإن $n \parallel \ell$.

◄ **تحقق من فهمك ص130(3A):** أوجد البُعد بين المستقيمين r,s اللذين معادلتاهما $y=-3x+6$, $y=-3x-5$ على الترتيب.

◄ **الحل:** نوجد إحداثي نقطة عشوائية على المستقيم $s: y=-3x+6$ ..

(مثلاً: نعوض عن x بـ 0 ونوجد قيمة y)

$$y=-3(0)+6 \quad \Rightarrow \quad y=6 \quad \Rightarrow \quad A(0,6)=(x_1-y_1)$$

نوجد ميل المستقيم $\overleftrightarrow{AB}$ العمودي على المستقيم s ..

$$m_s=(\text{معامل } x \text{ في معادلة المستقيم})=-3 \quad \Rightarrow \quad m_{\overleftrightarrow{AB}}=\frac{1}{3}$$

نوجد معادلة المستقيم $\overleftrightarrow{AB}$ (الميل ونقطة) ..

$$\overleftrightarrow{AB}: y-y_1=m(x-x_1)$$

$$y-6=\frac{1}{3}(x-0) \quad \Rightarrow \quad y=\frac{1}{3}x+6$$

نوجد نقطة تقاطع المستقيم $\overleftrightarrow{AB}$ مع المستقيم $r: y=-3x-5$

$$-3x-5=\frac{1}{3}x+6 \quad \Rightarrow \quad -9x-15=x+18$$

$$-9x - x = 18 + 15 \quad \Rightarrow \quad -10x = 33 \quad \Rightarrow \quad x = -\frac{33}{10} = -3.3$$

وبالتعويض في المعادلة $y = \frac{1}{3}x + 6$ لإيجاد قيمة y ..

$$y = \frac{1}{3}(-3.3) + 6 = 4.9$$

نوجد ـ الآن ـ المسافة بين النقطتين $(-3.3, 4.9)$ ، $(0, 6)$ ..

$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$
$$= \sqrt{(-3.3 - 0)^2 + (4.9 - 6)^2} = 3.48$$

▼ حلول الفصل الثاني ▼

◄ 2-1 المستقيمان والقاطع

01	02	03	04	05	06	07
D	B	$\overleftrightarrow{CB}, \overleftrightarrow{EF}$	$\overleftrightarrow{CH}, \overleftrightarrow{FG}$	DCH	$\overleftrightarrow{BC}, \overleftrightarrow{AD}$	D

◄ 2-2 الزوايا والمستقيمات المتوازية

08	09	10	11	12	13
متطابقتان	B	×	✓	متطابقتان	C

◄ 2-3 إثبات توازي مستقيمين

14	15	16	17	18
C	B	C	D	B

◄ 2-4 ميل المستقيم

19	20	21	22	23	24	25
D	D	D	B	B	C	B

◄ 2-5 صيغ معادلة المستقيم

26	27	28	29
A	✓	Ⓑ	✓

◄ 2-6 الأعمدة والمسافة

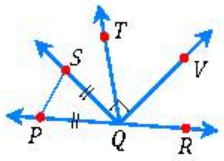
30
C

الفصل الثالث

المثلثات المتطابقة

التهيئة للفصل 3

◄ **اختبار سريع ص145:** في الشكل المجاور صنف كل زاوية مما يأتي إلى قائمة أو حادة أو منفرجة.



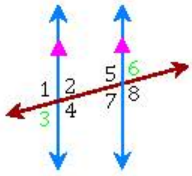
(2) $\angle TQV$. (3) $\angle PQV$.

◄ الحل:

$\angle TQV$ حادة (لأن النقطة T تقع داخل الزاوية القائمة $\angle VQS$)

$\angle PQV$ منفرجة (لأن النقطة P تقع خارج الزاوية القائمة $\angle VQS$)

◄ **اختبار سريع ص145(5):** استعمل الشكل المجاور لإيجاد قيمة x إذا علمت أن $m\angle 6 = 72°$ و $m\angle 3 = (x - 12)°$.



◄ الحل:

$m\angle 3 = m\angle 6$ (زاويتان متبادلتان خارجيًا)

$x - 12 = 72$ (عوضنا عن $m\angle 6$ و $m\angle 3$)

$x = 72 + 12$ (أضفنا 12 للطرفين)

$x = 84$ (بسطنا)

◄ **اختبار سريع ص145 (7):** أوجد المسافة بين $Y(1,11)$ و $X(-2,5)$.

◄ الحل:

$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$ (قانون المسافة)

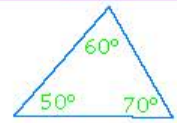
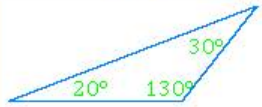
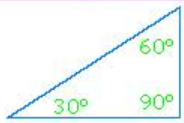
$d = \sqrt{(1 - (-2))^2 + (11 - 5)^2}$ (عوضنا)

$d = \sqrt{9 + 36} = \sqrt{45}$ (جمعنا)

$d = 3\sqrt{5}$ (بسّطنا)

3-1 تصنيف المثلثات

تصنيف المثلثات وفقًا لزواياها

حاد الزوايا	منفرج الزاوية	قائم الزاوية
		
زواياه كلها حادة قياس كل زاوية أقل من 90°	يحوي زاوية منفرجة واحدة قياسها أكبر من 90°	يحوي زاوية قائمة واحدة قياسها يساوي 90°

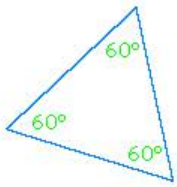
◄ إذا كان المثلث حاد الزوايا وجميع زواياه متطابقة فإنه يُسمى مثلثًا **متطابق الزوايا**، وقياس كل زاوية من زواياه 60° .

◄ **تحقق من فهمك(1A) ص147:** في الشكل المجاور: صنف المثلث بالنسبة لزواياه.

◄ **الحل:**

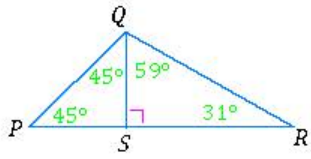
بما أن المثلث يحوي زاوية منفرجة)97°(فإن المثلث منفرج الزاوية.

◄ **تحقق من فهمك(1B) ص147:** في الشكل المجاور: صنف المثلث بالنسبة لزواياه.



◄ **الحل:** بما أن المثلث جميع زواياه متطابقة وقياس كل منهم 60° فإن المثلث متطابق الزوايا.

◄ **تحقق من فهمك(2) ص147:** في الشكل المجاور: صنف ΔPQS إلى حاد الزوايا أو متطابق الزوايا أو منفرج الزاوية أو قائم الزاوية.



◄ **الحل:**

بما أن مجموع قياسات زوايا ΔPQS الداخلية 180° ..

$\therefore \quad m\angle PSQ = 180° - (45° + 45°) = 180° - 90° = 90°$

$\therefore \quad \Delta PQS$ قائم الزاوية

فائدة: من الممكن الحل بقياس الزاويتين المتجاورتين على المستقيم.

01/3 ◄ ضع ✓ أو × : المثلث الذي قياسات زواياه 89° و 61° و 30° حاد الزوايا.

02/3 ◄ اختر: المثلث الذي قياسات زواياه 90° و 70° و 20° يسمى مثلثًا ..

A حاد الزوايا B منفرج الزاوية

C قائم الزاوية D متطابق الضلعين

03/3 ◄ ضع ✓ أو × : المثلث الذي أطوال أضلاعه 7 و 5 و 4 وحدات يسمى مثلثًا مختلف الأضلاع.

04/3 ◄ اختر: المثلث الذي قياسات زواياه 60° و 60° و 60° يكون مثلثًا ..

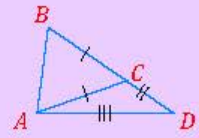
A متطابق الأضلاع

B متطابق الضلعين

C مختلف الأضلاع

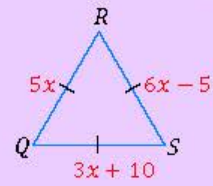
D قائم الزاوية

05/3 ◄ إملاء الفراغ: من الشكل



المجاور: المثلث ..... متطابق الضلعين.

06/3 ◄ اختر: قيمة x في ΔQRS متطابق الأضلاع التالي تساوي ..



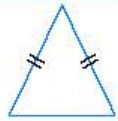
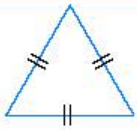
3 A

5 B

6 C

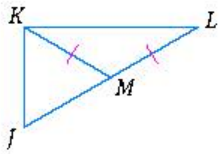
10 D

تصنيف المثلثات وفقًا لأضلاعها

مختلف الأضلاع	متطابق الضلعين	متطابق الأضلاع
		
لا توجد أضلاع متطابقة	ضلعان على الأقل متطابقان	الأضلاع متطابقة كلها

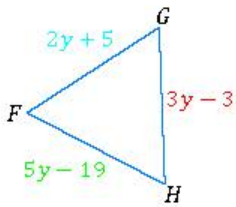
◄ المثلث متطابق الأضلاع جميع زواياه متطابقة وقياس كل زاوية $60°$.

◄ **تحقق من فهمك(4) ص148:** في الشكل المجاور: صنِّف ΔKLM إلى متطابق الأضلاع أو متطابق الضلعين أو مختلف الأضلاع، ووضح إجابتك.



◄ **الحل:** بما أن $ML = MK$ فإن ΔKML متطابق الضلعين.

◄ **تحقق من فهمك(5) ص148:** أوجد قياسات أضلاع ΔFGH المتطابق الأضلاع .



◄ **الحل:** نوجد قيمة y ، ثم نعوض بقيمة y في أطوال الأضلاع ..

$$GH = FG$$

$$3y - 3 = 2y + 5$$

$$3y - 2y = 5 + 3$$

$$y = 8$$

$$\therefore \quad FG = 2y + 5 = 2(8) + 5 = 16 + 5 = 21$$

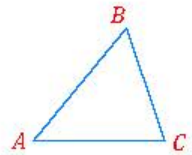
وبما أن المثلث ΔFGH متطابق الأضلاع ..

$$\therefore \quad FH = GH = 21$$

3-2 زوايا المثلثات

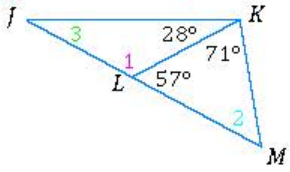
بعض نظريات زوايا المثلث

◄ **نظرية مجموع زوايا المثلث:** مجموع قياسات زوايا المثلث الداخلية يساوي 180° .



◄ **مثال توضيحي:** $m\angle A + m\angle B + m\angle C = 180°$.

◄ **تحقق من فهمك(1A) ص155:** أوجد قياسات الزوايا المجهولة في الشكل المجاور.



◄ **الحل:**

$m\angle 2 + 57° + 71° = 180°$ (نظرية مجموع زوايا المثلث)

$m\angle 2 = 180° - 57° - 71° = 52°$ (بسّطنا)

$m\angle 1 = 180° - 57°$ (زاويتان متجاورتان على مستقيم متكاملتان)

$m\angle 1 = 123°$ (بسطنا)

$m\angle 3 + m\angle 1 + 28° = 180°$ (نظرية مجموع زوايا المثلث)

$m\angle 3 + 123° + 28° = 180°$ (بسّطنا)

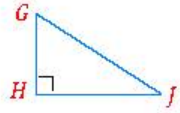
$m\angle 3 = 42°$

◄ **نظرية الزاوية الخارجية:** قياس الزاوية الخارجية في مثلث يساوي مجموع قياسي الزاويتين الداخليتين البعيدتين.

◄ **مثال توضيحي:** $m\angle X + m\angle Y = m\angle YZP$.

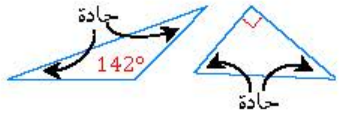
نتائج

◄ **نتيجة 1:** الزاويتان الحادتان في المثلث قائم الزاوية متتامتان.



◄ **مثال توضيحي:** $m\angle G + m\angle J = 90°$.

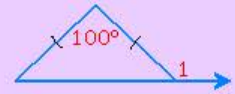
◄ **نتيجة 2:** توجد زاوية قائمة واحدة أو منفرجة واحدة على الأكثر في أي مثلث.



07 ◄ ضع ✓ أو × : ΔABC فيه $m\angle A = 70°$ و $m\angle B = 60°$ فيكون $m\angle C = 60°$.

08 ◄ ضع ✓ أو × : ΔFDE فيه $m\angle F = 50°$ و $m\angle D = 40°$ فيكون مثلثًا قائم الزاوية.

09 ◄ اختر: في الشكل المجاور:



$m\angle 1 =$ ..... .

A 100° B 50°

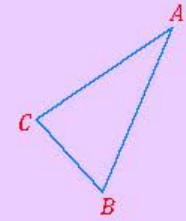
C 120° D 140°

10 ◄ اختر: قياس أي زاوية خارجية للمثلث متطابق الأضلاع يساوي ..

A 60° B 180°

C 120° D 30°

11 ◄ اختر: في الشكل المجاور:



إذا كان $m\angle B = 80°$ ، $m\angle A$ يساوي نصف $m\angle B$ ؛ فما $m\angle C$ ؟

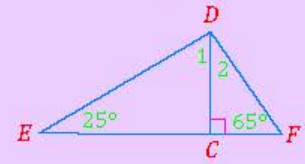
A 40°

B 60°

C 80°

D 120°

12/3 ◄ اختر: $m\angle 1$ في الشكل التالي يساوي ..



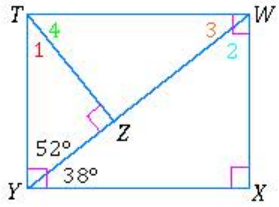
A $25°$

B $65°$

C $90°$

D $120°$

◄ تحقق من فهمك(3A) ص157: أوجد قياسات الزوايا التالية في الشكل المجاور.



(3A) $\angle 2$ (3B) $\angle 3$ (3C) $m\angle 4$

◄ الحل:

(3A) في ΔWYX القائم في Z ..

$m\angle 2 + 38° = 90°$ (زاويتان متتامتان في مثلث قائم)

$m\angle 2 = 90° - 38° = 52°$ (بسّطنا)

(3B) بما أن مجموع أي زاويتين متتامتين $90°$ فإن ..

$m\angle 3 + m\angle 2 = 90°$ (مُعطى)

$m\angle 3 + 52° = 90°$ (عوضنا)

$m\angle 3 = 90° - 52° = 38°$

(3C) في ΔTZW القائم في Z ..

$m\angle 4 + m\angle 3 = 90°$

$m\angle 4 + 38° = 90$ (عوضنا)

$m\angle 4 = 90° - 38° = 52°$ (بسّطنا)

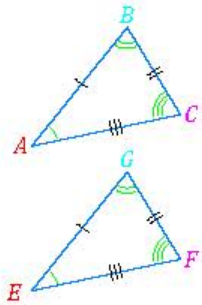
3-3 المثلثات المتطابقة

تطابق المضلعات

تطابق مضلعين: يتطابق المضلعان إذا وفقط إذا كانت عناصرهما المتناظرة متطابقة.

العناصر المتناظرة للمضلع تتضمن الزوايا والأضلاع.

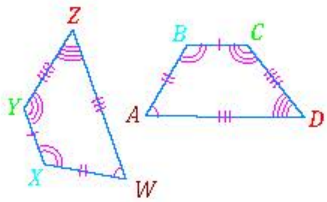
مثال توضيحي: إذا كان ΔABC يطابق ΔEFG فإن رؤوس المثلثين تتناظر حسب ترتيبها، ويمكن تحديد الأضلاع والزوايا المتناظرة المتطابقة وذلك باتباع الأحرف حسب ترتيبها كالتالي:



الزوايا	$\angle C \cong \angle G$	$\angle B \cong \angle F$	$\angle A \cong \angle E$
الأضلاع	$\overline{AC} \cong \overline{EG}$	$\overline{BC} \cong \overline{FG}$	$\overline{AB} \cong \overline{EF}$

تنبيه: نكتب عبارة التطابق بالشكل $\Delta ABC \cong \Delta EFG$.

تحقق من فهمك (1A) ص163: بيّن أنّ المضلّعين في الشكل المجاور متطابقان، بتعيين جميع العناصر المتناظرة المتطابقة، ثم اكتب عبارة التطابق.

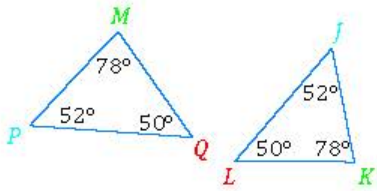


الحل: نرتب رؤوس المضلعين التي تتناظر حسب الجدول التالي ..

الزوايا	$\angle A \cong \angle W$	$\angle B \cong \angle X$	$\angle C \cong \angle Y$	$\angle D \cong \angle Z$
الأضلاع	$\overline{AB} \cong \overline{WX}$	$\overline{BC} \cong \overline{XY}$	$\overline{CD} \cong \overline{YZ}$	$\overline{DA} \cong \overline{ZW}$

∴ المضلعان متطابقان وعبارة التطابق هي $ABCD \cong WXYZ$.

تحقق من فهمك (1B) ص163: بيّن أنّ المضلّعين في الشكل المجاور متطابقان، بتعيين العناصر المتناظرة المتطابقة جميعها، ثم اكتب عبارة التطابق.



الحل: نرتب رؤوس المضلعين التي تتناظر حسب الجدول التالي ..

الزوايا	$\angle J \cong \angle P$	$\angle K \cong \angle M$	$\angle L \cong \angle Q$
الأضلاع	$\overline{JK} \cong \overline{PM}$	$\overline{KL} \cong \overline{MQ}$	$\overline{LJ} \cong \overline{QP}$

∴ المضلعان متطابقان وعبارة التطابق هي $\Delta JKL \cong \Delta PMQ$.

13/3 ضع ✓ أو × : إذا كان ΔABC يطابق ΔDEF فإن $\angle B \cong \angle F$.

14/3 اختر: إذا كان ΔMNO يطابق ΔDEF فإن $m\angle F$ يساوي ..

A $m\angle N$

B $m\angle O$

C $m\angle M$

D $m\angle D$

15/3 املأ الفراغ: خصائص تطابق المثلثات هي: الانعكاس والتماثل و ..... .

16/3 اختر: إذا كان ΔABC يطابق ΔHIJ ، ورؤوس $\angle\Delta ABC$ هي $A(-1,2), B(0,3), C(2,-2)$ فما طول HJ ؟

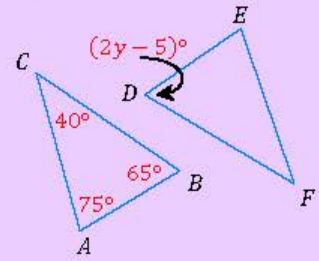
A 5

B $\sqrt{2}$

C $\sqrt{29}$

D 25

◀ **17/3** اختر: في الشكل التالي: إذا كان $\Delta ABC \cong \Delta EDF$ فإن قيمة y تساوي ..



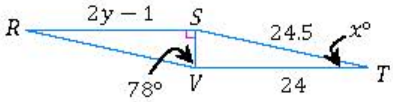
A 22.5

B 35

C 40

D 50

◀ **تحقق من فهمك(2) ص163:** في الشكل المجاور إذا كان $\Delta RSV \cong \Delta TVS$، فأوجد قيمة كلٍّ من x, y .



◀ **الحل:**

أولاً: نوجد قيمة x ..

بما أن مجموع قياسات زوايا ΔRSV الداخلية تساوي 180° فإن ..

$$m\angle R = 180° - 90° - 78° = 12°$$

وبما أن $\Delta RSV \cong \Delta TVS$ فإن الزوايا المتناظرة متطابقة ..

$$m\angle T = m\angle R = 12° \quad \Rightarrow \quad x = 12$$

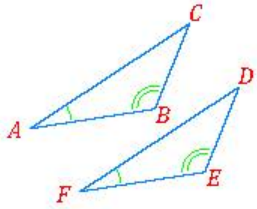
ثانياً: نوجد قيمة y ..

بما أن $\Delta RSV \cong \Delta TVS$ فإن الأضلاع المتناظرة متطابقة ..

$$RS = TV \quad \Rightarrow \quad 2y - 1 = 24 \quad \Rightarrow \quad 2y = 25 \quad \Rightarrow \quad y = \frac{25}{2} = 12.5$$

نظرية الزاوية الثالثة

◀ **النظرية:** إذا تطابقت زاويتان في مثلث مع زاويتين في مثلث آخر فإن الزاوية الثالثة في المثلث الأول تطابق الزاوية الثالثة في المثلث الآخر.



◀ **بالرموز:** إذا كانت $\angle F \cong \angle A$ و $\angle E \cong \angle B$ فإن $\angle C \cong \angle D$.

خصائص تطابق المثلثات

◀ **الانعكاس:** $\Delta JKL \cong \Delta JKL$.

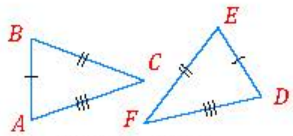
◀ **التماثل:** إذا كان $\Delta JKL \cong \Delta PQR$ فإن $\Delta PQR \cong \Delta JKL$.

◀ **التعدي:** إذا كان $\Delta JKL \cong \Delta PQR$ و $\Delta PQR \cong \Delta XYZ$ فإن $\Delta JKL \cong \Delta XYZ$.

▼ 3-4 إثبات تطابق المثلثات بحالتي SAS و SSS ▼

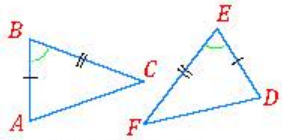
مسلمتا التطابق بحالتي SSS و SAS

◄ مسلمة **SSS** (التطابق بثلاثة أضلاع): إذا تطابقت أضلاع مثلث مع الأضلاع المناظرة لها في مثلث آخر فإن المثلثين متطابقان.



$\Delta ABC \cong \Delta DEF$

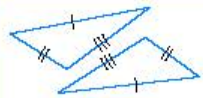
◄ مسلمة **SAS** (التطابق بضلعين والزاوية المحصورة بينهما): إذا طابق ضلعان والزاوية المحصورة بينهما في مثلث نظائرها في مثلث آخر فإن المثلثين متطابقان.



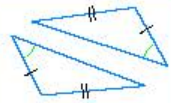
$\Delta ABC \cong \Delta DEF$

◄ **تدرب وحل المسائل ص176**: حدِّد ما إذا كان المثلثان فيما يلي متطابقين أم لا؛ وضح إجابتك.

(13)



(14)



◄ **الحل:**

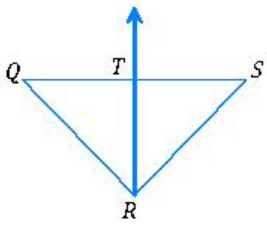
(13) المثلثان متطابقان وفق مسلمة **SSS** لأن الأضلاع المتناظرة متطابقة.

(14) المثلثان غير متطابقين لأن الزاوية غير محصورة بين الضلعين في كلٍ من المثلثين وهذا لا يتفق مع أيٍ من المسلمتين SAS و SSS .

◄ **تحقق من فهمك(1) ص170**: اكتب برهانًا تسلسليًا ..

المعطيات: ΔQRS متطابق الضلعين فيه $\overline{SR} \cong \overline{QR}$ و $\overline{RT}$ تنصف $\overline{QS}$ عند T .

المطلوب: إثبات أن $\Delta QRT \cong \Delta SRT$.



◄ **الحل:**

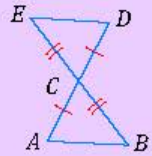
(١) $\overline{QS}$ منتصف T ← $\overline{QT} \cong \overline{ST}$
معطى — نظرية نقطة المنتصف

(٢) $\overline{SR} \cong \overline{QR}$
معطى

(٣) $\overline{RT} \cong \overline{RT}$
خاصية الانعكاس

$\Delta QRT \cong \Delta SRT$
SSS

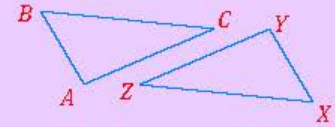
18/3 ◄ اختر: في الشكل المجاور: ΔABC يطابق ΔDEC بحسب مسلمة ..



A ASA B SSS

C SAS D AAA

19/3 ◄ اختر: في الشكلين التاليين: إذا كان $\angle C \cong \angle Z$ و $\overline{AC} \cong \overline{XZ}$ ، ما المعلومة الإضافية التي يمكن استعمالها لإثبات أن $\Delta ABC \cong \Delta XYZ$ ؟



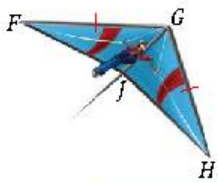
A $\overline{BC} \cong \overline{YZ}$

B $\overline{AB} \cong \overline{XY}$

C $\overline{BC} \cong \overline{XZ}$

D $\overline{XZ} \cong \overline{XY}$

◄ تحقق من فهمك(3) ص173: في الصـــورة المجاورة يبدو جناحا الطائرة الشـــراعية أنهما مثلثان متطابقان، فإذا كانت $\overline{FG} \cong \overline{GH}$ و $\overline{JG}$ تنصف $\angle FGH$ فأثبت أن $\Delta FGH \cong \Delta HGJ$.



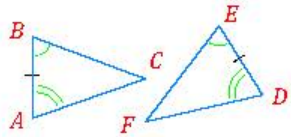
◄ الحل:

العبارات	المبررات
$\overline{FG} \cong \overline{GH}$ و $\overline{JG}$ تنصف $\angle FGH$	معطى
$\angle FGJ \cong \angle HGJ$	تعريف منصف الزاوية
$\overline{JG} \cong \overline{JG}$	خاصية الانعكاس
$\Delta FGH \cong \Delta HGJ$	بحسب حالة SAS

▼ 3-5 إثبات تطابق المثلثات حالتي AAS و ASA ▼

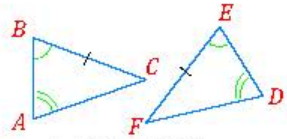
مسلمتا التطابق بحالتي ASA و AAS

◄ مسلمة **ASA** التطابق بـ (زاوية ـ ضلع ـ زاوية): إذا طابقت زاويتان والضلع المحصور بينهما في مثلث نظائرها في مثلث آخر فإن المثلثين متطابقان.



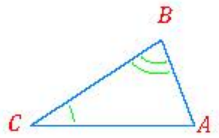
$\Delta ABC \cong \Delta DEF$

◄ مسلمة **AAS** التطابق بـ (زاوية ـ زاوية ـ ضلع): إذا طابقت زاويتان وضلع غير محصور بينهما في مثلث نظائرها في مثلث آخر يكون المثلثان متطابقين.



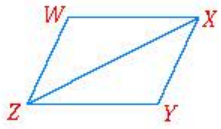
$\Delta ABC \cong \Delta DEF$

◄ الضلع الواقع بين زاويتين متتاليتين لضلع يسمى **الضلع المحصور**.



◄ **مثال توضيحي:** $\overline{CB}$ في الشكل المجاور يسمى الضلع المحصور بين الزاويتين $\angle C, \angle B$.

◄ **تحقق من فهمك(1) ص180:** اكتب برهانًا حرًا ..



المعطيات: $\overline{XZ}$ تنصف $\angle WZY$ و $\overline{XZ}$ تنصف $\angle YXW$.

المطلوب: إثبات أن $\Delta YXZ \cong \Delta WXZ$.

◄ **الحل:**

بما أن $\overline{XZ}$ تنصف $\angle WZY$ فإن $\angle WZX \cong \angle YZX$ بحسب تعريف منصف الزاوية.

وبما أن $\overline{XZ}$ تنصف $\angle YXW$ فإن $\angle WXZ \cong \angle YXZ$ بحسب تعريف منصف الزاوية.

وبما أن $\overline{ZX} \cong \overline{ZX}$ بحسب خاصية الانعكاس ..

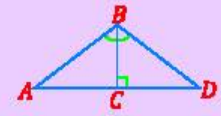
فإن $\Delta YXZ \cong \Delta WXZ$ بحسب المسلمة ASA

20/3 ◄ اختر: الاختصار الذي لا ينتمي إلى اختصارات حالات تطابق المثلثات هو ..

A ASA　　B SSS

C SAS　　D AAA

21/3 ◄ اختر: لإثبات تطابق المثلثين DBC و ABC في الشكل التالي نستخدم المسلمة ..



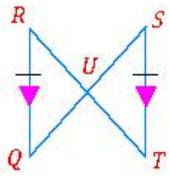
A ASA

B SSS

C SAS

D AAS

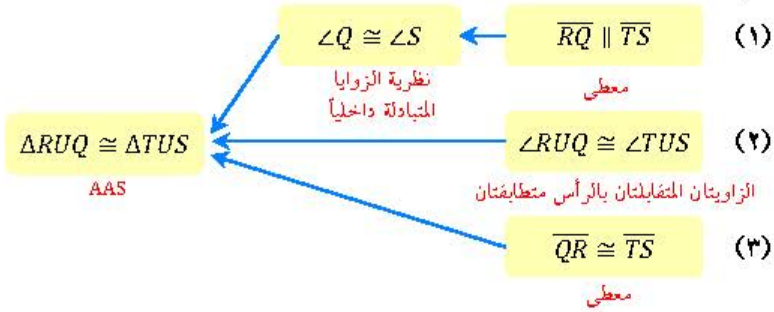
◄ تحقق من فهمك(2) ص181: اكتب برهانًا تسلسليًا ..



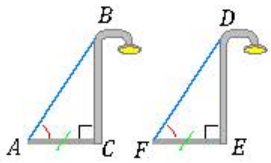
المعطيات: $\overline{RQ} \cong \overline{ST}$ و $\overline{RQ} \parallel \overline{ST}$.

المطلوب: إثبات أن $\Delta RUQ \cong \Delta TUS$.

◄ الحل:



◄ تحقق من فهمك(3) ص182: استعمل الشكل المجاورالذي يمثل عمودي كهرباء وظليهما لكتابة برهان حر يبين أن $\overline{BC} \cong \overline{DE}$.



◄ الحل:

بما أن $m\angle C = m\angle E = 90°$ (معطى) فإن $\angle C \cong \angle E$ بحسب مسلمة تطابق الزوايا.

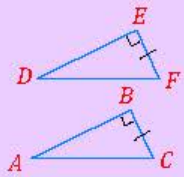
وبما أن $m\angle A = m\angle F$ (معطى) فإن $\angle A \cong \angle F$ بحسب مسلمة تطابق الزوايا.

وبما أن $AC = FE$ (معطى) فإن $\overline{AC} \cong \overline{FE}$ بحسب مسلمة تطابق القطع المستقيمة ..

$\therefore \Delta ACB \cong \Delta FED$ بحسب مسلمة ASA

ومنه فإن $\overline{BC} \cong \overline{DE}$ (الأضلاع المتناظرة متطابقة).

22/3 ◄ اختر: في الشكل المجاور:



ما المعلومة الإضافية التي تكفي لإثبات أن $\Delta DEF \cong \Delta ABC$ ؟

A $\angle A \cong \angle D$

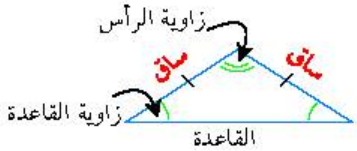
B $\overline{AC} \cong \overline{BC}$

C $\overline{AB} \cong \overline{DF}$

D $\overline{DE} \cong \overline{EF}$

▼ 3-6 المثلثات المتطابقة الضلعين والمثلثات المتطابقة الأضلاع ▼

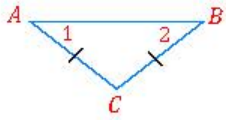
خصائص المثلث متطابق الضلعين



◄ **زاوية الرأس:** الزاوية التي ضلعاها الساقان.

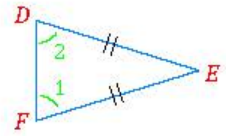
◄ **زاويتي القاعدة:** الزاويتان المكونتان من القاعدة والضلعين المتطابقين.

نظريات المثلث متطابق الضلعين



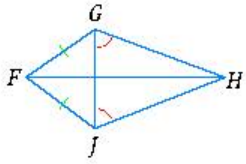
◄ **نظرية 1:** إذا تطابق ضلعان في مثلث فإن الزاويتين المقابلتين لهذين الضلعين متطابقتان.

◄ **مثال توضيحي:** إذا كان $\overline{AC} \cong \overline{BC}$ فإن $\angle 1 \cong \angle 2$.



◄ **نظرية 2:** إذا تطابقت زاويتان في مثلث فإن الضلعين المقابلين لهاتين الزاويتين متطابقان.

◄ **مثال توضيحي:** إذا كان $\angle 1 \cong \angle 2$ فإن $\overline{DE} \cong \overline{FE}$.



◄ **تحقق من فهمك ص189:** في الشكل المجاور ..

(1A) سَمِّ زاويتين متطابقتين غير مشار إلى تطابقهما بالشكل.

(1B) سَمِّ قطعتين مستقيمتين متطابقتين غير مشار إلى تطابقهما بالشكل.

◄ **الحل:**

(1A) في ΔFGJ المتطابق الضلعين ..

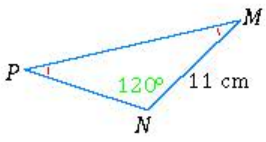
بما أن $\overline{FG} \cong \overline{FJ}$ ، و $\angle FGJ$ تقابل الضلع $\overline{FJ}$ ، و $\angle FJG$ تقابل الضلع $\overline{FG}$ فإن ..

$$\angle FGJ \cong \angle FJG$$

(1B) في ΔHGJ ..

بما أن $\angle HJG \cong \angle HGJ$ ، والضلع $\overline{HJ}$ يقابل $\angle HGJ$ ، والضلع $\overline{HG}$ يقابل $\angle HJG$ فإن $\overline{HJ} \cong \overline{HG}$.

◄ **تحقق من فهمك ص190:** أوجد القياسات التالية من الشكل المجاور ..



(2A) $m\angle M$.

(2B) PN .

23/3 ◄ **املأ الفراغ:** في مثلث متطابق الضلعين: إذا كان قياس زاوية الرأس 80° فإن قياس إحدى زاويتي القاعدة يساوي ..... .

24/3 ◄ **اختر:** في مثلث متطابق الضلعين: إذا كان قياس إحدى زاويتي قاعدته 35° فإن قياس زاوية رأسه ..

A 35°

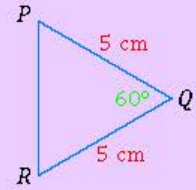
B 70°

C 140°

D 110°

◄ **25/3** اختـــر: في ΔABC المـــجـــاور:

$m\angle p$ يساوي ..

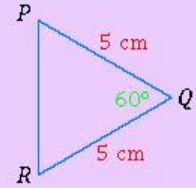


A $5°$ B $10°$

C $60°$ D $120°$

◄ **26/3** اختـــر: في ΔABC المـــجـــاور:

PR يساوي ..



A 5 B 10

C 60 D 120

◄ **27/3** املأ الفراغ: يكون المثلث متطابق الأضـلاع إذا وفقط إذا كان متطابق ..... .

◄ الحل:

(2A) إيجاد $m\angle M$ ..

$m\angle P + m\angle M + 120° = 180°$ (مجموع قياسات زوايا المثلث $180°$)

$m\angle P + m\angle M = 180° - 120°$ (بسطنا)

$m\angle M + m\angle M = 60°$ ($m\angle P = m\angle M$ معطى)

$2m\angle M = 60°$ (بسّطنا)

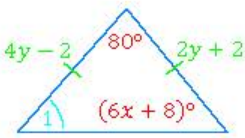
$m\angle M = \frac{60°}{2} = 30°$ (قسمنا الطرفين على 2 ثم بسطنا)

(2B) إيجاد PN : بما أن $m\angle P = m\angle M$ فإن $\angle P \cong \angle M$.

وبما أن الضلع $\overline{PN}$ يقابل $\angle M$ ، والضلع $\overline{NM}$ يقابل $\angle P$ فإن $\overline{PN} \cong \angle MN$.

$\therefore \quad PN = MN = 11$ cm

◄ تحقق من فهمك **(3)** ص**190**: أوجد قيمة المتغيرين x, y في الشكل المجاور.



◄ الحل:

أولاً: إيجاد قيمة y ..

$4y - 2 = 2y + 2$ (المثلث متطابق الضلعين)

$4y - 2y = 2 + 2$ (بسطنا)

$2y = 4$ (بسطنا)

$y = \frac{4}{2} = 2$ (قسمنا الطرفين على 2)

ثانياً: إيجاد قيمة x ..

$m\angle 1 + (6x + 8)° + 80° = 180°$ (مجموع قياسات زوايا المثلث $180°$)

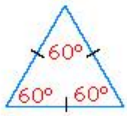
$(6x + 8)° + (6x + 8)° + 80° = 180°$ (زاويتا القاعدة متساويتان في القياس)

$12x + 16 = 180 - 80$ (بسطنا)

$12x = 100 - 16 = 84$ (بسطنا)

$x = \frac{84}{12} = 7$ (قسمنا الطرفين على 12 ثم بسطنا)

خصائص المثلث متطابق الأضلاع



◄ نتيجة **1**: يكون المثلث متطابق الأضلاع إذا وفقط إذا كان متطابق الزوايا.

◄ نتيجة **2**: قياس كل زاوية في المثلث متطابق الأضلاع يساوي $60°$.

▼ 3-7 المثلثات والبرهان الإحداثي ▼

البرهان الإحداثي

◄ **المقصود به:** نوع من البراهين يستعمل الأشكال في المستوى الإحداثي والجبر لإثبات صحة المفاهيم الهندسية، والخطوة الأولى فيه هي رسم الشكل على المستوى الإحداثي.

◄ **خطوات رسم المثلثات في المستوى الإحداثي ..**

١ ◄ نجعل نقطة الأصل رأساً للمثلث.

٢ ◄ نرسم ضلعاً واحداً على الأقل من أضلاع المثلث على أحد المحورين.

٣ ◄ نرسم المثلث في الربع الأول إن أمكن.

٤ ◄ نستعمل الإحداثيات التي تجعل الحسابات أبسط ما يمكن.

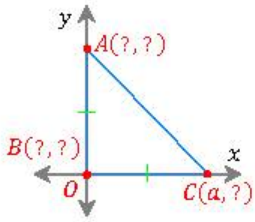
◄ **فوائد لتحديد الإحداثيات المجهولة ..**

◄ نستخدم خصائص الأشكال الهندسية بكل دقة.

◄ النقاط التي تقع على الخط الرأسي نفسه لها الإحداثي x نفسه.

◄ النقاط التي تقع على الخط الأفقي نفسه لها الإحداثي y نفسه.

◄ **تحقق من فهمك(2) ص197:** أوجد الإحداثيات المجهولة في المثلث المجاور.



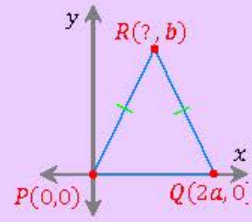
◄ **الحل:**

(1) بما أن النقطة B هي نقطة الأصل فإن $B(0,0)$.

(2) بما أن النقطة C تقع على المحور x فإن الإحداثي y لها يساوي الصفر، ومنه $C(a,0)$.

(3) بما أن النقطة A تقع على المحور y فإن الإحداثي x لها يساوي الصفر، وبما أن $BC = BA = a$ فإن الإحداثي y للنقطة A يساوي a، ومنه $A(0,a)$.

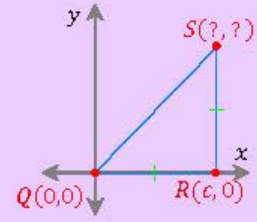
28/3 ◄ اختر: ما إحداثيات النقطة R في المثلث متطابق الضلعين التالي؟



A $\left(\frac{a}{2},b\right)$ B (a,b)

C $(4a,b)$ D $\left(\frac{a}{4},b\right)$

29/3 ◄ اختر: ما إحداثيات النقطة S في المثلث القائم الزاوية ومتطابق الضلعين التالي؟

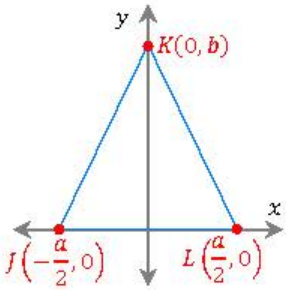


A $(0,c)$ B (c,c)

C $(c,0)$ D (c,a)

◄ **تحقق من فهمك(1) ص196:** ارسم المثلث JKL متطابق الضلعين في المستوى الإحداثي، وسَمِّ رؤوسه، على أن يكون طول ضلع قاعدته يساوي a وحدة، ويكون ارتفاعه b وحدة، والرأس k يقع على المحور y .

◄ الحل:



١ ◄ نرسم الرأس K على المحور y بارتفاع مقداره b ، فيكون إحداثي الرأس النقطة $k(0,b)$.

٢ ◄ نرسم القاعدة $\overline{JL}$ بطول مقداره a على المحور x بحيث يكون المحور y محور تماثل لها (محور y ينصف القاعدة).

٣ ◄ بما أن المحور y ينصف القاعدة $\overline{JL}$ فإن الإحداثي x للنقطة L يساوي $\frac{a}{2}$ ، والإحداثي x للنقطة J يساوي $-\frac{a}{2}$.

٤ ◄ بما أن النقطة L و النقطة J تقعان على المحور x فإن إحداثيها y يساوي الصفر.

∴ $J\left(-\frac{a}{2},0\right)$ و $L\left(\frac{a}{2},0\right)$

▼ حلول الفصل الثالث ▼

3-1 تصنيف المثلثات

01	02	03	04	05	06
✓	C	✓	A	ABC	B

3-2 زوايا المثلثات

07	08	09	10	11	12
×	✓	D	C	C	B

3-3 المثلثات المتطابقة

13	14	15	16	17
×	B	التعدي	A	B

3-4 إثبات تطابق المثلثات بحالتي SSS و SAS

18	19
C	A

3-5 إثبات تطابق المثلثات بحالتي AAS و ASA

20	21	22
D	A	A

3-6 المثلثات المتطابقة الضلعين والمثلثات المتطابقة الأضلاع

23	24	25	26	27
50°	D	C	A	الزوايا

3-7 المثلثات والبرهان الإحداثي

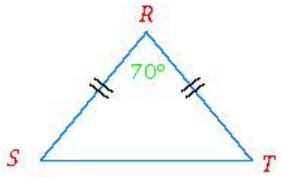
28	29
B	B

الفصل الرابع

العلاقات في المثلث

التهيئة للفصل 4

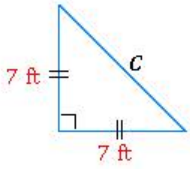
◄ **اختبار سريع ص 213(2)**: في الشكل المجاور أوجد $m\angle RST$.



◄ الحل:

العبارة	التبرير
$RS = RT$	معطى
$m\angle RST = m\angle RTS$	نظرية المثلث متطابق الضلعين
$m\angle RST + m\angle RTS = 180° - 70°$	مجموع قياسات زوايا المثلث $180°$
$m\angle RST = \frac{180° - 70°}{2} = \frac{110°}{2}$	طرحنا
$m\angle RST = 55°$	بسطنا

◄ **اختبار سريع ص213(3)**: يصمم عبد الله حوضا لزراعة الورود على شكل مثلث قائم الزاوية، إذا كان طول كل من ضلعي القائمة 7 ft ، فما طول الضلع الثالث مقربًا الناتج إلى أقرب عدد صحيح؟



◄ الحل: بتطبيق نظرية فيثاغورس ..

$$c^2 = 7^2 + 7^2 = 49 + 49 = 98$$

$$\therefore \quad c = \sqrt{98} \approx 10 \text{ ft}$$

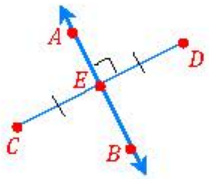
◄ **اختبار سريع ص213(10)**: حل المتباينة $6x + 9 < 7x$.

◄ الحل:

$6x + 9 < 7x$	(المتباينة)
$6x - 7x + 9 < 7x - 7x$	(طرحنا $7x$ من الطرفين)
$-x + 9 < 0$	(بسطنا)
$-x + 9 - 9 < 0 - 9$	(طرحنا 9 من الطرفين)
$-x < -9$	(بسطنا)
$x > 9$	(قسمنا الطرفين على -1)

▼ 4-1 المنصفات في المثلث ▼

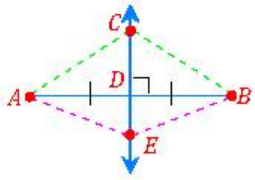
العمود المنصف لقطعة مستقيمة



◄ **المقصود به:** العمود على القطعة المستقيمة عند نقطة منتصفها.

◄ **التوضيح بالرموز:** $\overleftrightarrow{AB}$ عمود مُنصف لـ $\overline{CD}$ في نقطة E .

النقاط على الأعمدة المنصفة



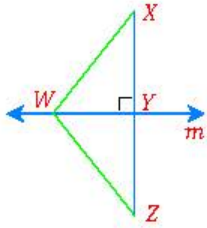
◄ **نظرية العمود النصف:** كل نقطة على العمود المنصف لقطعة مستقيمة تكون على بُعدين متساويين من طرفي القطعة المستقيمة.

◄ **التوضيح بالرموز:** إذا كان $\overleftrightarrow{CD}$ عمود مُنصف لـــ $\overline{AB}$ فإن $AC = BC$.

◄ **عكس نظرية العمود النصف:** كل نقطة على بُعدين متساويين من طرفي قطعة مستقيمة تقع على العمود المنصف لتلك القطعة.

◄ **التوضيح بالرموز:** إذا كان $BE = AE$ و $\overleftrightarrow{CD}$ هو العمود المُنصف لـــ $\overline{AB}$ فإن D تقع على $\overleftrightarrow{CD}$.

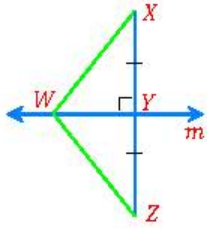
◄ **تحقق من فهمك(1A) ص216:** في الشكل المجاور: إذا كان $WX = 25.3, YZ = 22.4, WZ = 25.3$ فأوجد طول $\overline{XY}$.



◄ **الحل:** بما أن $WX = 25.3 , WZ = 25.3$ فإن W تقع العمود المنصف لـ $\overline{XZ}$.

$\therefore \quad XY = YZ = 22.4$

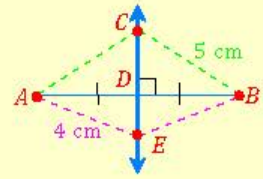
◄ **تحقق من فهمك(1B) ص216:** في الشكل المجاور: إذا كان m عمودًا منصفًا لـ $\overline{XZ}$ ، $WZ = 14.9$ فأوجد طول $\overline{WX}$.



◄ **الحل:** بما أن m عمودًا منصفًا لـ $\overline{XZ}$ فإن ..

$WX = WZ = 14.9$

01/4 ◄ اختر: في الشكل المجاور .. $CA =$ .....



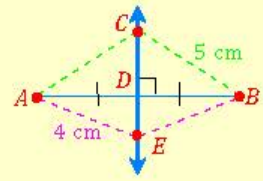
A 4

B 5

C 9

D 20

02/4 ◄ اختر: في الشكل المجاور .. $BE =$ .....



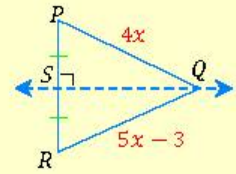
A 4

B 5

C 9

D 20

03/4 ◄ اختر: في الشكل المجاور .. $PQ =$ .....



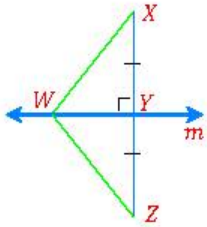
A 3

B 4

C 5

D 12

◄ تحقق من فهمك(1C) ص216: في الشـــكل المجاور: إذا كان m عمودًا منصفًا لـــ $\overline{XZ}$ ، $WZ = a + 12, WX = 4a - 15$ فأوجد طول $\overline{WX}$.



◄ الحل: بما أن فإن W تقع العمود المنصف لـ $\overline{XZ}$.

$\therefore \quad WX = WZ$

$4a - 15 = a + 12$ (عوضنا)

$4a - a = 12 + 15$ (بسطنا)

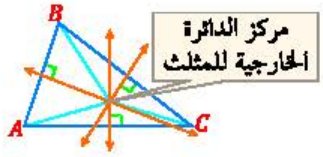
$3a = 27$ (بسطنا)

$a = \frac{27}{3} = 9$ (قسمنا الطرفين على 3)

$\therefore \quad WX = 4(9) - 15 = 36 - 15 = 21$

الدائرة الخارجية للمثلث

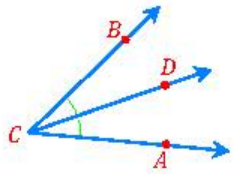
◄ **المقصود بها:** دائرة تمر برؤوس المثلث ومركزها نقطة تلاقي الأعمدة المنصفة لأضلاع المثلث.



◄ **نظرية مركز الدائرة الخارجية للمثلث:** مركز الدائرة الخارجية للمثلث يبعد أبعادًا متســـاوية عن رؤوس المثلث.

منصفات الزاويا

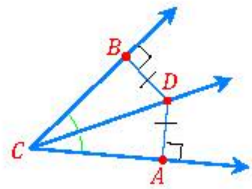
◄ **منصف الزاوية:** نصف مستقيم يقسم الزاوية إلى زاويتين متطابقتين.



◄ **التوضيح بالرموز:** على الشكل المجاور $\overrightarrow{CD}$ مُنصف لـــ $\angle ACB$ لأنه يقسمها إلى الزاويتين المتطابقتين $\angle ACD, \angle BCD$.

نظريات النقاط التي تقع على منصفات الزوايا

◄ **نظرية منصف الزاوية:** كل نقطة تقع على منصف زاوية تكون على بُعدين متساويين من ضلعي تلك الزاوية.



◄ **عكس نظرية منصف الزاوية:** كل نقطة تقع على بُعدين متساويين من ضلعي زاوية تقع على منصف تلك الزاوية.

04/4 ◄ **املأ الفراغ:** مركز الدائرة الخارجية للمثلث يبعد أبعادًا متساوية عن ..... المثلث.

05/4 ◄ **اختر:** مركز الدائرة التي تمر برؤوس المثلث هي نقطة تلاقي ..

A القطع المتوسطة للمثلث

B الأعمدة المنصفة لأضلاع المثلث

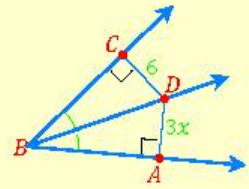
C ارتفاعات المثلث

D منصفات زوايا المثلث

06/4 ◄ **املأ الفراغ:** كل نقطة تقع على منصف زاوية تكون على بعدين متساويين من ..... تلك الزاوية.

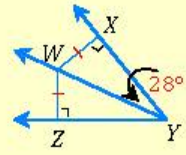
07/4 ◄ **ضع ✓ أو × :** كل نقطة تقع على بعدين متساويين من ضلعي زاوية تقع على منصف تلك الزاوية.

08/4 اختر: قيمة x في الشكل المجاور تساوي ..



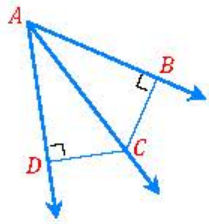
A) 6
B) 3
C) 2
D) 1

09/4 اختر: قيمة $m\angle XYZ$ في الشكل المجاور تساوي ..



A) 14°
B) 28°
C) 56°
D) 72°

تحقق من فهمك(3A) ص218: إذا كان $DC = 5$ و $BC = 5, m\angle BAC = 38°$ فأوجد $m\angle DAC$.

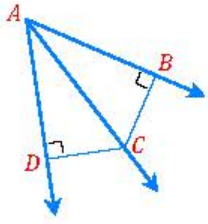


الحل: بما أن $DC \perp AD, BC \perp AB$ و $BC = DC = 5$ فإن C على بعدين متساويين من ضلعي $\angle BAD$.

$\therefore$ AC منصف لـ $\angle BAD$

$\therefore$ $m\angle DAC = m\angle BAC = 38°$

تحقق من فهمك(3B) ص218: إذا كان $DC = 10, m\angle DAC = 40°, m\angle BAC = 40°$ فأوجد BC .

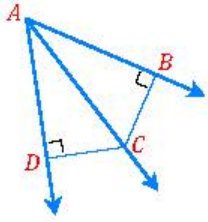


الحل: بما أن $m\angle DAC = 40°, m\angle BAC = 40°$ فإن $\overrightarrow{AC}$ منصفًا لـ $\angle BAD$.

$\therefore$ C على بعدين متساويين من ضلعي $\angle BAD$

$\therefore$ $BC = DC = 10$

تحقق من فهمك(3C) ص218: إذا كان $\overrightarrow{AC}$ ينصف $\angle DAB$ ، و $BC = 4x + 8, DC = 9x - 7$ فأوجد BC .



الحل: بما أن $\overrightarrow{AC}$ ينصف $\angle DAB$ فإن C على بعدين متساويين من ضلعي $\angle BAD$.

$$DC = BC$$

$$9x - 7 = 4x + 8 \quad \text{(عوضنا)}$$

$$9x - 4x = 8 + 7 \quad \text{(بسطنا)}$$

$$5x = 15 \quad \text{(بسطنا)}$$

$$x = \frac{15}{5} = 3 \quad \text{(قسمنا الطرفين على 3)}$$

$\therefore$ $BC = 4(3) + 8 = 12 + 8 = 20$

10/4 ◄ اختر: مركز الدائرة الداخلية للمثلث هي نقطة تقاطع ..

A القطع المتوسطة للمثلث

B الأعمدة المنصفة لأضلاع المثلث

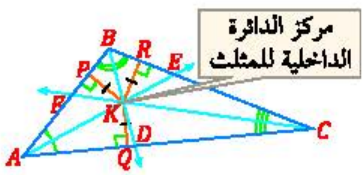
C ارتفاعات المثلث

D منصفات زوايا المثلث

الدائرة الداخلية للمثلث

◄ **ماذا يقصد بها؟**: دائرة تمس أضلاع المثلث من الداخل.

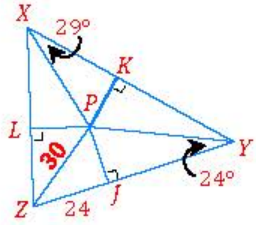
◄ **نظرية مركز الدائرة الداخلية للمثلث:** تتقاطع منصفات زوايا أي مثلث عند نقطة تسمى مركز الدائرة الداخلية للمثلث، وهي على أبعاد متساوية من أضلاعه.



◄ **وبالرموز:** إذا كان K مركز الدائرة الداخلية للمثلث ABC فإن $KQ = KR = KP$.

◄ **تحقق من فهمك ص219:** إذا كانت P مركز الدائرة الداخلية لـ ΔXYZ ..

(4A) أوجد PK . (4B) أوجد $m\angle LZP$.

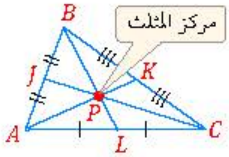


◄ **الحل:**

$\overline{PJ} \perp \overline{YZ}$	(مُعطى)
$PJ = \sqrt{30^2 - 24^2} = \sqrt{324} = 18$	(نظرية فيثاغورس في ΔZPJ)
P مركز الدائرة الداخلية لـ ΔABC	(مُعطى)
$PK = PL = PJ$	(نظرية الدائرة الداخلية للمثلث)
$PK = 18$	(عوضنا)
$\overline{XP}$ تنصف $\angle ZXY$ و $\overline{YP}$ تنصف $\angle ZYX$	(P مركز الدائرة الداخلية لـ ΔABC)
$m\angle ZYX = 2m\angle ZYP = 2(24°) = 48°$	
$m\angle ZXY = 2m\angle YXP = 2(29°) = 58°$	
$m\angle XZY = 180 - (48° + 58°) = 74°$	(نظرية مجموع قياسات زوايا للمثلث)
$m\angle LZP = \frac{1}{2} m\angle XZY$	($\overline{AP}$ تنصف $\angle BAC$)
$m\angle LZP = \frac{1}{2}(74°) = 37°$	(قسمنا على 2)

4-2 القطع المتوسطة والارتفاعات في المثلث

القطع المتوسطة ومركز المثلث



◄ **القطعة المتوسطة لمثلث:** قطعة مستقيمة طرفاها أحد رؤوس المثلث ونقطة منتصف الضلع المقابل لذلك الرأس.

◄ **مركز المثلث:** نقطة تلاقي متوسطات المثلث.

◄ **النظرية:** يبعد مركز المثلث عن كل رأس من رؤوس المثلث ثلثي طول القطعة المتوسطة الواصلة بين ذلك الرأس ومنتصف الضلع المقابل له.

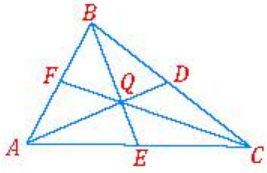
◄ **التوضيح بالرموز:** إذا كان L مركز المثلث ABC فإن ..

$$AL=\frac{2}{3}AE \quad \text{و} \quad BL=\frac{2}{3}BF \quad \text{و} \quad CL=\frac{2}{3}CD$$

◄ **فائدة لطيفة:** إذا كان L مركز المثلث ABC فإن ..

$$DL=\frac{1}{3}CD \quad \text{و} \quad DL=\frac{1}{2}CL \quad \text{و} \quad CL=2DL$$

وبالمثل مع بقية المتوسطات للمثلث



◄ **تحقق من فهمك ص225:** إذا كانت النقطة Q مركز ΔABC المجاور، $FC=15$ فأوجد ..

(1A) FQ . **(1B)** QC .

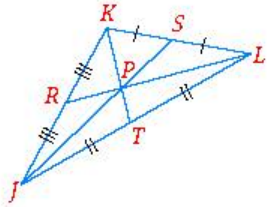
◄ **الحل:**

(1A) بما أن النقطة Q مركز ΔABC فإن ..

$$FQ=\frac{1}{3}FC=\frac{1}{3}(15)=5$$

(1B) بما أن النقطة Q مركز ΔABC فإن ..

$$QC=\frac{2}{3}FC=\frac{2}{3}(15)=10$$



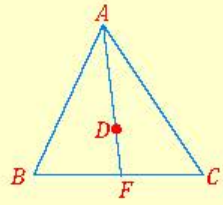
◄ **تحقق من فهمك ص226:** في ΔJKL المجاور: إذا كان $JP=9, RP=3.5$ فأوجد ..

(2A) PL . **(2B)** PS .

◄ **الحل:**

(2A) بما أن R,T,S منتصفات $\overline{JK},\overline{JL},\overline{LK}$ على الترتيب فإن $\overline{LR}$, $\overline{KT}$, $\overline{JS}$ قطع متوسطة في ΔJKL .

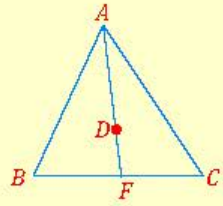
11/4 ◄ اختر: في الشكل المجاور: إذا كانت D مركز المثلث ABC و $AF=12$ فإن $AD=$ ..... .



A 12 B 4

C 8 D 6

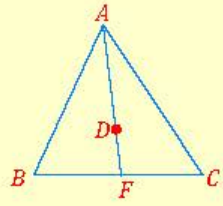
12/4 ◄ في الشكل المجاور: إذا كانت D مركز المثلث ABC و $DA=$ 6 فإن $DF=$ ..... .



A 4 B 3

C 9 D 12

13/4 ◄ اختر: في الشكل المجاور: إذا كانت D مركز المثلث ABC و $DF=10$ فإن $AF=$ ..... .



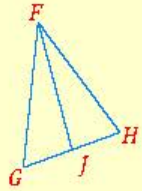
A 4 B 15

C 20 D 30

14/4 ◄ **املأ الفراغ:** تتقاطع المستقيمات التي تحوي ارتفاعات المثلث في نقطة تُسمى ..... .

15/4 ◄ ضع ✓ أو × : ارتفاع المثلث هو قطعة مستقيمة طرفاها أحد رؤوس المثلث ونقطة منتصف الضلع المقابل لذلك الرأس.

16/4 ◄ **اختر:** في الشكل المجاور: إذا كانت $\overline{JG} \cong \overline{HJ}$ ، فأي العبارات التالية صحيحة؟



A $\overline{FJ}$ ارتفاع لـ ΔFGH

B $\overline{FJ}$ منصف زاوية لـ ΔFGH

C $\overline{FJ}$ قطعة متوسطة لـ ΔFGH

D $\overline{FJ}$ عمود منصف لـ ΔFGH

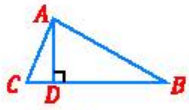
∴ النقطة P مركز المثلث ΔJKL (نقطة تقاطع المتوسطات)

$$\therefore \quad PL = 2RL = 2(3.5) = 7$$

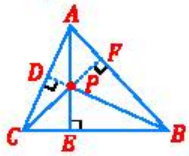
(2B) نوجد PS ..

$$PS = \frac{1}{2}JP = \frac{1}{2}(9) = 4.5$$

ارتفاع المثلث

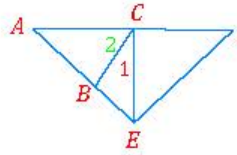


◄ **تعريفه:** عمود ساقط من أحد رؤوس المثلث إلى المستقيم الذي يحوي الضلع المقابل.



◄ **مُلتقى الارتفاعات:** نقطة تقاطع المستقيمات التي تحوي ارتفاعات المثلث.

◄ **التوضيح بالرموز:** تتقاطع المستقيمات التي تحوي الارتفاعات $\overline{AE}, \overline{BD}, \overline{CF}$ عند النقطة P وهي مُلتقى الارتفاعات للمثلث ABC .



◄ **تدرب وحل المسائل ص230(17):** في الشكل المجاور:
إذا كانت $\overline{EC}$ ارتفاعاً لـــــ ΔAED ، $m\angle 1 = (2x+7)°$
و $m\angle 2 = (3x+13)°$ ، فأوجد $m\angle 1$, $m\angle 2$.

◄ **الحل:** بما أن $\overline{EC}$ ارتفاعاً لـ ΔAED فإن $\overline{EC} \perp \overline{AD}$.

$$m\angle ECA = 90°$$

$$m\angle 1 + m\angle 2 = 90°$$

$$2x + 7 + 3x + 13 = 90 \quad \text{(عوضنا)}$$

$$5x + 20 = 90 \quad \text{(بسطنا)}$$

$$5x = 70 \quad \text{(بسّطنا)}$$

$$x = \frac{70}{5} = 14 \quad \text{(بسّطنا)}$$

ومنه فإن ..

$$m\angle 1 = (2x+7)° = [2(14)+7]° = [28+7]° = 35°$$
$$, m\angle 2 = (3x+13)° = [3(14)+13]° = [42+13]° = 55°$$

17/4 ◄ اختر: في الشكل المجاور: الزاوية التي لها أكبر قياس هي ..

A ∠1 B ∠2

C ∠4 D ∠5

▼ 4-3 المتباينات في المثلث ▼

المتباينة

◄ **المقصود بها:** لأي عددين حقيقيين a,b فإن $a > b$ إذا وجد عدد حقيقي موجب c على أن يكون $a = b + c$.

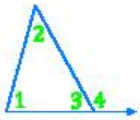
◄ **مثال:** إذا كان $7 = 4 + 3$ فإن $7 > 4$ و $7 > 3$.

◄ **خصائص المتباينة على الأعداد الحقيقية:** لأي 3 أعداد حقيقية a,b,c ..

المقارنة	$a > b$ أو $a = b$ أو $a < b$	
التعدي	إذا كان $a < b, b < c$ فإن $a < c$	إذا كان $a > b, b > c$ فإن $a > c$
الجمع	إذا كان $a < b$ فإن $a + c < b + c$	إذا كان $a > b$ فإن $a + c > b + c$
الطرح	إذا كان $a < b$ فإن $a - c < b - c$	إذا كان $a > b$ فإن $a - c > b - c$

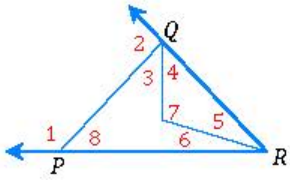
متباينة الزاوية الخارجية

◄ **النظرية:** قياس الزاوية الخارجية للمثلث أكبر من قياس أي من الزاويتين الداخليتين البعيدتين عنها.



◄ **التوضيح بالرموز:** $m\angle 4 > m\angle 2$ و $m\angle 4 > m\angle 1$.

◄ **تحقق من فهمك ص234:** استعمل نظرية متباينة الزاوية الخارجية في الشكل المجاورلكتابة جميع الزوايا المرقمة التي تحقق الشرط المعطى في كل مما يلي:



(1A) قياساتها أقل من $m\angle 1$.

(1B) قياساتها أكبر من $m\angle 8$.

◄ **الحل:**

(1A) بما أن $\angle 1$ زاوية خارجية عن ΔPQR فإن ..

$m\angle 1$ أكبر من $m\angle PQR$ و $m\angle 1$ أكبر من $m\angle PRQ$

وبما أن $m\angle PRQ = m\angle 5 + m\angle 6$ و $m\angle PQR = m\angle 3 + m\angle 4$ فإن ..

جميع الزوايا التي قياساتها أقل من $m\angle 1$ هي $\angle 3, m\angle 4, m\angle 5, m\angle 6$

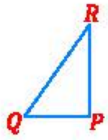
(1B) بما أن $\angle 2$ زاوية خارجية عن ΔPQR فإن ..

$m\angle 2$ أكبر من $m\angle 8$

∴ جميع الزوايا التي قياساتها أكبر من $m\angle 8$ هي $\angle 2$ فقط

العلاقات بين زوايا المثلث وأضلاعه

◄ **نظرية 1:** إذا كان أحد أضلاع مثلث أطول من ضلع آخر فإن قياس الزاوية المقابلة للضلع الأطول أكبر من قياس الزاوية المقابلة للضلع الأقصر.

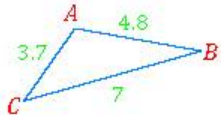


◄ **التوضيح بالرموز:** إذا كان $RP > PQ$ فإن $m\angle Q > m\angle R$.

◄ **نظرية 2:** إذا كان قياس إحدى زوايا مثلث أكبر من قياس زاوية أخرى فإن الضلع المقابل للزاوية الكبرى أطول من الضلع المقابل للزاوية الصغرى.

◄ **التوضيح بالرموز:** إذا كان $m\angle Q > m\angle R$ فإن $RP > PQ$.

◄ **تحقق من فهمك ص235(2):** اكتب زوايا ΔABC في الشكل المجاور مرتبة من الأصغر إلى الأكبر.



◄ **الحل:**

أولاً: نرتب أطوال أضلاع ΔABC من الأقصر إلى الأطول بحسب الأطوال المعطاة ..

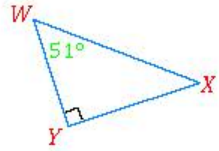
$$AC < AB < BC$$

ثانيًا: نرتب قياسات الزوايا بناءً على ترتيب الأضلاع ..

بما أن الضلع الأطول يقابلة الزاوية الأكبر والضلع الأقصر يقابلة الزاوية الأصغر ..

$$\therefore \quad m\angle B < m\angle C < m\angle A$$

◄ **تحقق من فهمك ص236(3):** اكتب زوايا ΔABC وأضلاعه في الشكل المجاور مرتبة من الأصغر إلى الأكبر.



◄ **الحل:** بما أن مجموع قياسات زوايا المثلث الداخلية $180°$ فإن ..

$$m\angle X = 180° - (90° + 51°) = 180° - 141° = 39°$$

$\therefore$ ترتيب قياسات الزوايا من الأصغر إلى الأكبر ..

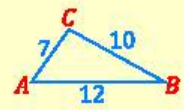
$$\therefore \quad m\angle X < m\angle W < m\angle Y$$

وبما أن الزاوية الصغرى يقابلها الضلع الأقصر، والزاوية الكبرى يقابلها الضلع الأطول ..

$\therefore$ ترتيب اطوال الأضلاع من الأقصر إلى الأطول ..

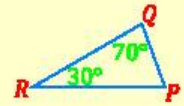
$$WY < YX < BC$$

18/4 ◄ املأ الفراغ: في ΔABC



الزاوية التي لها أكبر قياس ..... بينما الزاوية التي لها أصغر قياس ..... .

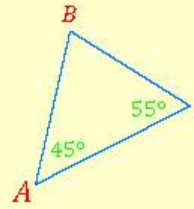
19/4 ◄ اختر: في ΔPRQ يكون QP ..... RQ .



A $=$ B $<$

C $>$ D $\cong$

20/4 ◄ اختر: أي الترتيبات التالية صحيح في ΔABC المجاور؟.



A $AB < BC < AC$

B $AB < AC < BC$

C $AC < AB < BC$

D $BC < AB < AC$

▼ 4-4 البرهان غير المباشر ▼

البرهان غير المباشر

◄ **المقصود به:** أحد أنواع البراهين؛ ونبدأ فيه بفرض أن النتيجة (المطلوب إثباتها) خاطئة ثم نثبت أن هذا الفرض يتناقض مع المعطيات أو أي حقيقة سابقة.

◄ البرهان غير المباشر يسمى أحيانًا البرهان بالتناقض.

◄ **مثال توضيحي:** البرهان غير المباشر للعبارة $AB = MN$ يبدأ بالفرض $AB \neq MN$.

◄ **خطوات كتابة البرهان غير المباشر ..**

١ ◄ نُحدد النتيجة التي سنبرهنها ثم نفرض خطأها وذلك بافتراض أن عكسها صحيح.

٢ ◄ نستعمل التبرير المنطقي لنبين أن هذا الفرض يؤدي لتناقض مع المعطيات أو مع حقيقة أخرى، مثل تعريف أو مسلمة أو نظرية.

٣ ◄ بما أن الفرض الذي بدأنا به أدى لتناقض فإن النتيجة الأصلية المطلوب إثباتها يجب أن تكون صحيحة.

◄ **تحقق من فهمك ص241:** اكتب الافتراض الضروري الذي تبدأ به برهانًا غير مباشر لكل عبارة مما يلي:

(1A) $x > 5$.

(1B) النقط J, K, L تقع على استقامة واحدة.

(1C) ΔXYZ مثلث متطابق الأضلاع.

◄ **الحل:**

(1A) $x \leq 5$.

(1B) النقط L و K و J لا تقع على استقامة واحدة.

(1C) ΔXYZ مثلث ليس متطابق الأضلاع.

◄ **تحقق من فهمك ص242(2A):** اكتب برهانًا لتبين أنه ..

إذا كان $7x > 56$ فإن $x > 8$

◄ **الحل:**

(١) نفرض أنه إذا كان $7x > 56$ فإن $x \leq 8$.

(٢) نثبت أن الفرض يتناقض مع المعطيات باختيار قيمة لـ $x \leq 8$ ولتكن $x = 5$ ..

$$7x = 7(5) = 35\ ,\ 35 < 56$$

(٣) هذا يناقض المعطيات بأن $7x > 56$ ؛ وهذا ناتج من الفرض الخطأ ..

∴ لابد أنه «إذا كان $7x > 56$ فإن $x > 8$»؛ وهو المطلوب إثباته

21/4 ◄ **املأ الفراغ:** الفرض الذي نبدأ به برهانًا غير مباشر للعبارة «$x \leq 4$» هو ..... .

22/4 ◄ **املأ الفراغ:** الفرض الذي نبدأ به برهانًا غير مباشر للعبارة «العدد a عدد موجب» هو

..... .

23/4 ◄ **املأ الفراغ:** الفرض الذي نبدأ به برهانًا غير مباشر للعبارة «$3x = 4y + 1$» هو

..... .

◄ **تحقق من فهمك ص242(3):** قطع رياض أكثر من 360 كيلوا متراً في رحلة، وتوقف في اثناء رحلته مرتين فقط، استعمل البرهان غير المباشر لإثبات أن رياضًا قطع أكثر من 120 كيلو متراً في إحدى مراحل رحلته الثلاث على الأقل.

◄ **الحل:** نفرض x, y, z هي المسافات المقطوعة في المراحل الثلاث في الرحلة على الترتيب، ومنه فإن ..

المعطيات: $x + y + z > 360$.

المطلوب: إثبات أن إما $x > 120$ أو $y > 120$ أو $z > 120$.

(١) نفرض أن $x \le 120, y \le 120, z \le 120$.

(٢) نثبت أن الفرض يتناقض مع المعطيات ..

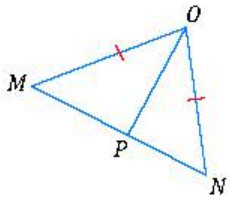
إذا كان $x \le 120, y \le 120, z \le 120$ فإن ..

$$x + y + z \le 120 + 120 + 120 \Rightarrow x + y + z \le 360$$

(٣) هذا يناقض المعطيات بأن $x + y + z > 360$ ؛ وهذا ناتج من الفرض الخطأ.

∴ لابد أن « رياض قطع أكثر من 120 كيلو متراً في إحدى مراحل رحلته الثلاث على الأقل »؛ وهو المطلوب إثباته

◄ **تحقق من فهمك ص244(5):** باستخدام الشكل المجاور



اكتب برهانًا غير مباشر ..

المعطيات: $\overline{MO} \cong \overline{ON}, \overline{MP} \ncong \overline{NP}$.

المطلوب: إثبات أن $\angle MOP \ncong \angle NOP$.

◄ **الحل:**

(١) نفرض أن $\angle MOP \cong \angle NOP$.

(٢) نثبت أن هذا الافتراض يتناقض مع المعطيات ..

$\overline{MO} \cong \overline{ON}$	(معطي)
$\overline{OP} \cong \overline{OP}$	(خاصية الانعكاس)
$\angle MOP \cong \angle NOP$	(من الفرض)
$\Delta MOP \cong \Delta NOP$	(من مسلمة SAS)

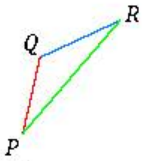
ومن تطابق المثلثين نستنتج أن $\overline{MP} \cong \overline{NP}$.

(٣) هذا يتعارض مع المعطيات بأن $\overline{MP} \ncong \overline{NP}$ ؛ وهو ناتج من الفرض الخطأ ..

∴ لابد أن $\angle MOP \ncong \angle NOP$ وهو المطلوب إثباته

4-5 متباينة المثلث

نظرية متباينة المثلث



- **النظرية:** مجموع طولي أي ضلعين في مثلث أكبر من طول الضلع الثالث.
- **التوضيح بالرموز ..**

$$PQ + QR > PR \quad ، \quad QR + PR > PQ \quad ، \quad PR + PQ > QR$$

- يمكن استخدام هذه النظرية في تحديد ما إذا كانت ثلاث قطع مستقيمة يمكن أن تكوّن مثلثًا أم لا.
- **مثال توضيحي ..**
  - الأعداد 2 و 5 و 4 تصلح أن تكون أطوالاً لأضلاع مثلث لأن ..

$$5 + 2 > 4 \quad و \quad 5 + 4 > 2 \quad و \quad 4 + 2 > 5$$

  - الأعداد 8 و 4 و 3 لا تصلح أن تكون أطوالاً لأضلاع مثلث لأن $8 \not> 4 + 3$.
- للوصول للحل بأسرع طريقة نقارن مجموع طولي أصغر ضلعين بطول الضلع الثالث.
- **تحقق من فهمك ص249:** حدد ما إذا كانت القياسات المعطاة يمكن أن تمثل أطوال أضلاع مثلث أم لا.

(1A) 15 cm, 16 cm, 30 cm . **(1B)** 2 ft, 8 ft, 11 ft .

- **الحل:** نقارن مجموع طولي أصغر ضلعين بطول الضلع الثالث ..

(1A) 15 cm, 16 cm, 30 cm .	**(1B)** 2 ft, 8 ft, 11 ft .
$15 + 16 \stackrel{?}{>} 30$ $31 > 30$ ✓	$2 + 8 \stackrel{?}{>} 11$ $10 > 11$ ×
∴ 15 cm, 16 cm, 30 cm تصلح أطوالاً لأضلاع مثلث	∴ 2 ft, 8 ft, 11 ft لا تصلح أطوالاً لأضلاع مثلث

24 اختر: الأعداد التي تصلح أن تكون أطوالاً لأضلاع مثلث هي ..

A 12 و 5 و 7

B 1 و 3 و 7

C 3 و 5 و 4

D 1 و 5 و 7

25 اختر: إذا كانت الأعداد 2 و 3 و x أطوالاً لأضلاع مثلث فإن إحدى قيم x الممكنة هي ..

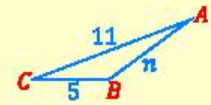
A 1

B 2

C 5

D 6

26/4 اختر: في الشكل:



مجال AB = ..

A $(5,11)$ B $(6,16)$

C $(11,16)$ D $(5,6)$

27/4 اختر: إذا كانت طولا ضلعين في مثلث هما 7 cm و 3 cm ، فما أصغر عدد طبيعي يمكن أن يمثل طول الضلع الثالث؟

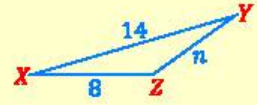
A 3 cm

B 4 cm

C 5 cm

D 10 cm

28/4 اختر: في الشكل:



n **لا** يمكن أن تساوي ..

A 6 B 10

C 14 D 18

29/4 اختر: إذا كانت الأعداد 7 و 12 طولا ضلعين في مثلث، فأي مما يلي **لا** يمكن أن يكون محيط المثلث؟

A 29

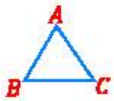
B 34

C 37

D 39

تحديد الطول المحتمل لضلع مثلث

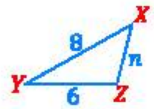
التعبير اللفظي: طول أي ضلع في مثلث أكبر من الفرق الموجب بين طولي الضلعين الآخرين وأصغر من مجموع طوليهما.



التعبير الرمزي: $|AB - AC| < BC < AB + AC$.

لابد من تحقق المتباينة السابقة لجميع الأضلاع.

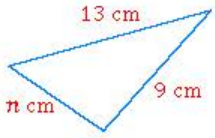
مثال توضيحي: في الشكل المجاور ..



$$8 - 6 < n < 8 + 6 \Rightarrow 2 < n < 14$$

$\therefore$ الطول المحتمل $n \in (2,14)$

تحقق من فهمك ص250(2): في الشكل المجاور:



أي من الأعداد التالية لا يمكن أن يكون قيمة لـ n ؟

A 7 B 10

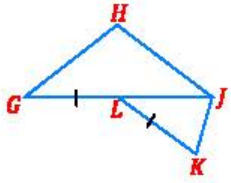
C 13 D 22

الحل: بما أن مجموع طولي أي ضلعين في مثلث أكبر من طول الضلع الثالث فإن ..

$$13 - 9 < n < 13 + 9 \Rightarrow 4 < n < 22$$

وبالنظر للخيارات تكون الإجابة الصحيحة D

تحقق من فهمك ص251(3): اكتب برهانًا ذا عمودين ..



المعطيات: $GL \cong LK$.

المطلوب: إثبات أن $JH + GH > JK$.

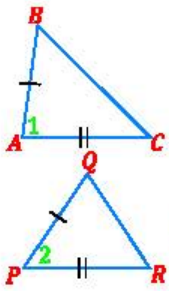
البرهان:

العبارات	المبررات
$LK + LJ > JK$	من متباينة المثلث ΔLKJ
$LK = GL$	لأن $GL \cong LK$
$GL + LJ > JK$	عوضنا
$GJ > JK$	لأن $GL + LJ = GJ$
$JH + GH > GJ$	من متباينة المثلث ΔGHJ
$JH + GH > GJ$, $GJ > JK$	خاصية التعدي
$JH + GH > JK$	

▼ 4-6 المتباينات في مثلثين ▼

المتباينات في مثلثين

◄ متباينة **SAS** : إذا طابق ضلعان في مثلث ضلعين مناظرين في مثلث آخر، وكان قياس الزاوية المحصورة في المثلث الأول أكبر من قياس الزاوية المحصورة في المثلث الثاني فإن الضلع الثالث في المثلث الأول أطول من الضلع الثالث في المثلث الثاني.

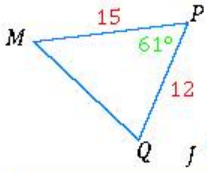


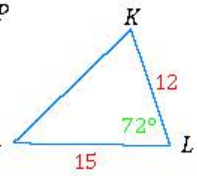
◄ **التوضيح بالرموز:** في الشكل المجاور: إذا كان $\overline{AB} \cong \overline{PQ}$ و $\overline{AC} \cong \overline{PR}$ و $m\angle 1 > m\angle 2$ فإن $BC > QR$.

◄ عكس متباينة **SAS** : إذا طابق ضلعان في مثلث ضلعين مناظرين في مثلث آخر، وكان الضلع الثالث في المثلث الأول أطول من الضلع الثالث في المثلث الثاني فإن قياس الزاوية المحصورة بين الضلعين في المثلث الأول أكبر من قياس الزاوية المناظرة لها في المثلث الثاني.

◄ **التوضيح بالرموز:** في الشكل المجاور: إذا كان $\overline{AB} \cong \overline{PQ}$ و $\overline{AC} \cong \overline{PR}$ و $BC > QR$ فإن $m\angle 1 > m\angle 2$.

◄ **تحقق من فهمك ص256(1A):** قارن بين jk و MQ في الشكل المجاور.

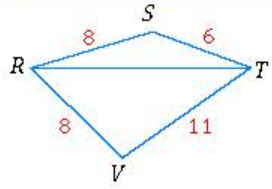




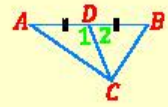
◄ **الحل:** في المثلثين ΔJKL و ΔMQP ..

العبارات	المبررات
$\overline{KL} \cong \overline{QP}$	لهما نفس الطول
$\overline{JL} \cong \overline{MP}$	لهما نفس الطول
$m\angle JLK > m\angle MPQ$	معطى
$\therefore\ JQ > MQ$	متباينة SAS

◄ **تحقق من فهمك ص256(1B):** قارن بين $m\angle VRT$ و $m\angle SRT$ في الشكل المجاور.



◄ **30/4** اختر: في الشكل المجاور:



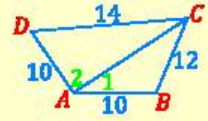
إذا كان $m\angle 1 > m\angle 2$ فإن

CB ..... AC .

A $>$ B $<$

C $=$ D $\cong$

◄ **31/4** اختر: في الشكل المجاور:



$m\angle 1$ ..... $m\angle 2$.

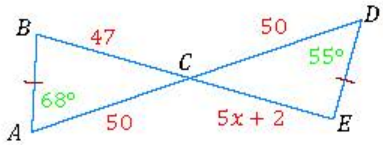
A $>$ B $<$

C $=$ D $\cong$

◄ **الحل:** في المثلثين ΔJKL و ΔMQP ..

العبارات	المبررات
$\overline{RS} \cong \overline{RV}$	لهما نفس الطول
$\overline{RT} \cong \overline{RT}$	خاصية الانعكاس
$VT > ST$	معطى
$\therefore \ m\angle VRT > m\angle SRT$	عكس متباينة SAS

◄ **تحقق من فهمك ص258(3):** أوجد متباينة تمثل مدى القيم الممكنة لـ x في الشكل المجاور.



◄ **الحل:** في المثلثين ΔABC و ΔDEC ..

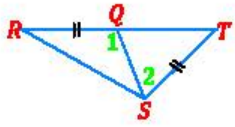
العبارات	المبررات
$\overline{DC} \cong \overline{AC}$	معطى
$\overline{DE} \cong \overline{AB}$	معطى
$m\angle EDC > m\angle BAC$	معطى
$CE < BC$	متباينة SAS
$5x + 2 < 47$	عوضنا
$5x < 45$	طرحنا 2 من الطرفين
$x < 9$ •	قسمنا الطرفين على 5

وبما أن طول أي ضلع في مثلث أكبر من الصفر فإن ..

$$5x + 2 > 0 \ \Rightarrow \ 5x > -2 \ \Rightarrow \ x > \frac{-2}{5} \ \Rightarrow \ x > -0.4 \ \text{••}$$

ومن • و •• نحصل على $-0.4 < x < 9$.

◄ **تحقق من فهمك ص258(4):** اكتب برهانًا ذا عمودين ..



المعطيات: $\overline{RQ} \cong \overline{TS}$ ، **المطلوب:** إثبات أن $RS > TQ$.

◄ **الحل:** في المثلثين ΔTSQ و ΔRQS ..

العبارات	المبررات
$\overline{RQ} \cong \overline{TS}$	معطى
$\overline{SR} \cong \overline{SR}$	خاصية الانعكاس
$m\angle 1 > m\angle 2$	متباينة الزاوية الخارجية عن المثلث
$RS > TQ$	متباينة SAS

▼ حلول الفصل الرابع ▼

◄ 4-1 المنصفات في المثلث

01	02	03	04	05	06	07	08	09	10
Ⓑ	Ⓐ	D	رؤوس	Ⓑ	ضلعي	✓	C	C	D

◄ 4-2 القطع المتوسطة والارتفاعات في المثلث

11	12	13	14	15	16
C	B	D	ملتقى الارتفاعات	×	C

◄ 4-3 المتباينات في المثلث

17	18	19	20
A	$\angle C$ لها أكبر قياس ، $\angle B$ لها أصغر قياس	C	C

◄ 4-4 البرهان غير المباشر

21	22	23
$x > 4$	العدد a غير موجب	$3x \neq 4y + 1$

◄ 4-5 متباينة المثلث

24	25	26	27	28	29
C	B	B	C	A	D

◄ 4-6 المتباينات في مثلثين

30	31
A	A

دورات الحرف

- اختبار القدرات
- الاختبار التحصيلي
- كفايات المعلمين

زيادة في درجتك تصل إلى **23** درجة

معدل درجات المشتركين أعلى من المعدل العام بـ **11** درجة

حقق بعض المشتركين الدرجة الكاملة **%100**

الدورات الحضورية
في المدن التالية

الدورات الإلكترونية المباشرة (online)
في جميع المدن (تدرب وأنت في بيتك)

دار الحرف
daralharf.com

للاطلاع على التجارب الموثقة للمشتركين والتسجيل
daralharf.com

للاستفسار
050 154 2222
050 154 9000

- كتاب تبسيط مدمج معه دفتر تدريبات.
- بُني بطريقة مبتكرة وفريدة ترتكز على الربط بين شرح الموضوع والتدريبات عليه.
- وُضعت فيه التدريبات مقابلة للشرح.
- يقوم على الموازنة بين شمولية الشرح وتنوع التدريبات دون الإسهاب في أحدهما على حساب الآخر.

السعر 45 ريالا
شامل الضريبة

دار الحرف
daralharf.com

للطلب والاستفسار
9200 00 882

خدمة التوصيل
0557551566